NGUYỄN HOÀNG THANH - ĐỖ THỊ TIẾN - VÕ ĐĂNG KHOA

TÀI LIỆU
KHAI PHÓNG NĂNG LỰC
HỌC TOÁN 10

THĂNG LONG BÌNH TÂN
542/8 TỈNH LỘ 10, P. BÌNH TRỊ ĐÔNG, Q.BÌNH TÂN, HCM
LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

1 Mệnh đề. Tập hợp **1**
1.1 Mệnh đề . . . 1
1.1.1 Mệnh đề và mệnh đề chứa biến . . . 1
1.1.2 Mệnh đề phủ định . . . 1
1.2 Mệnh đề kéo theo. Mệnh đề đảo. Mệnh đề tương đương . . . 3
1.2.1 Khái niệm . . . 3
1.3 Tập hợp. Phép toán trên tập hợp . . . 5
1.3.1 Khái niệm . . . 5
1.3.2 Tập hợp con và tập hợp bằng nhau . . . 5
1.3.3 Phép toán trên tập hợp . . . 5
1.4 Một số tập hợp con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$ . . . 8

2 Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn **10**
2.1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn . . . 10
2.1.1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn . . . 10
2.1.2 Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn . . . 10
2.2 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn . . . 12
2.2.1 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn . . . 12
2.2.2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn . . . 12

3 Hàm số bậc hai và đồ thị **15**
3.1 Hàm số . . . 15
3.1.1 Khái niệm hàm số . . . 15
3.1.2 Tập xác định của hàm số . . . 15
3.1.3 Tập giá trị của hàm số . . . 15
3.2 Tính đơn điệu của hàm số . . . 18
3.3 Hàm số bậc hai . . . 19
3.3.1 Định nghĩa . . . 19
3.3.2 Tính đồng biến, nghịch biến . . . 19
3.3.3 Các bước vẽ đồ thị hàm số bậc hai . . . 19

4 Thống kê **22**
4.1 Số gần đúng và sai số . . . 22
4.1.1 Số gần đúng . . . 22
4.1.2 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối . . . 22
4.1.3 Quy tròn số gần đúng . . . 22
4.2 Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm . . . 26
4.2.1 Số trung bình cộng (số trung bình) . . . 26
4.2.2 Trung vị . . . 26
4.2.3 Tứ phân vị . . . 26
4.2.4 Mốt . . . 27
4.3 Các số đặc trưng đo độ phân tán . . . 31
4.3.1 Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị . . . 31
4.3.2 Phương sai và độ lệch chuẩn . . . 31
4.3.3 Phát hiện số liệu bất thường hoặc không chính xác bằng biểu đồ hộp . . . 31

5 Hệ thức lượng trong tam giác **36**
5.1 Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° . . . 36
5.1.1 Định nghĩa . . . 36
5.1.2 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau . . . 36
5.2 Hệ thức lượng trong tam giác . . . 39
5.2.1 Định lý sin và cosin . . . 39
5.2.2 Một số công thức tính diện tích tam giác . . . 39

6 Véc-tơ **45**
6.1 Các khái niệm mở đầu . . . 45
6.1.1 Khái niệm véc-tơ . . . 45
6.1.2 Hai véc-tơ cùng phương. Hai véc-tơ bằng nhau . . . 45
6.1.3 Véc-tơ không . . . 45
6.2 Tổng và hiệu của hai véc-tơ . . . 48
6.2.1 Phép cộng véc-tơ . . . 48
6.2.2 Véc-tơ đối và phép trừ hai véc-tơ . . . 48
6.3 Tích của một véc-tơ với một số . . . 50
6.3.1 Tích của một véc-tơ với một số . . . 50
6.3.2 Các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số . . . 50
6.4 Tích vô hướng của hai véc-tơ . . . 57
6.4.1 Góc giữa hai véc-tơ . . . 57
6.4.2 Tích vô hướng của hai véc-tơ . . . 57

7 Hàm số, đồ thị và ứng dụng **61**
7.1 Bất phương trình bậc hai . . . 61
7.1.1 Dấu của tam thức bậc hai . . . 61
7.1.2 Bất phương trình bậc hai . . . 62
7.2 Phương trình quy về phương trình bậc hai . . . 64
7.2.1 Phương trình chứa căn thức bậc hai . . . 64

8 Đại số tổ hợp **65**
8.1 Quy tắc cộng, Quy tắc nhân . . . 65
8.2 Hoán vị. Tổ hợp. Chỉnh hợp . . . 67
8.2.1 Hoán vị và công thức số hoán vị của n phần tử . . . 67
8.2.2 Chỉnh hợp. Công thức số chỉnh hợp chập k của n phần tử . . . 68
8.2.3 Tổ hợp. Công thức tổ hợp chập k của n phần tử . . . 69
8.2.4 Phương trình và bất phương trình chứa hệ số tổ hợp và chỉnh hợp . . . 71
8.3 Nhị thức Newton . . . 73
8.3.1 Khai triển nhị thức Newton . . . 73
8.3.2 Số hạng tổng quát . . . 73

9 Xác suất **77**
9.1 Biến cố và các suất của biến cố . . . 77
9.1.1 Phép thử. Không gian mẫu. Biến cố . . . 77
9.1.2 Xác suất của biến cố . . . 77
9.2 Quy tắc tính xác suất . . . 79
9.2.1 Các loại biến cố . . . 79
9.2.2 Quy tắc tính xác suất . . . 79

10 Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng **82**
10.1 Tọa độ của véc-tơ . . . 82
10.1.1 Trục và hệ trục tọa độ . . . 82
10.1.2 Tọa độ véc-tơ . . . 82
10.1.3 Tọa độ điểm trên hệ trục . . . 83
10.2 Phương trình đường thẳng . . . 86
10.2.1 Phương trình tổng quát của đường thẳng . . . 86
10.2.2 Phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng . . . 86
10.2.3 Phương trình hệ số góc. Phương trình đoạn chắn . . . 86
10.3 Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng . . . 88
10.4 Góc và khoảng cách . . . 91
10.4.1 Góc giữa hai đường thẳng . . . 91
10.4.2 Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng . . . 91
10.5 Đường tròn . . . 95
10.5.1 Phương trình đường tròn . . . 95
10.5.2 Vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn (C) . . . 95
10.6 Elip . . . 99
10.6.1 Phương trình elip . . . 99
10.6.2 Các thành phần elip . . . 99
10.7 Hypebol . . . 102

10.7.1 Phương trình hypebol 102
10.7.2 Các thành phần hypebol 102
10.8 Parabol 104
10.8.1 Phương trình parabol 104
10.8.2 Các thành phần parabol 104

Chương 1

Mệnh đề. Tập hợp

1.1 Mệnh đề

1.1.1 Mệnh đề và mệnh đề chứa biến

Định nghĩa 1.1.

- *Mệnh đề là một câu khẳng định, hoặc đúng hoặc sai.*
- *Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.*
- *Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.*

1.1.2 Mệnh đề phủ định

Định nghĩa 1.2. *Cho mệnh đề P.*

- *Mệnh đề "không phải P" được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là $\overline{P}$.*
- *Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.*

BÀI TẬP

Bài tập 1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) Bạn có chăm học không?

b) Huế là một thành phố của Việt Nam.

c) Hãy trả lời câu hỏi này!

d) Paris là thủ đô nước Ý.

e) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

f) Hôm nay là thứ mấy?

g) Số 11 là số chẵn.

h) $2x + 3$ là một số nguyên dương.

i) $2 - \sqrt{5} < 0$.

j) $4 + x = 3$.

k) Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm.

l) 13 là một số nguyên tố.

m) $1 + x = 2$.

n) 27 chia hết cho 5.

Bài tập 2. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm x để $P(x)$ là mệnh đề đúng.

a) $P(x)$: "$x^2 - 5x + 4 = 0$".

b) $P(x)$: "$x^2 - 5x + 6 = 0$".

c) $P(x)$: "$x^2 - 3x > 0$".

d) $P(x)$: "$\sqrt{x} \geq x$".

e) $P(x)$: "$2x + 3 \leq 7$".

f) $P(x)$: "$x^2 + x + 1 > 0$".

Bài tập 3. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau

a) Bình phương một số lớn hơn hoặc bằng không.

b) Số nguyên tố n có ước số bằng 1 và bằng n.

c) Số tự nhiên n chia hết cho 2 và cho 3 thì chia hết cho 6.

d) Số tự nhiên n chia hết cho 5 có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc bằng 5.

e) Tứ giác T có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau là hình bình hành.

f) Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba.

Bài tập 4. Viết mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và cho biết mệnh đề phủ định đó đúng hay sai

a) $\pi < 3{,}15$. b) $|-125| \leq 0$. c) 3 là số nguyên tố. d) 7 không chia hết cho 5.

e) π là số hữu tỉ. f) 1794 chia hết cho 3. g) $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ. h) Có vô số số nguyên tố.

Bài tập 5. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và cho biết mệnh đề phủ định đó đúng hay sai.

a) Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm. b) $2^{10} - 1$ chia hết cho 11.

1.2 Mệnh đề kéo theo. Mệnh đề đảo. Mệnh đề tương đương

1.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.3. *Cho mệnh đề P và Q.*
- *Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.*
- *Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.*
- *Khi đó ta còn nói, hoặc P là điều kiện đủ để có Q, hoặc Q là điều kiện cần để có P.*

Định nghĩa 1.4. *Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.*

Định nghĩa 1.5. *Cho mệnh đề P và Q.*
- *Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.*
- *Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.*

BÀI TẬP

BÀI TẬP XÉT TÍNH ĐÚNG - SAI CỦA MỆNH ĐỀ

Bài tập 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Giải thích.

a) Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

b) Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$.

c) Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 6.

d) Số π lớn hơn 2 và nhỏ hơn 4.

e) 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau.

f) 81 là một số chính phương.

Bài tập 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng? Giải thích.

a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

b) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.

c) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi chúng có hai cạnh bằng nhau và có một góc bằng 60°.

d) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.

e) Đường tròn có một tâm đối xứng và một trục đối xứng.

f) Hình chữ nhật có hai trục đối xứng.

g) Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.

h) Một tứ giác nội tiếp được đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc vuông.

BÀI TẬP MỆNH ĐỀ KÉO THEO, MỆNH ĐỀ ĐẢO, HAI MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài tập 3. Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ".

a) Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.

b) Nếu $a + b > 0$ thì một trong hai số a và b phải dương.

c) Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.

d) Nếu $a = b$ thì $a^2 = b^2$.

e) Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c.

Bài tập 4. Phát biểu các mệnh đề sau bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ".

a) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.

b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

c) Nếu tứ giác T là một hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.

d) Nếu tứ giác H là một hình chữ nhật thì nó có ba góc vuông.

e) Nếu tam giác K đều thì nó có hai góc bằng nhau.

Bài tập 5. Phát biểu các mệnh đề sau bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần và đủ".

a) Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.

b) Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có ban góc vuông.

c) Một tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc đối bù nhau.

d) Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 và cho 3.

e) Số tự nhiên n là số lẻ khi và chỉ khi n^2 là số lẻ.

1.3 Tập hợp. Phép toán trên tập hợp

1.3.1 Khái niệm

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- Cách xác định tập hợp.
  - Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{\ldots\}$.
  - Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.
- Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\varnothing$.

1.3.2 Tập hợp con và tập hợp bằng nhau

Định nghĩa 1.6. *Tập hợp con:* $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.

- $A \subset A, \forall A$.
- $\varnothing \subset A, \forall A$.
- $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

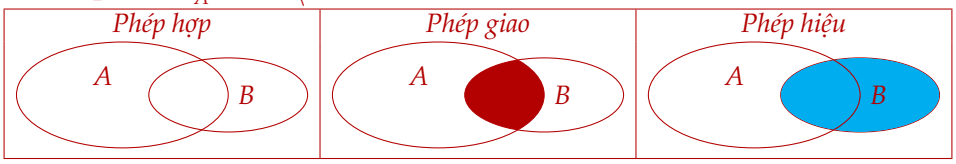
Định lý 1.1. *Nếu tập hợp có n phần tử thì có* 2^n *tập hợp con.*

Định nghĩa 1.7. *Tập hợp bằng nhau:* $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A. \end{cases}$

1.3.3 Phép toán trên tập hợp

Định nghĩa 1.8.

- *Hợp của hai tập hợp:* $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.
- *Giao của hai tập hợp:* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.
- *Hiệu của hai tập hợp:* $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.
- *Phần bù: Cho* $B \subset A$ *thì* $C_A B = A \setminus B$.



BÀI TẬP

TẬP HỢP, PHẦN TỬ CỦA TẬP HỢP

Bài tập 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 - 5x + 3 = 0\right\}$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 - x = 0\right\}$.

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left(6x^2 - 7x + 1\right)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0\right\}$.

d) $D = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2x^2 - 5x + 3 = 0\right\}$.

e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 < 4 + 2x; 5x - 3 < 4x - 1\}$.

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 2| \leq 1\}$.

g) $H = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + x + 3 = 0\right\}$.

h) $K = \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{32}, a \in \mathbb{N}\right\}$.

Bài tập 2. Trong các tập hợp sau đây, tập nào là tập rỗng?

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - x + 1 = 0\right\}$.

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 - 4x + 2 = 0\right\}$.

d) $D = \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 - 2 = 0\right\}$.

e) $E = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x^2 + 7x + 12 = 0\right\}$.

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 4x + 2 = 0\right\}$.

Bài tập 3. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ rõ tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó

a) $A = \{0;1;2;3;4\}$. b) $B = \{0;4;8;12;16\}$. c) $C = \{-3;9;-27;81\}$.

d) $D = \{9;36;81;144\}$. e) $E = \{2;3;5;7;11\}$. f) $F = \{3;6;9;12;15\}$.

g) $G = \{0;3;8;15;24;35;48;63\}$. h) $H = \left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\frac{1}{81};\frac{1}{243}\right\}$. i) $I = \left\{\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{12};\frac{1}{20};\frac{1}{30}\right\}$.

Bài tập 4. Viết các tập hợp sau bằng phương pháp nêu ra tính đặc trưng.

a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. b) $B = \{0,2,4,6,8,10\}$. c) $C = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

d) $D = \{1,4,7,10,13,16,19\}$. e) Tập hợp các số chẵn. f) Tập hợp các số lẻ.

g) $A = \{-2,1,6,13,22,33,46,61\}$. h) $A = \{3,8,24,35,48,63,80,99\}$.

TẬP HỢP CON VÀ TẬP HỢP BẰNG NHAU

Bài tập 5. Tìm tất cả các tập con, các tập con gồm hai phần tử của các tập hợp sau

a) $A = \{1;2\}$. b) $B = \{1;2;3\}$.

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 2x^2 - 5x + 2 = 0\right\}$. d) $D = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x^2 - 4x + 2 = 0\right\}$.

Bài tập 6. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập con của tập nào?

a) $A = \{1;2;3\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x < 4\right\}$, $C = (0;+\infty)$, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 2x^2 - 7x + 3 = 0\right\}$.

b) $A =$ Tập các ước số tự nhiên của 6; $B =$ Tập các ước số tự nhiên của 12.

c) $A =$ Tập các hình bình hành; $B =$ Tập các hình chữ nhật; $C =$ Tập các hình thoi; $D =$ Tập các hình vuông.

d) $A =$ Tập các tam giác cân; $B =$ Tập các tam giác đều; $C =$ Tập các tam giác vuông; $D =$ Tập các tam giác vuông cân.

Bài tập 7. Cho tập hợp $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Liệt kê tất cả các tập hợp con có 3 phần tử của A.

b) Liệt kê tất cả tập con có 2 phần tử của A.

c) Liệt kê tất cả các tập con của A.

PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Bài tập 8. Tìm $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ với:

a) $A = \{2,4,7,8,9,12\}$; $B = \{2,8,9,12\}$.

b) $A = \{2,4,6,9\}$; $B = \{1,2,3,4\}$.

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 2x^2 - 3x + 1 = 0\right\}$; $B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |2x-1| = 1\right\}$.

d) $A =$ Tập các ước số của 12; $B =$ Tập các ước số của 18.

e) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| (x+1)(x-2)\left(x^2 - 8x + 15\right) = 0\right\}$; B là tập các số nguyên tố có một chữ số.

f) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| x^2 < 4\right\}$; $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \left(5x - 3x^2\right)\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0\right\}$.

g) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 5x - 6\right) = 0\right\}$; $B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x \text{ là số nguyên tố, } x \leq 5\right\}$.

Bài tập 9. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho:

a) $\{1,2\} \subset X \subset \{1,2,3,4,5\}$. b) $\{1,2\} \cup X = \{1,2,3,4\}$. c) $X \subset \{1,2,3,4\}$, $X \subset \{0,2,4,6,8\}$.

Bài tập 10. Xác định các tập hợp A, B sao cho:

a) $A \cap B = \{0,1,2,3,4\}$; $A \setminus B = \{-3,-2\}$; $B \setminus A = \{6,9,10\}$.

b) $A \cap B = \{1,2,3\}$; $A \setminus B = \{4,5\}$; $B \setminus A = \{6,9\}$.

Bài tập 11. Tìm tập hợp A và B. Biết rằng: $A \setminus B = \{1,5,7,8\}$; $A \cap B = \{3,6,9\}$ và $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x \leq 10\}$.

Bài tập 12. Cho các tập hợp: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}; B = \{1,2,3,4\}; C = \{2,4,6,8\}$. Hãy xác định: $C_A B, C_A C, C_A(B \cup C)$.

Định lý 1.2. *Cho hai tập hợp A và B, ta có*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

trong đó kí hiệu

- *$|A|, |B|$ là số phần tử của A và B.*
- *$|A \cup B|$ là số phần tử của $A \cup B$.*
- *$|A \cap B|$ là số phần tử của $A \cap B$.*

Bài tập 13. Mỗi học sinh lớp $10A_1$ đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả hai môn thể thao này. Hỏi lớp $10A_1$ có bao nhiêu học sinh?

Bài tập 14. Trong một trường THPT, khối 10 có: 160 em học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 140 tham gia câu lạc bộ Tin, 50 em tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 10 có bao nhiêu học sinh?

Bài tập 15. Một lớp có 40 học sinh, đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả hai môn thể thao?

Bài tập 16. Cho hai tập hợp A và B. Biết tập hợp B khác rỗng, số phần tử của tập B gấp đôi số phần tử của tập $A \cap B$ và $A \cup B$ có 10 phần tử. Hỏi tập A và B có bao nhiêu phần tử. Hãy xét các trường hợp xảy ra và dùng biểu đồ Ven minh họa.

Bài tập 17. Trong 100 học sinh lớp 10, có 70 học sinh nói được tiếng Anh, 45 học sinh nói được tiếng Pháp và 23 học sinh nói được cả hai tiếng Anh và Pháp. Hỏi có bao nhiêu học sinh không nói được hai tiếng Anh và Pháp.

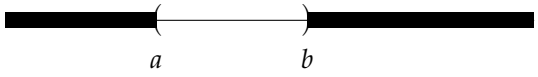
1.4 Một số tập hợp con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$

Tập hợp con của $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

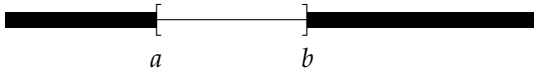
Khoảng $(a;+\infty) = \{x \in R | \, a < x\}$

Khoảng $(-\infty;a) = \{x \in R | \, x < a\}$

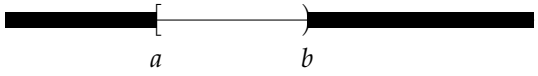
Khoảng $(a;b) = \{x \in R | \, a < x < b\}$



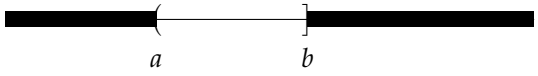
Đoạn $[a;b] = \{x \in R | \, a \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$



Nửa khoảng $[a;b) = \{x \in R | \, a \leq x < b\}$



Nửa khoảng $(a;b] = \{x \in R | \, a < x \leq b\}$



Nửa khoảng $[a;+\infty) = \{x \in R | \, x \geq a\}$

Nửa khoảng $(-\infty;a] = \{x \in R | \, x \leq a\}$

BÀI TẬP

Bài tập 1. Xác định mỗi tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $(-5;3) \cap (0;7)$. b) $(-1;3) \cup [0;5]$. c) $\mathbb{R} \setminus [0;1]$. d) $(-\infty;3) \cap (-2;+\infty)$.

Bài tập 2. Xác định $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ và biểu diễn chúng trên trục số, với:

a) $A = [-4;4]$, $B = [1;7]$.

b) $A = [-4;-2]$, $B = (3;7]$.

c) $A = [-4;-2]$, $B = (3;7)$.

d) $A = (-\infty;-2]$, $B = [3;+\infty)$.

e) $A = [3;+\infty)$, $B = (0;4)$.

f) $A = (1;4)$, $B = (2;6)$.

Bài tập 3. Xác định $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$ và biểu diễn chúng trên trục số, với:

a) $A = [1;4]$, $B = (2;6)$, $C = (1;2)$.

b) $A = (-\infty;-2]$, $B = [3;+\infty)$, $C = (0;4)$.

c) $A = [0;4]$, $B = (1;5)$, $C = (-3;1]$.

d) $A = (-\infty;-2]$, $B = [2;+\infty)$, $C = (0;3)$.

e) $A = (-5;1]$, $B = [3;+\infty)$, $C = (-\infty;-2)$.

f) $A = (-2;5]$, $B = (0;9)$, $C = (-\infty;6)$.

Bài tập 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | \, -3 \leq x \leq 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 < x \leq 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} | \, x < -1\}$ và $D = \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 5\}$.

a) Dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp trên.

b) Biểu diễn các tập hợp A, B, C, D trên trục số.

Bài tập 5. Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê.

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} | \, (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$.

b) $B = \{n \in \mathbb{N} | \, 3 < n^2 < 30\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} | \, x^4 - 5x^2 + 6 = 0\}$.

d) $D = \{n \in \mathbb{Z} | \, 0 < n^2 < 30\}$.

Bài tập 6. Biểu diễn các tập hợp sau thành các khoảng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, 2 < |x| < 3\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} | \, |x| \geq 4\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} | \, \dfrac{2}{|x+1|} \geq 3\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} | \, \dfrac{5}{|x+7|} \leq 4\}$.

Bài tập 7. Xét các quan hệ " $\subset$ " giữa các tập hợp sau.

a) $A = \{1,2,3,4,5\}$ và $B = \{n \in \mathbb{Z} | \, 0 \leq |n| \leq 5\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} | \, (x^2 - x - 2)(x - 1) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | \, x^2 + x - 2 = 0\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, -2 < x < 4\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} | \, -4 < x < 3\}$.

Bài tập 8. Cho $A = \{1,2,3,4,5\}$ và $B = \{1,3,5,7,9,11\}$. Hãy tìm

a) $C = A \cup B$. b) $C = A \cap B$.

c) $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. d) $C = (a \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Bài tập 9. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} | \, -1 < x \leq 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 \leq x < 7\}$. Hãy tìm tập hợp C thỏa

a) $C = A \cup B$. b) $C = A \cap B$.

c) $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. d) $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Bài tập 10. Xác định mỗi tập hợp số sau và biểu diễn trên trục số

a) $(-3;3) \cup (-1;0)$; b) $(-\infty;0) \cap (0;1)$; c) $(-2;2] \cap [1;3)$; d) $(-3;3) \setminus (0;5)$;

e) $(-5;5) \setminus (-3;3)$; f) $(-2;3) \setminus (-3;3)$; g) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, |x| > 3\}$; h) $B = \{x \in \mathbb{R} | \, |x| < 5\}$.

Bài tập 11. Xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$ và biểu diễn trên trục số

a) $A = [1;5]$, $B = (-3;2) \cup (3;7)$;

b) $A = (-5;0) \cup (3;5)$, $B = (-1;2) \cup (4;6)$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | \, |x + 1| < 3\}$.

Chương 2

Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

2.1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

2.1.1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 2.1. *Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là $ax + by \leq c$ (hoặc $ax + by < c$; $ax + by \geq c$; $ax + by > c$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.*

2.1.2 Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 2.2.

- *Bộ số $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \leq c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \leq c$ đúng.*
- *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ được gọi là miền nghiệm của nó.*

BÀI TẬP

NGHIỆM VÀ MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Phương pháp giải 2.1. *Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ $\left(a^2 + b^2 > 0\right)$.*

- *Vẽ đường thẳng $d : ax + by = c$;*
- *Lấy điểm $M(x_0; y_0) \notin d$.*
  - *Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng không kể bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by < c$.*
  - *Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng không kể bờ d **không** chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by < c$.*

Lưu ý 2.1. *Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ $\left(a^2 + b^2 > 0\right)$ bao gồm miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ và đường thẳng d (nửa mặt phẳng kể cả bờ d).*

Bài tập 1. Cho bất phương trình $2x - y < 0$. Trong các cặp số $(-1;2)$, $(2;0)$, $(0;1)$, $(3;-2)$, $(-1;-2)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?

Bài tập 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình

a) $-2x + 3y > 1$. b) $2x + y \leq 3$. c) $2x - 4y < 8$. d) $3x - y \leq 0$.

e) $2x + y \leq 3$. f) $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} < 1$. g) $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} \geq 0$. h) $2x - 3y > 3x - y + 1$.

Bài tập 3. Cho bất phương trình $-2x + 3y > 0$.

a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình trên.

b) Cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(3;3)$, hỏi hai điểm này cùng phía hay khác phía đối với bờ (d).

Bài tập 4. Cho bất phương trình $x + y - 3 < 0$.

a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình trên.

b) Tìm điều kiện của m và n để mọi điểm thuộc đường thẳng (d'): $(m^2-2)x-y+m+n=0$ đều là nghiệm của bất phương trình trên.

Bài tập 5. Cho bất phương trình $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}<1$.

a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình trên.

b) Tìm điểm A thuộc miền nghiệm của bất phương trình trên. Biết rằng điểm A là giao điểm của parabol (P) có dạng $y=x^2-5x+4$ và trục hoành.

Bài tập 6. Cho bất phương trình $2x+y-1\leq 0$.

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm tất cả giá trị tham số m để điểm $M(m,1)$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình đã và biểu diễn tập hợp M tìm được trong cùng hệ trục tọa độ Oxy ở câu a).

Bài tập 7. Cho bất phương trình $x-2y+4m>0$.

a) Với $m=1$, hãy biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong hệ trục tọa độ Oxy.

b) Gọi A,B lần lượt là giao của đường thẳng $x-2y+4m=0$ với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa điểm $C(2;1)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4.

BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài tập 8. Hà mang 95000 đồng ra chợ mua hoa cúc và hoa hồng. Một bông hoa cúc có giá 4000 đồng, một bông hoa hồng có giá 7000 đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà Hà phải chi để mua x bông hoa cúc và y bông hoa hồng.

Bài tập 9. Mỗi ngày Nga đều dành không quá 30 phút để đọc cả 2 cuốn sách A, B. Nga đọc được 3 trang sách A trong 2 phút, đọc được 2 trang sách B trong 1 phút. Gọi x, y lần lượt là số phút đọc sách A và số phút đọc sách B. Tìm điều kiện của x và y để Nga đọc được ít nhất 35 trang sách trong một ngày.

Bài tập 10. Một cửa hàng bán hai loại trà sữa, trong đó 4 cốc loại 1 có giá 100000 đồng, 1 cốc loại 2 có giá 30000 đồng. Muốn có lãi theo dự tính thì mỗi ngày cửa hàng phải bán được ít nhất 5 triệu đồng tiền hàng. Hỏi số cốc trà sữa bán được trong một ngày trong những trường hợp nào thì cửa hàng có lãi như dự tính?

Bài tập 11. Giá sách của Hoa có thể chứa được khối lượng sách tối đa là 4 kg. Hoa xếp cả hai loại sách (loại 1 và loại 2) vào giá. Sách loại 1 có khối lượng 100 gam mỗi cuốn và sách loại 2 có khối lượng 200 gam mỗi cuốn. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho khối lượng của x cuốn loại 1 và y cuốn loại 2 có thể được xếp lên giá sách.

Bài tập 12. Công ty viễn thông Mobifone tính phí 1 nghìn đồng mỗi phút gọi nội mạng, 2 nghìn đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Mỗi tháng Minh gọi điện thoại hết từ 200 đến 300 nghìn đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn mô tả cho số tiền điện thoại trả cho (x) phút gọi nội mạng và (y) phút gọi ngoại mạng trong một tháng.

Bài tập 13. Bạn An giải 10 bài Toán trong 20 phút thì đúng được 80% số bài Toán, giải 12 bài Lý trong 15 phút thì đúng được $\frac{3}{4}$ số bài Lý. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho thời gian giải x bài Toán đúng và y bài Lý đúng, biết thời gian giải ít hơn 150 phút.

Bài tập 14. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 100 m^2. Diện tích để kê một chiếc ghế là 1 m^2, một chiếc bàn là 2 m^2 và diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 24 m^2. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê, hãy viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế và chỉ ra hai nghiệm của bất phương trình.

Bài tập 15. Một rạp chiếu phim 2D phục vụ khán giả một bộ phim mới với 2 loại vé khác nhau. Vé loại 1 (từ thứ 2 đến thứ 5) giá 80000 đồng/vé, vé loại 2 (từ thứ 6 đến chủ nhật và ngày lễ) giá 100000 đồng/vé. Để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 150 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

Bài tập 16. Một bác nông dân cần trồng lúa và khoai trên diện tích đất 6 ha, với lượng phân bón dự trữ là 100 kg và sử dụng tối đa 120 ngày công. Để trồng 1 ha lúa cần sử dụng 20 kg phân bón, 10 ngày công với lợi nhuận là 30 triệu đồng; để trồng 1 ha khoai cần sử dụng 10 kg phân bón, 30 ngày công với lợi nhuận là 60 triệu đồng. Biết bác nông dân đã trồng x (ha) lúa và y (ha) khoai. Tìm giá trị của x để bác nông dân đạt được lợi nhuận cao nhất.

2.2 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

2.2.1 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 2.3.

- *Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.*
- *Cặp số $(x_0;y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0;y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.*
- *Trong mặt phẳng toạ độ, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó. Hay nói cách khác, miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần giao của tất cả các miền nghiệm của các bất phường trình trong hệ.*

2.2.2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp giải 2.2. *Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ*

- *Vẽ miền nghiệm của từng bất phương trình của hệ,*
- *Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.*

Định lý 2.1. *Người ta chứng minh được rằng giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x;y)=ax+by$, với $(x;y)$ là toạ độ các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2\dots A_n$, tức là các điểm nằm bên trong hay nằm trên các cạnh của đa giác, đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác đó.*

BÀI TẬP

BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA TẬP NGHIỆM

Bài tập 1. Cho hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases}x-3y<0\\2x-y\le 3\end{cases}$, hãy cho biết cặp số $(2;1)$ có phải là nghiệm của hệ bất phương trình không?

Bài tập 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x+y\ge 3$.

Bài tập 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x-4y<8$.

Bài tập 4. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $-2x+3y>0$.

a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình trên.

b) Cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(3;3)$, hỏi hai điểm này cùng phía hay khác phía đối với bờ (d).

Bài tập 5. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau $\begin{cases}x+y>1\\x-y<2\end{cases}$

Bài tập 6. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

a) $\begin{cases}x+2y\ge 1\\3x-y\le 2\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y<2\\x-y>1\\y>-1\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+5y>2\\x-3y\ge 1\\x+y<3\end{cases}$

d) $\begin{cases}x-2y<1\\x+3y<-2\\-x+y<2\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x+y\ge 2\\x-2y\le 1\\y\le 2\\x\le 3\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x+y\le 5\\x+y\le 4\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$

Bài tập 7. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x+\dfrac{3}{2}y\ge 1-x+\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 8. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $-2022x-2023y\le 2021y$.

Bài tập 9. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}<1$.

a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình trên.

b) Tìm điểm A thuộc miền nghiệm của bất phương trình trên. Biết rằng điểm A là giao điểm của parabol $(P):y=x^2-5x+4$ và trục hoành.

TÌM CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC $F = ax + by$ TRÊN MỘT MIỀN ĐA GIÁC

Phương pháp giải 2.3.

- *Bước 1. Tìm miền đa giác $A_1A_2 \dots A_iA_{i+1} \dots A_n$ là miền nghiệm của hệ bất phương trình.*
- *Bước 2. Tìm tọa độ các đỉnh A_1, A_2, …, A_n.*
- *Bước 3. Tính $F(x_i; y_i)$ trong đó $A_i(x_i; y_i)$ với $i = 1, 2, \dots, n$.*
- *Bước 4. Kết luận*
  Giá trị lớn nhất $M = \max\limits_{i=1,2,\dots n} F(x_i; y_i)$.
  Giá trị nhỏ nhất $m = \min\limits_{i=1,2,\dots n} F(x_i; y_i)$.

