

NGUYỄN HOÀNG THANH



TÀI LIỆU KHAI PHÓNG NĂNG LỰC HỌC TOÁN 11

THĂNG LONG BÌNH TÂN

542/8 TỈNH LỘ 10, P. BÌNH TRỊ ĐÔNG, Q. BÌNH TÂN, HCM

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

1	Hàm số và phương trình lượng giác	1
1.1	Góc lượng giác	1
1.2	Giá trị lượng giác của một góc lượng giác	5
1.3	Giá trị lượng giác của các góc liên kết	8
1.4	Các công thức lượng giác	11
1.5	Hàm số lượng giác và đồ thị	16
1.6	Phương trình lượng giác cơ bản	21
1.7	Bài tập cuối chương	24
2	Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân	27
2.1	Dãy Số	27
2.2	Cấp số cộng	31
2.3	Cấp số nhân	35
2.4	Bài tập cuối chương	38
3	Giới hạn và hàm số liên tục	39
3.1	Khái niệm và các phép toán	39
3.2	Giới hạn của hàm số	44
3.3	Hàm số liên tục	49
3.4	Bài tập cuối chương	52
4	Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	53
4.1	Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	53
4.2	Hai đường thẳng song song	58
4.3	Đường thẳng và mặt phẳng song song	62
4.4	Hai mặt phẳng song song	65
4.5	Phép chiếu song song	69
4.6	Bài tập cuối chương	71
5	Thống kê	73
5.1	Số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm	73
5.2	Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	76
5.3	Bài tập cuối chương	79
6	Hàm số mũ và hàm số logarit	81
6.1	Phép tính lũy thừa	81
6.2	Phép tính logarit	85
6.3	Hàm số mũ	89
6.4	Hàm số logarit	91
6.5	Phương trình mũ và logarit	93
6.6	Bất phương trình mũ và lôgarit	97
6.7	Bài tập cuối chương	100
7	Đạo hàm	101
7.1	Đạo hàm	101
7.2	Các quy tắc tính đạo hàm	104
7.3	Đạo hàm cấp hai	110
7.4	Bài tập cuối chương	112
8	Quan hệ vuông góc trong không gian	115
8.1	Hai đường thẳng vuông góc	115
8.2	Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	117
8.3	Góc giữa hai mặt phẳng	119

8.4	Hai mặt phẳng vuông góc	119
8.5	Hình lăng trụ đứng, hình hộp và hình lập phương	121
8.6	Hình chóp đều, hình chóp cụt đều	121
8.7	Khoảng cách	123
8.8	Thể tích khối hộp, lăng trụ và khối chóp	126
8.9	Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	128
8.10	Góc nhị diện	129
9	Xác suất	133
9.1	Biến cố giao và quy tắc nhân xác suất	133
9.2	Biến cố hợp và quy tắc cộng xác suất	136
9.3	Bài tập cuối chương	137

Chương 1

Hàm số và phương trình lượng giác

1.1 Góc lượng giác

1.1.1 Quy ước chiều âm, chiều dương

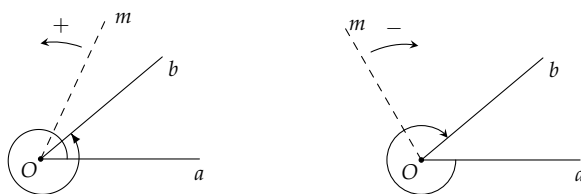
Định nghĩa 1.1.

- Cho tia Oa . Khi xét chuyển động của một tia Om quanh gốc O của nó tính từ vị trí ban đầu Oa theo một chiều cố định, người ta quy ước chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.
- Một vòng quay theo chiều dương tương ứng với góc quay 360° , một vòng quay theo chiều âm tương ứng với góc quay -360° .

1.1.2 Góc lượng giác

Định nghĩa 1.2. Cho hai tia Oa, Ob .

- Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một **góc lượng giác** có tia đầu Oa , tia cuối Ob .
Ký hiệu: (Oa, Ob) .
- Khi tia Om quay một góc α , ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α .
Ký hiệu: $(Oa, Ob) = \alpha$.



Lưu ý 1.1. Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác có tia đầu Oa và tia cuối Ob .

Lưu ý 1.2. Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$\text{sđ}(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

hoặc thường viết là

$$(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ.$$

với α° là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob . Chẳng hạn, trong hình đầu tiên của ví dụ trên thì $(Oa, Ob) = 90^\circ + k360^\circ$.

1.1.3 Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

Định nghĩa 1.3. Với ba tia Oa, Ob và Oc bất kì, ta có $(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ$, $(k \in \mathbb{Z})$.

1.1.4 Đơn vị radian

Định nghĩa 1.4. Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian (đọc là 1 ra-đi-an, viết tắt là 1rad).

Công thức 1.1.

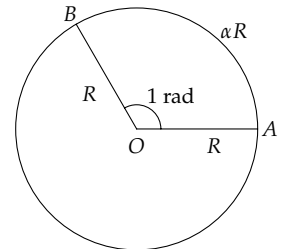
• Công thức chuyển độ sang radian: $a^\circ = \frac{\pi a}{180} \text{ rad.}$

• Công thức chuyển radian sang độ: $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi} \right)^\circ.$

Trên đường tròn bán kính R , một góc ở tâm có số đo α rad thì chắn một cung có độ dài αR (Hình 10). Vì góc bẹt (180°) chắn nửa đường tròn với độ dài là πR , nên góc bẹt có số đo theo đơn vị radian là π . Khi đó ta viết

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

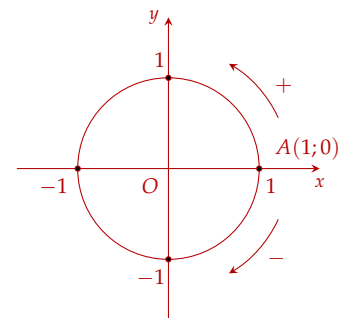
Suy ra, với $\pi \approx 3,14$, ta có $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57,3^\circ.$



Hình 10

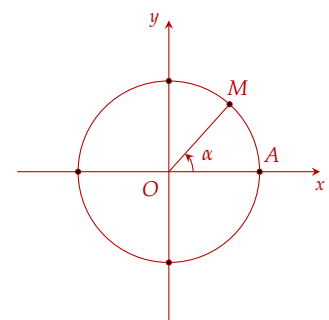
1.1.5 Đường tròn lượng giác**Định nghĩa 1.5.**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm $A(1;0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ. Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là **đường tròn lượng giác**.



Hình 11

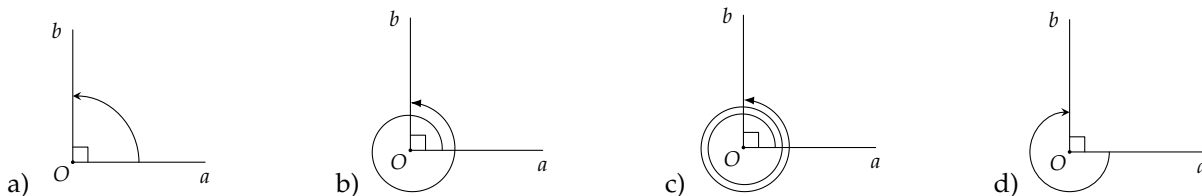
Cho số đo góc α bất kì. Trên đường tròn lượng giác, ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác (OA, OM) bằng α (Hình 12). Khi đó điểm M được gọi là **điểm biểu diễn** của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



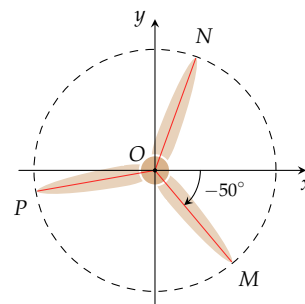
Hình 12

❖ BÀI TẬP ❖**TÍNH SỐ ĐO GÓC LƯỢNG GIÁC**

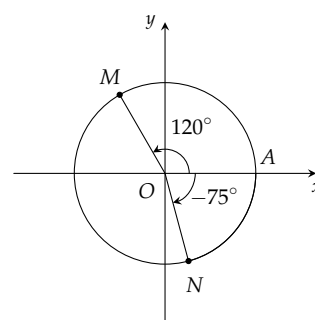
Bài tập 1. Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau



Bài tập 2. Trong hình bên, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau. Viết công thức tổng quát đo số đo của các góc lượng giác (Ox, ON) và (Ox, OP) .

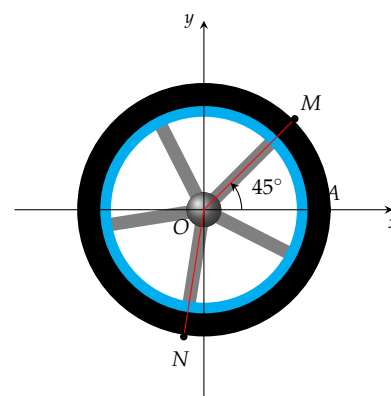


Bài tập 3. Viết công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, OM) và (OA, ON) trong hình bên.



Hình 14

Bài tập 4. Trong hình vẽ bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



Hình 15

CHUYỂN ĐỔI ĐƠN VỊ

Bài tập 5. Đổi số đo của các góc sau đây sang radian:

- | | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| a) 135° ; | b) 180° ; | c) 270° ; | d) 360° ; |
| e) -30° ; | f) -45° ; | g) -60° ; | h) -120° ; |
| i) -135° ; | j) -160° ; | k) 275° ; | l) 185° . |

Bài tập 6. Đổi số đo của các góc sau đây sang độ:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $\frac{2\pi}{3}$; | b) $\frac{3\pi}{2}$; | c) $\frac{5\pi}{4}$; | d) $\frac{\pi}{12}$; |
| e) $\frac{7\pi}{4}$; | f) $\frac{5\pi}{6}$; | g) -5 ; | h) $\frac{13\pi}{9}$. |

BIỂU DIỄN TRÊN ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

Bài tập 7. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là:

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a) 30° ; | b) 45° ; | c) 60° ; | d) 90° ; |
| e) 120° ; | f) 135° ; | g) 180° ; | h) 225° ; |

- i) 270° ; j) -30° ; k) -45° ; l) -60° ;
 m) -90° ; n) -120° ; o) -135° ; p) 865° .

Bài tập 8. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

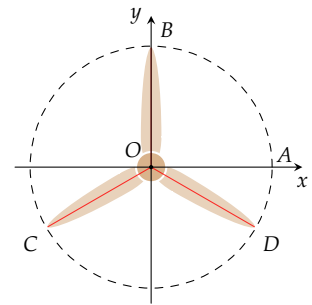
- a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\pi}{2}$;
 e) $\frac{2\pi}{3}$; f) $\frac{3\pi}{4}$; g) $\frac{-\pi}{3}$; h) $\frac{-\pi}{4}$;
 i) $\frac{-\pi}{6}$; j) $\frac{-\pi}{2}$; k) $\frac{-17\pi}{3}$; l) $\frac{13\pi}{4}$.

Bài tập 9. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng là:

- a) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); b) $k\frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

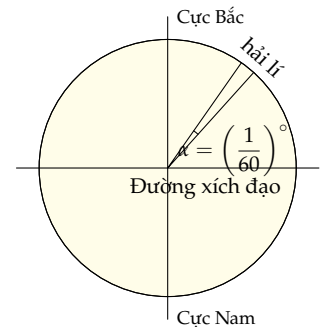
Bài tập 10. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Hình 16

Bài tập 11. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

1.2 Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

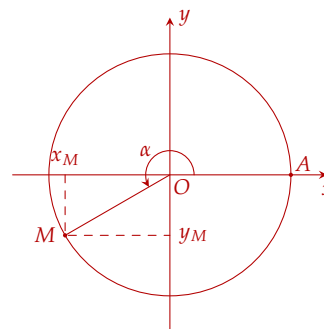
1.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.6. Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α .

Khi đó:

- Tung độ y_M của M gọi là **sin** của α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Hoành độ x_M của M gọi là **côsin** của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Nếu $x_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là **tang** của α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Nếu $y_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là **côtang** của α , kí hiệu $\cot \alpha$.

Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc lượng giác α . Ta gọi trục hoành là **trục côsin**, còn trục tung là **trục sin**.



1.2.2 Một số công thức quan trọng cần nhớ

Định lý 1.1. Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k , ta có

- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$.
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$.
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$.
- $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$.

Định lý 1.2. Một số công thức quan trọng

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

❖ BÀI TẬP ❖

NHẬN DẠNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC BẰNG BẢNG

Bài tập 1. Cho bảng giá trị lượng giác

độ	0°	30°	45°	60°	90°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Quan sát bảng trên và đọc giá trị lượng giác của các góc 30°, 45°, 60° và 90°.