BÀI TẬP

Bài tập 10. Cho cặp $(x; y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y > 3 \end{cases}$.

a) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $f(x; y) = 2x - 3y$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $f(x; y) = 2x - 3y + 1$.

Bài tập 11. Cho cặp $(x; y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$

a) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $f(x; y) = x + 3y$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $f(x; y) = 2x + 3y - 1$.

Bài tập 12. Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp. Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 − 17h00. Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 − 17h00. Tổng thời gian quảng cáo lớn nhất là bao nhiêu.

Bài tập 13. Một hộ nông dân dự định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu về được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

Bài tập 14. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1,5 kg thịt bò và 1 kg thịt lợn, giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Bài tập 15. Người ta định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 120 kg hóa chất A và 9 kg hóa chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Bài tập 16. Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi ba nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi năm nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Bài tập 17. Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể con người. Kết quả như sau:

a) Một người có thể tiếp nhận được mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B.

b) Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B.

c) Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày số đơn vị vitamin B phải nhiều hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Biết giá một đơn vị vitamin A là 9 đồng và giá một đơn vị vitamin B là 7,5 đồng.

Tìm phương án dùng vitamin A và vitamin B thỏa mãn các điều kiện trên sao cho số tiền phải trả ít nhất.

Chương 3

Hàm số bậc hai và đồ thị

3.1 Hàm số

3.1.1 Khái niệm hàm số

Định nghĩa 3.1. *Với mỗi giá trị của $x \in \mathscr{D}$ có một và chỉ một $y \in \mathbb{R}$, thỏa mãn quy tắc $y = f(x)$ thì ta có một hàm số. Trong đó,*

- *x được gọi là biến số và y gọi là hàm số,*
- *Tập $\mathscr{D}$ được gọi là tập xác định của hàm số,*
- *Tập tất cả các giá trị của y được gọi là tập giá trị của hàm số,*
- *Tập hợp các điểm $M(x; y = f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là đồ thị hàm số $y = f(x)$.*

3.1.2 Tập xác định của hàm số

Định nghĩa 3.2. *Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.*

Lưu ý 3.1.

- $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *xác định khi* $Q(x) \neq 0$.
- $\sqrt{P(x)}$ *xác định khi* $P(x) \geq 0$.
- $\dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ *xác định khi* $Q(x) > 0$.

3.1.3 Tập giá trị của hàm số

Định nghĩa 3.3. *Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$. Nếu $\forall x \in \mathscr{D}$ ta có $m \leq f(x) \leq M$ thì tập $T = [m; M]$ được gọi là miền giá trị của $f(x)$.*

BÀI TẬP

BIỂU DIỄN HÀM SỐ

Bài tập 1. Tại siêu thị, giá niêm yết mỗi cây bút là 6000 đồng. Bình mua x cây bút hết y đồng.

a) Nếu mua 5 cây thì Bình phải trả bao nhiêu tiền.

b) Viết biểu thức liên hệ (hàm số) giữa x và y.

Bài tập 2. Quan sát bảng giá cước taxi của hãng A mô tả như sau

Giá mở của	Giá từ 0 km đến 25 km	Giá từ 25 km trở đi
10000	13000	11000

a) Tính số tiền phải trả khi di chuyển 25 km.

b) Lập công thức tính tiền taxi theo số km di chuyển.

TÌM TẬP XÁC ĐỊNH HÀM SỐ

Bài tập 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$. b) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$. c) $y=\dfrac{2x+1}{x^2-9}$.

d) $y=\dfrac{2x+3}{(x+2).(1-3x)}$. e) $y=\dfrac{1-3x}{(x-4)(x^2+1)}$. f) $y=\dfrac{x}{x^2+4x+5}$.

g) $y=\dfrac{x+9}{x^2+8x-20}$. h) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. i) $y=\dfrac{5x-7}{(x^2+x)^2-4(x^2+x)+4}$.

Bài tập 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\sqrt{3x-1}$. b) $y=\sqrt{-2(x+1)}$. c) $y=\sqrt{x^2-1}$.

d) $y=\sqrt{4-x^2}$. e) $y=\sqrt{2x-x^2}$. f) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$.

Bài tập 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x-4}}$. b) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4x+4}}$. c) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{2-x}}+\sqrt{3x+1}$.

d) $y=\sqrt{3-x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$. e) $y=\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x}}$. f) $y=\dfrac{x-\sqrt{5-x}}{1-\sqrt{x-3}}$.

TÌM TẬP GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài tập 6. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$. b) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

c) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$. d) $y=x+\sqrt{4-x^2}$.

LUYỆN TẬP

Bài tập 7. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{x}{(x-1)\sqrt{x}}$. b) $y=\dfrac{\sqrt{-x+4}}{x^2-3x}$. c) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$.

d) $y=\dfrac{(x-2)\sqrt{x-3}}{x^2-4x+3}$. e) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{\sqrt{-x}-x}$. f) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}}{x^2-4x+3}$.

g) $y=\dfrac{\sqrt{9-2x}+\sqrt{x+1}}{x+4}$. h) $y=\dfrac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x}}{x^3+4x}$. i) $y=\dfrac{x^2+\sqrt{9-2x}}{3x-7}+1$.

Bài tập 8. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{\sqrt{-4-3x}}{|5x+7|-4}$. b) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3-|x+1|}$. c) $y=\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{16-2x}}{|x|-2}$.

d) $y=\sqrt{x+5}-\dfrac{3x-1}{x^2-10|x|+9}$. e) $y=\dfrac{1}{x^2+1+|x^2-x|-2x}$. f) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|}+\dfrac{\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt{|3-x|}}$.

Bài tập 9. Định m để hàm số $y=\dfrac{2x+1}{mx+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Bài tập 10. Với những giá trị nào của m thì hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x^2-x+m-2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Bài tập 11. Định m để hàm số:

a) $y=\sqrt{x-m+1}+\sqrt{x-m}$ xác định $\forall x>0$. b) $y=\dfrac{x+m}{2m+1-x}$ xác định trên khoảng $(-1;0)$.

Bài tập 12. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+a}{x+1-a}$. Tìm a để hàm số xác định $\forall x\in[-1;0]$.

Bài tập 13. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x - m + 2} + \sqrt{2m - x}$. Định m để hàm số đã cho xác định với mọi giá trị của x trong $(1; 4)$.

Bài tập 14. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x - m + 2} + \sqrt{2m - x}$. Định m để hàm số đã cho xác định trên một đoạn có độ dài bằng 3.

Bài tập 15. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 3x + m}$ có tập xác định $[0; +\infty)$.

Bài tập 16. Cho hàm số $y = \sqrt{x - m} + \sqrt{2m + 1 - x}$. Định m để hàm số xác định trên một đoạn có độ dài bằng 2.

Bài tập 17. Tìm a để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + a - 2} + \sqrt{a + 1 - x}}$ xác định trên đoạn $[-1; 1]$.

Bài tập 18. Tìm a để hàm số $y = \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x + m}}$ xác định trên đoạn $[0; 1]$.

3.2 Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa 3.4. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a;b)$*

- *Hàm số $y=f(x)$ gọi là **đồng biến (tăng)** trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b):x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.*
- *Hàm số $y=f(x)$ gọi là **nghịch biến (giảm)** trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b):x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.*

Định lý 3.1. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a;b)$.*

Xét tỷ số (tỷ số Newton) $T=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ trong đó $x_1,x_2\in(a;b)$ và $x_1\neq x_2$,

- *Nếu $T\geq 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.*
- *Nếu $T\leq 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.*

BÀI TẬP

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

Bài tập 1. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau

a) $y=-2x+1$ trên $\mathbb{R}$.
b) $y=\sqrt{x}-1$ trên $(0;+\infty)$.
c) $y=x^2-2x$ trên $(2;+\infty)$.
d) $y=-2x^2+4x$ trên $(3;+\infty)$.
e) $y=-x^2+3x-2$ trên $(2;5)$.
f) $y=x^3+1$ trên $\mathbb{R}$.
g) $y=3x^2-6x+2$ trên $\mathbb{R}$.
h) $y=x^2-x+1$ trên $\mathbb{R}$.
i) $y=x^3+3x$ trên $(-\infty;-1)$.

Bài tập 2. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{1}{x}$ trên $(-\infty;0)$.
b) $y=\dfrac{1}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.
c) $y=\dfrac{4}{x+2}$ trên $(-2;+\infty)$.
d) $y=\dfrac{x+2}{x}$ trên $(-\infty;0)$.
e) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ trên $(-\infty;-2)$.
f) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ trên $(3;+\infty)$.
g) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ trên $(0;2)$.
h) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ trên $(-\infty;0)$.
i) $y=\dfrac{-5}{x^2-9}$ trên $(-\infty;3)$.

Bài tập 3. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau

a) $y=\sqrt{2x}$ trên $(0;+\infty)$
b) $y=\sqrt{x+1}$ trên $(-1;+\infty)$
c) $y=\sqrt{5-x}$ trên $(-\infty;5)$
d) $y=\sqrt{x^2+1}$ trên $(0;+\infty)$
e) $y=\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}$ trên $(4;+\infty)$
f) $y=\sqrt[3]{x}$ trên $(-\infty;0)$

Bài tập 4. Cho hàm số $y=\sqrt{x+4+2\sqrt{x+3}}$

a) Tìm tập xác định của hàm số.
b) Chứng minh hàm số đồng biến trên tập xác định.

Bài tập 5. Chứng minh $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-1}$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Bài tập 6. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ trên $(1;+\infty)$.
b) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 7. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau

a) $y=\sqrt[3]{x+1}$ trên $(-\infty;+\infty)$
b) $y=\sqrt{x^2-x+1}$ trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

TÌM THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN

Bài tập 8. Tìm m để hàm số $y=mx^2+2$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Bài tập 9. Tìm m để hàm số $y=x^2-mx+1$ đồng biến trên $(1;2)$.

3.3 Hàm số bậc hai

3.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.5. *Hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ được gọi là hàm số bậc hai.*

3.3.2 Tính đồng biến, nghịch biến

Định lý 3.2. *Hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$*

$a > 0$	$a < 0$
Hàm số nghịch biến từ $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$	Hàm số đồng biến từ $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$
Hàm số đồng biến từ $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$	Hàm số nghịch biến từ $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$

3.3.3 Các bước vẽ đồ thị hàm số bậc hai

Phương pháp giải 3.1. *Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$*

- *Tìm tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.*
- *Tìm tọa độ đỉnh $I\left(\dfrac{-b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ và xác định trục đối xứng: $x = \dfrac{-b}{2a}$*
- *Lập bảng biến thiên*

Nếu $a > 0$, Parabol quay bề lõm lên

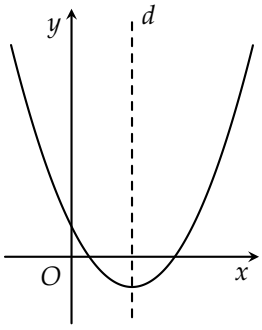
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nếu $a < 0$, Parabol quay bề lõm xuống

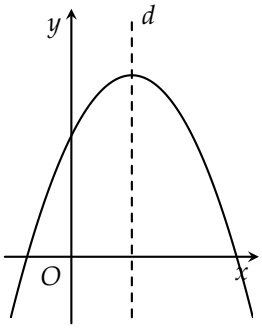
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

- *Kết luận đồng biến, nghịch biến*
- *Đồ thị: Parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ và có hai dạng đồ thị như sau*

Hệ số $a > 0$



hệ số $a < 0$



BÀI TẬP

VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

Bài tập 1. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y = x^2 - 2x$. b) $y = x^2 + 2x + 1$. c) $y = -x^2 - 4x + 5$. d) $y = x^2 + 4x + 3$.

e) $y = 2x^2 - 2x$. f) $y = -2x^2 + 2x + 1$. g) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 5$. h) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 3$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = -(x-1)^2 + 4$

a) Tìm đỉnh, trục đối xứng, bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

b) Dựa vào bảng biến thiên, hãy nêu những khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị dương.

XÁC ĐỊNH HÀM BẬC HAI THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bài tập 3. Xác định $(P): y = ax^2 + bx + c$ trong các trường hợp sau

a) Qua 3 điểm $A(0;-1), B(1;-1), C(-1;1)$.

b) Qua 3 điểm $A(-1;-1), B(0;2), C(1;-1)$.

c) Qua $A(1;1)$ và có đỉnh $I(-1;5)$.

d) Qua $A(3;0)$ và có đỉnh $I(1;4)$.

e) Qua $A(1;16)$ và cắt Ox tại điểm có hoành độ -1 và 5.

f) Qua $A(0;6)$ và đạt GTLN là 4 khi $x = -2$.

g) Qua $A(4;-4)$ và đạt GTLN là -2 khi $x = 2$.

h) Tiếp xúc Ox và qua $A(0;2), B(-2;8)$.

Bài tập 4. Xác định (P) biết (P) qua các điểm A, B, $C(-2;3)$ với A, B là hai giao điểm của $(d): y = 2x + 5$ và $(P'): y = x^2 - 3x + 1$

Bài tập 5. Xác định $(P): y = ax^2 + bx + c$ trong các trường hợp sau

a) Có trục đối xứng là $x = -2$, qua $A(1;4)$ và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$.

b) Có trục đối xứng là $x = 1$, cắt Oy tại điểm có tung độ là 1 và chỉ có một giao điểm với Ox.

c) (P) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng -4 và hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 0 khi $x = 2$.

d) (P) đi qua $A(-1;10)$, cắt Oy tại $B(0;3)$ và có hoành độ đỉnh là 3.

e) (P) đạt cực đại bằng $\frac{49}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}$ và đồ thị hàm số cắt Ox tại điểm có hoành độ là $-\frac{1}{2}$.

TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Phương pháp giải 3.2. *Để tìm giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$*
a) Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm.
b) Thế hoành độ giao điểm vào tìm tung độ giao điểm.
c) Suy ra tọa độ giao điểm.

Bài tập 6. Xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P) bằng đồ thị và phép tính:

a) $(d): y = 2x + 3, (P): y = x^2$.

b) $(d): x + y - 1 = 0, (P): y = x^2 + 4x - 3$.

Bài tập 7. Tìm phương trình (P) biết (P) có đỉnh $I(2;-1)$ và (P) cắt đường thẳng $(d): y = x + 5$ tại điểm A có hoành độ bằng 5.

Bài tập 8. Cho hàm số $y = x^2 + 2mx + m^2 + m - 3$ (1)

a) Tìm m để đồ thị hàm số (1) đi qua $M(2;7)$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn đồng thời ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 18$ và $x_1.x_2 < 0$.

Bài tập 9. Cho $(P): y = -x^2 + 6x - 5$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

b) Dùng đồ thị biện luận theo m số điểm chung của (P) và $(d): y = m$.

Bài tập 10. Cho $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và $(d): y = mx + 2$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P),

b) Định m để hai đồ thị có duy nhất một điểm chung, cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

c) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 3 - 2m = 0$.

Bài tập 11. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$: (P)

a) Tìm tập xác định, tọa độ đỉnh, lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).

b) Dựa vào đồ thị (P), tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2x + 2 - m = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-1;2]$.

Bài tập 12. Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = x^2 + x + 1$. Dựa vào đồ thi, tìm m để phương trình $x^2 + x - 3m + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc $(-3; 1)$.

Bài tập 13. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$

a) Tìm tập xác định, tọa độ đỉnh, lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).

b) Dựa vào đồ thị (P), tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 4x + 3 - m = 0$ có đúng một nghiêm dương.

c) Dùng đồ thị (P), hãy tìm m sao cho phương trình $x^2 - 4x + 3 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn hay bằng 1.

Bài tập 14. Cho parabol $(P): y = x^2$, hãy tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài $AB = 2$.

Bài tập 15. Cho $(d): y = -1, (P_m): y = -x^2 + mx - \dfrac{m^2}{2} - m; m \in \left[-4; \dfrac{1}{2}\right]$. Gọi M, N là 2 giao điểm của (d) và P_m. Định m để độ dài MN đạt giá trị lớn nhất.

ỨNG DỤNG HÀM SỐ TÌM GTLN, GTNN

Bài tập 16. Lập bảng biến thiên của hàm số rồi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên miền xác định được chỉ ra:

a) $y = x^2 - 2x$ trên $[-1; 3]$.

b) $y = -6x^2 + 3x$ trên $[-5; -2]$.

c) $y = x^2 - 5x$ trên $(-\infty; 3]$.

d) $y = 3x^2 - 4x$ trên $[1; +\infty)$.

e) $y = -x^2 + 2x + 1$ trên $[-1; 1] \cup [2; 3]$.

f) $y = 2x^2 + 3$ trên $(-\infty; -6] \cup [5; +\infty)$.

Bài tập 17. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 3(x + \dfrac{2}{x}) + 7$.

b) $y = \left(\dfrac{2x}{1 + x^2}\right)^2 - \dfrac{2x}{1 + x^2} + 2$.

Bài tập 18. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - x^2}$.

TOÁN THỰC TẾ

Bài tập 19. Quỹ đạo bay của một được ném từ gốc O (được chọn làm điểm ném) trong mặt phẳng Oxy là một parabol có phương trình $y = -\dfrac{3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (m) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O, y (m) là độ cao của vật so với mặt đất

a) Tìm độ cao cực đại trong quá trình bay.

b) Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.

Chương 4

Thống kê

4.1 Số gần đúng và sai số

4.1.1 Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu là $\overline{a}$) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là số gần đúng, kí hiệu là a.

4.1.2 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Định nghĩa 4.1. *Giá trị $|a-\overline{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\overline{a}$ và số gần đúng a, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a, kí hiệu là Δ_a, tức là*

$$\Delta_a = |a-\overline{a}|.$$

Lưu ý 4.1.

- *Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\overline{a}$ nên cũng không biết Δ_a. Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.*
- *Nếu $\Delta_a \leq d$ thì $a-d \leq \overline{a} \leq a+d$, khi đó ta viết $\overline{a} = a \pm d$ và hiểu là số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a-d; a+d]$. Do d càng nhỏ thì a càng gần $\overline{a}$ nên d được gọi là độ chính xác của số gần đúng.*

Định nghĩa 4.2. *Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.*

Lưu ý 4.2. *Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$, do đó $\delta_a \leq \dfrac{d}{|a|}$. Nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo hay tính toán càng cao. Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.*

4.1.3 Quy tròn số gần đúng

Định nghĩa 4.3. *Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là số quy tròn. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.*

Quy tắc 4.1. ***Quy tắc quy tròn số***

a) *Đối với chữ số hàng làm tròn:*
   - *Giữ nguyên nếu chữ số ngay bên phải nó nhỏ hơn 5;*
   - *Tăng 1 đơn vị nếu chữ số ngay bên phải nó lớn hơn hoặc bằng 5.*

b) *Đối với chữ số sau hàng làm tròn:*
   - *Bỏ đi nếu ở phần thập phân;*
   - *Thay bởi các chữ số 0 nếu ở phần số nguyên.*

Lưu ý 4.3.

- *Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng làm tròn.*
- *Cho số gần đúng a với độ chính xác d. Khi được yêu cầu làm tròn số a mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.*

BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH SỐ GẦN ĐÚNG CỦA MỘT SỐ VỚI ĐỘ CHÍNH XÁC CHO TRƯỚC, ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHÍNH XÁC

Bài tập 1. Đỉnh Everest được mệnh danh là "nóc nhà của thế giới", bởi đây là đỉnh núi cao nhất trên Trái Đất so với mực nước biển. Có rất nhiều con số khác nhau đã từng được công bố về chiều cao của đỉnh Everest

8848 m; 8848,13 m; 8844,43 m; 8850 m;...

Các con số này đều là số gần đúng chiều cao của đỉnh Everest.

Bài tập 2. Điền dấu "X" vào ô tương ứng

Thông tin	Số đúng	Số gần đúng
Bán kính đường Xích Đạo của Trái Đất là 6 378 km		
Khoảng cách từ Mặt Trăng đến Trái Đất là 384 400 km		
1 m=100 cm		

Bài tập 3. Gọi d là độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng 1. Trong hai số $\sqrt{2}$ và 1,41 số nào là số đúng, số nào là số gần đúng của d?

Bài tập 4. Giả sử khối lượng đúng của một hộp kẹo là 0,85 kg. Bình và An cân hộp kẹo này và ghi nhận kết quả lần lượt là 0,8 kg và 1 kg.

a) Tìm sai số tuyệt đối của kết quả cân của mỗi bạn.

b) Kết quả cân của bạn nào chính xác hơn? Vì sao?

Bài tập 5. Người ta dùng một đồng hồ bấm giờ với độ chia nhỏ nhất là 0,1 giây và đo được thời gian hoàn thành phần thi bơi của một vận động viên là 27,2 giây.

a) Tìm độ chính xác d của phép đo.

b) Nếu thời gian đúng là a giây thì hãy tìm khoảng giá trị mà a có thể nhận được.

Bài tập 6. Một bao gạo ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0{,}2$ kg.

a) Xác định khối lượng đúng, khối lượng gần đúng và độ chính xác của bao gạo.

b) Khối lượng thực của bao gạo nằm trong đoạn nào?

Bài tập 7. Một phép đo đường kính nhân tế bào cho kết quả là $5 \pm 0{,}3\ \mu$m. Đường kính thực của nhân tế bào thuộc đoạn nào?

Bài tập 8. Chiều dài một cái cầu là $\ell = 1745{,}25\text{m} \pm 0{,}01\text{m}$.

a) Xác định chiều dài đúng, chiều dài gần đúng và độ chính xác của của cái cầu.

b) Chiều dài thực của cái cầu nằm trong đoạn nào?

Bài tập 9. Biết $\sqrt{7} = 2{,}6457513\ldots$

a) Làm tròn kết quả đến phần mười và ước lượng sai số tuyệt đối.

b) Làm tròn kết quả đến phần nghìn và ước lượng sai số tuyệt đối.

XÁC ĐỊNH SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI CỦA SỐ GẦN ĐÚNG

Bài tập 10. $a = 3{,}14$ là số gần đúng của $\overline{a} = \pi$. Ta có $\Delta_a = |\pi - 3{,}14| < |3{,}15 - 3{,}14| = 0{,}01$. Ta nói $a = 3{,}14$ là giá trị gần đúng của π với độ chính xác $d = 0{,}01$.

Bài tập 11. Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là 0,8 m. Hai bạn Ngân và Ánh cùng muốn tính diện tích S của bồn hoa đó. Bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của π là 3,1 và được kết quả là S_1. Bạn Ánh lấy một giá trị gần đúng của π là 3,14 và được kết quả là S_2. So sánh sai số tuyệt đối Δ_{S_1} của số gần đúng S_1 và sai số tuyệt đối Δ_{S_2} của số gần đúng S_2. Bạn nào cho kết quả chính xác hơn?

Bài tập 12. Một tờ giấy A4 có dạng hình chữ nhật với chiều dài, chiều rộng lần lượt là 29,7 cm và 21 cm. Tính độ dài đường chéo của tờ giấy A4 đó và xác định độ chính xác của kết quả tìm được.

Bài tập 13. Ở Babylon, một tấm đất sét có niên đại khoảng $1900 - 1600$ trước Công nguyên đã ghi lại một phát biểu hình học, trong đó ám chỉ ước lượng số π bằng $\dfrac{25}{8} = 3{,}1250$. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối của giá trị gần đúng này, biết $3{,}141 < \pi < 3{,}142$.

Bài tập 14. Cho số gần đúng $a = 6547$ với độ chính xác $d = 100$. Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

Bài tập 15. Cho số gần đúng $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$. Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

Bài tập 16. Cho biết $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$. Hãy quy tròn $\sqrt{3}$ đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

Bài tập 17. Cho $\overline{a} = \dfrac{1}{1+x}, (0 < x < 1)$. Giả sử ta lấy $a = 1 - x$ làm giá trị gần đúng của $\overline{a}$. Hãy tính sai số tương đối của a theo x.

XÁC ĐỊNH SỐ QUY TRÒN CỦA SỐ GẦN ĐÚNG VỚI ĐỘ CHÍNH XÁC CHO TRƯỚC

Bài tập 18. Quy tròn số 3,141 đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

Bài tập 19.

a) Làm tròn số 2395,3 đến hàng chục, số 18,693 đến hàng phần trăm và số đúng $d \in [5{,}5; 6{,}5)$ đến hàng đơn vị. Đánh giá sai số tuyệt đối của phép làm tròn số đúng d.

b) Cho số gần đúng $a = 2{,}53$ với độ chính xác $d = 0{,}01$. Số đúng $\overline{a}$ thuộc đoạn nào? Nếu làm tròn số a thì nên làm tròn đến hàng nào? Vì sao?

Bài tập 20. Cho số gần đúng $a = 581\,268$ với độ chính xác $d = 200$. Hãy viết số quy tròn của số a.

Bài tập 21. Viết số quy tròn của mỗi số sau vối độ chính xác d.

a) 2 841 331 với $d = 400$; b) 4,1463 với $d = 0{,}01$; c) 1,4142135 với $d = 0{,}001$.

Bài tập 1. Làm tròn các số sau đến chữ số hàng chục

a) 199. b) 999. c) 9999. d) 2683.

e) 1099. f) 12345. g) 123456. h) 43781.

i) 454995. j) 14350. k) 99999. l) 987698.

m) 3400065. n) 1000587. o) 987654. p) 28051989.

q) 2602283. r) 123,45. s) 12345,67. t) 98765,432.

Bài tập 2. Làm tròn các số sau đến chữ số hàng trăm

a) 199. b) 999. c) 9999. d) 1099

e) 2683. f) 12345. g) 43781. h) 14350.

i) 1234567. j) 454995. k) 99999. l) 987698.

m) 3400065. n) 987654. o) 260283. p) 23456,7.

q) 12345,678. r) 8765,432. s) 9999,99.

Bài tập 3. Làm tròn các số sau đến chữ số hàng nghìn

a) 12 345. b) 43 781. c) 28 634. d) 21 999.

e) 22 999. f) 9999. g) 12 099. h) 454 995.

i) 14 350. j) 99 999. k) 987 698. l) 3 400 065.

m) 1 000 587. n) 987 654. o) 260 283. p) 23456,7.

q) 1 234 567 r) 12345,678. s) 8765,432. t) 9999,99.

Bài tập 4. Làm tròn các số sau đến hàng phần mười

a) 10,00905. b) 60,991. c) 999,994. d) 10,0456.

e) 23,0009. f) 99,999. g) 90,0909. h) 9876,1.

i) 1234,56. j) 98765,43.

Bài tập 5. Làm tròn các số sau đến hàng phần trăm

a) 3,0468. b) 12,3475. c) 0,31069. d) 12,516.

e) 0,999. f) 7,923. g) 17,418. h) 79,1364.

i) 50,401. j) 0,155. k) 60,996. l) 12,349.

m) 2,9999. n) 123,456. o) 98,7654.

Bài tập 6. Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d

a) 1 234 567 với $d = 400$. b) 8,7654 với $d = 0{,}01$.

c) 28,4156 với $d = 0{,}001$. d) $1{,}7320508\ldots$ với $d = 0{,}0001$.

Bài tập 7. Hãy viết số quy tròn của

a) a biết $\overline{a} = 1\,951\,890 \pm 200$. b) b biết $\overline{b} = 1{,}236 \pm 0{,}002$.

c) c biết $\overline{c} = 3{,}1463 \pm 0{,}002$.

Bài tập 8. Chiều dài một cái cầu là $\ell = 1745{,}25$ m $\pm 0{,}01$ m. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 1745,25.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÍNH TOÁN VỚI SỐ GẦN ĐÚNG

Bài tập 9. Sử dụng máy tính cầm tay, tính $3^7 \cdot \sqrt{14}$ (trong kết quả lấy bốn chữ số ở phần thập phân).

Bài tập 10. Dùng máy tính cầm tay, tính kết quả của phép tính $\sqrt[3]{15} : 5 - 2$ (trong kết quả lấy hai chữ số ở phần thập phân).

Bài tập 11. Gọi P là chu vi của đường tròn bán kính 1cm. Hãy tìm giá trị gần đúng của P (trong kết quả lấy hai chữ số ở phần thập phân).

Bài tập 1. Sử dụng máy tính bỏ túi tính gần đúng các số sau (kết quả lấy 4 chữ số thập phân).

a) $3^7 \cdot \sqrt{14}$. b) $\sqrt[3]{15} \cdot 12^4$. c) $\sqrt[3]{15} \cdot 14^4$.

Bài tập 2. Thực hiện các phép tính sau trên máy tính cầm tay (trong kết lấy 4 chữ số ở phần thập phân)

a) $4^6 \cdot \sqrt{0{,}1}$. b) $\sqrt[8]{2{,}1^{18} + 1} - \sqrt{2{,}1^{12} + 1}$. c) $\dfrac{1{,}5^3}{\sqrt[3]{6{,}8}}$.

4.2 Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

4.2.1 Số trung bình cộng (số trung bình)

Định lý 4.1.

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bằng công thức

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là

Giá trị	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

được tính theo công thức

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n},$$

trong đó n_i tương ứng là tần số của giá trị x_i $(i = 1; 2; \ldots; k)$ và $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

c) Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối

Giá trị	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	$\ldots$	f_k

được tính theo công thức

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k,$$

trong đó $f_1 = \frac{n_1}{n}$, $f_2 = \frac{n_2}{n}$, ..., $f_k = \frac{n_k}{n}$ với $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Lưu ý 4.4. *Số trung bình cộng cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu. Khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng ta có thể lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.*

4.2.2 Trung vị

Định nghĩa 4.4. *Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).*

- *Nếu n là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là trung vị.*
- *Nếu n là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$ gọi là trung vị.*
- *Trung vị kí hiệu là M_e.*

Lưu ý 4.5.

- *Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu.*
- *Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệnh lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.*

Lưu ý 4.6.

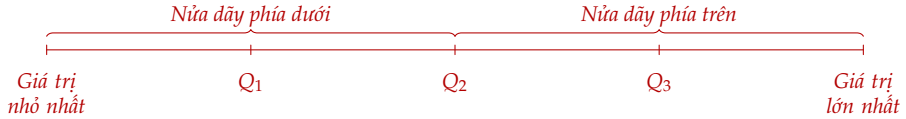
- *Trung vị là giá trị chia đôi trong mẫu số liệu. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi đó số trung bình cộng bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.*
- *Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn thêm trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.*

4.2.3 Tứ phân vị

Định nghĩa 4.5. *Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm. Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba, ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số phần tử bằng nhau.*

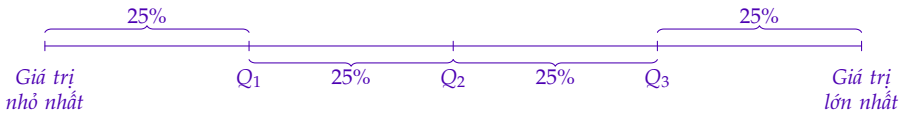
- *Tứ phân vị Q_2 bằng trung vị.*

- *Nếu n là chẵn thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên.*
- *Nếu n là lẻ thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm Q_2) và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm Q_2).*



Lưu ý 4.7.

- *Q_1 còn được gọi là tứ phân vị dưới, Q_3 còn được gọi là tứ phân vị trên.*
- *Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia dãy dữ liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành 4 phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị.*



Lưu ý 4.8.

- *Trong thực tế, có những mẫu số liệu mà nhiều số liệu trong mẫu đó vẫn còn sự chênh lệch lớn so với trung vị. Ta nên chọn thêm những số khác cùng làm đại diện cho mẫu đó. Bằng cách lấy thêm trung vị của từng dãy số liệu tách ra bởi trung vị của mẫu nói trên, ta nhận được tứ phân vị đại diện cho mẫu số liệu đó.*
- *Bộ ba giá trị Q_1, Q_2, Q_3 trong tứ phân vị phản ánh độ phân tán của mẫu số liệu. Nhưng mỗi giá trị Q_1, Q_2, Q_3 lại đo xu thế trung tâm của phần số liệu tương ứng của mẫu đó.*

4.2.4 Mốt

Định nghĩa 4.6. *Mốt của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là M_0.*

Lưu ý 4.9.

- *Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt*
- *Mốt của một mẫu số liệu đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một vị trí của mẫu số liệu đó. Dựa vào mốt, ta có thể đưa ra những kết luận (có ích) về đối tượng thống kê.*
- *Có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.*

BÀI TẬP

SỐ TRUNG BÌNH

Bài tập 1. Trong một cuộc thi tìm hiểu lịch sử địa phương (thang điểm 10), một lớp học tham gia cuộc thi và đạt được số điểm như sau:

Số học sinh	5	12	10	3
Số điểm	5	6	7	9

Hỏi trung bình mỗi học sinh trong lớp đạt bao nhiêu điểm trong cuộc thi?

Bài tập 2. Khi nghiên cứu tuổi thọ của một loại bóng đèn, người ta đã chọn tùy ý 10 bóng đèn trong một lô hàng và bật sáng liên tục cho đến khi nó tự tắt. Tuổi thọ của các bóng đèn (tính theo giờ) của các bóng đèn được ghi lại trong bảng sau:

Số bóng đèn	2	3	4	1
Tuổi thọ (giờ)	1150	1160	1170	1180

Hỏi tuổi thọ trung bình của các bóng đèn trong lô hàng là bao nhiêu?

Bài tập 3. Trong đợt kiểm tra quân sự thường niên tại một đơn vị, ở bộ môn bắn súng AK mỗi người phải bắn 5 phát súng vào bia. Thang điểm bắn là: $0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Ở 4 lần bắn trước đó, anh Nam đã đạt được số điểm như sau:

Lần bắn	1	2	3	4	5
Số điểm	8	7	0	9	10

Biết rằng để vượt qua bài kiểm tra, mỗi người phải đạt điểm trung bình trong các lần bắn từ 6.5 điểm trở lên. Tính số điểm ít nhất mà anh Nam cần đạt được trong lần bắn thứ 5 để vượt qua bài kiểm tra.

Bài tập 4. Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

Khối lượng (gam)	250	300	350	400	450	500	Cộng
Tần số	4	4	5	6	4	7	30

Tính số trung bình $\overline{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Bài tập 5. Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian nảy mầm một loại hạt mới trong các điều kiện khác nhau

Thời gian(phút)	420	440	450	480	500	540
Tần số	8	17	18	16	11	10

Tính giá trị trung bình $\overline{x}$ (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) về thời gian nảy mầm loại hạt mới nói trên.

Bài tập 6. Điều tra số học sinh của 30 lớp học, ta được bảng số liệu như sau:

35	39	39	40	40	41	41	41	41	44	44	45	45	45	46
48	48	48	48	49	49	49	49	49	49	50	50	50	50	51

Tính số trung vị của bảng nói trên.

SỐ TRUNG VỊ. TỨ PHÂN VỊ

Bài tập 7. Một nhóm gồm 7 học sinh tham gia một cuộc thi và đạt được số điểm như sau: 89, 69, 65, 0, 80, 0, 90. Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Bài tập 8. Điều tra số học sinh giỏi khối 10 của 15 trường cấp ba trên địa bàn tỉnh A, ta được bảng số liệu như sau:

22	29	29	29	30	31	32	32	33	34	34	35	35	35	36

Tính số trung vị của bảng nói trên.

Bài tập 9. Số áo bán được trong một cửa hàng trong một quý được ghi lại trong bảng sau:

Cỡ số	36	37	38	39	40	41	42
Số áo bán được	13	45	126	110	126	40	5

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Bài tập 10. Số tấn hàng bán ra được trong 6 tháng đầu năm của một công ty được cho như sau: 4, 7, 9, 11, 12, 20. Tìm tứ phân vị dưới của mẫu số liệu trên.

Bài tập 11. Số buổi nghỉ học trong một năm của một nhóm học sinh được cho như sau: 5, 8, 10, 11, 15, 18, 23. Tìm tứ phân vị trên của mẫu số liệu đã cho.

MỐT

Bài tập 12. Giá thành của một sản phẩm (tính theo đơn vị nghìn đồng) của 20 cơ sở sản xuất được cho bởi bảng sau:

15	25	25	30	20	25	35	30	25	30
25	20	35	30	15	25	25	20	25	25

Tìm mốt của mẫu số liệu trên.

Bài tập 13. Số cân nặng của 20 học sinh được ghi lại như sau:

28	35	29	37	30	35	37	30	35	29
30	37	35	35	42	28	35	29	37	20

Tìm mốt của mẫu số liệu trên.

Bài tập 14. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150	1190	1180	1170	1170	1170
1190	1170	1170	1170	1180	1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

Bài tập 15. Kết quả kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30) của 41 học sinh của một lớp được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

Điểm	9	11	14	16	17	18	20	21	23	25	Tổng
Tần số	3	7	4	4	6	7	3	3	2	2	41

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

Bài tập 16. Một bác sĩ mắt ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20	15	12	18	17	25
17	21	15	12	18	16	23	14	18	19	13	16	19	18	17

Tính mốt M_0 của bảng số liệu đã cho.

Bài tập 17. Điểm bài kiểm tra một tiết môn toán của 40 học sinh lớp $11A1$ được thống kê bằng bảng số liệu dưới đây

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	$3n-8$	$2n+4$	3	2	4	5	40

Trong đó $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Tính mốt của bảng số liệu thống kê đã cho.

Bài tập 18. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	12	5	n^2	16	$6n-5$

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $M_0 = x_3$ là mốt duy nhất của bảng phân bố tần số đã cho.

Bài tập 19. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	5	2	n	$20-n$	8

Tìm các số tự nhiên n để $M_0 = x_4$ là mốt duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho.

LUYỆN TẬP

Bài tập 20. Chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của các bạn tổ I ở lớp $10A$ lần lượt là:

165 155 171 167 159 175 165 160 158

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

a) Số trung bình cộng. b) Trung vị. c) Mốt. d) Tứ phân vị.

Bài tập 21. Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được);	40	48	52	70	54	47	28	3

a) Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?

Bài tập 22. Cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C);	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

(*Nguồn: Tập bản đồ Địa lí 6, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020*)

a) Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?

b) Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất là bao nhiêu độ C? Cao nhất là bao nhiêu độ C?

Bài tập 23. Cho biết tổng diện tích (S) rừng (triệu ha) từ năm 2008 đến năm 2019 ở nước ta.

Năm	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
S	13,1	13,2	13,4	13,5	13,9	14,0	13,8	14,1	14,4	14,4	14,5	14,6

(*Nguồn: https://baodantoc.vn*)

a) Diện tích rừng trung bình của nước ta từ năm 2008 đến năm 2019 là bao nhiêu?

b) Từ năm 2008 đến năm 2019, diện tích rừng của năm có giá trị thấp nhất là bao nhiêu triệu héc-ta? Cao nhất là bao nhiêu triệu héc-ta?

c) So với năm 2008, tỉ lệ tổng diện tích rừng của nước ta năm 2019 tăng lên được bao nhiêu phần trăm? Theo em, tỉ lệ tăng đó là cao hay thấp?

d) Hãy tìm hiểu số liệu về tổng diện tích rừng của tỉnh em đang sống trong một số năm gần đây.

Bài tập 24. Tìm số trung bình, trung vị, mốt và tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu sau đây:

a) Số điểm mà năm vận động viên bóng rổ ghi được trong một trận đấu"

9 8 15 8 20

b) Giá của một số loại giày (đơn vị nghìn đồng):

350 300 650 300 450 500 300 250

c) Số kênh được chiếu của một số hãng truyền hình cáp:

36 38 33 34 32 30 34 35

Bài tập 25. Hãy chọn số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mỗi mẫu số liệu sau. Giải thích và tính giá trị của số đặc trưng đó.

a) Số mặt trăng (SMT) đã biết của các hành tinh (HT):

HT	T. tinh	K. tinh	Trái đất	H. tinh	M. tinh	T. tinh	T. V. tinh	H. V. tinh
SMT	0	0	1	2	63	34	27	13

(Theo *NASA*)

b) Số đường chuyền thành công trong một trận đấu của một cầu thủ bóng đá:

32 24 20 14 23.

c) Chỉ số IQ của một nhóm học sinh: 60 72 63 83 68 74 90 86 74 80.

d) Các sai số trong một phép đo: 10 15 18 15 14 13 42 15 12 14 42.

Bài tập 26. Số lượng học sinh giỏi Quốc gia năm học 2018 − 2019 của 10 trường Trung học phổ thông được cho như sau:

0 0 4 0 0 0 10 0 6 0.

a) Tìm số trung bình, mốt, các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Giải thích tại sao tứ phân vị thứ nhất và trung vị trùng nhau.

Bài tập 27. Bảng sau đây cho biết số chỗ ngồi của một số sân vận động được sử dụng trong Giải Bóng đá Vô địch Quốc gia Việt Nam năm 2018 (số liệu gần đúng).

Sân vận động	Cẩm Phả	Thiên Trường	Hàng Đẫy	Thanh Hóa	Mỹ Đình
Số chỗ ngồi	20 120	21 315	23 405	20 120	37 546

(Theo *vov.vn*)

Các giá trị số trung bình, trung vị, mốt bị ảnh hưởng thế nào nếu bỏ đi số liệu chỗ ngồi của Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình?

Bài tập 28. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Tần số	5	n^2+3	3	$7n-9$	$n+1$	7

Gọi S là tập hợp tất cả các số n nguyên dương sao cho $M_0 = x_2$ và $M_0 = x_4$ là hai mốt của bảng phân bố tần số đã cho. Tính số phần tử của tập hợp S.

Bài tập 29. Quan sát 9 con chuột chạy qua một mê hồn trận và ghi lại thời gian (tính bằng phút) của chúng trong bảng sau:

Con chuột	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Thời gian chạy	1	2,5	3	1,5	2	1,25	1	0,9	30

a) Tính số trung bình, số trung vị và mốt của thời gian chuột ra khỏi mê hồn trận?

b) Trong trường hợp này nên chọn đại lượng nào để thể hiện xu thế trung bình của mẫu?

4.3 Các số đặc trưng đo độ phân tán

4.3.1 Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Định nghĩa 4.7. ***Khoảng biến thiên***, *kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.*

- *Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu.*
- *Khoảng biến thiên càng lớn thì màu số liệu càng phân tán.*

Định nghĩa 4.8. ***Khoảng tứ phân vị***, *kí hiệu là $\triangle Q$, là hiệu số giữa từ phân vị thứ ba và từ phân vị thứ nhất, tức là: $\triangle Q = Q_3 - Q_1$.*

- *Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.*
- *Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.*
- *Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là biên độ và khoảng tứ phân vị là độ trải giữa.*

4.3.2 Phương sai và độ lệch chuẩn

Định nghĩa 4.9. *Có một vài số đặc trưng khác đo độ phân tán sử dụng thông tin của tất cả các giá trị trong mẫu số liệu. Hai trong số đó là phương sai và độ lệch chuẩn. Cụ thể là với mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nếu gọi số trung bình là $\overline{x}$ thì với mỗi giá trị x_i, độ lệch của nó so với giá trị trung bình là $x_i - \overline{x}$.*

- *Phương sai là giá trị $s^2 = \dfrac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}$.*
- *Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$, được gọi là độ lệch chuẩn.*

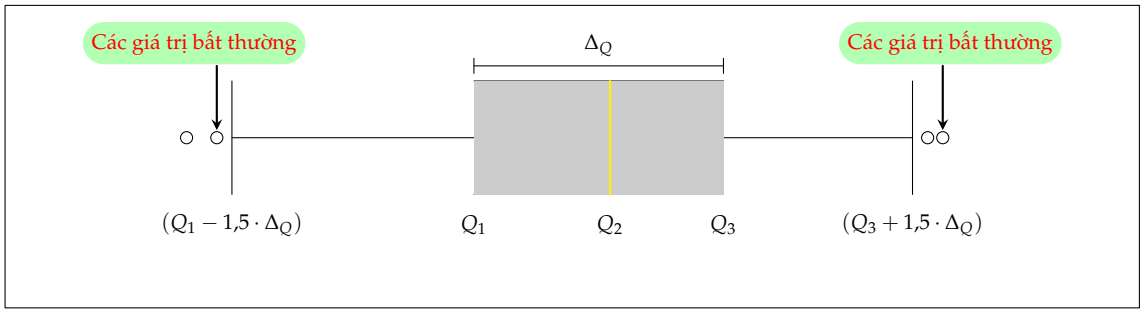
Lưu ý 4.10. *Người ta còn sử dụng đại lượng để đo độ phân tán của mẫu số liệu:*

$$\widehat{s^2} = \frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n-1}.$$

Lưu ý 4.11. *Nếu số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn.*

4.3.3 Phát hiện số liệu bất thường hoặc không chính xác bằng biểu đồ hộp

- Trong mẫu số liệu thống kê, có khi gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác. Những giá trị này được gọi là **giá trị bất thường**.
- Ta có thể dùng biểu đồ hộp để phát hiện các giá trị bất thường này.



- Các số liệu **lớn hơn** $Q_3 + 1{,}5 \cdot \Delta_Q$ hoặc **bé hơn** $Q_1 - 1{,}5 \cdot \Delta_Q$ được xem là giá trị bất thường. Hay các số liệu **không** thuộc đoạn $[Q_1 - 1{,}5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1{,}5 \cdot \Delta_Q]$ là các số liệu bất thường.

BÀI TẬP

TÌM KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ SO SÁNH ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MỘT HOẶC NHIỀU MẪU SỐ LIỆU

Bài tập 1. Cân nặng (tính theo đơn vị kg) của 10 học sinh được ghi lại như sau:

49 57 66 45 50 41 57 42 55 52

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

Bài tập 2. Chiều cao (tính theo đơn vị m) của các bạn học sinh trong một lớp học được thống kê và ghi lại trong bảng dưới đây:

Chiều cao	1,6	1,61	1,62	1,63	1,64	1,65
Số lượng	3	5	8	9	7	6

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên

Bài tập 3. Điểm kiểm tra môn Toán của các bạn học sinh Tổ 1 và Tổ 2 lớp 10C như sau:

Tổ 1:	6	9	4	2	7	9	6	10
Tổ 2:	4	5	6	3	9	5	8	4

Hãy tìm các khoảng biến thiên trong hai mẫu số liệu. Căn cứ vào số liệu này, hãy chỉ ra tổ nào học đồng đều hơn.

TÍNH PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Bài tập 4. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$n = 40$

a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài tập 5. 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$n = 100$

a) Tính số trung bình

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

TÌM CÁC SỐ LIỆU BẤT THƯỜNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

Bài tập 6. Điểm kiểm tra môn Toán của 10 học sinh sau:

1 7 10 7 7 6 9 8 10 8

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Bài tập 7. Hai chữ số cuối số điện thoại của 10 người được thống kế như sau:

23 58 42 11 69 50 13 57 61 72

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

Bài tập 8. Tuổi thọ trung bình người dân của 11 nước được thống kê như sau:

69 77 75 83 65 75 74 68 73 72 71

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

Bài tập 9. Thời gian làm câu đầu tiên trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tại một trường của các bạn học sinh được thống kê và ghi lại trong bảng sau

Thời gian	9	10	11	12	13	14	15
Số lượng học sinh	45	46	57	63	70	61	50

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu thống kê trên.

Bài tập 10. Điểm thi học kì 2 môn Toán và Ngữ văn của một nhóm học sinh được ghi lại như sau

Toán	9	8,5	7	6,3	5	9,5	8
Ngữ văn	6	6,5	8	7,3	5,5	8,3	6,5

Hãy tìm khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu trên. Từ đó chỉ ra mẫu số liệu có độ phân tán lớn hơn.

Bài tập 11. Số giờ nắng và độ ẩm (tính theo đơn vị %) trung bình hàng tháng của Hà Nội được thống kê và ghi lại ở bảng sau

Số giờ nắng	74	47	47	90	183	172	195	174	176	167	137	124
Độ ẩm	83,4	87,9	89,4	86,5	82,9	82,2	85,9	87,2	84,2	81,9	81,3	82

Hãy tìm khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu "Số giờ nắng" và "Độ ẩm". Từ đó chỉ ra mẫu số liệu có độ phân tán lớn hơn.

Bài tập 12. Một xạ thủ tập bắn, xạ thủ đó đã bắn 30 viên đạn vào bia. Kết quả được cho trong bảng sau

Điểm	6	7	8	9	10	
Tần số	3	4	8	9	6	$n = 30$

a) Tính điểm trung bình của xạ thủ.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài tập 13. Hai lớp 10A1, 10A2 của một trường Trung học phổ thông X đồng thời làm bài thi môn Toán theo cùng một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây

Điểm thi Toán của lớp 10A1

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	3	7	12	14	3	1	40

Điểm thi Toán của lớp 10A2

Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	8	18	10	4	40

a) Tính phương sai, độ lệch chuẩn của các bảng phân bố tần số đã cho.

b) Xét xem kết quả làm bài thi của môn Toán ở lớp nào đồng đều hơn?

Bài tập 14. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) có kết quả như trong bảng sau:

1180	1179	1187	1190	1187	1198	1568	1178	1185	1184
1178	1180	1185	1179	1180	1198	1179	1198	1569	1191
1185	1184	1179	1180	1184	1198	1180	1178	1179	1178

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Bài tập 15. Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau (thời gian tính bằng phút)

7	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	29

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Bài tập 16. Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 10A có 21 học sinh, thể hiện ở bảng dưới đây

10	6	7	7	1	7	6	9	9	10	8	8	7	8	6	7	5	6	7	8	9

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Bài tập 17. Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 25 chiếc xe qua trạm như sau:

20 41 41 80 40 52 52 52 60 55 60 60 62
60 65 60 65 135 70 70 65 75 75 70 55

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Bài tập 18. Thống kê điểm thi môn Toán của 450 học sinh trong một kì thi ở một trường trung học phổ thông. Người ta được bảng số liệu như sau

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	1	1	1	1	120	200	119	5	1	1

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

LUYỆN TẬP

Bài tập 19. Cho mẫu số liệu gồm 15 số dương không hoàn toàn giống nhau. Các số đo độ phân tán (khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn) sẽ thay đổi như thế nào nếu

a) Nhân mỗi giá trị của mẫu số liệu với 3.

b) Cộng mỗi giá trị của mẫu số liệu với 3.

Bài tập 20. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số dưới đây:

Sản lượng	20	21	22	23	24
Số thửa ruộng	5	8	11	10	6

a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng?

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài tập 21. Số máy tính bán được trong 7 tháng liên tiếp của một cửa hàng được ghi lại trong bảng sau:

83	79	92	71	69	83	74

a) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài tập 22. Kết quả thi kết thúc học kì một của bạn Hoa được ghi lại trong bảng sau:

Văn	Địa	Lý	Hóa	Toán	Anh văn
6,0	8,0	7,5	8,5	7,0	7,5

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài tập 23. Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số ngày	0	1	2	3	4	5
Số xe bán	2	13	15	12	7	3

a) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài tập 24. Bảng sau đây ghi lại tốc độ (km/h) của 20 chiếc ôtô.

40	65	70	68	62	75	80	83	82	69
73	75	85	72	67	88	110	85	72	63

Hãy tìm các giá trị bất thường (nếu có) của mẫu số liệu trên.

Bài tập 25. Trên hai con đường A và B, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô trên mỗi con đường như sau:

Con đường A:

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69	73	75	85	72	67
88	90	85	72	63	75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Con đường B:

76	64	58	82	72	70	68	75	63	67	74	70	79	74	60
80	73	75	71	68	72	73	79	80	63	62	71	70	69	63

a) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ôtô trên mỗi con đường A, B.

c) Theo em thì chạy xe trên con đường nào an toàn hơn?

Bài tập 26. Hai lớp 10A và 10B của một trường THPT cùng làm bài thi môn Toán, chung một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây

Điểm	3	5	6	7	8	9	10	Cộng
Lớp 10A	7	9	3	3	7	12	4	45

Điểm	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Lớp 10B	6	6	7	8	9	5	4	45

a) Hãy tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn từ các bảng phân bố tần số đã cho (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

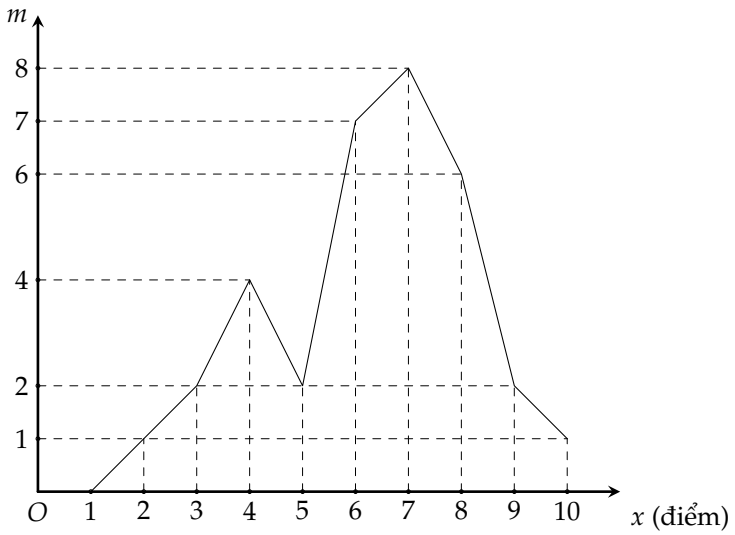
b) Xét xem kết quả bài thi môn Toán của lớp nào đồng đều hơn?

Bài tập 27. Bảng số liệu sau cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng A trong năm 2006 (đơn vị là triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	18	16	17	14	18	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài tập 28. Cho biểu đồ biểu diễn kết quả học tập của học sinh trong một lớp qua một bài kiểm tra.



Từ biểu đồ trên hãy

a) Viết mẫu số liệu thống kê kết quả học tập của học sinh một lớp nhận được từ biểu đồ đã cho.

b) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng tứ phân vị trong mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

Chương 5

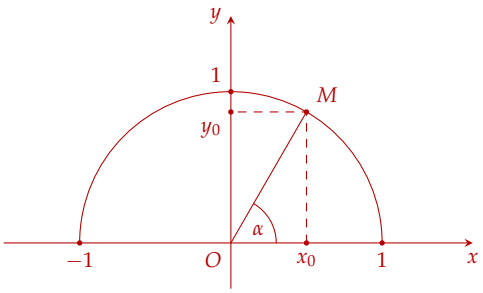
Hệ thức lượng trong tam giác

5.1 Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

5.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 5.1.

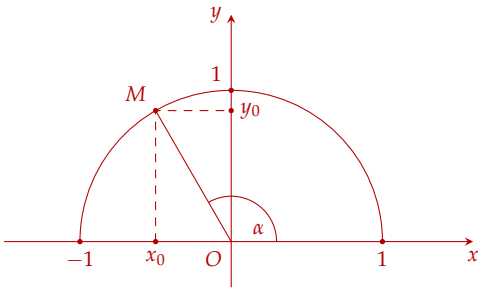
Đặt tam giác vuông này vào hệ trục tọa độ Oxy đang xét, sao cho đỉnh góc α tại O, cạnh kề của α ở trên trục hoành và đỉnh M ở trên nửa đường tròn bán kính bằng 1, như hình vẽ. Giả sử $M(x_0;y_0)$. Khi đó, theo định nghĩa về các tỷ số lượng giác góc nhọn, ta có



- $\sin\alpha = \dfrac{y_0}{1} = y_0$;
- $\cos\alpha = \dfrac{x_0}{1} = x_0$;
- $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$;
- $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.

Định nghĩa 5.2.

Với mỗi góc α $(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$ ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0;y_0)$. Khi đó ta có định nghĩa



- ***sin** của góc α là y_0, kí hiệu $\sin\alpha = y_0$.*
- ***cô-sin** của góc α là x_0, kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$.*
- ***tang** của góc α là $\dfrac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \ne 0)$, kí hiệu là $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$.*
- ***cô-tang** của góc α là $\dfrac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \ne 0)$, kí hiệu là $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.*

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi chung là các giá trị lượng giác của góc α.

Lưu ý 5.1. *Từ định nghĩa trên, ta có*

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, *với* $\alpha \ne 90^\circ$.
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, *với* $\alpha \ne 0^\circ$ *và* $\alpha \ne 180^\circ$.
- $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$, *với* $\alpha \notin \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$.

5.1.2 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

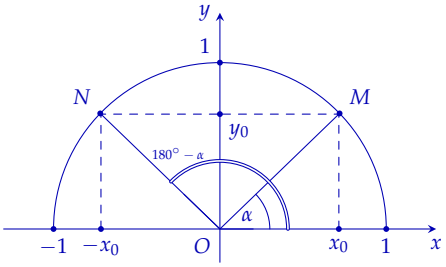
Định lý 5.1. *Hai góc **phụ nhau** là α và $90^\circ - \alpha$*

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$;
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$;
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$.

Định lý 5.2. *Hai góc α và góc $180^\circ - \alpha$ là hai góc bù nhau*

Với mỗi góc α thỏa mãn $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, ta luôn có

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$;
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ ($\alpha \ne 90^\circ$);
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ ($\alpha \ne 0^\circ$ và $\alpha \ne 180^\circ$).



BÀI TẬP

TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC MỘT GÓC VÀ GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Lưu ý 5.2.

a) *Nếu α là góc tù thì $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.*

b) *Sau đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt mà em nên nhớ*

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0
$\cot\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\parallel$

Bài tập 1. Tính các giá trị lượng giác của góc 30° và 60°.

Bài tập 2. Tính các giá trị lượng giác của góc 30° và 150°.

Bài tập 3. Tính các giá trị lượng giác của các góc 120°, 135° và 150°.

Bài tập 4. Cho $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $(0 < \alpha < 90^\circ)$.Tính các giá trị lượng giác còn lại.

Bài tập 5. Cho biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $C = \dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Bài tập 6. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = a\sin 0^\circ + b\sin 0^\circ + c\sin 90^\circ$.

b) $B = a\cos 90^\circ + b\sin 90^\circ + c\sin 180^\circ$.

c) $C = a^2\sin 90^\circ + b^2\cos 90^\circ + c^2\cos 180^\circ$.

d) $D = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$.

e) $E = 4a^2\sin^2 45^\circ - 3(a\tan 45^\circ)^2 + (2a\cos 45^\circ)^2$.

Bài tập 7. Biết $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Tính $\cos 15^\circ$, $\tan 15^\circ$, $\cot 15^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 105^\circ$.

Bài tập 8. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính giá trị của một biểu thức:

a) Biết $\sin x = \dfrac{1}{3}$, $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính $A = \dfrac{\tan x + 3\cot x + 1}{\tan x + \cot x}$.

b) Biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha}$.

c) Biết $\cot x = -3$. Tính $D = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x}$.

d) Biết $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$. Tính $E = \dfrac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha}$.

CHỨNG MINH HỆ THỨC GÓC TRONG TAM GIÁC

Bài tập 9. Cho A, B, C lần lượt là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin(B+C) = \sin A$.

b) $\cos(B+C) = -\cos A$.

c) $\sin(A+B) = \sin C$.

d) $\cos(A+B) = -\cos C$.

e) $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$.

f) $\tan\dfrac{A+B-C}{2} = \cot C$.

g) $\tan\dfrac{A+B}{2} = \cot\dfrac{C}{2}$.

h) $\cos\dfrac{B+C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}$.

i) $\tan(A+B) = -\tan C$.

j) $\sin\dfrac{A+B+3C}{2} = \cos C$.

k) $\tan\dfrac{A+B-2C}{2} = \cot\dfrac{3C}{2}$.

l) $\sin\dfrac{A+B-2C}{2} = \cos\dfrac{3C}{2}$.

m) $\cos(A-B+C) = -\cos 2B$.

n) $\tan\dfrac{B+C-2A}{2} = \cot\dfrac{3A}{2}$.

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài tập 10. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$.

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.

d) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

e) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

f) $\dfrac{\cos^2 x - \cot^2 x}{\sin^2 x - \tan^2 x} = \cot^2 x$.

g) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin x + \cos x}{\tan^2 x - 1} = \sin x + \cos x$.

h) $\sin x \cdot \cos x(1+\tan x)(1+\cot x) = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$.

i) $\sin\left(\sqrt{\dfrac{1}{2+2\cos x} + \dfrac{1}{2-2\cos x}} - \sin x\right) = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$,
biết $0^\circ < x < 180^\circ$.

Bài tập 11. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến (hay biểu thức độc lập với biến số).

a) $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

b) $B = \cos^6 x + 2\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \sin^4 x$.

c) $C = (\cot x + \tan x)^2 - (\cot x - \tan x)^2$.

d) $D = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$.

e) $E = \dfrac{2}{\tan x - 1} + \dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$.

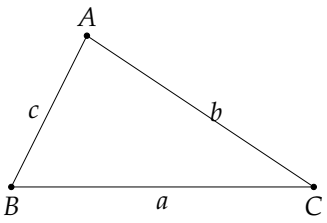
5.2 Hệ thức lượng trong tam giác

5.2.1 Định lý sin và cosin

Định lý 5.3.

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$.

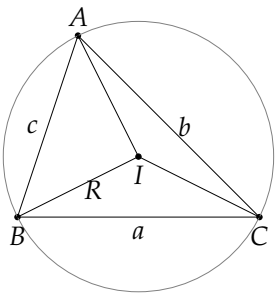
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.



Định lý 5.4.

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



5.2.2 Một số công thức tính diện tích tam giác

Định lý 5.5. *Gọi S là diện tích tam giác ABC. Ta có*

- $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$,
- $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$,
- $S = \frac{abc}{4R}$,
- $S = p \cdot r$,
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *(Định lí Hê-rông).*

Trong đó:

- *h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB.*
- *R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.*
- *r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.*
- *$p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.*

BÀI TẬP

ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ CÔ-SIN

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có $b = 5, c = 7$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC có $AC = 10$cm, $BC = 16$cm và $C = 120^\circ$, tính độ dài cạnh AB.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 6$, $AC = 8$. Tính BC.

Bài tập 4. Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = 6$, $CA = 4\sqrt{2}$, $AB = 2$. Tính $\cos A$ và góc $\widehat{A}$.

Bài tập 5. Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm; $AC = 5$ cm và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính BC.

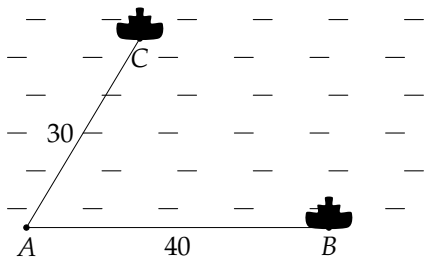
Bài tập 6. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 120^0$, $b = 2$, $c = 1$.

a) Tính BC. b) Trên CA kéo dài lấy D sao cho $BD = 2$. Tính AD

Bài tập 7. Cho tam giác ABC có $BC = 3, CA = 4$ và $AB = 6$. Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

Bài tập 8. Cho $\triangle ABC$ có $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Lấy điểm D đối xứng với B qua C. Tính AD.

Bài tập 9. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60°. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Hỏi sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?

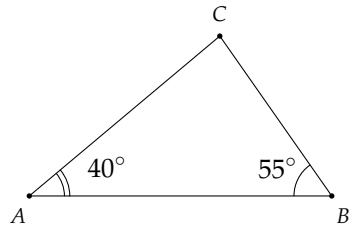


Bài tập 10. Tam giác ABC có $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ SIN

Bài tập 11. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ và $BC = 10$ cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài tập 12. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 40^\circ$, $\widehat{B} = 55^\circ$ và $AB = 100$. Tính độ dài cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài tập 13. Cho tam giác ABC có $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{BC}{3}$ và $\widehat{A} = 45^\circ$. Tính các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài tập 14. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 50^\circ$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 10 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC (làm tròn đến hàng phần mười).

Bài tập 15. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\sin^2 A = \sin B \sin C$ khi và chỉ khi $a^2 = bc$.

Bài tập 16. Cho tam giác ABC. Biết $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm và $2\sin A = \sin B + \sin C$. Tính độ dài cạnh AC.

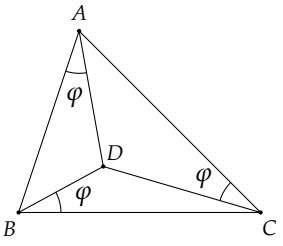
Bài tập 17. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ$ và $AC = 15$ cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài tập 18. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 65^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài tập 19. Cho tam giác ABC có $\dfrac{BC}{3} = \dfrac{AC}{5}$ và $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài tập 20. Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CBD} = \widehat{ACD} = \varphi$. Chứng minh rằng

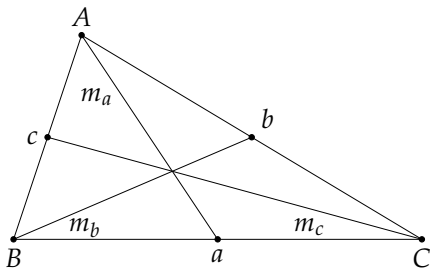
$$\sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi)\sin(B - \varphi)\sin(C - \varphi).$$



ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

Lưu ý 5.3.
Cho tam giác ABC có m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C. 0Ta có

- $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.
- $m_b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$.
- $m_c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.



Bài tập 21. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm và $BC = 6$ cm. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC.

Bài tập 22. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 12$, $CA = 13$, trung tuyến $AM = 8$.

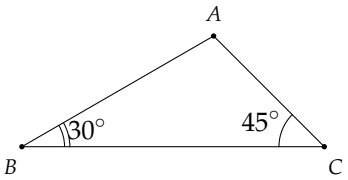
a) Tính diện tích $\triangle ABC$;
b) Tính góc B.

Bài tập 23. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Trên tia CB lấy điểm M sao cho $BM = BC$. Biết $AB = 5$, $BC = 3$. Tính AM.

Bài tập 24. Tam giác ABC có $b = 6$, $c = 8$ và $m_a = 5$. Tính a, $\widehat{A}$.