Bài tập 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc

- a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\pi}{2}$;
e) $\frac{13\pi}{3}$; f) 405°; g) 450°; h) -45°.

Bài tập 3. Em hãy xác định dấu của $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ trong các trường hợp sau

- a) $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. b) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. c) $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$. d) $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$.

XÁC ĐỊNH DẤU VÀ TÍNH TOÁN GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Bài tập 4. Chia đường tròn lượng giác thành 4 phần (I, II, III và IV) theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, em hãy cho biết dấu của hàm số lượng giác khi α thuộc một trong các phần trên.

Bài tập 5. Xác dấu các biểu thức sau

- a) $A = \sin 40^\circ \cdot \cos(-290^\circ)$. b) $B = \sin(-25^\circ) \cdot \cos 170^\circ$.
c) $C = \sin 225^\circ \cdot \tan 130^\circ \cdot \cot(-175^\circ)$. d) $D = \cos 195^\circ \cdot \tan 269^\circ \cdot \cot(-98^\circ)$.

Bài tập 6. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Bài tập 7. Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu:

- a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$;
c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; d) $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.
e) $\sin x = \frac{1}{2}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$ f) $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $270^\circ < x < 360^\circ$
g) $\cos x = \frac{3}{5}$ và $0^\circ < x < 90^\circ$ h) $\cos x = -\frac{5}{13}$ và $180^\circ < x < 270^\circ$
i) $\tan x = \frac{3}{4}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ j) $\tan x = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
k) $\cot x = \frac{2}{3}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$ l) $\cot x = -\sqrt{3}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Bài tập 8. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$;
c) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\cot \alpha = \frac{1}{2}$; d) $\tan \alpha = 3$ và $\cot \alpha = \frac{1}{3}$.

Bài tập 9. Cho $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$. Hãy tính $\tan 15^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$.

Bài tập 10. Tính giá trị các biểu thức lượng giác

- a) $\tan x = -2$. Tính $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$ và $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$
b) $\cot x = 2$. Tính $B_1 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$ và $B_2 = \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5 \sin^3 x + 4 \cos^3 x}$
c) $\cos x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $C_1 = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$ và $C_2 = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

Bài tập 11. Tính giá trị các biểu thức lượng giác

- a) $\sin x = \frac{2}{3}$ và $0 < x < 90^\circ$. Tính $M = \frac{\tan x - \cos x}{\cot x}$ và $N = \frac{\tan x \cos x}{\sin^2 x} - \cos x \cot x$
b) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Tính $\sin x \cdot \cos x$, từ đó suy ra giá trị của $\sin x$, $\cos x$ khi $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

RÚT GỌN, CHỨNG MINH

Bài tập 12. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

- a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$; b) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Bài tập 13. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.

c) $3 - 4\sin^2 = 4\cos^2 x - 1$.

e) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

g) $4\cos^2 x - 3 = (1 - 2\sin x) \cdot (1 + 2\sin x)$.

Bài tập 14. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

c) $\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 0$.

e) $\tan x \cdot \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$.

g) $(1 - \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{1}{1 + \cos x}$.

Bài tập 15. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

c) $\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cot^2 x$.

e) $\frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

g) $\frac{1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x$.

Bài tập 16. Biến đổi các biểu thức sau thành tích

a) $\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 1$.

c) $\tan x - \cot x + \sin x + \cos x$.

e) $3\sin x + 2\cos x - 3\tan x - 2$.

g) $\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x$.

b) $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

d) $\sin x \cdot \cot x + \cos x \cdot \tan x = \sin x + \cos x$.

f) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

h) $(1 + \cos x) \cdot (\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x$.

b) $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$.

d) $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2\tan^2 x$.

f) $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

h) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{4\cot x}{\sin x}$.

b) $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x$.

d) $(1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

f) $\frac{\cos^2 x - \cot^2 x}{\sin^2 x - \tan^2 x}$.

h) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x}$.

b) $1 + \sin x + \cos x + \tan x$.

d) $\cos x \cdot \tan^2 x - (1 + \cos x)$.

f) $(3 - 4\cos^2 x) - \sin x \cdot (2\sin x + 1)$.

h) $\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x$.

1.3 Giá trị lượng giác của các góc liên kết

Tên gọi	Nhận dạng	Công thức
Hai góc đối nhau	α và $-\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
Hai góc bù nhau	α và $\pi - \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
Hai góc phụ nhau	α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$
Hai góc hơn kém nhau π	α và $\alpha + \pi$	$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$

❖ BÀI TẬP ❖

NHẬN DẠNG & GHI NHỚ CÔNG THỨC

Bài tập 1. Điền giá trị thích hợp vào dấu ba chấm

- a) $\sin(-30^\circ) = \dots$; b) $\cos(-45^\circ) = \dots$; c) $\tan(-60^\circ) = \dots$; d) $\cot(-45^\circ) = \dots$.

Bài tập 2. Điền giá trị thích hợp vào chỗ trống

- a) $\sin 120^\circ = \sin \dots$; b) $\cos 130^\circ = -\cos \dots$; c) $\tan 155^\circ = -\tan \dots$; d) $\cot 35^\circ = -\cot \dots$;
e) $\sin 70^\circ = \sin \dots$; f) $\cos 10^\circ = -\cos \dots$; g) $\tan 85^\circ = -\tan \dots$; h) $\cot 175^\circ = -\cot \dots$.

Bài tập 3. Điền giá trị thích hợp vào chỗ trống

- a) $\sin 10^\circ = \cos \dots$; b) $\cos 40^\circ = \sin \dots$; c) $\tan 15^\circ = \cot \dots$; d) $\cot 35^\circ = \tan \dots$;
e) $\sin 7^\circ = \cos \dots$; f) $\cos 12^\circ = \sin \dots$; g) $\tan 5^\circ = \cot \dots$; h) $\cot 1^\circ = \tan \dots$.

BIỂU DIỄN. TÍNH TOÁN CƠ BẢN

Bài tập 4. Tính các giá trị sau

- a) $\sin 210^\circ$. b) $\cos 225^\circ$. c) $\tan 210^\circ$. d) $\cos 315^\circ$.
e) $\sin 13\pi$. f) $\cot \frac{7\pi}{6}$. g) $\cos \frac{11\pi}{3}$. h) $\sin \frac{17\pi}{3}$.

Bài tập 5. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau về giá trị lượng giác của góc có số đo $0^\circ < x < 45^\circ$ hoặc $0 < x < \frac{\pi}{4}$

- a) $\sin 125^\circ$; b) $\cot 132^\circ$; c) $\cos 150^\circ$; d) $\tan 258^\circ$;
e) $\sin \frac{4\pi}{3}$; f) $\sin \frac{31\pi}{8}$; g) $\cos \frac{6\pi}{5}$; h) $\cos \frac{11\pi}{5}$;
i) $\tan \frac{35\pi}{7}$; j) $\tan \frac{20\pi}{3}$; k) $\cot \frac{15\pi}{7}$; l) $\cot \frac{50^\circ}{3}$.

Bài tập 6. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x

- a) $\sin(x - 90^\circ)$. b) $\cos(x - 180^\circ)$. c) $\sin(270^\circ - x)$. d) $\sin(x + 450^\circ)$.
e) $\tan(360^\circ - x)$. f) $\sin(450^\circ + x)$. g) $\sin^2(270^\circ + x)$. h) $\cos^3(90^\circ + x)$.

Bài tập 7. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x

- a) $\cot(x - \pi)$. b) $\tan(2\pi - x)$. c) $\sin(3\pi + x)$. d) $\cos(x - 7\pi)$.
 e) $\tan(x - 5\pi)$. f) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$. g) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. h) $\cot\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.
 i) $\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$. j) $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)$. k) $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$. l) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

Bài tập 8. Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

RÚT GỌN, CHỨNG MINH

Bài tập 9. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$.
 b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
 c) $C = 2\cos x + 3\cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
 d) $D = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

Bài tập 10. Rút gọn và tính giá trị các biểu thức sau

- a) $A = \sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$. b) $B = \sin 825^\circ \cdot \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \cdot \sin(-555^\circ)$.
 c) $A = \sin^2 28^\circ + \sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 152^\circ$ d) $B = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$
 e) $A = \cot 15^\circ \cdot \cot 35^\circ \cdot \cot 55^\circ \cdot \cot 75^\circ$. f) $B = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.
 g) $C = \tan 41^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 43^\circ \dots \tan 49^\circ$. h) $D = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \dots + \tan 180^\circ$.

Bài tập 11. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$ hoặc từ 0° đến 45° và tính:

- a) $\cot 135^\circ$; b) $\cos \frac{21\pi}{6}$; c) $\sin \frac{129\pi}{4}$; d) $\tan 1020^\circ$.

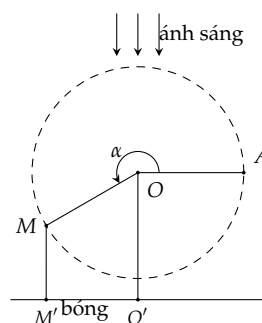
Bài tập 12. Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì

- a) $\sin(A + 2B + C) = -\sin B$. b) $\tan(A + B + 2C) = \tan C$. c) $\sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C$.

Bài tập 13. Rút gọn các biểu thức sau:

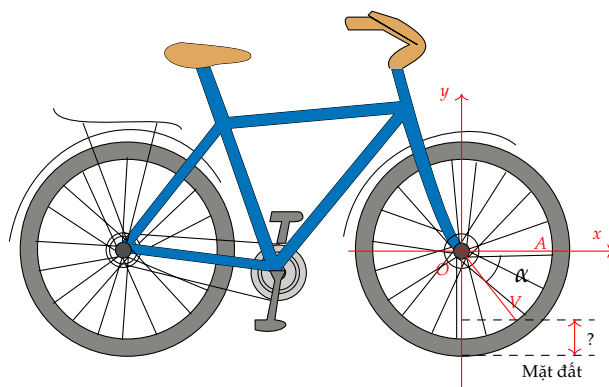
- a) $\frac{1}{\tan \alpha + 1} + \frac{1}{\cot \alpha + 1}$;
 b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)$;
 c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha + \pi) \cot(3\pi - \alpha)$.

Bài tập 14. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Bài tập 15. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (hình bên). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58 \text{ cm}$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



1.4 Các công thức lượng giác

1.4.1 Công thức cộng

Định lý 1.3. Cho α, β là hai góc khi đó ta có

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$

❖ BÀI TẬP ❖

BÀI TẬP TÍNH TOÁN

Bài tập 1. Tính các sin, cos, tan và cot các góc lượng giác sau

- a) 75° . b) 105° . c) 135° . d) 15° .

Bài tập 2. Tính giá trị các biểu thức sau

- a) $A = \sin 12^\circ \cdot \cos 48^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 48^\circ$. b) $B = \cos 38^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 38^\circ \cdot \sin 22^\circ$.
- c) $C = \sin 36^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cdot \cos 84^\circ$. d) $D = \sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ$.

Bài tập 3. Tính giá trị các biểu thức sau

- a) $E = \frac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ \cdot \tan 20^\circ}$. b) $F = \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$.
- c) $G = \frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\cos 17^\circ \cdot \cos 13^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 13^\circ}$. d) $H = \frac{\sin 73^\circ \cdot \cos 3^\circ - \sin 87^\circ \cdot \cos 17^\circ}{\cos 132^\circ \cdot \cos 62^\circ + \cos 42^\circ \cdot \cos 28^\circ}$.

Bài tập 4. Cho $a - b = \frac{\pi}{3}$. Tính giá trị các biểu thức

- a) $M = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$. b) $N = (\cos a + \sin b)^2 + (\cos b - \sin a)^2$.

Bài tập 5. Tính giá trị các biểu thức sau

- a) $A = \cos(x - 30^\circ)$ với $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($0 < x < 90^\circ$). b) $B = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $\sin x = -\frac{4}{5}$ ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$).

Bài tập 6. Cho a, b là các góc nhọn và $\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = \frac{1}{3}$. Tính $a + b$.

Bài tập 7. Cho $\sin a = \frac{4}{5}$ ($0 < a < 90^\circ$), $\sin b = \frac{8}{17}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$). Tính $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$.

Bài tập 8. Cho $\sin a = \frac{3}{4}$ ($\frac{\pi}{2} < a < \pi$), $\cot b = \frac{2}{5}$ ($\pi < b < \frac{3\pi}{2}$). Tính $\sin(a - b)$, $\tan(a + b)$.