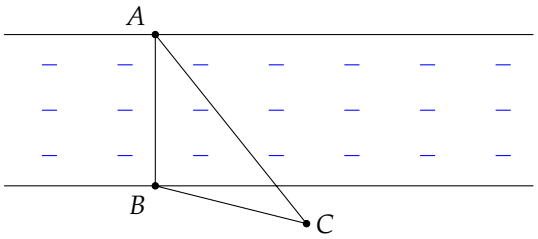
GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

Bài tập 25. Cho tam giác ABC có $BC = 40$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính góc $\widehat{A}$ và độ dài các cạnh AB, AC của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

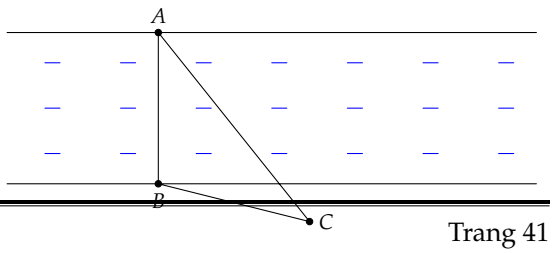


Bài tập 26. Cho tam giác ABC có $AB = 25$, $AC = 20$, $\widehat{A} = 120^\circ$. Tính cạnh BC và các góc B, C của tam giác đó.

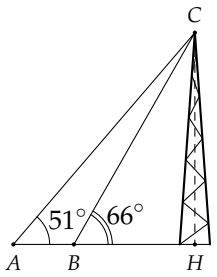
Bài tập 27. Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C. Sau đó, đo khoảng cách BC, các góc B và C. Biết rằng $BC = 200$ m, $\widehat{B} = 107^\circ$, $\widehat{C} = 28^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Bài tập 28. Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C, đo khoảng cách BC, các góc B và C. Biết rằng $BC = 250$ m, $\widehat{B} = 104^\circ$, $\widehat{C} = 31^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

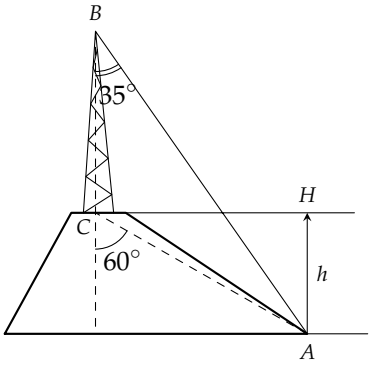


Bài tập 29. Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 51^\circ$, $\widehat{CBH} = 66^\circ$ và $AB = 75$ m, tính chiều cao của tháp.



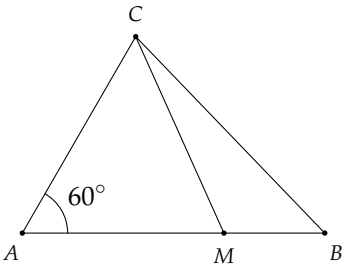
Bài tập 30. Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm, $AC = 21$ cm, $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính cạnh BC và các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài tập 31. Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 120 m. Đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 35° và 60° so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi. (Làm tròn đến phần mười)

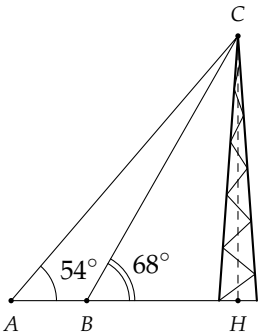


Bài tập 32. Cho tam giác ABC có $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 15$. Tính $\widehat{A} + 2\widehat{C}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài tập 33. Cho tam giác ABC có $AB = 15$, $AC = 12$, $\widehat{A} = 60^\circ$. M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM = 2BM$. Tính cạnh CM, góc $\widehat{BCM}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài tập 34. Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 54^\circ$, $\widehat{CBH} = 68^\circ$ và $AB = 80$ m, tính chiều cao của tháp (Làm tròn đến hàng đơn vị).



NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Bài tập 35. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a \sin B = c \sin A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Bài tập 36. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Bài tập 37. Chứng minh rằng nếu ba góc của $\triangle ABC$ thỏa hệ thức $\sin A = 2 \sin B \cos C$ thì $\triangle ABC$ cân.

Bài tập 38. Cho $\triangle ABC$ thỏa $m_a = m_b$. Chứng minh $\triangle ABC$ cân.

Bài tập 39. Cho $\triangle ABC$ thỏa $\dfrac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\cot^2 A + \cot^2 B\right)$. Chứng minh $\triangle ABC$ cân. Biết rằng $1 +$

$\cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ (với $0 < x < 180^\circ$).

Bài tập 40. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông tại A khi và chỉ khi $5\,m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

Chứng minh rằng trong $\triangle ABC$, $BM \perp CN \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$ vớn BM và CN là hai đường trung tuyến hạ từ B và C.

Bài tập 41. Cho $\triangle ABC$ có $S = 2R^2 \sin B \sin C$. Chứng minh $\triangle ABC$ vuông.

Bài tập 42. Cho $\triangle ABC$ có $S = \dfrac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$. Chứng minh $\triangle ABC$ vuông.

Bài tập 43. Cho $\triangle ABC$ có $\dfrac{\sin A}{m_a} = \dfrac{\sin B}{m_b} = \dfrac{\sin C}{m_c}$. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

TOÁN TỔNG HỢP

‘

Bài tập 44. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$ và $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm.

a) Tính diện tích của tam giác ABC.

b) Tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài tập 45. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 6, BC = 8$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Bài tập 46. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$, diện tích tam giác ABC bằng $9\sqrt{3}$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

Bài tập 47. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{7}$ và $BC = 4$.

a) Tính góc B và diện tích tam giác ABC.

b) Tính độ dài đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC.

Bài tập 48. Cho tam giác với ba cạnh $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính diện tích của tam giác và độ dài đường cao h_c.

Bài tập 49. Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $BC = 6$ và góc $\widehat{B} = 120^\circ$.

a) Tính AC và diện tích tam giác ABC.

b) Tính đường cao AH và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

c) Tính độ dài đường phân giác trong BD của tam giác ABC.

Bài tập 50. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính độ dài BC, diện tích tam giác ABC, độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Bài tập 51. Cho tam giác ABC, gọi l_a là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $l_a = \dfrac{bc \sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$.

Bài tập 52. Hai lực $\overrightarrow{f_1}$ và $\overrightarrow{f_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực $\overrightarrow{s}$.

Bài tập 53. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

Bài tập 54. Cho tam giác ABC không vuông ở A, chứng minh $S = \dfrac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\tan A$.

Bài tập 55. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^0$, $a = 10$, $r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính R; b) Tính b, c.

Bài tập 56. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A}$ là góc tù, $AB = 4$, $AC = 5$ và $S = 4\sqrt{6}$. Tính BC, bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài tập 57. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. $AB = 3$, $AC = 4$, AH là đường cao.

a) Tính BC, BH, CH, AH.

b) Gọi I là điểm thuộc AB sao cho $AI = 2BI$, CI cắt AH tại E. Tính CE.

c) Gọi M là trung điểm của AC, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM.

Bài tập 58. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi N là trung điểm của CD, M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = \dfrac{AC}{4}$

a) Tính các cạnh của $\triangle BMN$;

b) Có nhận xét gì về $\triangle BMN$. Tính diện tích $\triangle BMN$;

c) Gọi I là giao điểm của BN và AC. Tính CI;

d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMN$.

Bài tập 59. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2a\sqrt{2}$, $BC = 4a$, $\widehat{A} = 135^0$. Gọi M là trung điểm BC.

a) Tính số đo góc C và bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

b) Tính cạnh AC và diện tích $\triangle ABC$.

c) Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $DB = AD$. Hãy so sánh BD và $\sqrt{2}.AM$.

Bài tập 60. Cho $\triangle ABC$ có góc B nhọn, AH và CK là hai đường cao.

a) Chứng minh $\dfrac{S_{BHK}}{S_{ABC}} = \dfrac{BK \cdot BH}{BA \cdot BC}$.

b) Biết $\dfrac{S_{\triangle BHK}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{1}{4}$. Tính góc B.

Bài tập 61. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẽ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Bài tập 62. Cho tam giác ABC có $b + c = 2a$. Chứng minh:

a) $2\sin A = \sin B + \sin C$.

b) $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

c) $6Rr = bc$.

Bài tập 63. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $abc\,(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)$.

b) $bc\left(b^2 - c^2\right)\cos A + ac\left(c^2 - a^2\right)\cos B + ba\left(a^2 - b^2\right)\cos C = 0$.

c) $2abc\,(\cos A + \cos B) = (a+b)(b+c-a)(a+c-b)$.

Bài tập 64. Cho tam giác ABC, r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

b) $S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$.

c) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$.

d) $r_a = (p-b)(p-a)$.

Chương 6

Véc-tơ

6.1 Các khái niệm mở đầu

6.1.1 Khái niệm véc-tơ

Định nghĩa 6.1.
Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng. Véc-tơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "véc-tơ AB".

- *Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của véc-tơ AB (Hình 2).*
- *Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của véc-tơ AB, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.*

Hình 1

Hình 2

Lưu ý 6.1. *Để vẽ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng AB và đánh dấu mũi tên ở đầu mút B (Hình 1).*

6.1.2 Hai véc-tơ cùng phương. Hai véc-tơ bằng nhau

Định nghĩa 6.2.

- *Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.*
- *Nếu hai véc-tơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.*

Định nghĩa 6.3.

- *Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau khi chúng cùng phương, cùng chiều (hướng), cùng độ dài. kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*
- *Đôi khi ta còn nói hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.*

6.1.3 Véc-tơ không

Định nghĩa 6.4. *Véc-tơ không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\overrightarrow{0}$.*

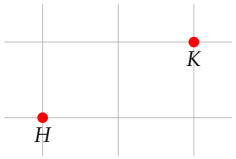
Lưu ý 6.2.

- *Ta quy ước $\overrightarrow{0}$ (véc-tơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi véc-tơ; hơn nữa $\left|\overrightarrow{0}\right| = 0$.*
- *Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.*

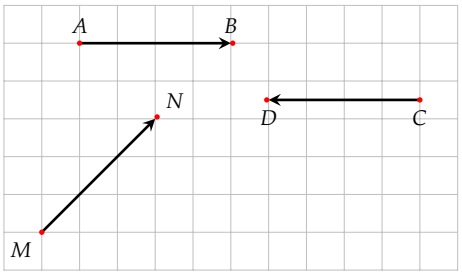
BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH MỘT VÉC-TƠ, ĐỘ DÀI VÉC-TƠ

Bài tập 1. Cho hai điểm phân biệt H, K như hình bên. Viết hai véc-tơ mà điểm đầu và điểm cuối là H hoặc K.

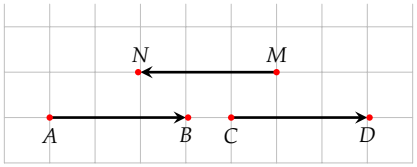


Bài tập 2. Tính độ dài của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$ ở Hình 3, biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1 cm.



Hình 3

Bài tập 3. Trong Hình 4, tìm véc-tơ cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$; ngược hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.



Hình 4

Bài tập 4. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy chỉ ra các véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

Bài tập 5. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

Bài tập 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AM}$.

Bài tập 7. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a.

a) Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

b) Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AD}$

Bài tập 8. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AM}$.

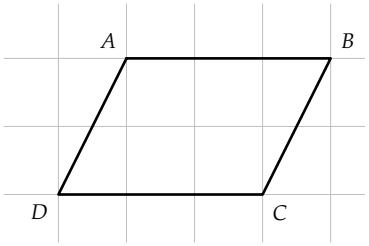
HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG VÀ BẰNG NHAU

Bài tập 9. Trong hình 4, ta thấy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, vì chúng thỏa mãn điều kiện: " cùng phương, cùng chiều, cùng độ dài".

Bài tập 10. Cho hình bình hành $ABCD$ (Hình 5).

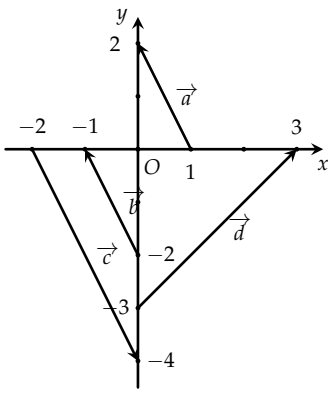
a) Véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{AD}$?

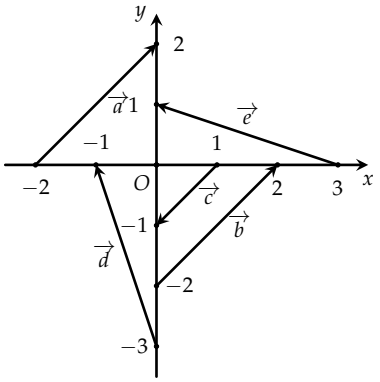


Hình 5

Bài tập 11. Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



Bài tập 12. Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau

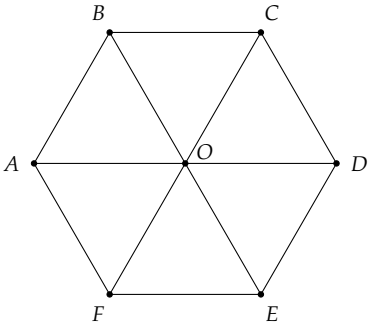


Bài tập 13. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O.

a) Hãy tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với $\overrightarrow{AB}$.

b) Hãy vẽ vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ và có điểm đầu là B.

c) Hãy vẽ vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ và có điểm đầu là C.



Bài tập 14. Cho hình vuông $ABCD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$. b) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$. c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Những cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên là bằng nhau?

Bài tập 15. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tìm các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và

a) có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A , B , C và D.

b) có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O.

Bài tập 16. Hai ca nô A và B chạy trên cùng khúc sông (khúc sông thẳng) với cùng độ lớn vận tốc là 15 km/h. Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng, ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc dòng nước là 5 km/h.

a) Hãy thể hiện bằng hình vẽ, vectơ vận tốc $\vec{v}$ dòng nước và vectơ vận tốc thực tế $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_B}$ của hai ca nô A và B.

b) Trong các vectơ $\vec{v}$, $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_B}$ những vectơ nào cùng phương, những cặp vectơ nào ngược hướng.

Bài tập 17. Cho tam giác đều ABC, hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$. Hai vectơ có bằng nhau không?

Bài tập 18. Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Có thể kết luận gì về 3 điểm A, B, C?

Bài tập 19. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Bài tập 20. Trên mặt phẳng Oxy, hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MN}$ với $A(1;2)$, $M(0;-1)$ và $N(3;5)$

a) Chỉ ra một mối liên hệ giữa hai vectơ trên.

b) Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể có đi qua N không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ đến N?

Bài tập 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm M trên đoạn AB và điểm N trên đoạn CD sao cho $AM = CN$. Chứng minh $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$.

Bài tập 22. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh: $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN}$.

6.2 Tổng và hiệu của hai véc-tơ

6.2.1 Phép cộng véc-tơ

Quy tắc 6.1. *Muốn cộng nhiều véc-tơ, ta dời các véc-tơ nối đuôi nhau, mũi tên nối từ gốc tới ngọn của đoàn véc-tơ nối đuôi là véc-tơ tổng.*

Định lý 6.1.

- *Công thức nối đuôi:* $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$, *với* M *tuỳ ý.*
- *Công thức chèn điểm:* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XB}$, *với* X *tuỳ ý.*
- *Quy tắc hình bình hành* $ABCD$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
- *Bất đẳng thức véc-tơ:* $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|\le|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$. *Dấu"=" xãy ra khi* $\Leftrightarrow \overrightarrow{u}=k\cdot\overrightarrow{v}\ (k>0)$ ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *cùng chiều)*

6.2.2 Véc-tơ đối và phép trừ hai véc-tơ

Định nghĩa 6.5.

- *Véc-tơ* $\overrightarrow{u}$ *và véc-tơ* $\overrightarrow{v}$ *được gọi là đối nhau khi và chỉ khi* $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.
- *Véc-tơ* $\overrightarrow{u}$ *có véc-tơ đối là* $-\overrightarrow{u}$.
- *Véc-tơ* $\overrightarrow{AB}$ *có véc-tơ đối là* $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Định lý 6.2. *Muốn trừ một véc-tơ, ta cộng với véc-tơ đối của nó.*

Định lý 6.3. *Công thức ngọn trừ gốc:* $\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AG}$, *với* A *tuỳ ý.*

Định lý 6.4. *Cho* I *là trung điểm thì* $AB\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

BÀI TẬP

TÍNH TỔNG, HIỆU HAI VÉC-TƠ

Bài tập 1. Tính tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{NQ}$.

Bài tập 2. Tính tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính tổng $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}$.

Bài tập 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM=BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Tính $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{QB}$.

Bài tập 5. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Tính $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}$.

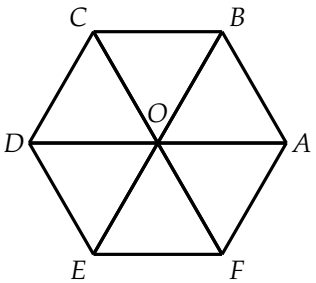
Bài tập 6. Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm, tính $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

Bài tập 7. Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm, tính $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CB}$.

Bài tập 8. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O.

a) Rút gọn véc-tơ $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$?

b) Tính $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.



Bài tập 9. Cho tam giác ABC, gọi D, E, F, G, H, I theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DF, DE, EF. Tính véc-tơ $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{FE}$?

TÍNH ĐỘ DÀI VÉC-TƠ TỔNG, VÉC-TƠ HIỆU

Bài tập 10. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB=a$, xác định và tính độ dài của véc-tơ

a) $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 11. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = 2$, xác định và tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CD}$.

Bài tập 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2$, $AC = 4$, xác định và tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Bài tập 13. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC = 5$, $AB = 3$, xác định và tính độ dài của véc-tơ

a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. b) $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Bài tập 14. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 3$, $CD = 5$, xác định và tính độ dài của véc-tơ

a) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. b) $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

Bài tập 15. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$; b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$; c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$; e) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$; f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Bài tập 16. Chứng minh:

a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; b) Nếu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Bài tập 17. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$; c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$;

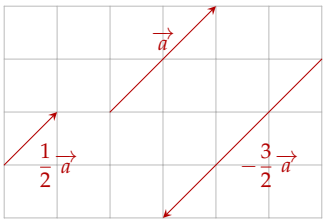
d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$; e) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$; f) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$.

6.3 Tích của một véc-tơ với một số

6.3.1 Tích của một véc-tơ với một số

Định nghĩa 6.6. *Tích của một véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k \neq 0$ là một véc-tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.*

- *Nếu $k > 0$ thì $k\vec{a}$, cùng hướng với véc-tơ $\vec{a}$.*
- *Nếu $k < 0$ thì $k\vec{a}$, ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$.*



Lưu ý 6.3. *Người ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.*

6.3.2 Các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số

Định lý 6.5. *Với hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k, t, ta luôn có*

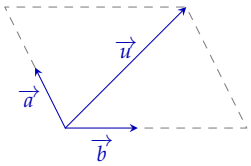
a) $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
b) $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
c) $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
d) $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Định lý 6.6.

- *Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.*
- *Cho tam giác ABC, điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.*

Định lý 6.7.

Cho hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó, mọi véc-tơ $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một các duy nhất theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số (x, y) sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



Lưu ý 6.4. *Một số kết quả quan trọng thường dùng,*

a) Nếu M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, thì $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, thì $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, trong đó x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB.

BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH VÉC-TƠ TÍCH, TÍNH ĐỘ DÀI VÉC-TƠ

Bài tập 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AG}$.

Bài tập 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a, I là trung điểm của cạnh BC. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Bài tập 4. Trên đoạn thẳng AB, gọi C là trung điểm AB và D là điểm đối xứng của C qua A. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. b) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$.

Bài tập 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC. Tính độ dài $\overrightarrow{MN}$.

Bài tập 6. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$, $BD = a$. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ, THU GỌN BIỂU THỨC

Bài tập 7. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG}$.

Bài tập 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=9\overrightarrow{AG}$.

Bài tập 9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

Bài tập 10. Cho tam giác ABC. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho $AM=\dfrac{1}{3}AB$, $BN=\dfrac{1}{3}BC$, $CP=\dfrac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$.

Bài tập 11. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Bài tập 12. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN=2MN$. Chứng minh rằng

a) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}$,

b) $4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{AN}$.

Bài tập 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{OD}$.

Bài tập 14. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}.$$

Bài tập 15. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD và MN. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}$,

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

Bài tập 16. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh

a) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

b) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

c) $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

e) $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

Bài tập 17. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.

Bài tập 18. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

Bài tập 19. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Đặt $S_{MBC}=S_a$, $S_{MCA}=S_b$, $S_{MAB}=S_c$. Chứng minh rằng

$$S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}.$$

XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

Bài tập 20. Cho hai điểm A và B. Xác định điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$.

Bài tập 21. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC, sao cho $NC=2NA$. Hãy xác định K và D khi

a) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{0}$.

b) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{0}$.

Bài tập 22. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$.

Bài tập 23. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha+\beta\neq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$.

Bài tập 24. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$. b) Chứng minh $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$.

Bài tập 25. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

b) Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Bài tập 26. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho đẳng thức véc-tơ sau thỏa mãn với mọi điểm M.

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$. b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MK}$

Bài tập 27. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm.

BIỂU DIỄN VÉC-TƠ THEO HAI VÉC-TƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

Bài tập 28. Cho $\triangle ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm của BC. Hãy biểu diễn các véc-tơ

a) $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. b) $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 29. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M là trung điểm BC.

a) Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. b) Hãy biểu diễn $\overrightarrow{OD}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DM}$.

Bài tập 30. Cho tam giác ABC. Gọi H là điểm đối xứng của B qua trọng tâm G và M là điểm thoả $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. b) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. c) Tính $\overrightarrow{MH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 31. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của đoạn AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 32. Cho hình bình hành $ABCD$, M và N là hai điểm lần lượt thuộc AB, CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN.

a) Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 33. Cho ΔABC, gọi I, J là 2 điểm thoả $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$, $5\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. b) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$.

Bài tập 34. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, lấy M, N thoả $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Tính $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c) Kéo dài AG cắt BC tại I. Chứng minh C là trung điểm IN và tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AN}$.

Bài tập 35. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm 2 đường chéo, $BI = IO$, G là trọng tâm $\Delta\, OCD$. Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Bài tập 36. Cho tam giác ABC. Lấy M, N lần lượt là trung điểm AB, BC, L là điểm thoả $2\overrightarrow{LA} + 5\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{BL}$ theo $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. b) Tính $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{ML}$ theo $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Bài tập 37. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Bài tập 38. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{EC}$ (với $k \neq 1$).

a) Biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Điểm F, I thỏa mãn $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA}$. Chứng minh $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$.

Bài tập 39. Cho $\triangle ABC$ có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN. Hãy tính các véc-tơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 40. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC. Hãy tính véc-tơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 41. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0}$. Phân tích $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 42. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Hãy tính các véc-tơ sau theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm của $\overrightarrow{BO}$.

b) $\overrightarrow{BG}$ với G là trọng tâm $\triangle OCD$.

Bài tập 43. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP. Hãy biểu thị các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

Bài tập 44. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI$, $5JB = 2JC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 45. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm của BC. Hãy tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 46. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP. Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P.

a) Hãy biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$, $\overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

Bài tập 47. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD. Hãy biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.

Bài tập 48. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC. Hãy biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.

Bài tập 49. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B.

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

Bài tập 50. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

Bài tập 51. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$. Tính $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

THẲNG HÀNG, SONG SONG VÀ ĐỒNG QUY

Bài tập 52. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

Bài tập 53. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

Bài tập 54. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 55. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và chứmg minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

Bài tập 56. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$, $2\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{0}$

b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

Bài tập 57. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và E là điểm thoả hệ thức $3\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{ID}$. Chứmg minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Bài tập 58. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$ và $2\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{0}$

b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

Bài tập 59. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 60. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

Bài tập 61. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Bài tập 62. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Bài tập 63. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD. Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Bài tập 64. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM. Trên AB lấy điểm I, AC lấy điểm J sao cho $\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

Bài tập 65. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi O là giao điểm của MP và NQ, G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

Bài tập 66. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

b) Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên IJ.

Bài tập 67. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R là các điểm thỏa các đẳng thức $3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QC}$, $k\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RB}$, $k\neq 1$.

a) Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{BC}+7\overrightarrow{BA}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP}=\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{BA}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

c) Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

Bài tập 68. Cho hình bình hành $ABCD$,

a) Gọi I, F, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\beta\vec{AC}$, $\overrightarrow{AK}=\gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là $\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0)$.

b) Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH}=k\cdot\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và k. Tìm k để đường thẳng AH đi qua điểm G.

Bài tập 69. Cho $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$. Chứng minh rằng: A, B, C thẳng hàng.

Bài tập 70. Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy D, E thoả $BD=DE=EC$. Gọi I là trung điểm BC. S là điểm thoả $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$. Chứng minh 3 điểm I, S, A thẳng hàng.

Bài tập 71. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và 2 điểm M, N thoả $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$ và $3\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{MG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Suy ra 3 điểm M, N, G thẳng hàng.

Bài tập 72. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm M, N, P sao cho: $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0}$

a) Tính $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 73. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm AM và K là một điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh 3 điểm B, I, K thẳng hàng.

Bài tập 74. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là 2 điểm trên cạnh BC, BD sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Chứng minh A, K, H thẳng hàng.

Bài tập 75. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thoả $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}$ và N, I lần lượt là trung điểm AB, MN. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$ và $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

b) Gọi E là trung điểm BC. Chứng minh 3 điểm A, I, E thẳng hàng.

Bài tập 76. Cho hình bình hành $ABCD$ và 2 điểm E, F thoả $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{0}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BEF.

a) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi I là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Từ đó suy ra giá trị của k để A, G, I thẳng hàng.

Bài tập 77. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm 2 đường chéo AC và BD. H và K là 2 điểm thoả $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$.

a) Tính $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Suy ra 3 điểm A, H, K thẳng hàng.

b) Cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

TÌM ĐIỂM THOẢ ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ (ĐẲNG THỨC TÂM TỈ CỰ)

Định lý 6.8. *Cho n điểm $A_1, A_2, \cdots, A_n$ và bộ số $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm G sao cho*

$$k_1 \cdot \overrightarrow{GA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{GA_2} + \cdots k_n \cdot \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0},$$

Điểm G được gọi là tâm tỉ cự của các điểm $\{A_i\}_{i=1,\cdots,n}$.

Định lý 6.9. *Nếu G là tâm tỉ cự của họ điểm $\{A_i\}_{i=1,\cdots,n}$ thì với mọi điểm O ta có*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\left(k_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \cdots + k_n \cdot \overrightarrow{OA_n}\right).$$

Khi $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ thì G là trọng tâm của họ điểm $\{A_i\}_{i=1,\cdots,n}$.

Bài tập 78. Cho tam giác ABC, xác định các điểm M, N, biết:

a) $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$ b) $3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{0}$ c) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC}$

Bài tập 79. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Hãy xác định các điểm I, J, K thoả:

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{ID}$ b) $2\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JD}$ c) $2\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$

Bài tập 80. Cho tam giác ABC và 3 số α, β, γ.

a) Nếu $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I thoả: $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.(Điểm I này được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $(\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C)$.

b) Nếu $\alpha + \beta + \gamma = 0$ thì với mọi điểm I véc-tơ $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC}$ là véc-tơ hằng.

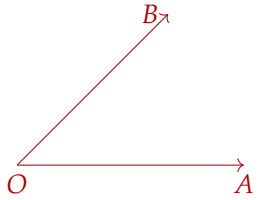
Bài tập 81. Cho tam giác ABC, và đường thẳng d cố định. Tìm M thuộc d sao cho các véc-tơ sau có độ dài nhỏ nhất:

a) $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ b) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ c) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ d) $\overrightarrow{t} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

6.4 Tích vô hướng của hai véc-tơ

6.4.1 Góc giữa hai véc-tơ

Định nghĩa 6.7.
Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó số đo của góc $\widehat{AOB}$ được gọi là số đo góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ hay đơn giản là góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Kí hiệu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \widehat{AOB}$.



Lưu ý 6.5.

- *Quy ước rằng góc $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180°.*
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ *cùng hướng.*
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ *ngược hướng.*
- *Nếu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi véc-tơ.*

6.4.2 Tích vô hướng của hai véc-tơ

Định nghĩa 6.8. *Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Lưu ý 6.6.

- *Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*
- *$\vec{a} \cdot \vec{a}$ còn được viết là $\vec{a}^2$ được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{a}$. Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.*

BÀI TẬP

TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG, GÓC CỦA HAI VÉC-TƠ

Bài tập 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^\circ$. Hãy tính các góc

a) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$; b) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$; c) $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$;

d) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$; e) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$; f) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

Bài tập 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G. Tính các tích vô hướng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; c) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}$;

d) $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$; e) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GA}$; f) $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$. b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$. d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$. f) $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$.

Bài tập 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\right)$. b) $\overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}\right)$.

Bài tập 5. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

Bài tập 6. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = a$ và AH là đường cao. Tính các tích vô hướng sau

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài tập 7. Cho tam giác ABC đều cạnh a và AM là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

a) $\overrightarrow{AC}\left(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right)$; b) $\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$; c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$; d) $\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

Bài tập 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}, AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.

a) Phân tích $\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$. b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Bài tập 9. Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, BC = 7$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Bài tập 10. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Bài tập 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC. Biết rằng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{a^2}{2}$. Hãy tính AB, AC.

Bài tập 12. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc-tơ đó bằng 60°. Xác định cosin góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Bài tập 13. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài tập 14. Cho các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ và $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60^\circ$. Tính góc giữa véc-tơ $\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Bài tập 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$; G là trọng tâm tam giác ADM. Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$.

Bài tập 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = a$, $AD = b$. Tính theo a, b các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$;

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ với điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TÍCH VÔ HƯỚNG HAY ĐỘ DÀI

Bài tập 17. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$. b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2\right)$

Bài tập 18. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

Bài tập 19. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, M là điểm bất kì. Chứng minh

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$; b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ (2).

Bài tập 20. Cho $\triangle ABC$, chứng minh $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

Bài tập 21. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH, Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài tập 22. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Bài tập 23. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mỗi điểm M ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Bài tập 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, M là điểm bất kì. Chứng minh $MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$.

Bài tập 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Chứng minh rằng với mọi M thuộc đường tròn (O) ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 8R^2$.

Bài tập 26. Chứng minh rằng với mọi điểm A, B, C, M ta luôn có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. (hệ thức Euler).

Bài tập 27. Cho $\triangle ABC$ các đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Bài tập 28. Cho $\triangle ABC$ đường cao AH, trung tuyến AI. Chứng minh rằng $\left|AB^2 - AC^2\right| = 2BC \cdot HI$.

ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC

Bài tập 29. Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ vuông góc với nhau và $\left|\overrightarrow{a}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{2}$. Chứng minh hai véc-tơ $\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)$ và $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$ vuông góc với nhau.

Bài tập 30. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ theo b và c.

Bài tập 31. Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = 1$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{u} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$.

TẬP HỢP ĐIỂM VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Lưu ý 6.7. *Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:*

a) Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động
- *Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R = k$.*
- *Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.*
- *Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{a} = 0$ với $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\overrightarrow{a}$.*

b) Các bất đẳng thức vectơ
- *$\overrightarrow{a}^2 \geq 0 \; \forall \overrightarrow{a}$. Dấu "=" xảy ra khi $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.*
- *$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \leq |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$. Dấu "=" xảy ra khi $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$, $k > 0$.*

Bài tập 32. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\overrightarrow{a}$ khác $\overrightarrow{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \dfrac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Bài tập 33. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC} = 0$.

Bài tập 34. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$. b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$.

Bài tập 35. Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau

a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. b) $MA^2 + 2MB^2 = k, k > 0$. c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{a} = k$.

Bài tập 36. Cho tứ giác $ABCD$, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \dfrac{1}{2}IJ^2$.

Bài tập 37. Cho tam giác ABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc $\widehat{BAC}$ sao cho $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$, trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC.

Bài tập 38. Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$.

Bài tập 39. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

Bài tập 40. Cho tam giác ABC và các số thực x, y, z. Chứng minh rằng

$$xy\cos A + yz\cos B + zx\cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Chương 7

Hàm số, đồ thị và ứng dụng

7.1 Bất phương trình bậc hai

7.1.1 Dấu của tam thức bậc hai

Định lý 7.1. *Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$,*

- *Trường hợp $\Delta < 0$: $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbb{R}$.*

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	*Cùng dấu với a*	

- *Trường hợp $\Delta = 0$: $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.*

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	*Cùng dấu với a*		0	*Cùng dấu với a*	

- *Trường hợp $\Delta > 0$: Giả sử $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	*Cùng dấu với a*	0	*Trái dấu với a*	0	*Cùng dấu với a*		

Lưu ý 7.1. *Câu nhớ: "Trong trái, ngoài cùng".*

BÀI TẬP

LẬP BẢNG XÉT DẤU BIỂU THỨC

Bài tập 1. Lập bảng xét dấu của các hàm số sau.

a) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

b) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$.

c) $f(x) = x^2 + x + 1$.

d) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$.

e) $f(x) = x^2 - x - 12$.

f) $f(x) = (4 - 2x)\left(x^2 - 5x + 4\right)$.

g) $f(x) = (2x - 1)\left(x^2 - x - 6\right)$.

h) $f(x) = (4 - 2x)\left(x^2 - 5x + 4\right)$.

i) $f(x) = \left(-x^2 + x + 2\right)(1 - 3x)$.

j) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{4x - x^2}$.

Bài tập 2. Lập bảng xét dấu của các hàm số sau

a) $f(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 8x + 15\right)$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{4x - x^2}$.

c) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + x - 6}$.

d) $f(x) = \dfrac{(2x - 1)\left(3x - x^2\right)}{x^2 + x - 2}$.

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-7x+12}-\dfrac{1}{x^2-5x+4}$.

7.1.2 Bất phương trình bậc hai

Định nghĩa 7.1. *Bất phương phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có dạng $ax^2+bx+c>0$ hoặc $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ trong đó a,b,c là các số thực đã cho và $a\neq 0$.*

- *Số x_0 là nghiệm bất phương trình $ax^2+bx+c>0$ nếu $ax_0^2+bx_0+c>0$.*
- *Tập hợp tất cả các bất phương trình bậc hai gọi là tập nghiệm của bất phương trình này.*
- *Giải bất phương trình là đi tìm tập nghiệm của nó.*

Phương pháp giải 7.1. *Để giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c>0$ ta thực hiện như sau*

- *Giải phương trình $ax^2+bx+c=0$ tìm nghiệm;*
- *Lập bảng xét dấu $f(x)=ax^2+bx+c$;*
- *Dựa vào dấu của $f(x)$ và bất phương trình ta kết luận nghiệm.*

BÀI TẬP

GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài tập 3. Lập bảng xét dấu. Giải các bất phương trình sau

a) $x^2-4x+3\geq 0$.

b) $x^2+4x+3\leq 0$.

c) $x^2-4x+3\geq 2x-1$.

d) $3x^2-4x+3\leq 2(x^2-1)$.

e) $(2x+4)(x^2+5x+4)\leq 0$.

f) $(x^2-x+1)(x^2+5x+4)\leq 0$.

g) $(x^2-2x-3)^2\geq(3x-3)^2$.

h) $x^3-6x^2+11x-6\geq 0$.

Bài tập 4. Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+1}\leq 2$.

b) $\dfrac{x^2+6x+9}{2x^2-x-1}>0$.

c) $\dfrac{3x-3}{15-2x-x^2}\geq 0$.

d) $\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-2x+1}\leq 0$.

e) $\dfrac{(1-2x)(x^2+2x+1)}{x-x^2}<0$.

f) $\dfrac{(x-4)(-2x^2+x-1)}{x^2+3x+2}\geq 0$.

Bài tập 5. Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{x-1}{x+1}\leq x+5$.

b) $\dfrac{x^2+3x-1}{2-x}\geq -x$.

c) $\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}\leq x-3$.

d) $\dfrac{x+2}{3x+1}>\dfrac{x-2}{2x-1}$.

e) $\dfrac{x+1}{x-1}+2>\dfrac{x-1}{x}$.

f) $\dfrac{x+2}{x-3}+\dfrac{1}{x-1}\geq -3$.

g) $\dfrac{x+1}{x^2-x+1}\geq\dfrac{6}{2x+1}$.

h) $\dfrac{2-x}{x^3+x^2}\geq\dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CHỨA THAM SỐ

Lưu ý 7.2. *Cho $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$, khi đó*

- $f(x)>0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$.
- $f(x)<0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$.

Trường hợp a có chứa tham số ta cần xét hai trường hợp ($a=0$ và $a\neq 0$).

Bài tập 6. Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

a) $x^2 - mx + m + 3 \geq 0$.

b) $-x^2 - 2(m+1)x - 2m - 2 < 0$.

c) $-x^2 + 2(1-m)x - 9 \leq 0$.

d) $x^2 + (m+3)x + 4 \geq 0$.

e) $x^2 + 2(m-1)x + m + 5 > 0$.

f) $mx^2 - mx - 5 < 0$.

Bài tập 7. Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) $mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 > 0$.

b) $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) \leq 0$.

c) $mx^2 + 2(m-1)x + m - 1 < 0$.

d) $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m - 6 \geq 0$.

e) $(m-4)x^2 + (m+1)x + 2m - 1 \leq 0$.

f) $(m+1)x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 6m + 11 > 0$.

g) $mx^2 - 2(m+3)x + m - 5 > 0$.

h) $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m \leq 0$.

Bài tập 8. Định m để các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $x^2 + 6x + m + 7 \leq 0$.

b) $x^2 + 2(m+2)x - m - 2 \leq 0$.

c) $-x^2 + 2(m-1)x + 1 \geq 0$.

d) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 > 0$.

e) $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 3m - 3 \geq 0$.

f) $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + 3m - 6 \geq 0$.

g) $(3-m)x^2 - 2(m+3)x + m + 2 \geq 0$.

h) $(m-3)x^2 + (m-3)x + 2m - 3 \geq 0$.

Bài tập 9. Định m để các bất phương trình sau có nghiệm

a) $-x^2 + 3x - m + 1 < 0$.

b) $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 \geq 0$.

Bài tập 10. Định m để các hàm số sau xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

a) $y = \sqrt{(m+1)x^2 + 2(m-1)x + 3m - 3}$.

b) $y = \sqrt{(1-m)x^2 + 2(m-1)x + 4m - 3}$.

Bài tập 11. Cho $f(x) = x^2 + 2(m+1)x - m + 3 \geq 0$. Định m để $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

Bài tập 12. Cho $f(x) = mx^2 - 2(m-2)x + 1$. Định m để $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq -2$.

Bài tập 13. Định m để bất phương trình $x^2 - (m^2 + m + 2)x + m^3 + 2m \leq 0$ có nghiệm $\forall x \in [2;5]$.

Bài tập 14. Cho $f(x) = mx^2 - 2(m-2)x + 1$

a) Tìm m để $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$.

b) Tìm m để $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq -2$.

Bài tập 15. Định m để bất phương trình $(x^2 - 4x - 5)\sqrt{x^2 - 2x + m} < 0$ vô nghiệm.

Bài tập 16. Định m để bất phương trình sau đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) $-9 < \dfrac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$.

b) $\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{x^2 - mx + 1}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{3}{2}$.

c) $\left|\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1}\right| \leq 2$.

d) $\left|\dfrac{mx^2 - 2x + 3}{2x^2 + 1}\right| \leq 1$.

e) $\dfrac{(m-1)x^2 - 2(m-3)x + m + 1}{-x^2 + 3x - 4} \leq 0$.

f) $\dfrac{(m+1)x^2 - (m-1)x + 3m + 6}{x^2 - x + 2} > 0$.

7.2 Phương trình quy về phương trình bậc hai

7.2.1 Phương trình chứa căn thức bậc hai

Phương pháp giải 7.2. *Để giải phương trình $\sqrt{A}=B$ và $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ ta thực hiện như sau*
- *Bình phương hai vế để khử căn, sau đó tìm nghiệm,*
- *Thế nghiệm vừa tìm được vào phương trình ban đầu để xem thỏa mãn hay không, sau đó kết luận nghiệm.*

BÀI TẬP

Bài tập 1. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3x^2-4x-1}=\sqrt{2x^2-4x+3}$.

b) $\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{-2x^2+5}$.

c) $\sqrt{2x^2+3x-3}=\sqrt{-x^2-x+1}$.

d) $\sqrt{-x^2+4x-4}=\sqrt{-2x^2+4x+2}$.

Bài tập 2. Tìm điều kiện xác định và giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+1}+x=3-2\sqrt{x+1}$.

b) $\sqrt{x-5}-x=2+3\sqrt{x-5}$.

c) $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{8}{\sqrt{x+1}}$.

d) $1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x-2}$.

e) $\sqrt{x+1}=x+1$.

f) $x^2-\sqrt{2-x}=3+\sqrt{x-4}$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{6x^2+13x+13}=2x+4$.

b) $\sqrt{2x^2+5x+3}=-x-3$.

c) $\sqrt{3x^2-17x+23}=x-3$.

d) $\sqrt{-x^2+2x+4}=x-2$.

e) $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$.

f) $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x-3}=x-3$.

b) $\sqrt{5x+10}=8-x$.

c) $x-\sqrt{2x-5}=4$.

d) $\sqrt{x^2+x-12}=8-x$.

e) $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$.

f) $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$.

g) $\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2|$.

h) $\sqrt{x^2-3x-10}=x-2$.

i) $(x-3)\sqrt{x^2+4}=x^2-9$.

j) $\sqrt{-x^2+4x-3}=2x+5$.

Bài tập 5. Giải các phương trình sau

a) $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$.

b) $\sqrt{(x-3)(8-x)}+26=-x^2+11x$.

c) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

d) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

e) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

f) $x^2-2x-3-4\sqrt{(4-x)(x+2)}=0$.

Bài tập 6. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$.

b) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$.

c) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

d) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

Bài tập 7. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{(x+3)(6-x)}$.

b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}-16$.

c) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x-1)(3-x)}=1$.

d) $\sqrt{7-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{(7-x)(2+x)}=3$.

e) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$.

f) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

Chương 8

Đại số tổ hợp

8.1 Quy tắc cộng, Quy tắc nhân

Định lý 8.1. *Một công việc có m cách thực hiện này hay n cách thực hiện kia thì có $(m+n)$ cách thực hiện.*

Định lý 8.2. *Một công việc có m cách thực hiện giai đoạn đầu và n cách thực hiện giai đoạn sau thì có $m.n$ cách thực hiện công việc đó.*

BÀI TẬP

Bài tập 1. Một hộp đựng 10 viên bi trắng, 8 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Một em bé muốn chọn 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Bài tập 2. Có 6 quyển sách Toán, 5 quyển sách Lý, 4 quyển sách Hóa. Một học sinh chọn 1 quyển bất kì trong 3 loại trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Bài tập 3. Từ thành phố A đến thành phố B có thể đi bằng đường bộ, đường thủy hoặc đường hàng không. Giả sử có 2 cách đi đường bộ, 3 cách đi đường thủy và 4 cách đi đường hàng không. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách đi từ A đến B.

Bài tập 4. Trong đội văn nghệ có 8 nam và 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một đôi song ca nam nữ.

Bài tập 5. Trong một trường THPT, khối 11 có 10 học sinh nam và 3 học sinh nữ.

a) Có bao nhiêu cách chọn 1 học sinh ở khối 11 đi dự đại hội.

b) Có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh đi dự đại hội trong đó có 1 nam và 1 nữ.

Bài tập 6. Đề thi học kì môn Hóa có hai phần trắc nghiệm và tự luận. Trong ngân hàng đề thi có 10 đề trắc nghiệm và 8 đề tự luận. Vậy có bao nhiêu cách để ra đề.

Bài tập 7. Từ một đội công tác gồm 20 người cần cử ra một ban lãnh đạo gồm một đội trưởng, một đội phó và một kế toán. Hỏi có bao nhiêu cách cử.

Bài tập 8. Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Hỏi 1 người đi chợ

a) Có mấy cách vào và ra chợ.

b) Có mấy cách vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau.

Bài tập 9. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho

a) Các chữ số tùy ý

b) Các chữ số khác nhau

Bài tập 10. Từ các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó

a) Chữ số đầu tiên là số 6

b) Chữ số tận cùng không phải là 6

Bài tập 11. Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau lập nên từ các chữ số $2, 3, 4, 5, 6$. Hỏi trong đó có bao nhiêu số

a) Bắt đầu bằng chữ số 3

b) Bắt đầu bằng 23

c) Không bắt đầu bằng 2

d) Chia hết cho 5

e) Có hai chữ số 4 và 5 đứng gần nhau

f) Không bắt đầu bằng 246.

Bài tập 12. Từ 5 chữ số $0, 1, 3, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.

Bài tập 13. Từ 5 chữ số $0, 1, 3, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số

a) Lẻ có hai chữ số khác nhau

b) Chẵn có hai chữ số khác nhau

c) Gồm ba chữ số khác nhau lớn hơn 300.

d) Gồm ba chữ số khác nhau nhỏ hơn 400.

Bài tập 14. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 10

a) Gồm 4 chữ số khác nhau

b) Gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó có đúng một chữ số 1

c) Gồm 6 chữ số khác nhau luôn bắt đầu bởi 123

Bài tập 15. Có bao nhiêu số tự nhiên

a) Có 5 chữ số mà cả 5 chữ số đều chẵn

b) Có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau.

Bài tập 16. Từ những chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu

a) Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau.

b) Số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau.

Bài tập 17. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn chia hết cho 5

a) Có 4 chữ số

b) Có 5 chữ số khác nhau

Bài tập 18. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 14

Bài tập 19. Với các chữ số$1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau sao cho số 1và số 5

a) Luôn đứng cạnh nhau

b) Không bao giờ đứng cạnh nhau

Bài tập 20. Các số sau đây có bao nhiêu ước nguyên dương

a) 80 b) 90 c) 360 d) 648

Bài tập 21. Đặt $B = 12960$. Hỏi B có tất cả bao nhiêu ước số x chia hết cho 18 nhưng không chia hết cho 5?

Bài tập 22. Có bao nhieu số lẻ gồm 3 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600.

Bài tập 23. Có thể lập ra được bao nhiêu số điện thoại di động có 10 chữ số bắt đầu là 0908, các chữ số còn lại khác nhau đôi một, khác với 4 chữ số đầu và phải có mặt chữ số 6.

Bài tập 24. Có bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau lớn hơn 5000.

Bài tập 25. Cho $A = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Có bao nhiêu ố gồm 5 chữ số lấy ra từ A

a) Biết rằng hai chữ số kề nhau thì khác nhau.

b) Chữ số đầu và cuối khác nhau.

Bài tập 26. Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7 có thể lâp được bao nhiêu số gồm 4 chữ số, trong đó

a) Có đungs 1 chữ số 1.

b) Có đúng 1 chữ số 1 và các chữ số khác nhau

Bài tập 27. Từ các phần tử trong tập $X = 1, 3, 5, 7, 9$ có thể lập được bao nhiêu

a) Số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau

b) Số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 3

Bài tập 28. Có bao nhiêu số điện thoại có

a) 6 chữ số khác nhau

b) 6 chữ số và chữ số đầu tiên bằng 1

c) 6 chữ số khác nhau trong đó 3 chữ số đầu có ít nhất một số là 1

Bài tập 29. Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có bao nhiêu số

a) Có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 9

b) Có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 4.

c) Có 3 chữ số khác nhau và không chia hết cho 3.

Bài tập 30. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số sao chho tổng các chữ sô của mỗi số là số lẻ.

8.2 Hoán vị. Tổ hợp. Chỉnh hợp

8.2.1 Hoán vị và công thức số hoán vị của n phần tử

Định nghĩa 8.1. *Mỗi cách sắp xếp n phần tử vào n chỗ gọi là hoán vị.*

Định lý 8.3.

- *Người ta chứng minh được số cách xếp n phần tử vào n vị trí là* $P_n = 1 \cdot 2 \cdots n = n!$
- ***Qui ước*** $0! = 1$.

BÀI TẬP

Bài tập 1. Có 10 người xếp vào M cái ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

Bài tập 2. Có bao nhiêu cách xếp n người vào n chiếc ghế thành hàng ngang?

Bài tập 3. Có 6 con tem khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách dán 6 con tem lên 6 bì thư đã cho, biết rằng mỗi con tem chỉ dán trên một bì thư.

Bài tập 4. Xếp 5 nam, 5 nữ vào hai dãy ghế mà mỗi dãy có 5 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu

a) Xếp tùy ý?

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế?

Bài tập 5. Cần xếp 5 học sinh A, B, C, D, E thành một hàng ngang.

a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

b) Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho 2 học sinh A và B luôn đứng ở đầu hàng?

Bài tập 6. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ vào 10 ghế được kê thành hàng ngang sao cho

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ?

b) Đầu hàng là nữ, cuối hàng là nam?

Bài tập 7. Có 4 quyển sách Toán, 5 quyển sách Lý, 6 quyển sách Hóa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp số sách trên kệ dài sao cho

a) Các quyển sách được xếp tùy ý.

b) Các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau.

Bài tập 8. Một lớp có 10 học sinh trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh trên thành một hàng dọc sao cho 7 học sinh nam phải đứng liền nhau?

Bài tập 9. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi 10 bạn vào 10 ghế thành hàng ngang sao cho

a) An và Bình ngồi cạnh nhau.

b) An và Bình không ngồi canh nhau

Bài tập 10. Xếp 4 nam, 2 nữ và 1 em bé ngồi vào một dãy có 7 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu em bé phải ngồi giữa hai nữ?

Bài tập 11. Có 2 đàn ông, 5 phụ nữ và 4 em nhỏ xếp vào 1 hàng ngang 11 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu em bé phải ngồi giữa 2 phụ nữ?

Bài tập 12. Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh trường A, 4 học sinh trường B, 3 học sinh trường C đứng cùng một hàng sao cho các học sinh cùng trường đứng cạnh nhau?

Bài tập 13. Có bao nhiêu cách xếp 4 người vào 4 ghế quanh 1 bàn tròn nếu không có sự khác biệt giữa các ghế này?

Bài tập 14. Một khay tròn đựng bánh kẹo ngày tết có 6 ngăn hình quạt màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bày 6 loại bánh kẹo vào 6 ngăn đó?

Bài tập 15. Có bao nhiêu cách xếp n người vào n ghế quanh một bàn tròn nếu không có sự khác biệt giữa các ghế này?

Bài tập 16. Một bàn tròn có 6 chỗ ngồi được đánh số thứ tự. Hỏi có mấy cách xếp ngươi sao cho

a) A và B luôn ngồi cạnh nhau

b) A và B không ngồi cạnh nhau

Bài tập 17. Một hội nghị bàn tròn có các phái đoàn của các nước trong đó có 5 người Mỹ, 5 người Nga, 4 người Anh, 4 người Pháp 4 người Đức Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch ngồi cạnh nhau?

Bài tập 18. Có bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số khác nhau?

Bài tập 19. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$từ A có thể lấp được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau sao cho 2 chữ số chẵn không nằm liền nhau?

Bài tập 20. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên sao cho

a) Có 5 chữ số khác nhau?

b) Tính tổng các số này.

c) Có 5 chữ số khác nhau và chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

Bài tập 21. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số sao cho

a) Số 1 và 2 luôn đứng cạnh nhau

b) Số 1 và 2 không bao giờ đứng cạnh nhau

Bài tập 22. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Có 6 chữ số khác nhau? Và tính tổng của chúng.

b) Có 6 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

c) Là số chẵn và có 6 chữ số khác nhau?

Bài tập 23. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau? Tính tổng các số tự nhiên đó.

Bài tập 24. Cần xếp 3 nữ sinh và 5 nam sinh thành một hàng dọc.

a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu 3 nữ sinh luôn đứng cạnh nhau?

b) Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu đứng đầu hàng là nữ sinh và cuối hàng là nam sinh.

Bài tập 25. Có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để không có hai học sinh cùng giới ngồi cạnh nhau.

Bài tập 26. Có 4 nữ sinh là Huệ, Oanh, Lan, Nhã và 4 nam sinh là An, Bình, Khoa, Hải cùng ngồi quanh một bàn tròn 8 chỗ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau.

b) Hỏi có bao nhiêu cách xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau nhưng Oanh và Khoa không chịu ngồi cạnh nhau.

Bài tập 27. Có hai dãy ghế đối diện, mỗi dãy 6 ghế. Muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B có bao nhiêu cách xếp sao cho

a) Người ngồi cạnh và người ngồi đối diện phải khác trường.

b) Người đối diện phải khác trường.

8.2.2 Chỉnh hợp. Công thức số chỉnh hợp chập k của n phần tử

Định nghĩa 8.2. *Cho tập $\mathscr{A}$ có n phần tử. Lấy k $(k \leq n)$ phần tử thuộc $\mathscr{A}$ và có sắp thứ tự thì ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử.*

Định lý 8.4.

- *Số cách xếp k phần tử vào n vị trí $(n \geq k)$ là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.*
- *Nếu $k = n$ thì chỉnh hợp chập n của n phần tử gọi là hoán vị.*

BÀI TẬP

Bài tập 28. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.

Bài tập 29. Từ các chữ số $1, 3, 5, 7, 9$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.

Bài tập 30. Từ các chữ số $0, 1, 3, 5, 7, 9$ có thể lập được bao nhiêu có 4 chữ số khác nhau trong đó luôn có mặt

a) Chữ số 5.

b) Chữ số 0.

Bài tập 31. Một dãy ghế dành cho 3 người. Có bao nhiêu cách xếp sao cho 3 người đó ngồi kề nhau.

Bài tập 32. Trong mặt phẳng cho 10 điểm phân biệt, có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp đã cho.

Bài tập 33. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Chẵn và có 4 chữ số khác nhau.

b) Lẻ và có 5 chữ số khác nhau.

Bài tập 34. Cho tập hợp $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$.Có bao nhiêu cách lập ra một số có 3 chữ số khác nhau từ A sao cho

a) Số tạo thành là số chẵn

b) Số tạo thành là số không có mặt chữ số 4.

c) Số tạo thành nhỏ hơn 378.

Bài tập 35. Xếp 3 nam, 2 nữ ngồi vào 8 ghế, có bao nhiêu cách nếu

a) Xếp tùy ý.

b) 5 người ngồi kề nhau.

Bài tập 36. Có bao nhiêu cách xếp 4 nam và 3 nữ vào 9 ghế sao cho 3 ghế đầu tiên là nam?

Bài tập 37. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ mà các số đó nhỏ hơn 345?

Bài tập 38. Từ các số $1,2,3,4,5$. Có bao nhihêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau nếu

a) Phải có mặt chữ số 1.

b) Phải có mặt hai chữ số 1 và 2.

Bài tập 39. Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5,6,7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và phải có mặt chữ số 4.

Bài tập 40. Cho tập hợp $X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau nếu

a) Các số này phải có mặt hai chữ số 1 và 2 .

b) Phải có chữ số 1, chữ số 2, chữ số 3 và chúng đứng cạnh nhau.

Bài tập 41. Từ các số $0,1,2,3,4,5$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau không bắt đầu bằng 123.

Bài tập 42. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau đôi một và nhỏ hơn 3500?

Bài tập 43. Từ các số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt mà tổng của 3 chữ số là một số lẻ?

Bài tập 44. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ trong khoảng $(2000;3000)$ được tạo nên từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ nếu các chữ số của nó không nhất thiết phải khác nhau?

Bài tập 45. Cho tập hợp $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ tập A sao cho

a) Số đó là số chẵn.

b) Só đó có một trong ba chữ số đầu bằng 1.

Bài tập 46. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 6 chữ số khác nhau biết chữ số đầu tiên là số lẻ.

Bài tập 47. Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ ta có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau

a) Trong đó mặt chữ số 2.

b) Trong đó phải có mặt chữ số 1 và 6.

Bài tập 48. Có bao nhiêu số có 7 chữ số khác nhau và 2 chữ số chẵn không đứng cạnh nhau.

Bài tập 49. Từ ba chữ số $4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số trong đó có mặt đủ 3 số trên.

Bài tập 50. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho không có số nào lặp lại đúng 3 lần.

Bài tập 51. Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số khác nhau sao cho

a) Các chữ số đứng bất kì. Tính tổng các chữ số đó.

b) Chữ số 9 đứng ở vị trí giữa.

c) Không chia hết cho 5.

d) Chữ số đầu tiên lớn hơn chữ số cuối cùng 5 đơn vị.

8.2.3 Tổ hợp. Công thức tổ hợp chập k của n phần tử

Định nghĩa 8.3. *Cho tập $\mathscr{A}$ có n phần tử. Lấy k $(k \le n)$ phần tử thuộc $\mathscr{A}$ và không sắp thứ tự thì ta được một tổ hợp chập k của n phần tử.*

Định lý 8.5. *Người ta chứng minh được số tổ hợp chập k của n phần tử là* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Hệ quả 8.1.

- *Đối xứng* $C_n^k = C_n^{n-k}$
- *Tăng bậc* $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Lưu ý 8.1. ***Chú ý*** *Chọn k phần tử từ n phần tử rồi xếp vào k vị trí là* $A_n^k = k!C_n^k$

BÀI TẬP

Bài tập 52. Một lớp có 40 học sinh trong đó có 25 nam và 15 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 7 học sinh đi dự đại hội sao cho

a) Không phân biệt nam nữ. b) Có 4 nam và 3 nữ. c) Có đúng 5 nam. d) Có đúng 5 nữ.

e) Tất cả đều là nam. f) Tất cả đều là nữ. g) Có ít nhất 2 nam. h) Có nhiều nhất 3 nữ.

Bài tập 53. Một chi đoàn có 8 đoàn viên nam và 4 đoàn viên nữ. Có bao nhiêu cách lập 1 tổ công tác gồm 7 người sao cho

a) Không phân biệt nam nữ. b) Có đúng 3 nữ. c) Ít nhất 3 nam. d) Luôn luôn có nữ.

Bài tập 54. Một tổ trực gồm 5 học sinh được chọn từ 25 nam và 20 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn tổ trực đó, sao cho trong tổ có cả nam và nữ, đồng thời số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ.

Bài tập 55. Một đoàn tàu có 3 toa khách đỗ ở ga. Có 3 hành khách bước lên tàu. Hỏi có bao nhiêu khả năng trong đó có 2 hành khách cùng lên một toa, còn khách thứ 3 thì lên toa khác?

Bài tập 56. Có 90 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Họ gặp nhau và bắt tay nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bắt tay? Biết rằng hai người trong một cặp thì không bắt tay nhau.

Bài tập 57. Có tất cả bao nhiêu cặp vợ chồng thực hiện việc bắt tay lẫn nhau (tất nhiên mỗi người không bắt tay vợ hoặc chồng của mình) trong một buổi gặp mặt, biết rằng có tất cả 40 cái bắt tay.

Bài tập 58. Có bao nhiêu cách chia 12 học sinh thành 3 nhóm mỗi nhóm gồm 4 người sao cho

a) Các nhóm được đánh thứ tự là 1, 2 và 3.

b) Không phân biệt thứ tự các nhóm.

Bài tập 59. Có 3 viên bi trắng khác nhau, 4 bi xanh giống nhau và 5 bi đỏ giống nhau. Có bao nhiêu cách xếp chúng thành hàng ngang.

Bài tập 60. Có 2 viên bi trắng khác nhau, 3 viên bi xanh khác nhau, 4 bi đỏ giống nhau và 5 bi vàng giống nhau. Có bao nhiêu cách xếp chúng thành một hàng ngang.

Bài tập 61. Có 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách xếp chúng thành hàng ngang sao cho không có hai học sinh nữ nào đứng cạnh nhau.

Bài tập 62. Có bao nhiêu cách chia 12 học sinh ra thành 4 nhóm, mỗi nhóm gồm 3 người để làm lao động. Trong đó có 2 nhóm trồng cây và 2 nhóm làm vệ sinh sân trường(không phân biệt thứ tự các nhóm làm một công việc giống nhau).

Bài tập 63. Cho đa giác đều 10 cạnh

a) Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác.

b) Có bao nhiêu đường chéo của đa giác.

c) Có bao nhiêu tam giác chưa hai cạnh của đa giác.

d) Có bao nhiêu tam giác chứa đúng 1 cạnh của đa giác.

e) Có bao nhiêu tam giác không chưa cạnh nào của đa giác.

f) Có bao nhiêu hình bình hành mà cả 4 đỉnh đều là đỉnh của đa giác.

Bài tập 64. Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in N$ và $n \geq 3$. Tìm n biết đa giác đã cho có 27 đường chéo.

Bài tập 65. Tìm sô giao điểm tối đa của

a) 10 đường thẳng phân biệt

b) 5 đường tròn phân biệt.

c) 10 đường thẳng và 5 đường tròn phân biệt.

Bài tập 66. Cho đa giác lồi có n cạnh. Tìm n để số đường chéo bằng 2 lần số cạnh.

Bài tập 67. Cho đa giác lồi (H). Gọi t là số tam giác mà 3 đỉnh lấy từ các đỉnh của (H) và v là số vecto mà điểm đầu và điểm cuối cũng lấy từ các đỉnh của (H). Biết $\dfrac{t}{v} = \dfrac{4}{3}$. Hỏi đa giác (H) có bao nhiêu cạnh.

Bài tập 68. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 cho 8 điểm phân biệt và trên d_2 cho 9 điểm phân biệt.

a) Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là 3 trong số 17 điểm nói trên

b) Có bao nhiêu tứ giác lồi có đỉnh là 4 trong số 17 điểm nói trên.

Bài tập 69. Cho 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm I. Trên (d_1) ta lấy 17 điểm phân biệt (khác I), trên (d_1) ta lấy 20 điểm phân biệt (khác I). Hãy tìm số tam giác có thể tạo thành từ 38 điểm trên.

Bài tập 70. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó

a) Các chữ số giảm dần từ trái sang phải

b) Các chữ số tăng dần từ trái sang phải

Bài tập 71. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Bài tập 72. Có 7 món quà giá trị như nhau muốn tặng cho 3 học sinh A, B, C. Biết rằng trong 3 học sinh có một người nhận 3 món quà, hai người còn lại mỗi người nhận 2 món quà.

Bài tập 73. Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật cho ba người sao cho trong đó có một người nhận 2 đồ vật và hai người còn lại mỗi người nhận 3 đồ vật.

Bài tập 74. Cho phương trình $x + y + z + t = 1000$. Hỏi có bao nhiêu bộ (x, y, z, t) nguyên dương thảo phương trình trên?

Bài tập 75. Giám đốc một công ty muốn chọn một nhóm 5 người vào hội đồng tư vấn. Trong công ty có 12 người, trong đó có 2 cặp vợ chồng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu

a) Hội đồng được chọn có đúng 1 cặp vợ chồng.

b) Không được có cặp vợ chồng nào.

Bài tập 76. Một lớp có 25 học sinh, trong đó có 15 em khá Toán, 16 em khá Văn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh vừa khá Toán vừa khá Văn.

Bài tập 77. Có 10 bông hồng trắng, 8 bông hồng vàng. Chọn ra 6 bông sao cho có ít nhất là 2 bông trắng và 3 bông vàng. Có bao nhiêu cách?

Bài tập 78. Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và 4 chữ số còn lại là 2,3,4,5. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu

a) Năm chữ số 1 được xếp gần nhau.

b) Các chữ số được xếp tùy ý

Bài tập 79. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau biết tổng các chữ số của nó là số chẵn.

Bài tập 80. Một người có 6 bi xanh, 4 bi đỏ, 3 bi đen. Yêu cầu cần lấy ra 6 vên đủ 3 màu. Hỏi số cách lấy?

Bài tập 81. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư và dán 3 tem thư ấy vào 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy.

Bài tập 82. Có 9 bi xanh, 5 bi đỏ và 4 bi vàng có kích thước khác nhau.

a) Có bao nhiêu cách chọn 6 bi trong đó có đúng 2 bi đỏ

b) Có bao nhiêu cách chọn 6 bi trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ.

Bài tập 83. Có bao nhiêu cách chia 9 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho trong đó có một người được 2 đồ vật, một người được 3 đồ vật và người còn lại được 4 đồ vật.

Bài tập 84. Có bao nhiêu cách chia 6 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho mỗi người được ít nhất 1 đồ vật.

Bài tập 85. Có bao nhiêu cách chia 11 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho mỗi người được ít nhất 3 đồ vật.

Bài tập 86. Cho đa giác đều $2n$ $(n > 3)$ cạnh nội tiếp trong đường tròn (O). Tính

a) Tính số đường chéo của đa giác

b) Tính số tam giác có đỉnh là 3 trong 2n đỉnh nói trên.

c) Tính số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 2n đỉnh nói trên.

Bài tập 87. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 10 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này không thuộc quá 2 trong 3 lớp trên.

Bài tập 88. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập thành một nhóm đồng ca gồm 8 người trong đó có ít nhất 3 nữ.

Bài tập 89. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

Bài tập 90. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 8 chữ số trong đó có chữ số 1 và chữ số 6 có mặt 2 lần, còn các chữ số khác có mặt một lần.

Bài tập 91. Từ các chữ số $1, 2$ và 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số trong đó có mặt đủ ba chữ số trên.

Bài tập 92. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó chữ số 2 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

Bài tập 93. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau sao cho tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng hơn tổng của 3 chữ số cuối là 1 đơn vị.