RÚT GỌN, CHỨNG MINH BIỂU THỨC

Bài tập 9. Rút gọn các biểu thức sau

- a) $\sin x \cdot \cos 5x - \cos x \cdot \sin 5x$. b) $\sin 4x \cdot \cot 2x - \cos 4x$.
- c) $\frac{\tan 3x - \tan x}{1 + \tan 3x \cdot \tan x}$. d) $\frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \cdot \tan^2 x}$.

Bài tập 10. Thu gọn các biểu thức sau

- a) $\sin x - \sqrt{3} \cos x$. b) $a \sin x + b \cos x$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).
- c) $\cos 7x \cdot \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x + \sin 7x \cdot \sin 5x$. d) $\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Bài tập 11. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) \frac{\cos(a+b) + \sin a \cdot \sin b}{\cos(a-b) - \sin a \cdot \sin b}.$$

$$b) \frac{2 \sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} - \tan b.$$

Bài tập 12. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$b) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

$$c) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Bài tập 13. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \sin x \cdot \sin(y-z) + \sin y \cdot \sin(z-x) + \sin z \cdot \sin(x-y) = 0$$

$$b) \cos x \cdot \sin(y-z) + \cos y \cdot \sin(z-x) + \cos z \cdot \sin(x-y) = 0$$

LIÊN HỆ TRONG TAM GIÁC

Bài tập 14. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B.$$

$$b) \cos A = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C.$$

$$c) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$d) \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$e) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

$$f) \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1.$$

$$g) \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

$$h) \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

1.4.2 Công thức góc nhân đôi

Định lý 1.4. Cho α là góc lượng giác, ta có

$$a) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$b) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$c) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Hệ quả 1.1. Công thức hạ bậc

$$a) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$b) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

❖ BÀI TẬP ❖

BÀI TẬP TÍNH TOÁN

Bài tập 15. Tính sin, cos, tan của các góc lượng giác sau

$$a) 15^\circ.$$

$$b) 22,5^\circ.$$

$$c) \frac{\pi}{8}.$$

$$d) \frac{\pi}{12}.$$

Bài tập 16. Cho $\sin x = \frac{5}{12}$ $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$. Tính $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$.

Bài tập 17. Cho $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $\tan x$, $\sin 2x$.

Bài tập 18. Cho $\sin 2x = \frac{4}{5}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$. Tính $A = \sin x - \cos x$.

Bài tập 19. Cho $\tan x = \frac{3}{4}$ $\left(-\pi < x < -\frac{\pi}{2}\right)$. Tính $\tan 2x$, $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos x$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Bài tập 20. Cho $\tan x = 2 - \sqrt{3}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\tan 2x$, rồi suy ra x .

RÚT GỌN, CHỨNG MINH BIỂU THỨC

Bài tập 21. Rút gọn biểu thức

a) $(\sin x + \cos x)^2$.

b) $1 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

c) $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$.

d) $\cos^4 2x - \sin^4 2x$.

Bài tập 22. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin 8x = 2 \sin 4x \cdot \cos 4x$.

b) $\cos 8x = \cos^2 4x - \sin^2 4x$.

c) $\tan 8x = \frac{2 \tan 4x}{1 - \tan^2 4x}$.

d) $\cot 8x = \frac{\cot^2 4x - 1}{2 \cot 4x}$.

1.4.3 Công thức biến đổi tích thành tổng

Định lý 1.5. Cho hai góc lượng giác α, β ta có

• $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)];$

• $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)];$

• $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)].$

BÀI TẬP

BÀI TẬP ÁP DỤNG CÔNG THỨC

Bài tập 23. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau

a) $\sin 3x \cdot \sin x$.

b) $\sin 5x \cdot \cos 3x$.

c) $\sin \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$.

d) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$.

Bài tập 24. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau

a) $\sin(x + y) \cdot \cos(x - y)$.

b) $\sin(x + 30^\circ) \cdot \cos(x - 30^\circ)$.

c) $\sin 3x \cdot \cos x + \sin 4x \cdot \cos 2x$.

d) $\sin 2x \cdot \sin 6x - \cos x \cdot \cos 3x$.

e) $8 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$.

f) $4 \sin 2x \cdot \sin 5x \cdot \sin 7x - \sin 4x$.

Bài tập 25. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{1}{2} \cos^2 x$.

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2x$.

BÀI TẬP TÍNH TOÁN

Bài tập 26. Tính giá trị của biểu thức $\cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.**Bài tập 27.** Tính giá trị của biểu thức $\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{8}$.

1.4.4 Công thức biến đổi tổng thành tích

Định lý 1.6. Cho α, β là hai góc lượng giác, ta có

• $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$

• $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$

• $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$

• $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$

BÀI TẬP

BÀI TẬP TÍNH TOÁN

Bài tập 28. Thực hiện phép tính

a) Tính $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$.

b) Tính $\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$.

Bài tập 29. Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác của các góc:

a) 105° .

b) $\frac{\pi}{12}$.

c) $\frac{5\pi}{12}$.

d) -555° .

Bài tập 30. Tính các giá trị lượng giác của góc 2α , biết:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < 2\pi$.

Bài tập 31. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ biết $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Bài tập 32. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a) $\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

b) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

BÀI TẬP BIẾN ĐỔI, CHỨNG MINH

Bài tập 33. Biến đổi thành tích

a) $\cos 3x + \cos x$.

b) $\sin 3x + \sin 2x$.

c) $\cos 4x - \cos x$.

d) $\sin 5x - \sin x$.

e) $1 + \sin 2x + \cos 2x$.

f) $\cos 3x + \cos x + 2\cos 2x$.

g) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

h) $\cos x + \sin 2x - \cos 3x$.

i) $\sin 3x - 2\sin 2x + \sin x$.

Bài tập 34. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

a) $\sqrt{3} - 2\cos 2x$.

b) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

c) $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1$.

d) $\cos 5x + \cos 7x - \cos(\pi + 6x)$.

e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x - \cos 3x$.

f) $\cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x$.

g) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x$.

h) $\cos 5x + 3\cos 7x + 3\cos 9x + \cos 11x$.

RÚT GỌN, CHỨNG MINH

Bài tập 35. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos \alpha$;

b) $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha$.

Bài tập 36. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

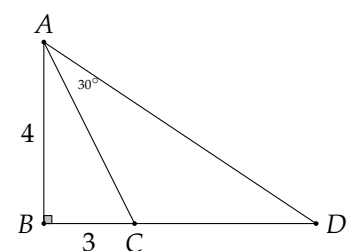
c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

d) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài tập 37. Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.

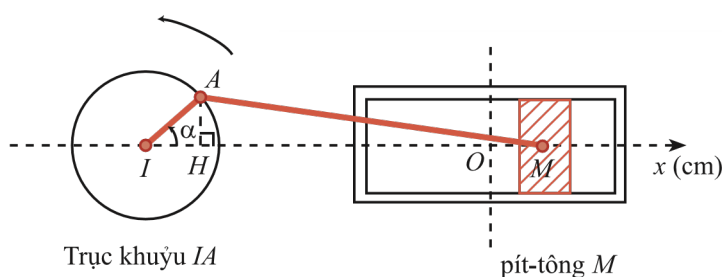
TÍNH TOÁN ỨNG DỤNG

Bài tập 38. Trong hình bên, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD .

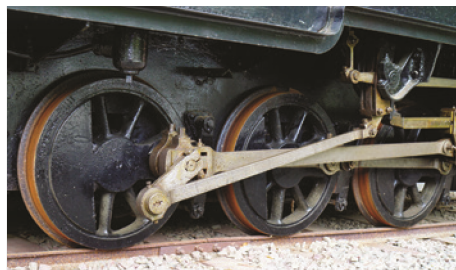


Bài tập 39. Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .

- Biết $IA = 8$ cm, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .
- Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 4

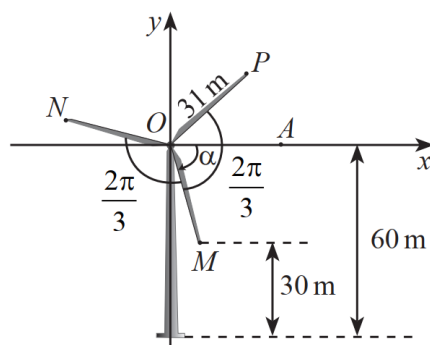


Bài tập 40. Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α .

- Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.
- Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 5



1.5 Hàm số lượng giác và đồ thị

1.5.1 Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa 1.7. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$

- $f(x)$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.
- $y = f(x)$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

Định lý 1.7. Hàm số $y = f(x)$ nếu

- $f(x)$ hàm số chẵn thì đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.
- $f(x)$ hàm số lẻ thì đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

1.5.2 Hàm số tuần hoàn

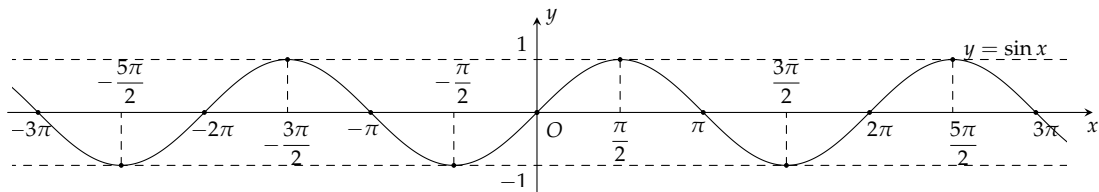
Định nghĩa 1.8. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$

- $f(x)$ được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $x \pm T \in \mathcal{D}$ và $f(x + T) = f(x)$.
- Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kỳ** của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

Định lý 1.8. Đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kỳ T được lặp lại trên từng đoạn giá trị của x có độ dài T .

1.5.3 Hàm số $y = \sin x$

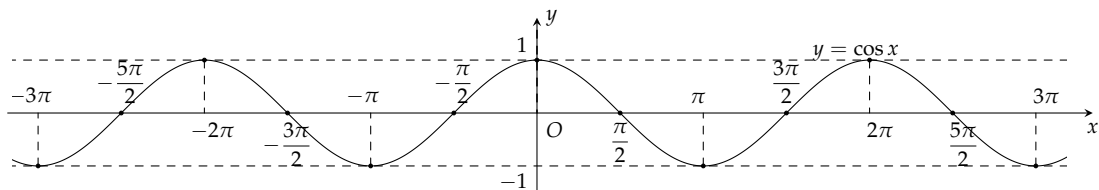
- Đồ thị hàm số $y = \sin x$ có dạng như hình



- Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$.
- Hàm số $y = f(x) = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

1.5.4 Hàm số $y = \cos x$

- Đồ thị hàm số $y = \cos x$

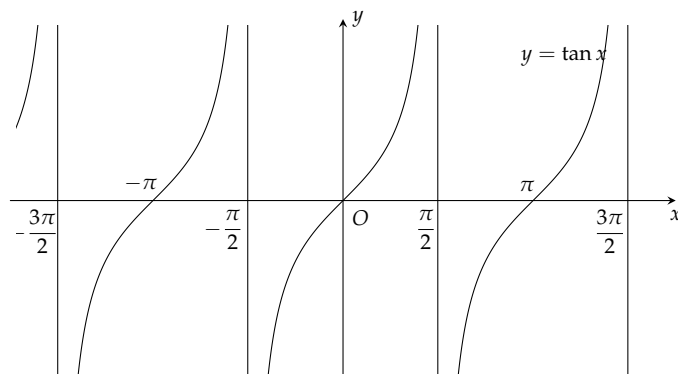


- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$.

- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

1.5.5 Hàm số $y = \tan x$

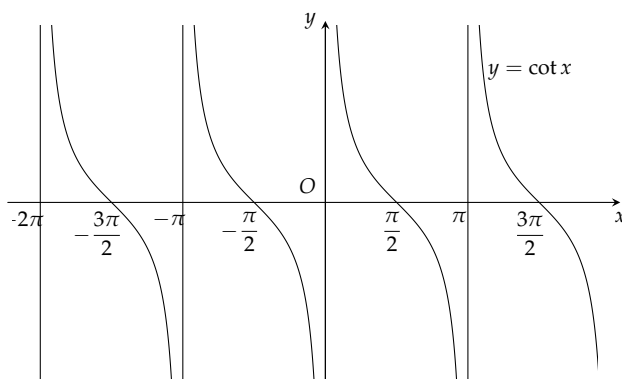
- Đồ thị hàm số $y = \tan x$



- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, nghĩa là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.5.6 Hàm số $y = \cot x$

- Đồ thị hàm số $y = \cot x$



- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nghĩa là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

❖ BÀI TẬP ❖

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Bài tập 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sin \frac{1}{x-2},$

b) $y = \cos \sqrt{x-1},$

c) $y = \cos |x-1|,$

d) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right),$

e) $y = \sin 3x$, f) $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$, g) $y = \sin\left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right)$, h) $y = \sin \sqrt{3x}$,
 i) $y = \frac{\sin x}{x^2-1}$, j) $y = \frac{\cos x}{x+1}$, k) $y = \frac{x^2+1}{x \sin x}$, l) $y = \frac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \tan 2x$, b) $y = \cot 3x$, c) $y = \frac{\tan 2x}{1 + \cos^2 x}$, d) $y = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{1 + \tan x}$,
 e) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, f) $y = \tan x + \cot 2x$, g) $y = \frac{\tan x - \cos x}{\sin x}$, h) $y = \frac{\cos 2x}{1 - \sin x} + \tan x$.
 i) $y = \frac{1}{\cos x}$, j) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, k) $y = \frac{1}{2 - \sin^2 x}$, l) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

TÍNH CHẴN LẺ CỦA HÀM SỐ. HÀM SỐ TUẦN HOÀN

Bài tập 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $y = x^2$; b) $y = x^3 + x - 1$; c) $y = x^4 - x^2 + 3$; d) $y = \sqrt{x}$.

Bài tập 4. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = f(x) = 2 \cos 3x - 1$, b) $y = f(x) = x^3 + \sin x$,
 c) $y = x \sin x$, d) $y = f(x) = 3 \cos x + \sin^2 x$,
 e) $y = f(x) = \cos(x+1) + \cos(x-1)$, f) $y = f(x) = \sin x \cos^2 x + \tan x$.

Bài tập 5. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác $y = \cos x$, $y = \tan x$.

Bài tập 6. Các hàm số dưới đây có là hàm số chẵn hay hàm số lẻ không?

a) $y = 5 \sin^2 x + 1$; b) $y = \cos x + \sin x$; c) $y = \tan 2x$.

Bài tập 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và là hàm số lẻ. Xác định tính chẵn lẻ của hàm số $g(x)$ biết $g(x) = \frac{f(x)}{\cot x - 1} + \frac{f(x)}{\cot x + 1} - \cos 3x$.

Bài tập 8. Chứng minh $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn và cho biết chu kỳ của nó?

TÌM MIN, MAX CỦA HÀM SỐ

Lưu ý 1.3. Trên $\mathbb{R}$ ta có $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$.

Bài tập 9. Tìm miền giá trị của các hàm số sau

a) $y = \sin 2x$, b) $y = 1 - \cos x$, c) $y = 2 \cos 3x$, d) $y = 2 \sin x - 1$,
 e) $y = 2 + 3 \sin x$, f) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$, g) $y = \sin x + \cos x$, h) $y = 3 - 2 \cos^2 x$.

Bài tập 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 3 + \sin x$, b) $y = 1 - 2 \sin x$, c) $y = 3 \cos x - 2$,
 d) $y = 3 - 2|\sin 4x|$, e) $y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$, f) $y = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

Bài tập 11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$, b) $y = \cos^2 x + \sin x + 1$, c) $y = 3 \cos x + 4 \sin x + 5$,
 d) $y = 3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x$, e) $y = 2 \cos(\sin x + \cos x) - 2$, f) $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$.

RÚT GỌN, CHỨNG MINH

Bài tập 12. Chứng minh rằng các hàm số sau đều có tính chất $f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$

- a) $y = \cos 2x$, b) $y = \tan x$, c) $y = \cos^2 x$, d) $y = \sin 2x - 2 \tan x$.

Bài tập 13. Chứng minh các hàm số sau tuần hoàn với chu kỳ là π :

- a) $y = \sin 2x$, b) $y = \cot x$, c) $y = \cos 2x$, d) $y = \sin 2x + 3 \cos 2x$.

ỨNG DỤNG THỰC TẾ

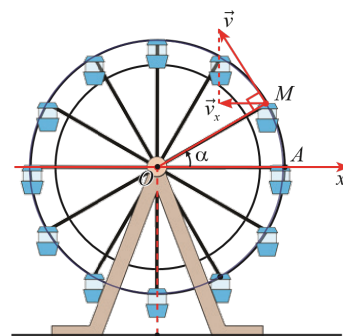
Bài tập 14. Nhiệt độ ngoài trời T (tính bằng $^{\circ}\text{C}$) vào thời điểm t giờ trong một ngày ở một thành phố được tính bởi công thức $T = 20 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6} \right)$. Để bảo quản các tác phẩm nghệ thuật, hệ thống điều hoà nhiệt độ của một bảo tàng sẽ được tự động bật khi nhiệt độ ngoài trời từ 22°C trở lên. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định khoảng thời gian t trong ngày ($0 \leq t \leq 24$) hệ thống điều hoà được bật.

(Theo <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168192385900139>)

Bài tập 15. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, xác định các giá trị $x \in [-\pi; \pi]$ thoả mãn $\sin x = \frac{1}{2}$.

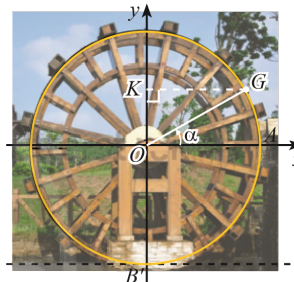
Bài tập 16. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình vẽ bên).

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng?

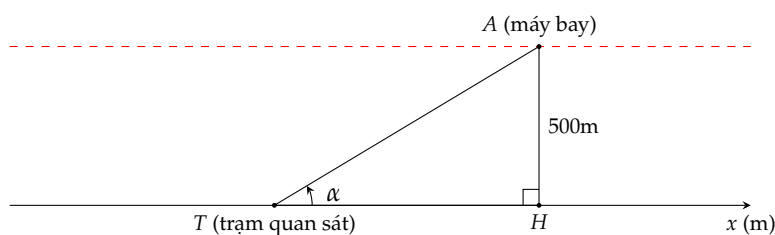


Bài tập 17. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình vẽ bên).

- a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.
b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 mét?

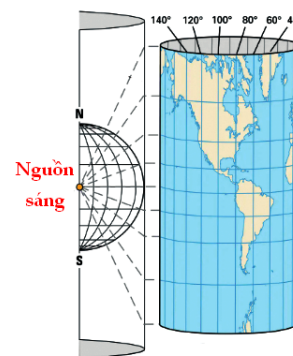


Bài tập 18. Trong hình vẽ bên dưới, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



- a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .
b) Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài tập 19. Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong hình bên. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ φ° ($-90 < \varphi < 90$) được cho bởi hàm số $y = 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)$ (cm). Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 (cm) trên bản đồ. (Theo <https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/>)



1.6 Phương trình lượng giác cơ bản

1.6.1 Phương trình $\sin x = m$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm $-1 \leq m \leq 1$.
- Nếu $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý 1.4. Một số trường hợp đặc biệt

$$\begin{aligned}\sin x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ \sin x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

1.6.2 Phương trình $\cos x = m$

- Điều kiện có nghiệm $-1 \leq m \leq 1$.
- Nếu $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý 1.5. Một số trường hợp đặc biệt

$$\begin{aligned}\cos x = 1 &\Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = -1 &\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

1.6.3 Phương trình $\tan x = m$

- Với mọi số thực m , phương trình $\tan x = m$ có nghiệm.
- Nếu $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

1.6.4 Phương trình $\cot x = m$

- Với mọi số thực m , phương trình $\cot x = m$ có nghiệm.
- Nếu $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❖ BÀI TẬP ❖

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Bài tập 1. Giải các phương trình sau

a) $\sin 2x = \sin 3x$.

b) $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$.

c) $\sin x = 0$.

d) $\sin x = 1$.

e) $\sin x = -1$.

f) $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

g) $\sin(3x + 2) = -\frac{3}{2}$.

h) $\sin(4x - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

i) $\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

j) $\sin(6x + 3) = -\frac{1}{2}$.

k) $\sin(7x - \sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

l) $\sin 8x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 2. Giải các phương trình

a) $\cos 2x = \cos(x + 60^\circ)$,

b) $\cos 3x = \sin x$,

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$,

d) $\cos 3x = \frac{1}{2}$,

e) $\cos(x + 10^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

f) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

g) $\cos(5x - 1) = 0$,

h) $\cos(2x + 15^\circ) = 1$,

i) $\cos(x - 2) = -\frac{1}{2}$,

j) $2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0,$

k) $3 \cos 3x - 1 = 0,$

l) $5 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - 10 = 0$

m) $\cos x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right),$

n) $\cos 3x = \sin \left(2x + \frac{3\pi}{4} \right),$

o) $\cos(x - \pi) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right).$

Bài tập 3. Giải các phương trình

a) $\tan 2x = \tan \frac{\pi}{11}.$

b) $\tan x = 0,$

c) $\tan x = 1,$

d) $\tan x = \sqrt{3},$

e) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}},$

f) $\tan 5x = -1,$

g) $\tan(4x + 5^\circ) = -\sqrt{3},$

h) $\tan(6x + 10^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$

i) $\tan x = \tan 55^\circ.$

Bài tập 4. Giải các phương trình

a) $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{7},$

b) $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3},$

c) $\cot x = 0,$

d) $\cot 3x = 1,$

e) $\cot 4x = \sqrt{3},$

f) $\cot 5x = \frac{1}{\sqrt{3}},$

g) $\cot(2x + 10^\circ) = -1,$

h) $\cot x = -\sqrt{3},$

i) $\cot(3x - 1) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$

j) $\cot x = \tan 2x,$

k) $\cot x - \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$

l) $\cot \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right).$

Bài tập 5. Giải các phương trình

a) $\tan 2x = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$

b) $\cot \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \cot 3x.$

c) $\sin \left(x - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{2\pi}{7}.$

d) $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin x = 0.$

e) $\sin 3x = \sin (90^\circ - x).$

f) $\cos (3x + 45^\circ) = -\cos x.$

g) $\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

h) $\cos^2 x = 1.$

i) $\cot \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right) = -1.$

j) $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} = 0.$

k) $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} = 0.$

l) $2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} = 0.$

Bài tập 6. Giải các phương trình

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [-\pi, \pi]$

b) $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right), x \in [0; \pi]$

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH**Bài tập 7.** Giải các phương trình

a) $\sin 2x \cos 2x = 0.$

b) $\cos^2 x = \sin^2 x.$

c) $2 \cos^2 2x = 1.$

d) $8 \sin^3 x - 1 = 0.$

e) $3\sqrt{3} \tan^3 2x = 1.$

f) $3 \cos x = 1 + 4 \cos^3 x.$

g) $4 \sin^2 x - 1 = 0.$

h) $3 - 4 \cos^2 x = 0.$

Bài tập 8. Giải các phương trình

a) $4 \sin x \cos x \cos 2x = 0$

b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

c) $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$

d) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

e) $(\cos x + 2) (2 \cos^2 x - \cos x - 1) = 0$

f) $\sin 2x + \sqrt{3} - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

Bài tập 9. Giải các phương trình

a) $\sin 2x \cos x = \cos x - \cos 2x \sin x.$

b) $\sin 4x \cos 3x = \sin x \cos 6x.$

c) $\cos 3x + \cos 7x = \sin 3x - \sin 7x.$

d) $\sin 3x - 4 \sin x \cos 2x = 0.$

e) $4\sqrt{3} \sin x \cos x \cos 2x = \sin 8x.$

f) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 0.$

Bài tập 10. Giải các phương trình

a) $\frac{\cos 2x}{\sin x} = 0.$

b) $\frac{\cos 2x}{\sin x} = 1.$

c) $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 1.$

d) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0.$

PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ

Bài tập 11. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $\cos(2x - 55^\circ) = 2m^2 + m,$

b) $m \cos x + 1 = 3 \cos x - 2m,$

c) $\cos x = \frac{2m - 3}{4 - m},$

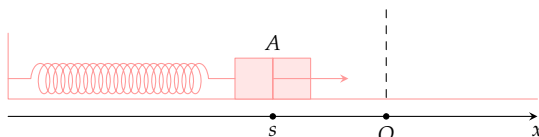
d) $\sin 2x - 1 = \frac{m + 1}{2m}.$

Bài tập 12. Tại các giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ giao nhau?