Bài tập 94. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt $(n \geq 2)$. Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n thỏa điều kiện trên.

Bài tập 95. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$(n là số nguyên lớn hơn 2) nội tiếp trong đường tròn. Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ đỉnh của tam giác nhiều gập 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ đỉnh của đa giác. Tìm n.

8.2.4 Phương trình và bất phương trình chứa hệ số tổ hợp và chỉnh hợp

Phương pháp giải 8.1. *Đối với bài tập dạng này ta thường thực hiện như sau*

- *Đặt điều kiện với biến,*
- *Chuyển phương trình, bất phương trình chứa tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị về phương trình thông thường để giải.*

BÀI TẬP

Bài tập 96. Dùng máy tính để tính

a) P_3. b) $A_5^2 \cdot P_2$. c) $A_5^2 - P_4$. d) $C_4^3 - C_5^4$.

Bài tập 97. Rút gọn biểu thức

a) $A = \dfrac{(n+2)!}{n!(n+1)^2}$. b) $B = \dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$. c) $\dfrac{C_{n+1}^2}{A_n^2}$. d) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1}$.

Bài tập 98. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện

a) $A_n^3 = 20n$

b) $A_n^5 = 18A_n^4$

c) $3C_{n+1}^2 - 2A_n^2 = n$

d) $C_{n-1}^4 = C_{n-1}^3 + \dfrac{5}{2}A_{n-2}^2$

e) $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 - 5n = 0$.

f) $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$.

Bài tập 99. Giải phương trình

a) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$

b) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$

c) $A_x^3 + 5A_x^2 = 2(x+15)$

d) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$

e) $2(C_x^1 + C_x^2) = 7 - 2C_x^3$

f) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

g) $C_1^x 4 + C_1^{x+2} 4 = 2C_1^{x+1} 4$

h) $P_x \cdot A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$

Bài tập 100. Giải bất phương trình

a) $A_x^3 + 5A_x^2 \le 21x$

b) $A_x^3 + 2C_x^{x-2} \le 9$

Bài tập 101. Giải bất phương trình sau $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} \le \dfrac{143}{4P_n}$.

Bài tập 102. Giải hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$

Bài tập 103. Biết số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^{12} = C_n^8$, tính C_n^{17} và C_{22}^n.

Bài tập 104. Cho tập hợp A có n phần tử ($n \ge 7$). Tìm n, biết rằng số tập hợp con gồm 7 phần tử của A bằng hai lần số tập con gồm 3 phần tử của A.

Bài tập 105. Giải phương trình

a) $\dfrac{1}{C_4^x} - \dfrac{1}{C_5^x} = \dfrac{1}{C_6^x}$.

b) $\dfrac{5}{C_5^x} - \dfrac{2}{C_6^x} = \dfrac{14}{C_7^x}$.

Bài tập 106. Tìm số nguyên dương n sao cho

a) $2C_n^2 - A_n^1 - 3 \le 0$.

b) $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 \le \dfrac{5}{4}S_{n-2}^2$.

Bài tập 107. Tìm số nguyên dương n thỏa $\dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \dfrac{1}{A_4^2} + \cdots + \dfrac{1}{A_n^2} = \dfrac{2013}{2014}$.

8.3 Nhị thức Newton

8.3.1 Khai triển nhị thức Newton

Định lý 8.6.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k.$$

8.3.2 Số hạng tổng quát

Định nghĩa 8.4. *Số hạng tổng quát thứ $k+1$ là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k$.*

Lưu ý 8.2.

- *Công thức nhị thức Newton có $n+1$ số hạng.*
- *Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần (hoặc ngược lại).*

BÀI TẬP

KHAI TRIỂN NHỊ THỨC

Bài tập 1. Khai triển các nhị thức sau

a) $(x+1)^4$. b) $(x-21)^5$. c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$. d) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$.

e) $(x+2y)^5$. f) $(3x-2y)^4$. g) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$. h) $\left(x-\frac{y}{x}\right)^5$.

Bài tập 2. Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}, n \in \mathbb{N}$ có tất cả 17 số hạng, tìm n?

TÌM SỐ HẠNG, HỆ SỐ TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC

Bài tập 3. Tìm số hạng trong khai triển

a) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^{10}$ chứa x^4. b) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$ chứa x^4. c) $\left(3x^3-\frac{2}{x^2}\right)^5$ chứa x^{10}. d) $\left(\frac{1}{x^3}+x^6\right)^{10}$ chứa x^{24}.

Bài tập 4. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

a) $(2x+y)^{13}$ chứa x^6y^7. b) $\left(x^3-xy\right)^{15}$ chứa $x^{25}y^{10}$.

Bài tập 5. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển

a) $\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$. b) $\left(xy^2-\frac{1}{xy}\right)^8$. c) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

d) $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$. e) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$. f) $\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$.

Bài tập 6. Tìm số hạng chính giữa trong các khai triển sau

a) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^6$. b) $\left(x-\frac{3}{x}\right)^{10}$. c) $\left(\frac{1}{x}+y^2\right)^{12}$. d) $\left(\frac{1}{x^3}+x^7\right)^9$.

Bài tập 7. Biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1+3x)^n$ là 90. Tìm n.

Bài tập 8. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\frac{1}{4}\right)^n$ là 31. Tìm n.

Bài tập 9. Tìm hệ số của các số hạng chứa x^3 trong khai triển $P(x) = (x+1)^5 + (x-2)^7$.

Bài tập 10. Tìm hệ số của các số hạng chứa x^5 trong khai triển $P(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

Bài tập 11. Khai triển $P(x) = (x+2)(x+1)^{10}$ thành dạng $P(x) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \cdots + a^{10}x + a_{11}$. Hãy tìm hệ số a_5 trong khai triển.

Bài tập 12. Biết khai triển $(1+x^2+x^3)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{21}x^{21}$. Hãy tìm a_{11}.

Bài tập 13. Tìm số hạng trong khai triển

a) $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ chứa x^{10}, biết $C_n^4 = 13C_n^2$.

b) $\left(x^2+2\right)^n$ chứa x^8, biết $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$.

c) $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ chứa x^8, biết $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Bài tập 14. Tính A_n^2, biết rằng số hạng số thứ 5 trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^n$ không phụ thuộc vào x.

Bài tập 15. Trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$, biết hiệu hệ số của số hạng thứ 3 và thừ 2 là 35. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển.

Bài tập 16. Trong khai triển của $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$, tìm số hạng chứa x^3 biết tổng các hệ số trong khai triển bằng 256.

Bài tập 17. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ chứa x^{26}, biết $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

Bài tập 18. Tổng các hệ số trong khai triển của $\left(\dfrac{1}{x} + x^3\right)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ bằng 1024. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6.

Bài tập 19. Số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ không chứa x. Với giá trị nào của x thì số hạng đó bằng số hạng thứ 2 trong khai triển $\left(1+x^3\right)^{30}$.

Bài tập 20. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

a) $(2+x)^n$ chứa x^{10}, biết $3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 + \cdots + (-1)^nC_n^n = 2048$.

b) $(2-3x)^{2n}$ chứa x^7, biết $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

c) $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^n$ chứa x^3, biết $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{23}$.

Bài tập 21. Khai triển $P(x) = (1-2x)^n$ thàng dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Tìm hệ số của x^5, biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$.

Bài tập 22. Biết n là số tập con khác rỗng của tập A có 4 phần tử và biết $(x+1)^n(x-2) = a_0x^{n+1} + a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1}$ Hãy tính a_9.

Bài tập 23. Tìm số hạng chứa x và y với số mũ nguyên dương trong $\left(\sqrt[3]{xy^2} + \sqrt{xy}\right)^{12}$.

Bài tập 24. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

a) $\left[1 + x^2(1-x)\right]^8$ chứa x^8.

b) $\left(1 + \dfrac{1}{x} + x^3\right)^{10}$ chứa x^2.

Bài tập 25. Giả sử n là số nguyên dương và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại k nguyên $(1 \le k \le n-1)$ sao cho $\dfrac{a_{k-1}}{2} = \dfrac{a_k}{9} = \dfrac{a_{k+1}}{24}$. Hãy tính n.

Bài tập 26. Cho $A = \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$. Sau khi khai triển và rút gọn biểu thức A sẽ gồm bao nhiêu số hạng.

TÍNH TỔNG VÀ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC BẰNG KHAI TRIỂN NEWTON

Bài tập 27. Tính tổng các hệ số của các số hạng trong khai triển

a) $P(x) = \left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

b) $P(x) = \left(1 - x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$.

Bài tập 28. Cho n là số nguyên dương. Hãy tính

a) $S_1 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \cdots + 2^5C_5^5$.

b) $S_2 = C_5^0 - 2C_5^1 + 2^2C_5^2 - \cdots - 2^5C_5^5$.

c) $S_3 = C_{20}^1 - C_{20}^2 + C_{20}^3 - \cdots + C_{20}^{19}$.

d) $S_4 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n$.

e) $S_5 = 2^nC_n^0 + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + \cdots + C_n^n$.

f) $S_6 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^nC_n^n$.

g) $S_7 = 3C_n^1 + 3^3C_n^3 + \cdots + 3^{n-1}C_n^{n-1}$ (n chẵn).

h) $S_8 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n}$.

Bài tập 29. Khai triển $(1+x)^7$, từ đó tính

a) $T = C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + \cdots + C_7^6 + C_7^7$.

b) $S = C_7^0 + C_7^2 + C_7^4 + C_7^6$.

Bài tập 30. Tính các tổng sau

a) $S_1 = C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$.

b) $S_2 = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$.

Bài tập 31. Tính tổng $S = C_{30}^{14} - C_{30}^{15} + C_{30}^{16} - C_{30}^{17} + \cdots - C_{30}^{29} + C_{30}^{30}$.

Bài tập 32. Cho $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$.

a) Tính hệ số a_{97}

b) Tính $T = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$

Bài tập 33 (KD08). Tìm số nguyên dương n sao cho

a) $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n = 243$.

b) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$.

c) $C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + \cdots + C_{4n+2}^{2n} = 256$.

d) $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

Bài tập 34. Chứng minh biểu thức $\left(1 + 4C_n^1 + 4^2C_n^2 + \cdots + 4^nC_n^n\right)$ chia hết cho 5.

Bài tập 35. Biết khai triển $(1-2x)^{18} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{18}x^{18}$. Tính tổng $S = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{18}|$.

Bài tập 36. Khai triển $(1+x)^{2n}$, từ đó

a) Chứng minh $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}$.

b) Tính $S = C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \cdots + C_{2n}^{2n}$.

Bài tập 37. Tính tổng $T = 5^1C_{2013}^0 + 5^2C_{2013}^2 + 5^3C_{2013}^4 + \cdots + 5^{1007}C_{2013}^{2012}$.

Bài tập 38. Rút gọn $A = 3^n\left[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n\right]$.

Bài tập 39. Tính tổng $S = \frac{1C_n^0}{A_1^1} + \frac{2C_n^1}{A_2^1} + \frac{3C_n^2}{A_3^1} + \cdots + \frac{(n+1)C_n^n}{A_{n+1}^1}$. Biết rằng $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211$.

Bài tập 40. Chứng minh $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Bài tập 41. Chứng minh $C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + \cdots + C_m^mC_n^{k-m} = C_{m+n}^k$ với $m \le k \le n$.

TÍNH TỔNG VÀ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC BẰNG CÔNG THỨC TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP

Bài tập 42. Chứng minh

a) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

b) $C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^k$.

c) $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+2}^k$.

d) $C_5^0C_n^k + C_5^1C_n^{k-1} + C_5^2C_n^{k-2} + \cdots + C_n^{k-5} = C_{n+5}^k$.

Bài tập 43. Cho $k, n \in \mathbb{N}$ thỏa $n \ge k \ge 2$. Chứng minh $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

Bài tập 44. Cho $k, n \in \mathbb{N}$ thỏa $n \ge k > 0$. Chứng minh $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+5}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$.

Bài tập 45. Rút gọn biểu thức $S = C_{50}^0 - C_{50}^1 + C_{50}^2 - C_{50}^3 + \cdots - C_{50}^{35}$.

Bài tập 46. Rút gọn biểu thức $S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^kC_n^k$ với $k \le n, n > 1$.

Bài tập 47. Chứng minh $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \cdots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}$.

Bài tập 48. Tính tổng $S = \dfrac{A_n^0}{0!} + \dfrac{A_n^1}{1!} + \dfrac{A_n^2}{2!} + \cdots + \dfrac{A_n^n}{n!}$.

Bài tập 49. Chứng minh $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$

Bài tập 50. Cho hai số nguyên dương n và m thỏa mãn $0 < m < n$. Chứng minh

a) $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

b) $C_n^m = C_{n-m}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \cdots + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$

Bài tập 51. Tính tổng

a) $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + kC_n^k + \cdots + nC_n^n$.

b) $S_2 = 2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + 6C_{2n}^6 + \cdots + 2nC_{2n}^{2n}$.

c) $S_3 = C_{2n}^0 + \dfrac{1}{3}C_{2n}^2 + \dfrac{1}{5}C_{2n}^4 + \cdots + \dfrac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$.

d) $S_4 = \dfrac{1}{1.2}C_n^0 + \dfrac{1}{2.3}C_n^1 + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}C_n^n$.

Bài tập 52. Chứng minh

a) $1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.

b) $2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + \cdots + n.(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$.

Bài tập 53. Cho số nguyên dương $n > 4$ và $S = \dfrac{C_{2n}^0}{1} + \dfrac{C_{2n}^2}{3} + \dfrac{C_{2n}^4}{5} + \cdots + \dfrac{C_{2n}^{2n}}{2n+1}$. Biết rằng $S = \dfrac{4096}{13}$, hãy tính các giá trị của n.

Bài tập 54. Chứng minh

a) $\dfrac{1}{2}C_{2n}^1 + \dfrac{1}{4}C_{2n}^3 + \dfrac{1}{6}C_{2n}^5 + \cdots + \dfrac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \dfrac{2^{2n}-1}{2n+1}$.

b) $C_n^0 - \dfrac{2^3}{4}C_n^1 + \dfrac{2^5}{6}C_n^2 - \cdots + \dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+2}C_n^n = \dfrac{1-(-3)^{n+1}}{4(n+1)}$.

c) $\dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{n+1} = \dfrac{2^{2n+1}-1}{n+1}$.

d) $C_n^0 - \dfrac{1}{2}C_n^1 + \dfrac{1}{3}C_n^2 - \dfrac{1}{4}C_n^3 + \cdots + \dfrac{(-1)^n C_n^n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

TÌM SỐ HẠNG MAX

Bài tập 55. Khai triển $(x+2)^{15}$ thành dạng $P(x) = a_0x^{15} + a_1x^{14} + a_2x^{13} + \cdots + a_{15}$. Tìm $\max\{a_0, a_1, \cdots, a_{15}\}$.

Bài tập 56. Khai triển $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2x}{3}\right)^{10}$ thành dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$. Tìm $\max\{a_0, a_1, \cdots, a_{10}\}$.

Bài tập 57. Khai triển $(1+2x)^n$ thành dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ với $a_0, a_1, \cdots, a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm $\max\{a_0, a_1, \cdots, a_{10}\}$.

Chương 9

Xác suất

9.1 Biến cố và các suất của biến cố

9.1.1 Phép thử. Không gian mẫu. Biến cố

Định nghĩa 9.1.
- *Phép thử là 1 thí nghiệm mà ta không biết trước được kết quả nhưng biết trước được tất cả các kết quả có thể xảy ra.*
- *Tập hợp mọi kết quả của phép thử được gọi là không gian mẫu. Kí hiệu Ω.*

Định nghĩa 9.2.
- *Biến cố là một tập hợp con của không gian mẫu.*
- *Biến cố chỉ có 1 phần tử của không gian mẫu gọi là biến cố sơ cấp.*

9.1.2 Xác suất của biến cố

Định nghĩa 9.3. *Xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A)$ và được tính theo công thức*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- *$P(A)$ xác suất của A.*
- *$|A|$ (hay $n(A)$) số phần tử của A .*
- *$|\Omega|$ (hay $n(\Omega)$) số phần tử của không gian mẫu.*

BÀI TẬP

Bài tập 1. Gieo một đồng tiền và một con súc sắc. Quan sát sự xuất hiện mặt sấp (S) mặt ngửa (N) của đồng tiền và số chấm xuất hiện trên con súc sắc

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến số sau

- A " Đồng tiền xuất hiện mặt sấp và con súc sắc xuất hiện mặt chẵn chấm".
- B " Đồng tiền xuất hiện mặt ngửa và con súc sắc xuất hiện mặt lẻ chấm".
- C " Mặt 6 chấm xuất hiện".

Bài tập 2. Gieo một con súc sắc

a) Tính xác suất để xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3.

b) Tính xác suất để xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 2.

Bài tập 3. Gieo hai con súc sắc cùng một lúc. Gọi A là biến cố "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt một chấm" và B là biến cố "Có đúng 1 con súc sắc xuất hiện mặt một chấm". Tính $P(A)$ và $P(B)$.

Bài tập 4. Một công ty thương mại cần tuyển hai nhân viên. Có 10 người nộp đơn, trong có có 4 nam và 6 nữ. Giả sử rằng khả năng ứng cử của 10 người là như nhau. Tính xác suất của các biến cố sau

a) Hai người trúng tuyển toàn là nam

b) Hai người trúng tuyển toàn là nữ

c) Hai người trúng tuyển có ít nhất một nữ.

Bài tập 5. Một giáo viên phát ngẫu nhiên 10 bài kiểm tra Toán cho 10 học sinh. Tính xác suất để học sinh nào cũng nhận được đúng bài kiểm tra của mình.

Bài tập 6. Gieo một đồng xu 3 lần. Tính xác suất để có

a) Hai đồng ngửa

b) Có ít nhất một đồng ngửa

Bài tập 7. Một tổ gồm 7 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh. Tính xác suất để trong 4 học sinh được chọn có cả nam nữ và số học sinh nữ nhiều hơn số học sinh nam.

Bài tập 8. Một hộp chứa các quả cầu kích thước khác nhau gồm 3 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh và 9 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để 2 quả cầu được chọn khác màu.

Bài tập 9. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách đỗ ở sân ga. Biết rằng mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Có 4 vị khách từ sân lên tàu, họ không quen biết nhau, mỗi người chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất P để 1 trong 3 toa đó có 3 trong 4 vị khách nói trên.

Bài tập 10. Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn.

Bài tập 11. Trong 100 vé số có 5 vé trúng. Một người mua 15 vé. Xác suất để người đó trúng 2 vé là bao nhiêu?

Bài tập 12. Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữa, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 3 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

Bài tập 13. Một người có 10 đôi giầy khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc giầy lấy ra có ít nhất một đôi.

Bài tập 14. Chọn ngẫu nhiên 4 người có tên trong dánh sách 16 người đánh số từ 1 đến 16. Tính xác suất để 4 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 8.

Bài tập 15. Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc hơn kém nhau 3.

Bài tập 16. Từ một hộp đựng 6 quả cầu đỏ và 4 quả cầu vàng, lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu. Tính xác suất để trong 5 quả cầu đó có cả hai màu đỏ và vàng.

Bài tập 17. Một nhóm học sinh gồm 3 nam và 6 nữ (chỉ có một học sinh nữ tên là Hoa). Có bao nhiêu cách chọn ra 4 em, trong đó có cả nam và nữ, đồng thời có cả Hoa?

Bài tập 18. Chọn ngẫu nhiên 13 lá bài trong một bộ bài 52 lá. Tính xác suất để được 4 lá chuồn, 3 lá cơ, 3 lá rô và 3 lá bích.

Bài tập 19. Chọn ngẫu nhiên 3 số trong 50 số tự nhiên từ 1 đến 50

a) Tính xác suất của biến cố A: "Trong 3 số đó chỉ có 2 số là bội của 5".

b) Tính xác suất của biến cố B: "Trong 3 số đó có ít nhất một số chính phương".

Bài tập 20. Có 9 miếng bìa như nhau ghi từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên 2 miếng bìa và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

a) Tính xác suất của biến cố A: "Số tạo thành là số chẵn".

b) Tính xác suất của biến cố B: "Số tạo thành là số chia hết cho 5".

Bài tập 21. Công ty Thăng Tiến - Thăng Long thiết kế bảng điều khiển điện tử để mở cửa một ngôi nhà. Bảng gồm 5 nút, mỗi nút được ghi một số từ 1 đến 5 và không có hai nút nào ghi cùng một số. Để mở được cửa cần nhấn liên tiếp ít nhất 3 nút khác nhau sao cho tổng của các số trên các nút đó bằng 10. Một người không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp ít nhất 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất P để người đó mở được cửa ngôi nhà.

Bài tập 22. Kết quả b, c của việc gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp, trong đó b là số chấm xuất hiện lần gieo thứ nhất, c là số chấm xuất hiện lần gieo thứ hai được thay vào phương trình $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để phương trình bậc hai đó vô nghiệm?

9.2 Quy tắc tính xác suất

9.2.1 Các loại biến cố

Định nghĩa 9.4.

- ***Biến cố hợp:*** *Biến cố "A hoặc B xảy ra", ký hiệu $A \cup B$ được gọi là hợp của biến cố A và B.*
- ***Biến cố giao:*** *Biến cố "A và B cùng xảy ra", ký hiệu $A \cap B$ hay AB được gọi là giao của hai biến cố A và B.*
- ***Biến cố xung khắc:*** *Biến cố A và B được gọi là xung khắc khi và chỉ khi biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Khi đó $A \cap B = \emptyset$.*
- ***Biến cố độc lập:*** *Hai biến cố được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia. Nếu A, B độc lập thì các cặp biến cố sau độc lập $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và $\overline{B}$.*
- ***Biến cố đối:*** *$\overline{A}$ là biến cố đối của A. Xác suất biến cố đối* $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

9.2.2 Quy tắc tính xác suất

Định lý 9.1. *Cho hai biến cố A và B, khi đó*

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}.$$

- ***Quy tắc nhân:*** *Nếu A, B là hai biến cố độc lập với nhau thì* $\boxed{P(AB) = P(A).P(B).}$
- ***Quy tắc cộng:*** *Nếu A, B là hai biến cố xung khắc thì* $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$

BÀI TẬP

Bài tập 1. Hai xạ thủ bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Gọi A là biến cố "Người thứ nhất bắn trúng bia" và B là biến cố "Người thứ hai bắn trúng bia". Hãy mô tả các biến cố $A \cup B, A \cap B, \overline{A} \cup \overline{B}, A \cup \overline{B}$.

Bài tập 2. Một hộp chứa 6 viên bi, trong đó có 1 bi xanh, 2 bi vàng và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi.

a) Xác định các biến cố sau

A "Hai viên bi cùng màu".

B "Hai viên bi khác màu".

C "Hai viên bi trong đó có ít nhất một viên bi vàng".

b) Hãy mô tả các biến cố $A \cup B, A \cap B, A \cup C, A \cap C$.

c) Xét biến cố D "Trong hai viên bi có đúng một viên bi vàng". Chứng minh A và D xung khắc.

Bài tập 3. Cho hai biến cố độc lập A và B biết $P(A) = 0,3; P(B) = 0,5$. Tính

a) $P(A \cup B), P(\overline{A}), P(\overline{B})$.

b) $P(\overline{AB}), P(\overline{A \cup B})$.

Bài tập 4. Gieo hai đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để

a) Có ít nhất một đồng xu sấp

b) Có đúng một đồng xu ngửa

Bài tập 5. Một hộp đựng 9 thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

Bài tập 6. Gieo ngẫu nhiên 2 con súc sắc ngẫu nhiên và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố sau

a) Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt một chấm

b) Không có con súc sắc nào xuất hiện mặt một chấm

Bài tập 7. Một hộp đựng 4 bi xanh, 3 bi đỏ và 2 bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để chọn 2 viên bi cùng màu.

Bài tập 8. Hai xạ thủ mỗi người một viên đạn bắn vào bia với xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,85 và của người thứ hai là 0,7. Tính xác suất để

a) Cả hai viên đạn trúng đích.

b) Có đúng một viên đạn bắn trúng đích.

c) Có ít nhất một viên đạn bắn trúng đích.

d) Không có viên đạn nào được bắn trúng đích.

Bài tập 9. Một lớp học gồm 40 học sinh trong đó có 15 học sinh nam giỏi Toán và 8 học sinh nữ giỏi Lý. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Hãy tính xác suất để chọn một nam học sinh giỏi Toán hay một nữ học sinh giỏi Lý.

Bài tập 10. Một lớp có 30 học sinh trong đó có 10 nữ sinh. Giáo viên hỏi bài một cách ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh bị hỏi bài

a) Có cùng giới tính
b) Có nhiều hơn một nam sinh

Bài tập 11. Để kiểm tra chất lượng của một công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phân kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

Bài tập 12. Có ba bình A, B, C mỗi bình chứa 3 quả cầu trắng, 3 quả cầu xanh và 3 quả cầu đỏ. Từ mỗi bình lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để

a) Ba quả cầu đôi một khác màu.
b) Ba quả cầu có màu giống nhau.
c) Hai quả cầu có cùng màu còn quả kia khác nhau.

Bài tập 13. Từ một hộp đựng 3 quả cầu đen và 4 quả cầu trắng, lấy ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất sao cho

a) 4 quả lấy ra cùng màu
b) Có ít nhất một quả đen

Bài tập 14. Một hộp đựng 8 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để được

a) Ba viên bi đỏ
b) Ba viên bi xanh
c) Ba viên bi cùng màu
d) Ít nhất một viên bi đỏ

Bài tập 15. Một nhóm học sinh có 11 bạn trong đó có 5 bạn nam và 6 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 bạn trong 11 bạn trên để làm trực nhật. Tính xác suất để trong 4 bạn được chọn có

a) 3 bạn nữ và 1 bạn nam
b) Ít nhất 1 bạn là nữ

Bài tập 16. Một nhóm học sinh có 8 bạn trong đó có 3 bạn nam và 5 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 bạn trong 8 bạn trên để làm trực nhật. Tính xác suất để trong 2 bạn được chọn có

a) Có đúng một người là nữ
b) Không có nữ nào

Bài tập 17. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn.

Bài tập 18. Bốn người lên tàu có cầm trên tay 4 vé có ghi số ghế. Tuy nhiên cả 4 người đều không nhìn vào số ghế khi ngồi. Tính xác suất để

a) Cả 4 người ngồi đúng chỗ
b) Có ít nhất người thứ nhất ngồi đúng chỗ
c) Chỉ có người thứ nhất ngồi đúng chỗ
d) Có ít nhất người thứ nhất và người thứ hai ngồi đúng chỗ

Bài tập 19. An bỏ ngẫu nhiên 4 là thư (gửi 4 người bạn) vào 4 phong bì đã ghi địa chỉ (mỗi bì 1 thư). Tìm xác suất để có ít nhất 1 thư đúng địa chỉ.

Bài tập 20. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên nhỏ hơn 2011. Tính xác suất của biến cố sau

A "Số được chọn là số gồm 2 chữ số"
B "Số được chọn là số chia hết cho 3"

Bài tập 21. Trong trò chơi "ném lon", xác suất mỗi lần ném trúng của bạn Thi là $0,4$. Hỏi bạn Thi phải ném bao nhiêu lần, biết rằng xác suất để bạn Thi ném trúng ít nhất một lần trong loạt ném đó là $0,784$.

Bài tập 22. Một xạ thủ lần lượt bắn bốn viên đạn độc lập vào một mục tiêu. Xác suất trúng mục tiêu của mỗi viên đạn là $0,7$. Tìm xác suất để mục tiêu bị hủy hoàn toàn, biết rằng mục tiêu bị hủy hoàn toàn nếu trúng ít nhất ba viên đạn.

Bài tập 23. Một máy bay có 4 động cơ. Xác suất để mỗi động cơ gặp sự cố khi bay là $0,1$. Máy bay thực hiện chuyến bay an toàn nếu chỉ có nhiều nhất một trong bốn động cơ gặp sự cố. Tính xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn.

Bài tập 24. Một nhà trọ có 5 phòng. Có 5 công nhân tới thuê phòng, mỗi người độc lập chọn ngẫu nhiên một phòng. Tính xác suất để nhà trọ còn đúng một phòng trống.

Bài tập 25. Có hai hộp bi. Hộp 1 đựng 10 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp 2 đựng 8 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một viên. Tính xác suất để lấy được

a) Một bi xanh và một bi đỏ
b) Lấy ít nhất một bi đỏ

Bài tập 26. Có hai hộp chứa bi. Hộp thứ nhất có 4 bi đỏ, 3 bi trắng. Hộp thứ hai có 2 bi đỏ, 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để 2 bi cùng màu.

Bài tập 27. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt được chọn từ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Tìm số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

Bài tập 28. Trong đợt ứng phó dịch MERS-CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các Trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất 2 đội của các Trung tâm y tế cơ sở được chọn.

Bài tập 29. Chia ngẫu nhiên 9 hộp sữa (trong đó có 3 hộp có phiếu thưởng) thành 3 phần, mỗi phần 3 hộp. Tính xác suất để mỗi phần có một hộp trúng thưởng.

Bài tập 30. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên x có 2 chữ số. Tính xác suất để $x^2 + 1$ chia hết cho 10.

Bài tập 31. Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

Bài tập 32. Một khách sạn có 6 phòng phục vụ khách. Có 10 khách trong đó có 6 nam và 4 nữ đến đặt phòng. Mỗi phòng chỉ nhận 1 người và ai đến trước được thuê phòng trước. Giả sử 10 người đến ngẫu nhiên. Tìm xác suất sao cho

a) Bốn nam và hai nữ được đặt phòng

b) Có ít nhất 2 trong 4 nữ được đặt phòng

Bài tập 33. Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi "chiếc nón kỳ diệu" có thể dừng lại ở một trong 7 vị trí với khả năng như nhau. Tính xác suất để trong 3 lần quay với chiếc kim dừng lại ở 3 vị trí như nhau.

Bài tập 34. Một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời và chỉ có 1 phương án đúng. Nếu chọn được một câu đúng thì được 2 điểm, nếu chọn 1 câu sai thì bị trừ 1 điểm. Một học sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên mỗi câu một phương án trả lời, tính xác suất để học sinh đó đạt được 8 điểm.

Bài tập 35. Một hộp đựng 5 bi đỏ, 6 bi xanh, 7 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 6 bi từ hộp đó. Tính xác suất để được 6 bi có cả 3 màu đồng thời hiệu của số bi xanh và số bi đỏ, hiệu của số bi trắng và số bi xanh, hiệu của số bi đỏ và số bi trắng theo thứ tự là 3 số hạng liên tiếp của 1 cấp số cộng ?

Bài tập 36. Một lớp học có 30 học sinh trong đó có 13 bạn có sinh nhật là ngày chẵn. Trong đêm trung thu, lớp chọn ra 3 bạn rước đèn ông sao. Tìm xác suất để 3 bạn được chọn có tổng các số ngày sinh là số chẵn.

Bài tập 37. Một chiếc tàu khoan thăm dò dầu khí trên thềm lục địa có xác suất khoan trúng là $0,4$. Tính xác suất trong 2 lần khoan độc lập, chiếc tàu đó khoan trúng túi dầu.

a) Đúng một lần duy nhất

b) Ít nhất một lần

Bài tập 38. Một bình đựng 10 thẻ trong đó có 4 thẻ ghi số 0, 3 thẻ ghi số 7, 2 thẻ ghi số 2. Lấy ngẫu nhiên 4 thẻ cùng một lúc. Gọi A là biến cố lấy 4 thẻ để tạo thành số 2007. Tính xác suất của biến cố A.

Bài tập 39. Trong một cuộc thi học sinh giỏi Toán, toàn trường có 3 em đạt giải nhất, 5 em đạt giải nhì và 12 em đạt giải ba. Chọn ngẫu nhiên 2 em để báo cáo thành tích. Tính xác suất để trong số đó có ít nhất một em đạt giải nhất.

Bài tập 40. Chọn ngẫu nhiên một vé số có 5chữ số. Tính xác suất để số trên vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5.

Bài tập 41. Chọn ngẫu nhiên một vé số có 5chữ số. Tính xác suất để số có chữ số 5 và có số chẵn.

Bài tập 42. Một chiếc máy có 2 động cơ I và II hoạt động độc lập nhau. Xác suất để động cơ I và II chạy tốt lần lượt là $0,8$ và $0,7$. Hãy tính xác suất để

a) Cả hai động cơ đều chạy tốt

b) Cả hai động cơ đều chạy không tốt

c) Có ít nhất một động cơ chạy tốt

Bài tập 43. Có 4 lô hàng. Rút ra ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Biết rằng xác suất để sản phẩm rút ra từ mỗi lô hàng là sản phẩm xấu lần lượt là $0,1; 0,2; 0,3; 0,4$. Tính xác suất để trong 4 sản phẩm rút ra có ít nhất 1 sản phẩm xấu.

Bài tập 44. Từ một hộp có 7 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 5 quả. Tính xác suất sao cho

a) Năm quả có cả màu đỏ và màu xanh

b) Có ít nhất hai quả màu xanh

Chương 10

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

10.1 Tọa độ của véc-tơ

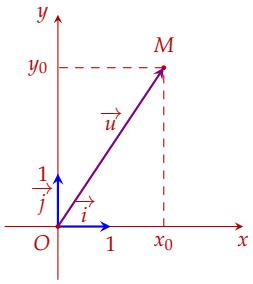
10.1.1 Trục và hệ trục tọa độ

Định nghĩa 10.1. Trục *tọa độ (còn gọi là* trục*) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm O (điểm gốc) và một véc-tơ* $\vec{i}$ *có độ dài bằng* 1 *(véc-tơ đơn vị của trục). Kí hiệu trục đó là* $(O, \vec{i})$.

Định nghĩa 10.2. *Hệ trục tọa độ* $(O; \vec{i}; \vec{j})$ *gồm hai trục* $(O, \vec{i})$ *và* $(O; \vec{j})$ *vuông góc với nhau tại O.*

- *Điểm O gọi là* gốc tọa độ,
- *Trục* $(O; \vec{i})$ *là trục hoành còn gọi là trục Ox,*
- *Trục* $(O; \vec{j})$ *là trục tung còn gọi là trục Oy.*

Hệ trục $(O; \vec{i}; \vec{j})$ *còn kí hiệu là hệ trục Oxy.*



10.1.2 Tọa độ véc-tơ

Định nghĩa 10.3. *Tọa độ hai véc-tơ đơn vị trên hai trục Ox và Oy lần lượt được định nghĩa là* $\vec{i} = (1;0)$, $\vec{j} = (0;1)$.

Định lý 10.1. *Với mỗi véc-tơ* $\vec{u}$ *trên mặt phẳng Oxy, có duy nhất cặp số* $(x_0;y_0)$ *sao cho* $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. *Ta nói véc-tơ* $\vec{u}$ *có tọa độ* $(x_0;y_0)$ *và viết* $\vec{u} = (x_0;y_0)$ *hay* $\vec{u}(x_0;y_0)$. *Các số* x_0, y_0 *tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của* $\vec{u}$.

$$\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (x_0;y_0).$$

Định lý 10.2. *Cho hai véc-tơ* $\vec{u} = (x;y)$ *và* $\vec{v} = (x';y')$. *Khi đó*

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$;
- $k\vec{u} = (kx; ky)$, *với* $k \in \mathbb{R}$;
- *Độ dài (mô-đun) véc-tơ* $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- *Tích có hướng hai véc-tơ* $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. *Suy ra góc giữa hai véc-tơ* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

Định lý 10.3. *Cho* $\vec{u}(x;y)$ *và* $\vec{v}(x';y')$, *khi đó*

- *Hai véc-tơ bằng nhau* $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.
- $\vec{v}$ *cùng phương với* $\vec{u}$ *khi và chỉ khi* $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}$ *(nếu* $xy \neq 0$*).*
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

10.1.3 Tọa độ điểm trên hệ trục

Định nghĩa 10.4. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M. Khi đó tọa độ của $\overrightarrow{OM}$ cũng là tọa độ điểm M. Ta viết $\overrightarrow{OM} = (x;y) \Leftrightarrow M(x;y)$.*

Định lý 10.4. *Cho hai điểm $M(x;y)$ và $N(x';y')$*

- *Tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{MN} = (x'-x;y'-y)$,*
- *Khoảng cách giữa hai điểm M, N là $MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(x'-x)^2+(y-y')^2}$.*
- *Trung điểm I của đoạn thẳng MN có tọa độ là $I\left(\dfrac{x+x'}{2};\dfrac{y+y'}{2}\right)$.*

Định lý 10.5. *Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.*

BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ VÉC-TƠ

Bài tập 1. Viết tọa độ các véc-tơ sau $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i}+7\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{b} = \sqrt{2}\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{c} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{d} = \pi\overrightarrow{j}$.

Bài tập 2. Viết véc-tơ $\overrightarrow{u}$ dưới dạng $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ khi biết tọa độ của $\overrightarrow{u} = (5;3)$.

Bài tập 3. Cho $\overrightarrow{a} = (1;-2)$ và $\overrightarrow{b} = (0;3)$. Tìm tọa độ của các véc-tơ sau

a) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$. b) $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$. c) $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$.

Bài tập 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\overrightarrow{u} = (1;2)$, $\overrightarrow{v} = (-3;4)$, $\overrightarrow{a} = (4;8)$

a) Hãy biểu thị mỗi véc-tơ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$.

b) Tìm tọa độ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $2\overrightarrow{u}$.

c) Tìm mối liên hệ giữa véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{u}$.

Bài tập 5. Cho $\overrightarrow{u} = (2;-1)$, $\overrightarrow{v} = (4;5)$. Tính tọa độ các véc-tơ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, $3\overrightarrow{u}$, $5\overrightarrow{u}-4\overrightarrow{v}$.

Bài tập 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các véc-tơ $\overrightarrow{a} = (3;1)$, $\overrightarrow{b} = (-1;2)$. Tính $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$.

Bài tập 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho các véc-tơ $\overrightarrow{a} = (2;-1)$, $\overrightarrow{b} = (0;4)$ và $\overrightarrow{c} = (3;3)$. Tìm hai số thực m, n sao cho $\overrightarrow{c} = m\overrightarrow{a}-n\overrightarrow{b}$.

Bài tập 8. Cho $\overrightarrow{a} = (1;3)$, $\overrightarrow{b} = (1;1)$, $\overrightarrow{c} = (4;3)$.

a) Tìm tọa độ và tính độ dài các véc-tơ sau: $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}$, $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-5\overrightarrow{c}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{a}$ theo $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$.

Bài tập 9. Cho tam giác ABC biết $A(1;-1)$, $B(0;3)$ và $G\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ là trọng tâm. Tìm tọa độ điểm C.

Bài tập 10. Cho $\overrightarrow{a} = (1;2)$, $\overrightarrow{b} = (3;-1)$. Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{c} = (-1;5)$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$.

Bài tập 11. Cho hai điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$.

a) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{BM} = (3;0)$. b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} = (1;1)$.

Bài tập 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $M(-1;1)$, $N(1;3)$, $P(-2;5)$. Tìm tọa độ điểm E biết $\overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{MN}$.

Bài tập 13. Cho $A(1;2)$, $B(-2;1)$, $C(2;-1)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A. b) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài tập 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(-2;3)$, $B(1;2)$, $C(-1;-4)$.

a) Tìm tọa độ điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Tính chu vi tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm K thuộc đoạn thẳng BC sao cho $2KB = 3KC$.

Bài tập 15. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$, $C(6;3)$. Tìm tọa độ điểm N thỏa mãn $2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{0}$.

HAI VÉC-TƠ CÙNG PHƯƠNG VÀ ỨNG DỤNG

Lưu ý 10.1. *Véc-tơ $\overrightarrow{v}=(x';y')$ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{u}=(x;y)\neq\overrightarrow{0}$ khi và chỉ khi $\dfrac{x'}{x}=\dfrac{y'}{y}$.*

Bài tập 16. Cho ba điểm $A(1;1)$, $B(-2;1)$, $C(m+1;2m+3)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài tập 17. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(0;4)$, $B(3;2)$, $D(3;0)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng, biết rằng $C(-6-3t;8+2t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng A, B, D không thẳng hàng. Từ đó tính chu vi của tam giác ABD.

Bài tập 18. Cho tam giác ABC có $A(-5;6)$, $B(-4;-1)$, $C(4;3)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài tập 19. Xét các cặp véc-tơ sau có cùng phương không?

a) $\overrightarrow{a}=(2;3)$, $\overrightarrow{b}=(-10;-15)$. b) $\overrightarrow{u}=(0;7)$, $\overrightarrow{v}=(-0;8)$. c) $\overrightarrow{m}=(-2;1)$, $\overrightarrow{n}=(-6;3)$.

Bài tập 20. Cho $\overrightarrow{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}$ và $\overrightarrow{v}=m\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}$. Tìm m để $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cùng phương.

Bài tập 21. Cho ba điểm $A(1;-1)$, $B(3;5)$, $C(2;2)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm $D\in Ox$ sao cho A, B, D thẳng hàng.

XÁC ĐỊNH CÁC ĐIỂM THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Lưu ý 10.2. $\overrightarrow{u}(x;y)=\overrightarrow{v}(x';y')\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$.

Bài tập 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A\,(1;1)$, $B\,(2;3)$, $C\,(5;-1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Bài tập 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(x_0;y_0)$.

a) Tìm tọa độ điểm A đối xứng với M qua trục Ox.

b) Tìm tọa độ điểm B đối xứng với M qua trục Oy.

c) Tìm tọa độ điểm C đối xứng với M qua O.

Bài tập 24. Cho hai điểm $A(3;-5)$, $B(1;0)$.

a) Tìm tọa độ điểm C sao cho $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm D đối xứng của A qua C.

c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3$.

Bài tập 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho $M(3;-1)$, $N(1;2)$ và $P(2;-4)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác MNP và tọa độ điểm Q sao cho tứ giác $MNGQ$ là hình bình hành.

b) Tam giác ABC nhận các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

Bài tập 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(-3;5)$, $B(-4;-3)$, $C(1;1)$.

a) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b) Tìm tọa độ điểm K thuộc trục hoành sao cho $KA+KB$ nhỏ nhất.

Bài tập 27. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(0;3)$

a) Tìm tọa độ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

c) Tính chu vi $\triangle ABC$.

d) Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.

e) Tìm tọa độ G' sao cho C là trọng tâm $\triangle ABG'$.

f) Tìm tọa độ D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tìm tâm hình bình hành đó.

Bài tập 28. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;3)$, $B(-4;-5)$ và $C(1;-2)$.

a) Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác và tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 29. Cho $\triangle ABC$, các điểm $M(1;1)$, $N(2;3)$, $P(0;4)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tính tọa độ các đỉnh của $\triangle ABC$.

Bài tập 30. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$.

a) Tìm tọa độ D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

b) Cho $M(m+1;m)$. Tìm m để $\triangle ABM$ vuông tại A.

Bài tập 31. Cho $\triangle ABC$ có $A(-1;1)$, $B(5;-3)$ và đỉnh C nằm trên trục Oy, trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ điểm C.

Bài tập 32. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(0;3)$

a) Tìm tọa độ M sao cho $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm tọa độ hình chiếu A' của A lên BC. Tính diện tích $\triangle ABC$.

c) Tìm tọa H là độ trực tâm của $\triangle ABC$.

d) Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

e) Tìm tọa độ K là chân phân giác trong của góc A.

f) Tìm tọa độ O là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Bài tập 33. Trong mặt phẳng Oxy cho $\triangle ABC$ biết $A(-1;1)$, $B(3;1)$, $C(2;4)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có hai đáy AB và CD biết $AB=2CD$.

Bài tập 34. Trong mặt phẳng Oxy cho $\triangle ABC$ biết $A(3;3)$, $B(-1;-5)$, $C(6;-6)$.

a) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

b) Tìm tọa độ D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

c) Với điểm E thỏa hệ thức $\overrightarrow{CA}-9\overrightarrow{CB}-6\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{0}$. Chứng minh $BE\perp AD$.

d) Tìm điểm M thuộc đường thẳng $x=1$ sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=24$.

Bài tập 35. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(3;-1)$, $C(2;3)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

c) Biết $E(-2;2)$, tính $\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và$\overrightarrow{AC}$.

d) Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=11$

Bài tập 36. Trong mặt phẳng Oxy cho $\triangle ABC$ biết $A(3;1)$, $B(-2;2)$, $C(-1;-3)$.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại B.

b) Tìm tọa độ D sao cho $ABCD$ là hình thoi.

c) Tìm tọa độ M sao cho $\triangle MBC$ vuông tại M và đường thẳng MC cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.

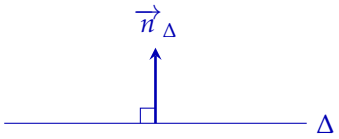
10.2 Phương trình đường thẳng

10.2.1 Phương trình tổng quát của đường thẳng

Định nghĩa 10.5. *Véc-tơ $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ được gọi là véc-tơ pháp tuyến (VTPT) của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ. Kí hiệu VTPT $\overrightarrow{n}_{\Delta}$.*

Định lý 10.6.

- *Nếu véc-tơ $\overrightarrow{n}$ là một VTPT của Δ thì $k\overrightarrow{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của Δ.*
- *Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTPT.*



Định lý 10.7. *Nếu Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTPT $\overrightarrow{n}_{\Delta} = (a;b)$ thì phương trình của Δ là*

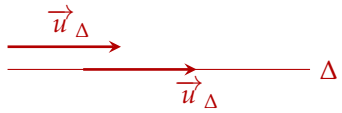
$$\Delta\colon a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

Định lý 10.8. *Phương trình $ax+by+c=0$ với $a^2+b^2 \neq 0$ (a,b không đồng thời bằng 0) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng. Trong đó, $\overrightarrow{n}=(A;B)$ là véc-tơ pháp tuyến.*

10.2.2 Phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng

Định nghĩa 10.6.

Véc-tơ $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ được gọi là véc-tơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ. Kí hiệu VTCP $\overrightarrow{u}_{\Delta}$.



Định lý 10.9.

- *Nếu véc-tơ $\overrightarrow{u}$ là một VTCP của Δ thì $k\overrightarrow{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của Δ.*
- *Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTCP.*
- *Đường thẳng đi qua hai điểm A và B sẽ nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ chỉ phương.*

Định lý 10.10.

- *Nếu $\overrightarrow{u}$ là một VTCP và $\overrightarrow{n}$ là một VTPT của Δ thì $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{n}$.*
- *Nếu $\overrightarrow{n}=(A;B)$ là véc-tơ pháp tuyến thì $\overrightarrow{u}=(-B;A)$ hoặc $\overrightarrow{u}=(B;-A)$ (đổi chỗ và đổi một dấu) là véc-tơ chỉ phương và ngược lại.*

Định lý 10.11. *Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u}=(u_1;u_2)$. Phương trình tham số của đường thẳng*

$$\Delta\colon \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (t \text{ là tham số và } t \in \mathbb{R}).$$

Định lý 10.12. *Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u}=(u_1;u_2)$. Phương trình chính tắc*

$$\Delta\colon \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} \quad (\text{với } u_1 \neq 0; u_2 \neq 0).$$

Lưu ý 10.3. *Trong trường hợp u_1 hoặc $u_2 = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.*

10.2.3 Phương trình hệ số góc. Phương trình đoạn chắn

Định lý 10.13. *Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k, có phương trình là*

$$\Delta\colon y = k(x-x_0)+y_0$$

được gọi là phương trình theo hệ số góc k.

Định lý 10.14. *Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a;0)$, $B(0;b)$ $(a,b\neq 0)$ có phương trình là*

$$\Delta\colon \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.

BÀI TẬP

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Bài tập 1. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;5)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(-2;3)$.

Bài tập 2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau

a) Qua $B(-2;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(-1;2)$.

b) Qua $C(1;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(0;5)$.

Bài tập 3. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2;3)$ và vuông góc với đường thẳng AB với $A(1;3)$, $B(2;1)$.

Bài tập 4. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon 2x-y+4=0$.

PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Bài tập 5. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số đường thẳng Δ biết Δ đi qua $M(1;2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(-1;3)$.

Bài tập 6. Lập phương trình tham số, chính tắc của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau

a) Qua $O(0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(1;-3)$.

b) Qua $A(2;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(3;4)$.

Bài tập 7. Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm $A(3;5)$ và $B(6;2)$.

Bài tập 8. Chuyển sang phương trình tổng quát các đường thẳng sau:

a) $\Delta_1\colon \begin{cases}x=2+t\\ y=1-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. b) $\Delta_2\colon \begin{cases}x=1-2t\\ y=3+t\end{cases},t\in\mathbb{R}$. c) $\Delta_3\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}$. d) $\Delta_4\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{1}$.

Bài tập 9. Chuyển phương trình tổng quát sang phương trình tham số các đường thẳng sau

a) $\Delta_1\colon x-2y+6=0$. b) $\Delta_2\colon 3x-y-3=0$. c) $\Delta_1\colon 2x-y+30$. d) $\Delta_2\colon 2x-3y-3=0$.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG VỚI HỆ SỐ GÓC

Bài tập 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 và $A\ (1;2)$ nằm trên d. Lập phương trình của đường thẳng d.

Bài tập 11. Viết phương trình đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) Δ đi qua $M(2;4)$ có hệ số góc $k=2$.

b) Δ đi qua hai điểm $A(3;5)$ và $B(6;2)$.

Bài tập 12. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A\ (2;-5)$ và nó tạo với trục Ox một góc 60°.

10.3 Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ (1). Khí đó ta có một số chú ý sau

a) Nếu hai đường thẳng cắt nhau thì hệ (1) có một nghiệm,
b) Nếu hai đường thẳng song song thì hệ (1) vô nghiệm,
c) Nếu hai đường thẳng trùng nhau thì hệ (1) có vô số nghiệm.

Ngoài ra, Nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$ ta xét nhanh như sau

- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (1) có một nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng $\Delta_1: x - 3y + 1 = 0$ và $\Delta_2: -2x + 6y - 10 = 0$.

Bài tập 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1: 4x - 10y + 1 = 0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU, SONG SONG, TRÙNG NHAU. BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Ví dụ 2. Cho ba đường thẳng $d_1: 2x + y - 1 = 0$, $d_2: x + 2y + 1 = 0$, $d_3: mx - y - 7 = 0$. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Bài tập 2. Cho $\Delta_1: (2m-1)x + y + 2 = 0$ và $\Delta_2: x + (m-1)y + m - 3 = 0$. Tìm m để

a) $\Delta_1 \parallel \Delta_2$. b) $\Delta_1 \equiv \Delta_2$. c) Δ_1 cắt Δ_2. d) $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Bài tập 3. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: mx + y + 2 = 0$ và $\Delta_2: x + my + m + 1 = 0$

a) Biện luận theo m số giao điểm của hai đường thẳng.

b) Khi Δ_1 cắt Δ_2, tìm $m \in \mathbb{Z}$ sao cho tọa độ giao điểm là số nguyên.

Bài tập 4. Cho các đường thẳng $\Delta: 2x + 3y - 5 = 0, \Delta': 3x - 2y - 1 = 0$ và điểm $M(2;3)$.

a) Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ và Δ'.

b) Biết d là đường thẳng đi qua điểm M và tạo với các đường thẳng Δ, Δ' một tam giác cân. Tính góc giữa các đường thẳng Δ và d.

Bài tập 5. Cho hai đường thẳng $\Delta: (m+3)x + 3y - 2m + 3 = 0$ và $\Delta': 2x + 2y + 2 - 3m = 0$. Tìm giá trị của tham số m để

a) Đường thẳng Δ song song với Δ'. b) Đường thẳng Δ cắt đường thẳng Δ'.

Bài tập 6. Tìm các giá trị của k để góc giữa các đường thẳng $\Delta: kx - y + 1 = 0$ và $\Delta': x - y = 0$ bằng 60°.

Bài tập 7. Cho $A(0;1), B(2;-1)$ và hai đường thẳng $(d_1): (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$ và $(d_2): (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$

a) Chứng minh d_1 và d_2 cắt nhau với mọi m.

b) Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm m để $PA + PB$ lớn nhất.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Bài tập 8. Viết phương trình đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a) Đi qua $M(-1;2)$ và song song với $(d)\colon x+y+1=0$.

b) Đi qua $N(4;5)$ và vuông góc với $(d)\colon -x+5y-4=0$.

Bài tập 9. Cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-2}$ và điểm $A(5;2)$

a) Viết phương trình đường thẳng (d) qua A và song song với Δ.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) qua A và vuông góc với Δ.

Bài tập 10. Cho ba điểm $A(3;-4)$, $B(5;3)$, $C(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng

a) Δ qua A và song song với BC.

b) Δ qua A và vuông góc với BC.

Bài tập 11. Cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$ và K là trung điểm AC. Viết phương trình đường thẳng

a) Δ qua A và song song với BK.

b) Δ qua A và vuông góc với BK.

Bài tập 12. Cho tam giác ABC có $A(-4;5)$, $B(-1;1)$, $C(6;1)$

a) Viết phương trình tổng quát 3 cạnh tam giác.

b) Viết phương trình hai đường cao kẻ từ A và B suy ra tọa độ trực tâm H của tam giác.

c) Viết phương trình đường trung bình EF với E và F là trung điểm AB và AC.

d) Viết phương trình trung tuyến AM.

e) Viết phương trình hai đường trung trực của AB và AC, từ đó suy ra tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài tập 13. Cho tam giác ABC có phương trình ba cạnh $AB\colon x+3y-7=0$, $BC\colon 4x+5y-7=0$ và $AC\colon 3x+2y-7=0$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh. Tọa độ trọng tâm tam giác.

b) Viết phương trình 3 đường cao.

c) Viết phương trình 3 đường trung tuyến.

Bài tập 14. Cho hình bình hành $ABCD$ có $C(4;1)$ và phương trình hai cạnh $x+3y=0$ và $2x-5y+6=0$.

a) Cho biết C có thuộc hai đường thẳng trên không.

b) Viết phương trình hai cạnh còn lại.

Bài tập 15. Cho tam giác ABC, biết $AB\colon 4x+y-12=0$, đường cao $AH\colon 5x-4y-15=0$, đường cao $BK\colon 2x+2y-9=0$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại và đường cao thứ ba.

Bài tập 16. Viết phương trình đường thẳng Δ biết

a) Δ qua $M(5;-4)$ và cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm AB.

b) Δ qua $M(4;3)$ và chắn Ox, Oy hai đoạn có độ dài bằng nhau.

c) Δ qua $M(-2;4)$ và cắt tia Ox, tia Oy lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân.

d) Δ qua $M(1;4)$ và cắt tia Ox, tia Oy lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB nhỏ nhất.

e) Δ qua $M(4;9)$ và cắt tia Ox, tia Oy lần lượt tại A và B sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất.

f) Δ qua $M(4;1)$ và cắt tia Ox, tia Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài tập 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Điểm B nằm trên đường thẳng $(d)\colon 2x-y=0$. Viết phương trình hai cạnh AB, BC.

Bài tập 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, có trọng tâm $G(-1;2)$ và đườn thẳng chứa cạnh AB có phương trình $x+3y-15=0$. Viết phương trình chứa cạnh BC, biết điểm $D(-8;1)$ thuộc trung tuyến đi qua điểm B.

Bài tập 19. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm hai đường thẳng $\Delta_1\colon 2x+3y-8=0$ và $\Delta_2\colon x+2y-5=0$ đồng thời thỏa các điều kiện sau

a) Δ đi qua $A(2;0)$.

b) Δ song song với đường thẳng $(d)\colon 4x+2y-9=0$.

c) Δ vuông góc với đường thẳng $(d)\colon x+2y-2=0$.

Bài tập 20. Cho tam giác ABC biết phương trình hai cạnh $AB\colon 5x-2y+6=0$, $AC\colon 4x+7y-21=0$. Viết phương trình cạnh thứ 3 biết trực tâm trùng với gốc tọa độ.

Bài tập 21. Cho tam giác ABC cân tại A, biết phương trình hai cạnh $BC\colon x-y-2=0$, $AB\colon 3x-y-6=0$. Viết phương trình cạnh AC biết nó qua điểm $M(-3;1)$.

Bài tập 22. Viết phương trình đường thẳng Δ biết

a) Δ qua $M(3;1)$ cắt hai tia Ox, Oy sao cho $OA+3OB$ nhỏ nhất.

b) Δ qua $M(1;2)$ cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $\dfrac{9}{OA^2}+\dfrac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

c) Δ qua $M(8;6)$ cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $S_{\triangle ABC}=8$.

Bài tập 23. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(6;2)$. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta\colon x+y-5=0$. Viết phương trình cạnh AB.

TÌM ĐIỂM THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bài tập 24. Cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(3;4)$. Tìm điểm C trên đường thẳng $(d)\colon x-2y+1=0$ sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Bài tập 25. Cho tam giác ABC có phương trình hai cạnh lần lượt là $AB\colon 2x+6y+3=0$ và $AC\colon \begin{cases}x=2-t\\y=t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Biết $M(-1;1)$ là trung điểm BC. Xác định tọa độ của BC.

Bài tập 26. Trong mặt phẳng toa độ Oxy, cho tam ABC cân tại B với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Tìm tọa độ đỉnh B nằm trên đường thẳng $d\colon 2x-y=0$.

Bài tập 27. Cho điểm $A(2;2)$ và $d_1\colon x+y-2=0$, $d_2\colon x+y-8=0$. Tìm tọa độ B và C lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài tập 28. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh $BC\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}$ và phương trình các đường trung tuyến $BM\colon 3x+y-7=0$, $CN\colon x+y-5=0$. Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

Bài tập 29. Cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ và $BC\colon 2x-y-4=0$, $BG\colon 7x-4y-8=0$.

a) Viết phương trình đường cao AH.

b) Tìm tọa độ A, B và C.

Bài tập 30. Cho $A(1;1)$. Tìm điểm B trên đường thẳng $(d)\colon y=3$ và điểm c trên trục hoành sao cho tam giác ABC đều.

Bài tập 31. Trong mặt phẳng tọa độ cho $A(1;1)$. Hãy tìm điểm B trên $d\colon y=3$ và điểm C trên trục hoành sao cho $2MA^2+MB^2$ nhỏ nhất.

Bài tập 32. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC đỉnh $A(2;1)$, đường cao qua B có phương trình $x-3y-7=0$ và đường trung tuyến qua C có phương trình $x+y+1=0$. Xác định tọa độ B và C.

Bài tập 33. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxxy$ cho tam giác ABC có điểm A thuộc đường thẳng $(d)\colon x-4y-2=0$ và cạnh BC song song với (d). Phương trình đường cao $BH\colon x+y+3=0$ và trung điểm cạnh AC là $M(1;1)$. Tìm tọa độ 3 đỉnh tam giác.

Bài tập 34. Cho tam giác ABC có $A(-1;-3)$ biết trọng tâm $G(4;-2)$ và đường trung trực của AB là $(d)\colon 3x+2y-4=0$. Tìm tọa độ B và C.

10.4 Góc và khoảng cách

10.4.1 Góc giữa hai đường thẳng

Công thức 10.1. *Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(a_1;b_1)$ và đường thẳng $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(a_2;b_2)$ khi đó,*

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Lưu ý 10.4.

- *Nếu $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0.$*
- *Cho $\Delta_1: y=k_1x+m_1$ và $\Delta_2: y=k_2x+m_2$*
  - *$\Delta_1\parallel\Delta_2\Leftrightarrow k_1=k_2$ và $m_1\neq m_2$.*
  - *$\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.*
  - *$\tan(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$*

10.4.2 Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Công thức 10.2.

- *Cho đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ và $M(x_0;y_0)$ khoảng cách từ M đến Δ được tính theo công thức*

$$\mathrm{d}(M,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- *Cho đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ và hai điểm $M(x_M;y_M), N(x_N;y_N)\notin\Delta$.*
  - *M,N nằm cùng phía đối với $\Delta\Leftrightarrow(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.*
  - *M,N nằm khác phía đối với $\Delta\Leftrightarrow(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.*

BÀI TẬP

GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Bài tập 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta_1: x+2y-\sqrt{2}=0$ và $\Delta_2: x-y=0$. Tính cos của góc giữa các đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Bài tập 2. Tính số đo góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp sau

a) $\Delta_1: x-2y+5=0$ và $\Delta_2: 3x-y=0$.

b) $\Delta_1: x+\sqrt{3}y=0$ và $\Delta_2: x+10=0$.

Bài tập 3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta: 3x+5y+15=0$ và $\Delta': \begin{cases}x=10-3t\\y=1+5t\end{cases}$. Tính góc φ giữa Δ_1 và Δ_2.

Bài tập 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$, $\Delta': 3x+my-1=0$. Tìm m để góc giữa hai đường thẳng Δ,Δ' bằng 45°.

Bài tập 5. Cho đường thẳng $d: x+y+3=0$. Viết phương trình của đường thẳng d qua điểm $A(2;-4)$ và tạo với d một góc 45°.

Bài tập 6. Cho đường thẳng $\Delta: 3x-2y+1=0$.

a) Tính góc tạo bởi Δ và trục Ox.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ' qua $M(4;3)$ và tạo với Δ một góc 45°.

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Bài tập 7. Tìm khoảng cách từ điểm $M(1;2)$ đến đường thẳng $(D): 4x+3y-2=0$.

Bài tập 8. Tìm khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ

a) $M(4;-5)$ và $\Delta\colon \begin{cases} x=2t \\ y=2-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

b) $M(0;-5)$ và $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}$.

Bài tập 9. Tìm những điểm nằm trên đường thẳng $\Delta\colon 2x+y-1=0$ và có khoảng cách đến $(D)\colon 4x+3y-10=0$ bằng 2.

Bài tập 10. Tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

a) $M(3;5)$ và $\Delta\colon 4x+3y+1=0$.

b) $M(0;5)$ và $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}$.

Bài tập 11. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1,-3)$ và có khoảng cách đến điểm $M_0(2,4)$ bằng 1.

Bài tập 12. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song sau

a) $\Delta_1\colon 4x+3y-2=0$ và $\Delta_2\colon 4x+3y+1=0$.

b) $\Delta_1\colon x-y+11=0$ và $\Delta_2\colon x-y+5=0$.

Bài tập 13. Cho một dòng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Tìm M trên đường thẳng Δ và cách điểm $A(0;1)$ khoảng bằng 5.

Bài tập 14. Cho hình vuông $ABCD$ có $BD\colon x+2y-5=0$ và đỉnh $A(2;-1)$. Viết phương trình về cạnh AB và CD biết rằng AB có dương hệ số góc dương.

Bài tập 15. Viết phương trình của đường thẳng Δ song song với $\Delta'\colon x-4y+1=0$ và có khoảng cách đến đường thẳng Δ' bằng 1.

Bài tập 16. Cho đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=2-2t \\ y=3-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ và hai điểm $A(0;1)$, $B(4;2)$.

a) Tìm M nằm d sao cho $AM=5$.

b) Viết phương trình của đường thẳng Δ qua A sao cho $\mathrm{d}[B,\Delta]=\mathrm{d}[A,d]$.

Bài tập 17. Viết phương trình đường thẳng Δ qua $I(-2;3)$ và cách đều hai điểm $A(0;1)$, $B(2;1)$.

Bài tập 18. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho hai điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $(d)\colon x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ C đến dòng AB bằng 6.

Bài tập 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $(d_1)\colon x+y+3=0$, $(d_2)\colon x-y-4=0$, $(d_3)\colon x-2y=0$. Tìm tọa độ M thuộc d_3 để khoảng cách từ M đến (d_1) bằng hai lần khoảng cách khoảng cách từ M đến (d_2).

Bài tập 20. Cho tam giác ABC cân tại A, có trọng tâm $G(-1;2)$ và đường thẳng chứa cạnh $BC\colon x-2y=0$, biết diện tích tam giác ABC bằng 90 và đỉnh B có hoành độ dương. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC.

Bài tập 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ với $A(-2;3)$, $B(4;5)$, $C(7;-2)$ và hai đường thẳng $(d_1)\colon x+2y-1=0$, $(d_2)\colon 2x+y+2=0$.

a) Viết phương trình đường thẳng (d) qua trọng tâm G của $\triangle ABC$ và vuông góc với BC.

b) Gọi K là giao điểm của d_1 với d_2 và M là điểm thuộc d_1 sao cho $MK=10$. Tính khoảng cách từ M đến d_2.

c) Viết phương trình Δ song song với d_2 sao cho Δ cắt Ox, Oy lần lượt tại P và Q thỏa diện tích tam giác OPQ bằng 1.

Bài tập 22. Cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon mx+2y-5m+2=0$ và $\Delta_2\colon 3x+my-2m-2=0$. Tìm m để góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 bằng 30°.

Bài tập 23. Cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Gọi K là trung điểm AC

a) Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với BK.

b) Tính diện tích tam giác ABK.

c) Tính diện tích tứ giác $ABCD$ biết $D(-3;5)$.

Bài tập 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;5)$, $B(5;1)$. Viết phương trình đường thẳng qua A cách B một khoảng bằng 3.

Bài tập 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;1)$ và đường thẳng $(d)\colon 2x-y-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cách A một khoảng $\sqrt{10}$ và tạo với d một góc 45°.

HÌNH CHIẾU VÀ SỰ ĐỐI XỨNG

Bài tập 26. Tìm điểm đối xứng của

a) $A(1;2)$ qua điểm $I(3;5)$.

b) $A(-1;3)$ qua điểm $O(0;0)$.

Bài tập 27. Tìm hình chiếu của một điểm trên đường thẳng

a) $O(0;0)$ và đường thẳng $(d)\colon x-y+2=0$. b) $A(1;-2)$ và đường thẳng $(d)\colon 4x-5y-3=0$.