TOÁN ỨNG DỤNG

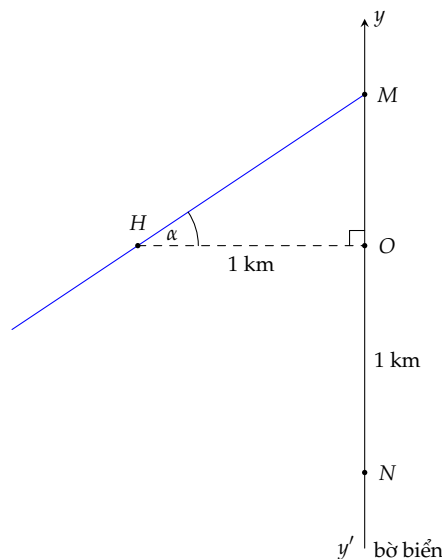
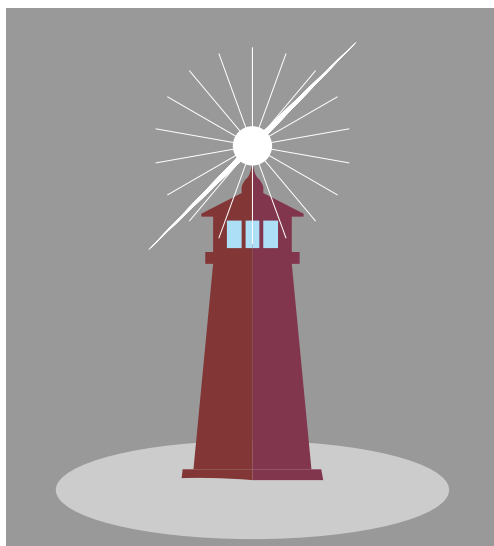
Bài tập 13. Trong hình dưới, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

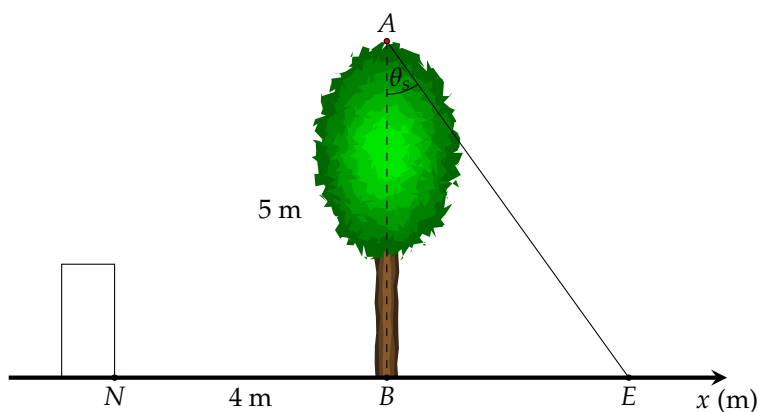


Bài tập 14. Trong hình dưới, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)

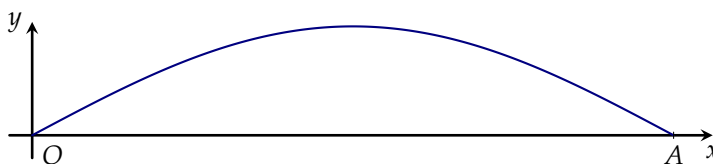


- Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị toạ độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .
- Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với toạ độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.



- Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t .
- Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài tập 10. Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên.



- Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA . Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.
- Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là 9 m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 4,3 m.

Chương 2

Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân

2.1 Dãy Số

2.1.1 Dãy số là gì?

Định nghĩa 2.1. Hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số), nghĩa là

$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n = u(n).$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n) . Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1; u_2; \dots; u_n; \dots$

Lưu ý 2.1. Cho dãy số (u_n) ,

- $u_1 = u(1)$ gọi là số hạng đầu, $u_n = u(n)$ gọi là số hạng thứ n (hay số hạng tổng quát) của dãy số.
- Nếu $u_n = C$ với mọi n , ta nói (u_n) là dãy số không đổi.

Định nghĩa 2.2. Hàm số u xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của dãy số này là $u_1, u_2, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu và u_m là số hạng cuối.

2.1.2 Cách xác định dãy số

Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

- Cách 1: Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).
- Cách 2: Cho công thức của số hạng tổng quát u_n .
- Cách 3: Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là
 - Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
 - Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).
- Cách 4: Cho bằng cách mô tả.

2.1.3 Dãy số tăng. Dãy số giảm. Dãy số bị chặn

Định nghĩa 2.3. Cho dãy số (u_n) ,

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 2.4. Cho dãy số (u_n) ,

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

NHẬN DẠNG DÃY SỐ

Bài tập 1. Cho hàm số:

$$v : \{1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto v(n) = 2n.$$

Tính $v(1), v(2), v(3), v(4), v(5)$.

Bài tập 2. Dãy gồm 10 số tự nhiên lẻ đầu tiên $1; 3; 5; \dots; 19$ có phải là dãy số hữu hạn không? Nếu có, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số.

Bài tập 3. Cho dãy số:

$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n = n^3.$$

- Hãy cho biết dãy số trên là hữu hạn hay vô hạn.
- Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Bài tập 4. Cho 5 hình tròn theo thứ tự có bán kính $1; 2; 3; 4; 5$.

- Viết dãy số biểu diễn diện tích của 5 hình tròn này.
- Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số trên.

Bài tập 5. Cho các dãy số $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ được xác định như sau:

- $a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 3; a_5 = 4$.
- $$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + 1 \end{cases} \quad (n \geq 2).$$
- $b_n = 2n$.
- d_n là chu vi của đường tròn có bán kính n .

Tìm bốn số hạng đầu tiên của các dãy số trên.

Bài tập 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$.

- Tìm ba số hạng đầu tiên.
- Tính u_{50} và u_{99} .

Bài tập 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases} (n \geq 3)$. Tính u_5 .

Bài tập 8. Hãy viết 3 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

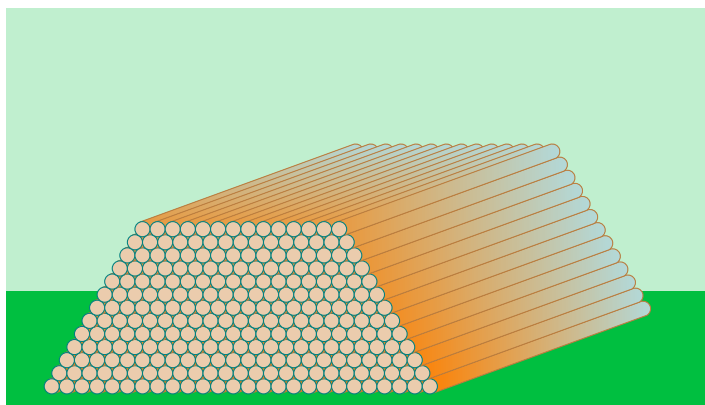
- $u_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + 1}$.
- $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- $(u_n): \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$
- $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$

Bài tập 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} (n \geq 1)$.

- Chứng minh $u_2 = 2 \cdot 3; u_3 = 2^2 \cdot 3; u_4 = 2^3 \cdot 3$.
- Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Bài tập 10. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình vẽ). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:

- Viết công thức số hạng tổng quát u_n .
- Viết hệ thức truy hồi.



DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

Bài tập 11. Cho hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như sau: $a_n = 3n + 1$; $b_n = -5n$.

a) So sánh a_n và a_{n+1} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) So sánh b_n và b_{n+1} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 12. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \frac{1}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = n^2$;

c) (c_n) với $c_n = (-2)^n$.

d) (a_n) với $a_n = \frac{n}{n+1}$;

e) (b_n) với $b_n = n - n^2$.

Bài tập 13. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$;

b) (x_n) với $x_n = \frac{n+2}{4^n}$;

c) (t_n) với $t_n = (-1)^n \cdot n^2$.

Bài tập 14. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát:

a) $u_n = n^2 + 3n$.

b) $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

c) $u_n = n - 4n^2$.

d) $u_n = \frac{n}{n^2+2}$.

e) $u_n = n^3 - 3n^2 - 7$.

f) $u_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2+1}$.

Bài tập 15. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{n+1}{n}$.

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$.

c) $u_n = \frac{5n-1}{2n+3}$.

d) $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.

e) $u_n = \frac{n^2+n+1}{n+1}$.

f) $u_n = \frac{-n^2+5n+2}{3n+1}$.

Bài tập 16. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát

a) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b) $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

c) $u_n = 3^n - n$.

d) $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot n$.

e) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{3^n}$.

f) $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

g) $u_n = \frac{n+1}{3^n}$.

h) $u_n = \frac{n^2}{4^n}$.

i) $u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}$.

Bài tập 17. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) sau

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

b) $u_n = n - \sqrt{n^2-1}$.

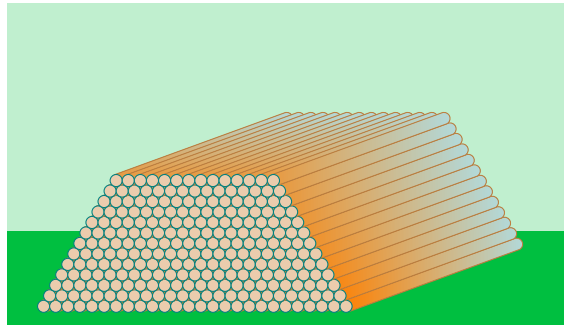
c) $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n}$.

Bài tập 18. Với giá trị nào của a thì dãy số $u_n = \frac{na+2}{n+1}$ là dãy số tăng ? dãy số giảm ?

Bài tập 19. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ.

a) Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

- b) Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.



DÃY SỐ BỊ CHẶN

Bài tập 20. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$. So sánh các số hạng của dãy số với 0 và 1.

Bài tập 21. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) $u_n = \frac{1}{2^n}$.

b) $u_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

c) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

d) $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

e) (b_n) với $b_n = \frac{n}{n+1}$.

f) $u_n = \frac{n+4}{2n+1}$.

g) (a_n) với $a_n = \cos \frac{\pi}{n}$.

h) $u_n = \sin n + \cos n$.

i) $u_n = (-1)^n + \cos n$.

Bài tập 22. Tìm u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases} (n \geq 1)$.

Bài tập 23. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$. Tìm u_1, u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n .

Bài tập 24. Xét tính tăng, giảm của dãy số (y_n) với $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Bài tập 25. Xét tính bị chặn của các dãy số (a_n) với $a_n = \sin^2 \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{n\pi}{4}$.

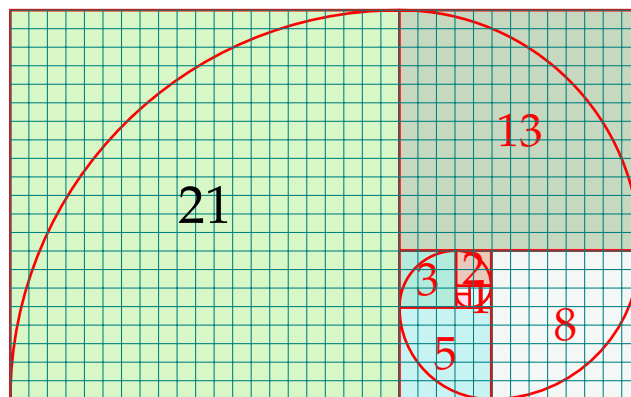
Bài tập 26. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Bài tập 27. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{na+2}{n+1}$. Tìm giá trị của a để

a) (u_n) là dãy số tăng;

b) (u_n) là dãy số giảm.

Bài tập 28. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình vẽ. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



2.2 Cấp số cộng

2.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 2.5. *Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:*

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Định lý 2.1. *Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là*

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad (k \geq 2).$$

2.2.2 Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Định lý 2.2. *Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức*

$$u_n = u_1 + (n - 1)d, \quad n \geq 2.$$

2.2.3 Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Định lý 2.3. *Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó*

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}.$$

❧ BÀI TẬP ❧

NHẬN DẠNG CẤP SỐ CỘNG

Bài tập 1. Tìm cấp số cộng trong mỗi dãy số sau

a) 5; 10; 15; 20; 25; 30.

b) 1; 2; 4; 8.

c) 7; 7; 7; 7; 7.

Bài tập 2. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 3 - 4n$;

b) $u_n = \frac{n}{2} - 4$;

c) $u_n = 5^n$;

d) $u_n = \frac{9 - 5n}{3}$.

Bài tập 3. Cho cấp số cộng 3; 6; 9; 12; ... Tìm số hạng đầu, công sai và u_5 .

Bài tập 4. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng. Tính b theo a và c .

Bài tập 5. Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành cấp số cộng. Tìm số đo ba góc đó.

Bài tập 6. Chứng minh dãy số hữu hạn sau là cấp số cộng: 1; -3; -7; -11; -15.

Bài tập 7. Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của mỗi cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$.

b) Dãy số (v_n) với $v_n = -3n + 5$.

Bài tập 8. Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định công sai của mỗi cấp số cộng đó.

a) 3; 7; 11; 15; 19; 23.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = 9n - 9$.

c) Dãy số (v_n) với $v_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Bài tập 9. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 9$.

Bài tập 10. Tìm số hạng tổng quát của các cấp số cộng sau

a) Cấp số cộng (a_n) có $a_1 = 5$ và $d = -5$;

b) Cấp số cộng (b_n) có $b_1 = 2$ và $b_{10} = 20$.

Bài tập 11. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) có $c_4 = 80$ và $c_6 = 40$.

Bài tập 12. Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n .

Bài tập 13. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d . Chứng minh rằng:

a) $u_n - u_m = (n - m)d$ với $n, m \in \mathbb{N}^*$.

b) $u_n + u_m = u_k + u_r$, biết $n + m = k + r$ biết $(n, m, k, r \in \mathbb{N}^*)$.

Bài tập 14. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng. Chứng minh:

a) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

b) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.

c) $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$.

Bài tập 15. Cho a, b, c là 3 số dương. Chứng minh rằng:

a) a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}$ lập thành một cấp số cộng.

b) a, b, c lập thành một cấp số cộng $\Rightarrow a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 16. Biết dãy số $1, a, b$ là cấp số cộng có công sai d_1 và dãy số $1, a^2, b^2 - 2$ cũng là cấp số cộng có công sai d_2 . Tính $d_1 + d_2$.

TỔNG S_n

Bài tập 17. Tính các tổng sau

a) Tính tổng của 100 số nguyên dương đầu tiên.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_6 = 20$. Tính tổng 9 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_3 = -3$ và $S_5 = -15$. Tính S_{50} .

Bài tập 18. Tính tổng sau

a) Tính tổng của 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Bài tập 19. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

a) Tìm u_{12} .

b) Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

Bài tập 20. Cho cấp số cộng có $u_6 = -5; d = 3$

a) Tìm u_1, u_{10}, u_{21} .

b) Số hạng thứ mấy bằng 25.

c) Tính công thức số hạng tổng quát u_n theo n .

d) Tính tổng n số hạng đầu tiên theo n .

Bài tập 21. Cho cấp số cộng (u_n)

a) $-6; -\frac{14}{3}; -\frac{10}{3}; \dots$ Tìm u_{25}, S_{10} .

b) $\sqrt{2} + 1; 2; 3 - \sqrt{2}; \dots$ Tìm u_{10}, S_{12} .

Bài tập 22. Hãy tính:

a) Tổng 23 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{22} = 60$.

b) Tổng 22 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) có $u_5 + u_{18} = 100$.

c) Tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 12$ và $S_{12} = 6$.

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÌM u_1 VÀ d

Bài tập 23. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 = -15 \\ u_{14} = 18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_2 + u_5 = 7 \end{cases}$

Bài tập 24. Tìm số hạng đầu tiên và công sai của các cấp số cộng sau, biết:

a) $\begin{cases} S_4 = 15 \\ S_7 = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8 \cdot u_3 = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_2 + u_3 = -4 \\ u_1^2 + u_5^2 = 50 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases}$ g) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 36 \end{cases}$

Bài tập 25. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $S_n = 4n^2 - 3n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n để $S_n - u_n \leq 7$.

TOÁN ỨNG DỤNG

Bài tập 26. Tìm x biết $2 + 5 + 8 + \dots + x = 950$ và là một số hạng của cấp số cộng: $2, 5, 8, \dots, x, \dots$

Bài tập 27. Hãy viết thêm 6 số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng tăng có 8 số hạng.

Bài tập 28. Cho cấp số cộng có 7 số hạng với công sai dương và số hạng thứ 4 bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó biết hiệu của số hạng thứ 3 và số hạng thứ 5 bằng 6.

Bài tập 29. Số đo 3 góc của một tam giác vuông ABC lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm 3 góc đó.

Bài tập 30. Tìm 3 cạnh của một tam giác vuông, biết chúng tạo thành một cấp số cộng và tam giác đó có chu vi là 60 đơn vị.

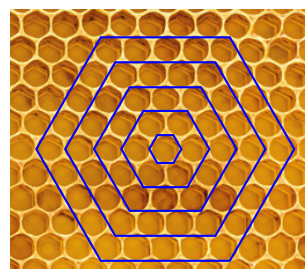
Bài tập 31. Chu vi của một đa giác là 158 cm và số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết độ dài cạnh lớn nhất của đa giác là 44 cm. Tìm số cạnh của đa giác đó.

Bài tập 32. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 14 và tổng bình phương của chúng bằng 94.

Bài tập 33. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 25 và tổng bình phương của chúng bằng 165.

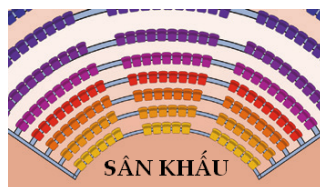
Bài tập 34. Cho một hình vuông có cạnh bằng 1, người ta nối trung điểm các cạnh liên tiếp để được một hình vuông, tiếp tục làm như thế đối với hình vuông mới (như hình vẽ bên dưới). Tính tổng diện tích các hình vuông liên tiếp.

Bài tập 35. Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ tạo ra vòng 2 gồm 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ 3, các ong thợ tạo ra vòng 3 gồm 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục. Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có tìm công sai của cấp số cộng này.



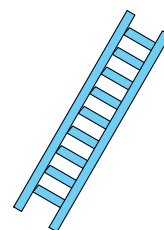
Bài tập 36. Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế, ... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng.

- a) Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.
b) Tính tổng số ghế có ở trong rạp.



Bài tập 37. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.

- a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.



Bài tập 38. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

- Tính công sai của cấp số cộng trên.
- Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.



Bài tập 39. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu?

2.3 Cấp số nhân

2.3.1 Khái niệm và tính chất

Định nghĩa 2.6. *Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là*

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Định lý 2.4. *Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ với $n \geq 2$.*

2.3.2 Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Định lý 2.5. *Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức*

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2.$$

2.3.3 Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Định lý 2.6. *Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó*

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Hệ quả 2.1. *Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.*

BÀI TẬP

NHẬN DẠNG CẤP SỐ NHÂN

Bài tập 1. Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân sau:

- a) 3; 6; 12; 24; 48; ...; b) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$; c) 9; 9; 9; 9; 9; ...

Bài tập 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

- a) 1; 11; 121; 12321; 1234321; b) $1; -1; 1; -1; 1$; c) 4; 8; 12; 16.

Bài tập 3. Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là một cấp số nhân

- a) $u_n = 3(-2)^n$ b) $u_{n+1} = 2u_n$ c) $u_n = 4^{n+1}$ d) $u_n = \frac{n}{3^n}$

Bài tập 4. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- a) $u_n = 3(-2)^n$; b) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot 7^n$; c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$

Bài tập 5. Cho cấp số nhân: 1; 10; 100; 1000; 10000. Biểu diễn số hạng 10 và 100 theo hai số hạng kề nó.

SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Bài tập 6. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Bài tập 7. Hãy viết 6 số xen giữa các số -2 và 256 để được một cấp số nhân. Theo thứ tự đó nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

Bài tập 8. Các số $x + 6y$; $5x + 2y$; $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Đồng thời các số $x - 1$; $y + 2$; $x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y .

Bài tập 9. Cho ba số tự nhiên m ; n ; p theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba số 2^m ; 2^n ; 2^p theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài tập 10. Tính u_5 và S_6 của các cấp số nhân sau đây:

- a) $u_1 = 2, q = -1$; b) $u_3 = 10, q = 5$.

Bài tập 11. Cho cấp số nhân có 8 số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Bài tập 12. Viết công thức số hạng tổng quát u_n theo số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân sau:

a) 5; 10; 20; 40; 80; ...; b) $1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10000}; \dots$

Bài tập 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $6u_2 + u_5 = 1$ và $3u_3 + 2u_4 = -1$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân.

Bài tập 14. Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

Bài tập 15. Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

Bài tập 16. Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Bài tập 17. Ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài tập 18. Xét dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = \frac{12}{u_n}$ (a là số thực $\neq 0$). Hãy xác định các giá trị của a để dãy số (u_n) là một cấp số nhân.

Bài tập 19. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 4u_n + 9$. Chứng minh rằng: Dãy số (v_n) xác định bởi: $v_n = u_n + 3$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội.

Bài tập 20. Độ dài 3 cạnh của tam giác ABC lập thành một cấp số nhân. Chứng minh tam giác đó có 2 góc không quá 60° .

Bài tập 21. Tìm cấp số nhân (u_n) biết tổng của 4 số hạng đầu là 14, tổng của số hạng thứ 4, thứ 5, thứ 6 là $\frac{21}{2}$, với công bội q dương.

Bài tập 22. Một cấp số cộng và một cấp số nhân có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ 2 của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ 2 của cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ 3 bằng nhau. Tìm các cấp số đó.

Bài tập 23. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Đồng thời chúng lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ 3 và số hạng thứ 9 của một cấp số cộng. Hãy tìm 3 số đó, biết rằng tổng của chúng bằng 13.

Bài tập 24. Cho ba số x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số nhân và có tổng là 26. Nếu cộng thêm lần lượt 1, 6, 3 cho ba số thì 3 số mới theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm ba số x, y, z .

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÌM u_1 VÀ q

Bài tập 25. Cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

- a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.
b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên sẽ bằng 3069?
c) Số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

Bài tập 26. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_4 = 8 \\ u_6 = 72 \\ u_7 < 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases}$ g) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ h) $\begin{cases} u_1 u_5 = 25 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 31 \\ u_1 > 0, u_2 > 0 \end{cases}$

TỔNG S_n

Bài tập 27. Cấp số nhân (u_n) sau đây có bao nhiêu số hạng, biết: $q = 2, u_n = 96, S_n = 189$.

Bài tập 28. Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) trong các trường hợp sau:

- a) $u_1 = 10^5, q = 0,1, n = 5;$ b) $u_1 = 10, u_2 = -20, n = 5.$

Bài tập 29. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

- a) So sánh $q \cdot S_n$ và $(u_2 + u_3 + \dots + u_n) + q \cdot u_n$; b) So sánh $u_1 + q \cdot S_n$ và $S_n + u_1 \cdot q^n$.

Bài tập 30. Cho a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

- a) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$. b) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

Bài tập 31. Tính tổng

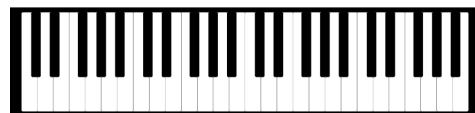
- a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$; b) $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n$
- c) $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ chữ số } 9}$ d) $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ chữ số } 1}$
- e) $6 + 6 + 666 + \dots + \underbrace{66 \dots 6}_{n \text{ chữ số } 6}$

TOÁN ỨNG DỤNG

Bài tập 32. Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

- a) 690 ngày; b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

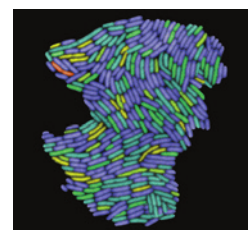
Bài tập 33. Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân. Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz (theo: [https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_\(nốt_nhạc\)](https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt_nhạc))). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài tập 34. Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Bài tập 35. Ba số có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng để tổng của chúng là 820.

Bài tập 36. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.

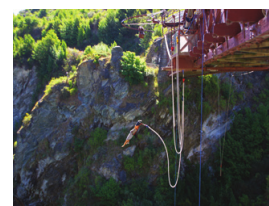


Bài tập 37. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

- a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;
- b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Bài tập 38. Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9 m.

- a) Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba;
- b) Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.



2.4 Bài tập cuối chương

Bài tập 1. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

Bài tập 2. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết:

a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$

Bài tập 3. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết:

a) $\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_4 + u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

Bài tập 4. Giả sử quần thể động vật này ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/năm, xuất cư 2%/năm, tử vong 8%/năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau 2 năm.