Bài tập 28. Tìm điểm đối xứng của một điểm qua đường thẳng

a) $M(2;1)$ và đường thẳng $(d)\colon x-y+1=0$. b) $M(2;5)$ và đường thẳng $(d)\colon x+2y-2=0$.

Bài tập 29. Cho $M(2;5)$ và đường thẳng $(d)\colon x+2y-2=0$.

a) Tìm hình chiếu H của M trên (d).

b) Tìm M' đối xứng với M qua (d).

c) Viết phương trình đường thẳng (d') đối xứng với (d) qua M.

Bài tập 30. Cho hai đường thẳng $(d)\colon x-3y+1=0$ và $(d')\colon 2x+y-2=0$ và điểm $A(2;0)$

a) Viết phương trình (d_1) đối xứng với (d) qua A. b) Viết phương trình (d_2) đối xứng với (d') qua (d_1).

Bài tập 31. Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon x-y+1=0$ và $(d_2)\colon x-y-2=0$. Viết phương trình (d_3) đối xứng với (d_2) qua (d_1).

Bài tập 32. Trong mặt phẳng Oxy, tìm A thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $(d)\colon x-2y+3=0$.

Bài tập 33. Cho tam giác ABC có $B(-3;2)$, đường cao $AH\colon x+7y+19=0$ và phân giác $AD\colon x+3y+7=0$. Viết phương trình 3 cạnh tam giác.

Bài tập 34. Cho tam giác ABC có $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường phân giác ngoài của góc A có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ A, C.

Bài tập 35. Cho 3 điểm $A(2;4)$, $B(3;1)$, $C(1;4)$ và đường thẳng $\Delta\colon x-y-1=0$.

a) Tìm M trên Δ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

b) Tìm N trên Δ sao cho $NA+NC$ nhỏ nhất.

c) Tìm P trên Δ sao cho $|PA-PC|$ lớn nhất.

d) Tìm Q trên Δ sao cho $|QA-QB|$ lớn nhất.

Bài tập 36. Tìm hình chiếu của một điểm trên đường thẳng

a) $M(2;1)$ và $(d)\colon x-2y+2=0$. b) $N(1;2)$ và $(d)\colon 4x-3y-3=0$.

Bài tập 37. Tìm điểm đối xứng của một điểm qua đường thẳng

a) $M(2;1)$ và đường thẳng $(d)\colon 3x-4y+5=0$. b) $N(-3;2)$ và đường thẳng $(d)\colon 3x+2y-1=0$.

Bài tập 38. Cho đường thẳng $(d)\colon 3x+4y-12=0$.

a) Tìm hình chiếu H của O trên (d).

b) Viết phương trình đường thẳng (d') đối xứng với (d) qua O.

Bài tập 39. Cho điểm $M(0;2)$ và $(d_1)\colon 3x+y+2=0$, $(d_2)\colon x-3y+4=0$. Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2). Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và lần lượt cắt (d_1), (d_2) tại B và C khác A sao cho $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$ nhỏ nhất.

PHƯƠNG TRÌNH CÁC ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA CÁC GÓC TẠO BỞI HAI ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải 10.1. *Cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2\colon a_2x+b_2y+c_2=0$ cắt nhau.*

- *Điểm đường phân giác đi qua là giao điểm của (Δ_1,Δ_2).*
- *Δ_1 có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_1$, ta tìm tọa độ véc tơ $\overrightarrow{i}_1=\dfrac{\overrightarrow{u}_1}{|\overrightarrow{u}_1|}$.*
- *Δ_2 có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_2$, ta tìm tọa độ véc tơ $\overrightarrow{i}_2=\dfrac{\overrightarrow{u}_2}{|\overrightarrow{u}_2|}$.*

Nếu

- $\cos\left(\overrightarrow{i}_1,\overrightarrow{i}_2\right)>0$ *suy ra véc tơ chỉ phương của đường phân giác là* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}_1+\overrightarrow{i}_2$.

- $\cos\left(\overrightarrow{i}_1, \overrightarrow{i}_2\right) < 0$ *suy ra véc tơ chỉ phương của đường phân giác là* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i}_1 - \overrightarrow{i}_2$.

Bài tập 40. Viết phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng sau

a) $(d_1)\colon 3x + 4y - 5 = 0$ và $(d_2)\colon 3x - 4y + 1 = 0$.

b) $(d_1)\colon 3x - y + 3 = 0$ và $(d_2)\colon 4x + 2y - 5 = 0$.

Bài tập 41. Lập phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng sau

a) $(d_1)\colon x - 2y + 3 = 0$ và $(d_2)\colon x + 2y - 1 = 0$.

b) $(d_1)\colon 3x - 4y + 12 = 0$ và $(d_2)\colon 12x + 5y - 7 = 0$.

Bài tập 42. Cho tam giác ABC có $A(-6;3)$, $-4;3$ và $C(9;2)$.

a) Viết phương trình đường phân giác góc A.

b) Tìm $M \in AB$, $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC$ và $AM = CN$.

Bài tập 43. Cho tam giác ABC, hãy tìm tọa độ điểm C. Biết rằng hình chiếu vuông góc của C lên AB là $H(-1;-1)$, đường phân giác góc A là $x + y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x + 3y - 1 = 0$.

Bài tập 44. Cho tam giác ABC có $A(2;1)$ và phương trình hai đường phân giác góc B và C lần lượt là $x - 2y + 1 = 0$ và $x + y + 3 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

Bài tập 45. Cho đường thẳng $(d_1)\colon 4x - 3y - 12 = 0$ và $(d_2)\colon 4x + 3y - 12 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bánh kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên (d_1), (d_2) và Oy.

Bài tập 46. Cho $\triangle ABC$ có $A(1;2)$ và phương trìnhđường trung tuyến $BM\colon 2x + y + 1 = 0$ và đường phân giác trong $\widehat{C}$ có phương trình $x + y - 1 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

10.5 Đường tròn

10.5.1 Phương trình đường tròn

Định nghĩa 10.7.

- *Dạng chính tắc: Phương trình đường tròn (C) có tâm là $I(a;b)$ và bán kính bằng R có dạng $(C)\colon (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.*
- *Dạng tổng quát: Phương trình đường $(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.*

10.5.2 Vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn (C)

Định lý 10.15. *Để tìm số giao điểm của đường thẳng $\Delta\colon Ax+By+C=0$ và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, ta so sánh khoảng cách từ tâm I đến Δ với bán kính R.*

- $\mathrm{d}(I;\Delta)<R \Leftrightarrow \Delta$ *cắt* (C) *tại hai điểm phân biệt.*
- $\mathrm{d}(I;\Delta)>R \Leftrightarrow \Delta$ *và* (C) *không có điểm chung.*

$\mathrm{d}(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \Delta$ *tiếp xúc với* (C)*. Đường* Δ *được gọi là tiếp tuyến của đường tròn.*

Định lý 10.16. *Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) tâm I và bán kính R khi và chỉ khi $\mathrm{d}[I,(\Delta)]=R$.*

BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Bài tập 1. Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

a) $x^2+y^2+2x-4y-9=0$. b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$. c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$.

d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0$. e) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$. f) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

Bài tập 2. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

Bài tập 3. Cho $(C_m)\colon x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$.

a) Tìm m để (C_m) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

b) Tìm tập hợp tâm I của họ đường tròn (C_m).

c) Chứng minh (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Bài tập 4. Cho đường thẳng $(d)\colon (1-m^2)x+2my+m^2-4m+1=0$, chứng minh (d) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài tập 5. Cho điểm $A(2;0)$, $B(0;1)$. Chứng minh tập hợp các điểm M thỏa điều kiện $MA^2-MB^2=MO^2$ là một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của nó.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Bài tập 6. Lập phương trình đường tròn có tâm $I(3;-5)$ bán kính $R=2$.

Bài tập 7. Lập phương trình đường tròn đường kính AB với $A(1;6)$, $B(-3;2)$.

Bài tập 8. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$.

Bài tập 9. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm: $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$.

Bài tập 10. Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau

a) Có tâm $I(3;5)$ và qua điểm $A(7;2)$. b) Có đường kính AB, biết $A(1;1)$ và $B(7;5)$.

c) Qua $A(2;3)$, $B(-2;1)$ và tâm nằm trên Ox.

Bài tập 11. Viết phương trình đường tròn qua 3 điểm

a) $A(1;3)$, $B(5;6)$ và $C(7;0)$. b) $A(2;1)$, $B(2;5)$ và $C(-2;1)$.

Bài tập 12. Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau

a) Tâm $I(2;-5)$ tiếp xúc với Ox.

b) Tâm $I(1;3)$ tiếp xúc với Oy.

c) Tiếp xúc với Ox và Oy đồng thời có tâm nằm trên đường thẳng $4x-2y-8=0$.

d) Tiếp xúc với Ox tại $M(6;0)$ và qua $A(9;9)$.

e) Tiếp xúc với Ox tại $M(2;0)$ và độ dài đoạn thẳng nối đến $B(6;4)$ bằng 5.

Bài tập 13. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau

a) Qua điểm $A(2;0)$, $B(3;1)$ và bán kính $R=5$.

b) Qua điểm $A(-1;1)$, $B(0;2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta\colon 2x+3y=0$.

c) Tiếp xúc với đường thẳng $(d)\colon x-2y+3=0$ tại $M(1;2)$ và tâm nằm trên đường thẳng $(d')\colon x-5y-5=0$.

d) Tiếp xúc với đường thẳng $(d)\colon 3x-4y-31=0$ tại $M(1;-7)$ và có bán kính $R=5$.

Bài tập 14. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau

a) Tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d)\colon x-y+7=0$.

b) Qua điểm $A(5;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta\colon x+3y+2=0$ tại $M(1;-1)$.

c) Qua điểm $A(-1;0)$, $B(0;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d')\colon x-y-1=0$.

d) Có tâm $I(-1;2)$ và chắn trên $(d)\colon x+2y+2=0$ một dây cung $MN=2$.

e) Tâm I nằm trên $(d)\colon 4x+3y-2=0$ và tiếp xúc với 2 đường thẳng $(d_1)\colon x+y+4=0$ và $(d_2)\colon .7x-y+4=0$.

Bài tập 15. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (d)

a) $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=4$ và $(d)\colon x-y-1=0$.

b) $(C)\colon (x-2)^2+(y-3)^2=3$ và $(d)\colon x+y-1=0$.

Bài tập 16. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau

a) Qua điểm $A(-1;2)$, $B(3;0)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta\colon 7x+y-6=0$.

b) Tiếp xúc với đường thẳng $(d)\colon x-7y+10=0$ tại $M(4;2)$ và tâm nằm trên đường thẳng $(d')\colon 2x+y=0$.

c) Tiếp xúc với đường thẳng $(d)\colon 5x-4y-17=0$ tại $M(4;3)$ và tiếp xúc với đườnh thẳng $(d')\colon x-5y-5=0$.

Bài tập 17. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d)\colon 2x-y+3=0$. Lập phương trình đường tròn có tâm thuộc (d), cắt Ox tại hai điểm A và B, Oy tại hai điểm C và D sao cho $AB=CD=2$.

Bài tập 18. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C_1)\colon x^2+y^2=4$, $(C_2)\colon x^2+y^2-12x+18=0$ và đường thẳng $(d)\colon x-y-4=0$. Lập phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với (d) và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB\perp d$.

TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải 10.2. *Gọi d là tiếp tuyến cần tìm.*

a) ***Dạng 1:*** *Biết tiếp điểm M. Do d vuông góc với IM nên $\overrightarrow{IM}$ là VTPT của d.*

b) ***Dạng 2:*** *Biết phương của tiếp tuyến: cho $\triangle : ax+by+c=0$*

- $d \parallel \triangle \Rightarrow d: ax+by+c'=0\,(c'\neq c)$.
- $d\perp\triangle\Rightarrow d: bx-ay+c'=0$.

c) ***Dạng 3:*** *Tiếp tuyến qua điểm A nằm ngoài (C). Lập phương trình tổng quát d qua A và có VTPT là $\overrightarrow{n}=(a;b)\neq\overrightarrow{0}$. Dùng $d(I;d)=R$ để tìm a, b.*

Bài tập 19. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x-2)^2+(y+3)^2=5$ tại điểm $M(3;-1)$.

Bài tập 20. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M\in(C)$.

a) $x^2+y^2+4x-9=0$ và $M(1;2)$.

b) $x^2+y^2-2x-8y-8=0$ và $M(4;0)$.

Bài tập 21. Cho đường tròn $(C)\colon (x-2)^2+(y-1)^2=25$.

a) Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(5;-3)$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $(d)\colon 5x-12y+2=0$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $(d')\colon x-2y+2=0$.

Bài tập 22. Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-6x+2y+5=0$.

a) Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\in(C)$ có hoành độ $x=2$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $(d)\colon 4x+2y-1=0$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $(d')\colon 2x-y+7=0$.

Bài tập 23. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ một điểm cho trước.

a) $(C)\colon x^2+y^2-4x+2y+2=0$ và $A(3;1)$. b) $(C)\colon x^2+y^2+4x-4y-1=0$ và $A(0;-1)$.

Bài tập 24. Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-6x-4y+4=0$ và $A(8;-1)$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

b) Gọi M, N là các tiếp điểm ứng với các tiếp tuyến kẻ từ A của C. Viết phương trình của đường thẳng MN.

c) Tính độ dài MN.

Bài tập 25. Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2+2x-4y=0$ và đường thẳng $(d)\colon x-y+1=0$. Tìm tọa độ điểm $M\in(d)$ mà từ đó kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) tại A, B sao cho $\widehat{AMB}=60^\circ$.

Bài tập 26. Cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $(d)\colon 3x-4y+m=0$. Tìm m để trên (d) có duy nhất một điểm P mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho tam giác ABC đều.

Bài tập 27. Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-4x+8y-5=0$.

a) Tìm tọa độ tâm và bán kính của (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-1;0)$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(3;-11)$.

Bài tập 28. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) từ một điểm cho trước.

a) $(C)\colon x^2+y^2-2x-8y-82=0$ và $A(-4;-6)$ b) $(C)\colon x^2+y^2+2x-8y+13=0$ và $A(1;1)$.

Bài tập 29. Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2+2x-4y+4=0$ và $A(3;5)$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

b) Gọi E, F là hai tiếp điểm ứng với hai tiếp tuyến kẻ từ A của (C). Viết phương trình đường thẳng EF.

c) Tính độ dài EF.

Bài tập 30. Cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=4$. Lập phương trình tiếp tuyến (d) biết

a) Tạo với Ox, Oy một tam giác vuông cân. b) Tạo với Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 8.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Bài tập 31. Cho đường thẳng $\Delta: x-2y+5=0$ và đường tròn $(C): (x-2)^2+y^2=4$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C).

Bài tập 32. Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và đường tròn (C).

a) $(d)\colon x+y-2=0$ và $(C)\colon x^2+y^2-2x+6y-6=0$.

b) $(d)\colon \begin{cases} x=t \\ y=5-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ và $(C)\colon x^2+y^2-4x+2y-20=0$.

Bài tập 33. Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-4x+6y+3=0$ và đường thẳng $(d)\colon 3x-y+m=0$. Tìm các giá trị của m để

a) (d) tiếp xúc với đường tròn (C).

b) (d) cắt đường tròn (C).

c) (d) và đường tròn (C) không có điểm chung.

Bài tập 34. Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(1;2)$. Chứng minh rằng bất kỳ đường thẳng nào đi qua M đều cắt (C) tại hai điểm phân biệt. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm AB.

Bài tập 35. Viết phương trình đường thẳng qua $A(2;3)$ và cắt đường tròn $(x+1)^2+y^2=9$ tại hai điểm M, N sao cho $MN=6$.

Bài tập 36. Viết phương trình đường tròn (T) có tâm $I(-1;5)$ và (T) cắt $(d)\colon 2x-y-3=0$ tại hai điểm B, C sao cho diện tích $\triangle ABC=10$.

Bài tập 37. Cho hai đường tròn $(C_1)\colon x^2+y^2-10x=0$ và $(C_2)\colon x^2+y^2+4x-2y-20=0$.

a) Xét vị trí tương đối của (C_1) và (C_2).

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung $(C_1),(C_2)$.

Bài tập 38. Cho đường thẳng $(d)\colon x-y-1=0$ hai đường tròn $(C_1)\colon (x-3)^2+(y+4)^2=8$ và $(C_2)\colon (x+5)^2+(y-4)^2=32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên (d) và tiếp xúc đồng thời với (C_1) và (C_2).

Bài tập 39. Cho đường tròn $(C)\colon (x-2)^2+(y-3)^2=4$ và đường thẳng $(d)\colon 3x+4y+7=0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm nằm trên (d) và tiếp xúc với (C) và có bán kính nhỏ nhất.

Bài tập 40. Cho đường thẳng $(d)\colon 4x-3y-32=0$ và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-8x-6y+16=0$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng (d') biết $(d')\perp(d)$ và tiếp xúc với (C).

b) Viết phương trình đường tròn (C') biết tâm của (C') nằm trên (d), tiếp xúc ngoài với (C) và có bán kính nhỏ nhất.

Bài tập 41. Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-4x-6y+5=0$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua $A(3;2)$ và cắt (C) theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

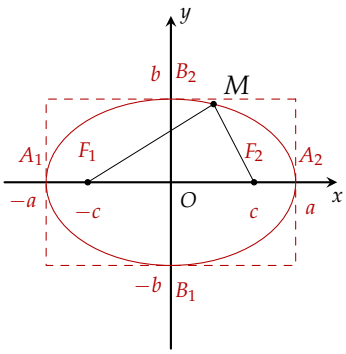
Bài tập 42. Cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y+2)^2=4$ và đường thẳng $(d)\colon 3x-4y=5=0$. Viết phương trình đường thẳng $(d')\parallel(d)$ và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.

10.6 Elip

10.6.1 Phương trình elip

Định nghĩa 10.8.

- *Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c, (c > 0)$ và một độ dài $2a$ không đổi $a > c$. Tập hợp các điểm M sao cho $M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là một Elip.*
- *Trong đó* $\begin{cases} F_1, F_2 : \text{Hai tiêu điểm của elip } (E) \\ F_1F_2 = 2c : \text{Tiêu cự của elip } (E) \\ F_1M, F_2M : \text{Bán kính qua tiêu điểm của } M. \end{cases}$
- *Phương trình chính tắc:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (*), (a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2)$.



10.6.2 Các thành phần elip

- Tọa độ các tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$
- $M(x,y) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x : \text{Bán kính qua tiêu điểm bên trái.} \\ MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x : \text{ Bán kính qua tiêu điểm bên phải.} \end{cases}$
- Elip (E) nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Tọa độ các đỉnh: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- Độ dài các trục: $\begin{cases} \text{Trục lớn: } A_1A_2 = 2a \\ \text{Trục nhỏ: } B_1B_2 = 2b. \end{cases}$
- Hình chữ nhật cơ cơ sở tạo bởi các đường thẳng $\begin{cases} x = \pm a \\ y = \pm b. \end{cases}$

BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH CÁC THÀNH PHẦN CỦA ELIP.

Bài tập 1. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E).

Bài tập 2. Cho elip (E): $18x^2 + 32y^2 = 288$. Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E).

Bài tập 3. Cho elip (E): $9x^2 + 25y^2 = 225$. Xác định các tiêu điểm và tọa độ các đỉnh của elip (E).

Bài tập 4. Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ tiêu điểm, tọa độ các đỉnh và tâm sai của các elip sau.

a) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. c) $6x^2 + 9y^2 = 54$. d) $9x^2 + 16y^2 = 144$.

e) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. f) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{7} = 1$. g) $7x^2 + 9y^2 = 63$. h) $5x^2 + 9y^2 = 45$.

Bài tập 5. Tìm toạ độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau.

a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$. b) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. c) $0,25x^2 + 9y^2 = 1$. d) $16x^2 + 64y^2 = 100$.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC ELIP

Bài tập 6. Lập phương trình chính tắc của elip (E) mà độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.

Bài tập 7. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.

Bài tập 8. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm $M(1;0), N(\frac{\sqrt{3}}{2};1)$.

Bài tập 9. Viết phương trình chính tắc của elip có tiêu điểm $F(-2;0)$ và tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của elip là.

Bài tập 10. Viết phương trình chính tắc của elip có tiêu điểm $F\left(2\sqrt{3};0\right)$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 32.

Bài tập 11. Viết phương trình chính tắc của elip biết

a) Độ dài trục lớn bằng 8 và trục nhỏ bằng 6.

b) Độ dài trục lớn bằng 8 và tiêu cự bằng 6.

c) Độ dài trục nhỏ bằng 6 và tiêu cự bằng 8.

d) Các cạnh hình chữ nhật cơ sở $x = \pm 9$, $y = \pm 3$.

Bài tập 12. Viết phương trình chính tắc của elip biết

a) Độ dài trục lớn bằng 10, đi qua điểm $M\left(-4;\frac{9}{5}\right)$.

b) Tiêu điểm $F_1(-2;0)$, đi qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$.

c) Đi qua hai điểm $M(0;3)$ và $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$.

d) Tiêu cự bằng 4 và tỷ lộ độ dài hai trục là $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

e) Đi qua hai điểm $M\left(4;\sqrt{3}\right)$, $N\left(2\sqrt{2};-3\right)$.

f) Đi qua hai điểm $M\left(2;\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $N\left(-\frac{\sqrt{15}}{2};-1\right)$.

Bài tập 13. Lập phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 14. Lập phương trình chính tắc elip biết

a) Hình chữ nhật cơ sở có một cạnh nằm trên đường thẳng $x - 2 = 0$ và độ dài đường chéo bằng 6.

b) Có đỉnh $A(-5;0)$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2 + y^2 = 34$.

ĐIỂM TRÊN ELIP THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bài tập 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. Tìm tất cả các điểm thuộc elip có tọa độ là số nguyên.

Bài tập 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}$ bằng 60^0.

Bài tập 17. Tìm M trên elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ sao cho hiệu số hai bán kính qua tiêu điểm là $\frac{32}{5}$.

Bài tập 18. Cho elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm M trên elip sao cho số đo $\widehat{F_1MF_2}$ bằng

a) 30°. b) 60°. c) 90°. d) 120°.

Bài tập 19. Cho elip $x^2 + 9y^2 = 9$.

a) Tìm M trên elip sao cho $MF_1 = 2MF_2$.

b) Tìm M trên elip sao cho $3MF_1 = MF_2$.

c) Tìm M trên elip sao cho $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{2MF_2} = \frac{6}{F_1F_2}$.

d) Tìm M trên elip sao cho $S_{\triangle MF_1F_2} = \sqrt{2}$.

Bài tập 20. Cho điểm $C(2;0)$ và elip (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Tìm A, B biết A, B đối xứng qua Ox và $\triangle ABC$ đều.

Bài tập 21. Cho (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, tìm trên (E) hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Bài tập 22. Cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

a) Biết $M \in (E)$ sao cho $MF_1 = 3$. Tính MF_2 và tạo độ điểm M.

b) Dây cung A, B thay đổi đi qua tiêu điểm F_1 nhưng không qua tiêu điểm F_2. Chứng minh rằng chu vi tam giác ABF_2 không đổi.

Bài tập 23. Cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hai điểm $A(-3;0)$, $I(-1;0)$. Tìm B, C thuộc elip sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài tập 24. Cho elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $(d)\colon x-2y+12=0$.

a) Tìm trên (E) điểm M sao cho khoảng cách từ M đến (d) nhỏ nhất.

b) Tìm trên (E) điểm N sao cho khoảng cách từ N đến (d) lớn nhất.

Bài tập 25. Cho elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $(d)\colon x-\sqrt{2}y+2=0$. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (E) tại hai điểm B, C. Tìm điểm A trên (E) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài tập 26. Cho elip $(E)\colon 9x^2+25y^2=225$.

a) Tìm tọa độ tiêu điểm, tâm sai và độ dài các trục của (E).

b) Đường thẳng (d) qua tiêu điểm F_1, vuông góc với Ox và cắt (E) tại M, N. Tính MN.

c) Lấy M, N thuộc (E) sao cho $MF_2+NF_1=6$. Tính $T=MF_1+NF_2$.

d) Cho P thuộc (E). Tính giá trị $S=PF_1\cdot PF_2+OP^2$.

Bài tập 27. Cho elip $(E)\colon 4x^2+9y^2=36$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt elip tai hai điểm A, B sao cho $MA=MB$.

Bài tập 28. Cho $(d)\colon 2x+y+3=0$ và elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Viết phương trình (d') vuông góc với (d) và cắt (E) tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.

TOÁN THỰC TẾ

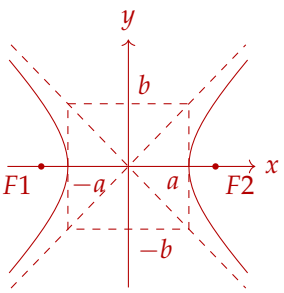
Bài tập 29. Một kĩ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là 12 m, khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là 3 m. Người kĩ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao 2,8 m thì có chiều rộng không quá 3 m. Hỏi chiếc xe tải cao 2,8 m có đi qua được hầm hay không?

Bài tập 30. Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là 768 800 km và 767 640 km. Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm trái đất đến mặt Trăng.

10.7 Hypebol

10.7.1 Phương trình hypebol

Định nghĩa 10.9. *Cho hai điểm phân biệt cố định F_1 và F_2. Đặt $F_1F_2 = 2c$. Cho số thực dương $a < c$. Tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ được gọi là đường hypebol. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của hypebol.*



10.7.2 Các thành phần hypebol

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hypebol có hai tiêu điểm thuộc trục hoành (Ox) sao cho O là trung điểm của hai tiêu điểm đó, thì có phương trình của hypebol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a, b > 0. \tag{10.1}$$

Phương trình (10.1) được gọi là phương trình chính tắc của hypebol. Ngược lại, mỗi phương trình có dạng (10.1), với $a, b > 0$ đều là phương trình hypebol có

- Toạ độ các đỉnh $A_1(-a, 0)$; $A_2(a, 0)$.
- Độ dài trục thực là $2a$.
- Độ dài trục ảo là $2b$.
- Hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ và $F_2(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$.
- Tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2+b^2}$.

BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA HYPEBOL

Bài tập 1. Cho hypebol $(H)\colon \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh.

Bài tập 2. Cho hypebol $(H)\colon x^2 - 9y^2 = 9$. Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh.

Bài tập 3. Cho hypebol có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Tìm hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên hypebol tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng bao nhiêu?

Bài tập 4. Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh của (H) trong các trường hợp sau

a) $(H)\colon \dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$. b) $(H)\colon \dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. c) $(H)\colon \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$. d) $(H)\colon \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

e) $(H)\colon \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. f) $(H)\colon \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{7} = 1$. g) $(H)\colon \dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. h) $(H)\colon x^2 - 3y^2 - 9 = 0$.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA HYPEBOL

Bài tập 5. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H)

a) Biết (H) đi qua $M(3\sqrt{2}; -4)$ và có tiêu điểm $F_2(5; 0)$.

b) Qua $A(-2; 2\sqrt{3})$ và hai đường tiệm cận có phương trình $2x \pm y = 0$.

Bài tập 6. Lập phương trình chính tắc và vẽ hình của hypebol biết

a) Đi qua điểm $M(2; 2)$ và mỗi đường tiệm cận tạo với Ox một góc 60^0.

b) Đi qua 2 điểm $A(\sqrt{6},-1)$ và $B(4,\sqrt{6})$.

Bài tập 7. Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) biết

a) Nửa trục thực bằng 8, tiêu cự bằng 20.

b) (H) đi qua 2 điểm $A\left(5\sqrt{2};2\sqrt{5}\right)$ và $B(45;40)$.

c) (H) đi qua $M\left(4\sqrt{2};3\right)$, có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của $(E)\colon 2x^2+7y^2=70$.

d) (H) qua $M\left(\frac{4\sqrt{34}}{5};\frac{9}{5}\right)$ và M nhìn 2 tiêu điểm dưới một góc vuông.

MỘT SỐ BÀI TẬP KHÁC

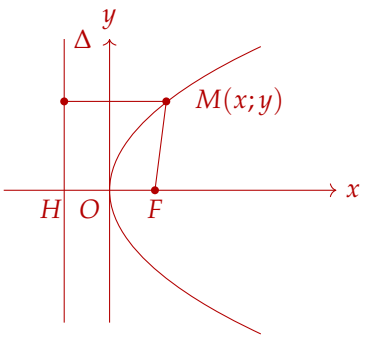
Bài tập 8. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hypebol $(H)\colon \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (H) tại A và B sao cho M là trung điểm của AB.

Bài tập 9. Cho hypebol $(H)\colon \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. M là một điểm tuỳ ý trên (H), d_1, d_2 lần lượt là các đường thẳng qua M và song song với hai tiệm cận của (H). CMR diện tích hình bình hành tạo bởi d_1, d_2 và tiệm cận không đổi.

10.8 Parabol

10.8.1 Phương trình parabol

Định nghĩa 10.10.
Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là đường parabol. Điểm F được gọi là tiêu điểm, Δ được gọi là đường chuẩn, khoảng cách từ F đến Δ được gọi là tham số tiêu của parabol.



10.8.2 Các thành phần parabol

Định nghĩa 10.11. *Xét parabol với tiêu điểm F, đường chuẩn Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ. khi đó, trong hệ trục Oxy với O là trung điểm HF, tia Ox trùng với tia OF, parabol (P) có phương trình*

$$y^2 = 2px, \text{ với } p > 0. \tag{10.2}$$

Phương trình (10.2) được gọi là phương trình chính tắc của parabol (P). Ngược lại, mỗi phương trình dạng (10.2), với $p > 0$, là phương trình chính tắc của parabol có

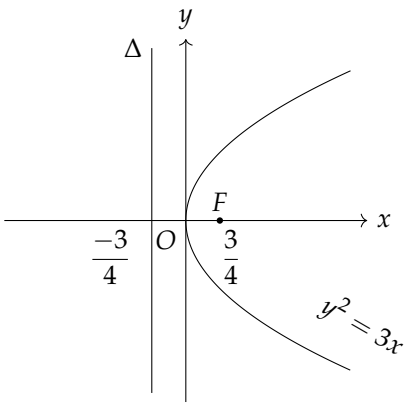
- *Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$;*
- *Phương trình đường chuẩn Δ: $x = -\frac{p}{2}$.*

BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA PARABOL

Bài tập 1. Xác định tiêu điểm, đường chuẩn và vẽ đồ thị của parabol (P): $y^2 = 4x$.

Bài tập 2. Xác định tiêu điểm, đường chuẩn và vẽ đồ thị của parabol (P): $y^2 = 3x$.



Hình 10.1:

Bài tập 3. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

a) $y^2 = x$. b) $y^2 = 8x$. c) $y^2 = \frac{1}{4}x$. d) $y^2 = \sqrt{5}x$.

e) $y^2 = 3x$. f) $y^2 = 9x$. g) $y^2 = \frac{1}{2}x$. h) $y^2 = \sqrt{3}x$.

Bài tập 4. Cho parabol $y^2 = x$. Tìm những điểm trên (P) có khoảng cách tới F bằng 3.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH PARABOL

Bài tập 5. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết:

a) Tiêu điểm là $F(4;0)$.

b) Đi qua điểm $N(7;\sqrt{12})$.

c) Đường chuẩn có phương trình $x+\dfrac{3}{4}=0$.

Bài tập 6. Lập phương trình chính tắc của (P) đi qua điểm $M(2;4)$.

Bài tập 7. Viết phương trình chính tắc của parabol (P), biết rằng (P) có đường chuẩn là đường thẳng $\Delta\colon x+4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 5.

Bài tập 8. Cho parabol (P) có phương trình $y^2=16x$. Gọi Δ là đường thẳng bất kì đi qua tiêu điểm F của (P) và không trùng với trục hoành. Chứng minh rằng Δ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B, đồng thời tích các khoảng cách từ A và B đến trục hoành không đổi.

ỨNG DỤNG CỦA PARABOL VÀO KHOA HỌC VÀ ĐỜI SỐNG.

Bài tập 9. Khúc cua của một con đường có hình dạng parabol, điểm đầu vào khúc cua là A, điểm cuối là B, khoảng cách $AB=400$ m. Đỉnh parbol (P) của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B.

a) Viết phương trình chính tắc của parabol (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.

b) Viết phương trình chính tắc của parabol (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 km trên thực tế.

Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Đức Trọng. *Bồi dưỡng năng lực tự học toán 10*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh, 2018.

[2] Trần Nam Dũng, *Sách giáo khoa toán 10 Tập 1-2, Chân Trời Sáng Tạo*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2022.

[3] Hà Huy Khoái, *Sách giáo khoa toán 10 Tập 1-2, Kết Nối Tri Thức*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2022.

[4] Đỗ Đức Thái, *Sách giáo khoa toán 10 Tập 1-2, Cánh Diều*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2022.