Bài tập 5. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ>). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Bài tập 6. Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

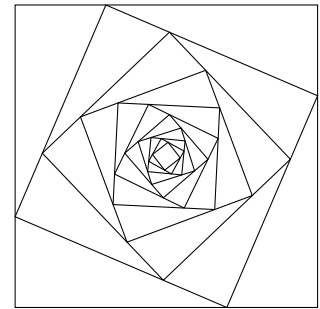
Bài tập 7. Tứ giác $ABCD$ có số đo bốn góc A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Biết số đo góc C gấp 5 lần số đo góc A . Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$ theo đơn vị độ.

Bài tập 8. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Bài tập 9. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Bài tập 10. Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

Bài tập 11. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Bài tập 12. Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối tháng ông trả ngân hàng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Chương 3

Giới hạn và hàm số liên tục

3.1 Khái niệm và các phép toán

3.1.1 Giới hạn của dãy số

Nếu $u_n \rightarrow L$ khi $n \rightarrow \infty$ thì ta nói dãy u_n có giới hạn là L khi $n \rightarrow \infty$. Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ (hay còn viết gọn là $\lim u_n = L$).

- Nếu $L = 0$ thì ta gọi là giới hạn 0 của dãy số,
- Nếu $L = a$ là một số hữu hạn ta gọi là giới hạn hữu hạn của dãy,
- Nếu $L = \infty$ thì ta gọi là giới hạn vô cực.

3.1.2 Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số

Định lý 3.1. Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó

- a) $\lim (u_n + v_n) = a + b$.
- b) $\lim (u_n - v_n) = a - b$.
- c) $\lim (c \cdot u_n) = c \cdot a$.
- d) $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.
- e) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).
- f) Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3.1.3 Giới hạn 0 của dãy số

Định nghĩa 3.1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta còn viết $\lim u_n = 0$.

Định lý 3.2. Một số giới hạn cơ bản

- a) $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- b) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- c) $\lim q^n = 0$, với q là số thực thoả mãn $|q| < 1$.

3.1.4 Giới hạn hữu hạn của dãy số

Định nghĩa 3.2. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim (u_n - a) = 0$. Khi đó, ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Lưu ý 3.1. Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

✧ BÀI TẬP ✧

Bài tập 1. Tìm các giới hạn sau

- a) $\lim \frac{3}{n}$. b) $\lim \frac{1}{n^2}$. c) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^2$. d) $\lim \frac{1}{n}$.
- e) $\lim \left(2 - \frac{1}{n}\right)$. f) $\lim \frac{2}{n+1}$. g) $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n$. h) $\lim \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.
- i) $\lim \left(\frac{1}{3n} - \frac{2}{3^n}\right)$. j) $\lim \left(\frac{3}{n^5} - \frac{1}{n^3}\right)$. k) $\lim \left(\frac{-1}{2n^2} + \frac{\sqrt{3}}{2^n}\right)$. l) $\lim \left(2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp giải 3.1. Nhận dạng giới hạn

- Một giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{v(n)}$ được gọi là dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, nếu $u(n) \rightarrow \infty$ và $v(n) \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$.
- Để tính giới hạn này ta phải khử (làm mất) dạng vô định bằng cách, tại tử và mẫu số ta rút n có lũy thừa cao nhất làm thừa số, sau đó rút gọn và tính.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim \frac{3n+2}{2n-1}$. b) $\lim \left(\frac{1-4n}{n}\right)$. c) $\lim \frac{3n+1}{n}$.
- d) $\lim \frac{2n^2+n}{n^2}$. e) $\lim \frac{2n^2+3n}{n^2+1}$. f) $\lim \frac{n+1}{n^2+1}$.
- g) $\lim \frac{n^2+2n}{3n^2+n+1}$. h) $\lim \frac{1+n-2n^2}{2-n+n^2}$. i) $\lim \frac{n^2+n+1}{(2n+1)^2}$.

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim \left(\frac{n}{n^2+1} - 1\right)$. b) $\lim \frac{2n^3-3n^2+7}{n^3-5n^2}$. c) $\lim \frac{4n^4+n^2+6}{-n^4+n+2}$.
- d) $\lim \frac{2n^2-n+1}{(n-1)(3n+1)}$. e) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3}}{n}$. f) $\lim \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}$.
- g) $\lim \frac{\sqrt{n}+1}{2n}$. h) $\lim \frac{n^2+\sqrt{n}-2}{n^2+n}$. i) $\lim \frac{-n^2+n\sqrt{n}-1}{2n^2-1}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim \frac{4n^2-n+1}{(1+2n)^2(n+5)}$ b) $\lim \frac{(n+1)(3n-2)^3}{(n+2)^4}$ c) $\lim \frac{(n^2+1)(n^2-3)}{(1+n)(n^3+2)}$
- d) $\lim \frac{(2n+1)(n-3)(3n-4)}{(6n-1)^3}$ e) $\lim \frac{n^4+3n^3+4n^2+1}{(-n-2)(n^3+5)}$ f) $\lim \frac{4n^4-n^2+1}{(2n+1)(3-n)(n^2+2)}$
- g) $\lim \frac{(n+1)n^4+(n+1)^5}{n^6-3n^3+2}$ h) $\lim \frac{(n-1)^{10}(n+1)^2-n^{11}}{n^{12}+n^6+2}$ i) $\lim \frac{n\sqrt{n}(3+2\sqrt{n})}{(n+1)(n+2)}$

Bài tập 5. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim \frac{2^n-3^n}{4^n}$. b) $\lim \frac{1+2^n}{1-2^n}$. c) $\lim \frac{3^n-4^n}{3^n+4^n}$.
- d) $\lim \frac{\sqrt{5^n}}{3^n+1}$. e) $\lim \frac{7 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n+4^n}$. f) $\lim \frac{3 \cdot 3^n-5^n}{3 \cdot 2^n+5 \cdot 4^n}$.
- g) $\lim \frac{(-2)^n-4^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$. h) $\lim \frac{3^n-(-5)^{n+2}}{2^{n+1}+6^n}$. i) $\lim \frac{4 \cdot 3^n+7^{n+1}}{2 \cdot 5^n+7^n}$.
- j) $\lim \frac{5 \cdot 2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$. k) $\lim \frac{2^{n+1}-3^n+11}{3^{n+2}+2^{n+3}-4}$. l) $\lim \sqrt{\frac{3^n+2^{n+1}}{5^n+3^{n+1}}}$.

KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty - \infty$

Phương pháp giải 3.2. Thông thường, tính giới hạn dạng $\infty - \infty$ ta chuyển dạng này về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ bằng cách nhân, chia cho đại lượng liên hiệp của mẫu, rồi tính.

Bài tập 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim (\sqrt{n^2 + 1} - n).$

b) $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

c) $\lim (n - \sqrt{n^2 + 1}).$

d) $\lim \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}).$

e) $\lim (\sqrt{2n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1}).$

f) $\lim (\sqrt{n^2 + 3n} - n + 2).$

3.1.5 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa 3.3. Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$

BÀI TẬP

Bài tập 7. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \dots.$

Bài tập 8. Biết rằng có thể coi số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,666\dots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn:

$$0,666\dots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots = 0,6 + 0,6 \cdot \frac{1}{10} + 0,6 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots.$$

Hãy viết $0,666\dots$ dưới dạng phân số.

Bài tập 9. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots.$

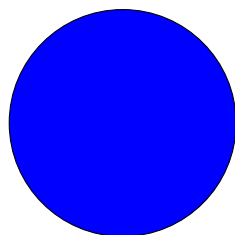
Bài tập 10. Tính các tổng sau

a) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$

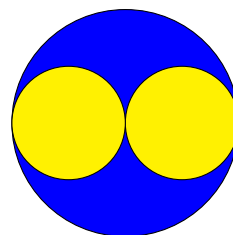
b) $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$

Bài tập 11. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn

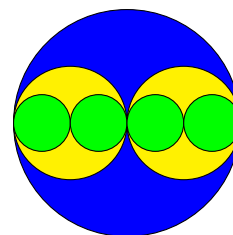
bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



a)



b)



c)

Hình 3

3.1.6 Giới hạn vô cực

Định nghĩa 3.4. Cho dãy số (u_n) ,

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim (-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định lý 3.3. Ta có các kết quả sau:

a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0.$

b) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty.$

c) $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim (-u_n) = -\infty.$

d) $\lim n^k = +\infty$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$).

e) $\lim q^n = +\infty$ ($q > 1$).

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 12. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{n^2 - 1}{n + 1}$

b) $\lim \frac{3n - n^3}{2n + 15}$

c) $\lim \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + n^2 + 7}$

d) $\lim \frac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}}$

Bài tập 13. Tính các giới hạn sau

a) $\lim (n^2 + 2n)$

b) $\lim (-2n^4 + 1)$

c) $\lim \sqrt{5n - 9}$

d) $\lim \sqrt{2n^2 - n + 3}$

e) $\lim \sqrt[3]{7n^2 - n^3}$

f) $\lim (2^n - 32)$

g) $\lim (3^n - 2^n)$

h) $\lim (4 \cdot 3^n - 5^{n+1})$

Bài tập 14. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{-2n + 1}{n}$

b) $\lim \frac{\sqrt{16n^2 - 2}}{n}$

c) $\lim \frac{4}{2n + 1}$

d) $\lim \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2}$

Bài tập 15. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$

Bài tập 16. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,444... dưới dạng một phân số.

Bài tập 17. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 2n}}$

b) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}}{3n + 2}$

c) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{2n + 3}}{2n + 1}$

d) $\lim \frac{n + 3 - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{4n^2 + 5} - 2n + 1}$

e) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 - n} - n}{\sqrt{n^2 + 2} - n + 4}$

f) $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1 - n^6}}{\sqrt{n^4 + 1} - n^2}$

Bài tập 18. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

b) $\lim \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n}{1 + n^3}$

c) $\lim \frac{n\sqrt{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}}{3n^2 + n - 2}$

d) $\lim \frac{1 - 2 + 3 - \dots + (2n-1) - 2n}{\sqrt{2n^2 + 1}}$

e) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$

f) $\lim \frac{2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1)}{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n - 1)}$

g) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \right)$

h) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+2)} \right)$

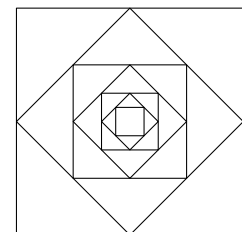
i) $\lim \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n} \right)$

j) $\lim \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

k) $\lim \frac{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n}{3^n}$

l) $\lim \left(\frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right)$

Bài tập 19. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



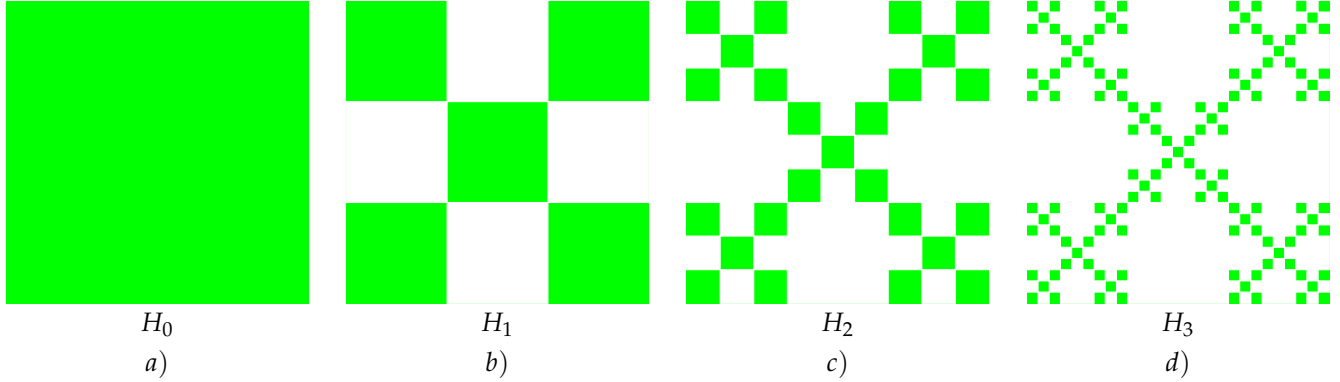
Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n , S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

- b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm lim Q_n (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Bài tập 20. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình 6b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}; \dots$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

- a) Tính diện tích S_n của H_n và tính lim S_n .
- b) Tính chu vi p_n của H_n và tính lim p_n .

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích lim S_n và chu vi lim p_n).

3.2 Giới hạn của hàm số

3.2.1 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 3.5. Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

3.2.2 Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

Định lý 3.4. Một số phép toán quan trọng

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c là hằng số);
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).
- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).

Định lý 3.5. Một số phép toán quan trọng Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (với $M \neq 0$).

❖ BÀI TẬP ❖

TÍNH TRỰC TIẾP BẰNG CÁCH THỂ SỐ

Lưu ý 3.2. Nếu $f(a) \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Bài tập 1. Sử dụng quy tắc thể số tính các giới hạn sau

- $\lim_{x \rightarrow 2} 2x$.
- $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$.
- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 1}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2)$.
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1}$.
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$

Phương pháp giải 3.3.

- Khi tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, mà khi thể số ta được $f(x_0) = 0$ và $g(x_0) = 0$ thì giới hạn được xem là dạng vô định $\frac{0}{0}$.
- Để tính giới hạn này ta phải khử dạng vô định, bằng cách biến đổi xuất hiện thừa số $(x - x_0)$ ở cả tử và mẫu số, sau đó giản ước, thu gọn và tính.

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}. & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}. & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}. & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}. & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}. & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}. & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}. \end{array}$$

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 2x^2}. & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)^3 + 8}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}. \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 11x + 10}. & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}. & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}. \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right). & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right). & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x-26}{4-x^2} \right). \end{array}$$

3.2.3 Giới hạn một phía

Định nghĩa 3.6.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên phải** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên trái** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Định lý 3.6.

a) Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Định lý 3.5 vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

- a) Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- b) Có tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Bài tập 6. Tìm các giới hạn một bên của các hàm số sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1}. & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 2x^2}{x - 3}. & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right). \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right). & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{x^2-4x+4}. & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}. \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}. & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|3x+6|}{x+2}. & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+5x+4}{|x+1|}. \\ \text{j) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x|x+2|}{x^2+3x+2}. & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}. & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x+x}}. \end{array}$$

Bài tập 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2+2 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$. Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

Bài tập 8. Xét sự tồn tại giới hạn

a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ -x^2 + 4, & x \geq 1 \end{cases}$. Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Bài tập 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{27(x^2 - 4x + 3)}{x^3 - 27} & (x > 3) \\ ax - 4 & (x \leq 3) \end{cases}$. Tìm a để $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ tồn tại.

Bài tập 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & (x < 1) \\ x^2 - a & (x \geq 1) \end{cases}$. Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow 1$.

Bài tập 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & (x > 1) \\ 2mx + 3 & (x \leq 1) \end{cases}$. Tìm m để $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ tồn tại.

3.2.4 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa 3.7.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Định lý 3.7.

a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Định lý 3.5 vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

❖ BÀI TẬP ❖

KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$

Bài tập 12. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{x^2 + 2x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x + 1}$.

Lưu ý 3.3. Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ta thực hiện như tính giới hạn dãy số.

Bài tập 13. Tính giới hạn hàm số

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{1 - 3x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 5)(1 - x)^2}{3x^3 - x + 1}$.

Bài tập 14. Tính giới hạn hàm số

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{1 - x + 4x^2} - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 5x - 1}}{7x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 1)\sqrt{x^2 - 3}}{x - 5x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x)\sqrt{\frac{3x - 1}{x^3 + 1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)\sqrt{\frac{4x + 1}{(x - 1)(x^2 + 2x)}}$

Bài tập 15. Tính giới hạn hàm số

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x^2 - 1|}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 10}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2|5 - x| + 1}{|2x^2 - 5| + 4|x + 1| - 1}$

KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty - \infty$ **Bài tập 16.** Tính các giới hạn

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$. b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x})$. c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + 2x)$.
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 2x)$. e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 + 1} + x\sqrt{3})$. f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$. h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt{4x^2 + 1} + 2x^2)$. i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$.

Bài tập 17. Một cái hồ đang chứa 200 m³ nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m³. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc 2 m³/phút.

- a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
- b) Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

3.2.5 Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm**Định lý 3.8.** Nếu $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \text{const}$ (hằng số) và $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \infty$. Lưu ý tùy trường hợp cho kết quả là $+\infty$ hay $-\infty$.**Định nghĩa 3.8.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

- Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $+\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.
- Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $-\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow -\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.

Định lý 3.9.

a) Ta có các giới hạn thường dùng như sau:

- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$);
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.

b) Các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa như trên.c) Các phép toán trên giới hạn hàm số của (3.5) chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.
Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) \cdot g(x)]$ được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ thành x_0^- (hoặc $+\infty$, $-\infty$).

BÀI TẬP

Bài tập 18. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-2x}{x-2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3-x}.$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1).$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+1).$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x^2).$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-\sqrt{x^2}).$

Bài tập 19. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2-7x+4).$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}.$

Bài tập 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Bài tập 21. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x+1}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$

Bài tập 22. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{30t}{400+t} \text{ (gam/lít)}.$$

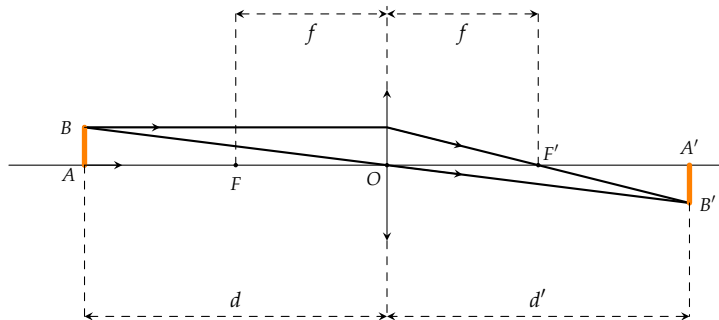
b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

Bài tập 23. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (xem hình bên dưới). Ta có công thức: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay $d' = \frac{df}{d-f}$. Xét

hàm số $g(d) = \frac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d).$

b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d).$



3.3 Hàm số liên tục

3.3.1 Khái niệm hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 3.9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$,

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 và x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.

Định lý 3.10. Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều sau

- Hàm số xác định tại x_0 .
- Tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hay $\lim_{x^+ \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x^- \rightarrow x_0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3.3.2 Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Định nghĩa 3.10.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục tại trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

3.3.3 Tính liên tục của hàm số sơ cấp

Định lý 3.11.

- Hàm số đa thức $P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng. Trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

Lưu ý 3.4. Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là hàm số sơ cấp. Khi nói xét tính liên tục của một hàm số mà không nói gì thêm thì ta xét tính liên tục của hàm số đó trên những khoảng của tập xác định của chúng.

3.3.4 Tổng, hiệu, tích, thương của hàm số liên tục

Định lý 3.12. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

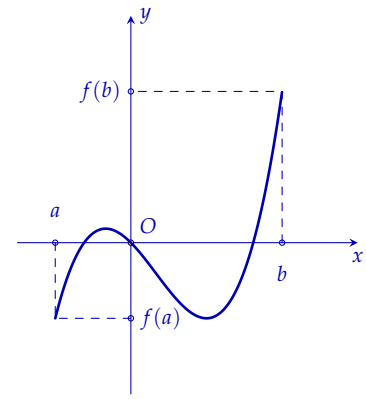
- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

3.3.5 Ứng dụng của hàm số liên tục

Định lý 3.13.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối như hình vẽ bên. Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.



❖ BÀI TẬP ❖

KIỂM TRA TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Bài tập 1. Xét sự liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 cho trước.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $x_0 = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \\ 2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -4, & x = -2 \end{cases}$ tại $x_0 = -2$.

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$.

f) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$.

Bài tập 2. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 cho trước.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ (a + 1)x - 3, & x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1}, & x > 1 \\ ax + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5}}, & x \neq 4 \\ 1 - 3a, & x = 4 \end{cases}$ tại $x_0 = 4$.

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x}, & x < 0 \\ a + \frac{4 - x}{x + 2}, & x \geq 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$.

Bài tập 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 4. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Bài tập 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Bài tập 6. Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$.

b) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$.

Bài tập 7. Xét tính liên tục của hàm số $y = \frac{\sin x}{x + 1}$.

Bài tập 8. Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

c) $h(x) = \cos x + \tan x$.

Bài tập 9. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sin x$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ và $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

ỨNG DỤNG HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài tập 10. Chứng minh rằng phương trình

a) $3x^3 + 2x - 2 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

b) $2x^3 - 5x^2 + x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

c) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

d) $x^3 - 2x^2 + 3x = 7$ có nghiệm lớn hơn 2.

Bài tập 11. Chứng minh rằng phương trình

a) $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.

b) $x^5 + x^3 - 4x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2; 1)$.

c) $x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 11x + 2 = 0$ có nghiệm.

Bài tập 12. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{2x + 2}$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0; 2)$ sao cho $f(c) = -0,8$.

Bài tập 13. Chứng minh các phương trình luôn có nghiệm.

a) $m(x - 1)^5(x - 2) + 2x - 3 = 0$.

b) $(m^2 + m + 1)x^3 + 2x - 2 = 0$.

c) $(x - 1)(x - 3) - m(x + 1)(x - 2) = 0$.

d) $m(x^2 + 3)(x^2 - 4) + 2x + 1 = 0$.

e) $x^4 + mx^2 - 3mx - 79 = 0$.

f) $(m^4 + m + 2)(x^3 - 8) + 6x + 1 = 0$.

g) $(m^2 + 2m + 2011)x^{2011} + 2x - 2 = 0$.

h) $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$.

Bài tập 14. Cho phương trình $x^{10} + (m^4 + m + 1)x^{2011} - 1024 = 0$. Chứng minh phương trình trên luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của tham số m .

Bài tập 15. Chứng minh các phương trình luôn có nghiệm.

a) $\cos x + m \cos 2x = 0$.

b) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = m$.

Bài tập 16. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Bài tập 17. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}, \text{ trong đó } M \text{ là khối lượng, } R \text{ là bán kính của Trái Đất, } G \text{ là hằng số hấp dẫn.}$$

Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

3.4 Bài tập cuối chương

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n+1}$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+2)}{n^2}$.

Bài tập 2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - x + 2)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2}$.

Bài tập 3. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{x+1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2}$.

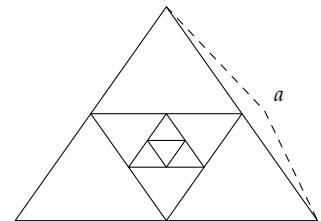
c) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x}$.

Bài tập 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{khi } x \geq 0 \\ 2 \cos x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Bài tập 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{khi } x \neq 5 \\ a & \text{khi } x = 5 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 6. Cho tam giác đều có cạnh bằng a , gọi là tam giác H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình bên). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$. Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.



Bài tập 7. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10°C , mỗi phút tăng 2°C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút 3°C trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ\text{C}$) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

$$T(t) = \begin{cases} 10 + 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 60 \\ k - 3t & \text{khi } 60 < t \leq 100 \end{cases} \quad (k \text{ là hằng số}).$$

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k .

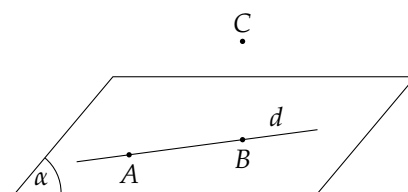
Chương 4

Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

4.1 Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

4.1.1 Một số khái niệm cơ bản

- Mặt phẳng là một đối tượng của toán học không có giới hạn. Mặt phẳng là một mặt hai chiều phẳng mở rộng vô hạn. Trong đời sống chúng ta thì mặt hồ nước (lặng), nền nhà, trần nhà, mặt bàn, tờ giấy phẳng, ... là các mặt phẳng.
- Trong chương trình toán học lớp 11, thì hình tam giác, tứ giác, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông, ... là các biểu diễn của mặt phẳng. Hình vẽ trên biểu diễn hai điểm A, B và đường thẳng (d) đi qua hai điểm A và B cùng nằm trong mặt phẳng (α) .
 - Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói A nằm trên (α) hay (α) chứa A , hay (α) đi qua A và kí hiệu là $A \in (\alpha)$.
 - Nếu điểm C không thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói C nằm ngoài (α) hay (α) không chứa C và kí hiệu là $C \notin (\alpha)$.
 - Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) ta nói (α) chứa d kí hiệu $d \subset (\alpha)$.
 - Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B nằm trong (α) thì $d \subset (\alpha)$.



Lưu ý 4.1. Các kí hiệu thường dùng để biểu diễn điểm, đường thẳng và mặt phẳng

- Điểm: $A, B, C, \dots$
- Đường thẳng: $a, b, d, \Delta, \dots$
- Mặt phẳng: $(ABC), (P), (\alpha), \dots$
- Quan hệ điểm, đường và mặt
$$\begin{cases} A \in d \\ d \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha).$$

4.1.2 Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Định lý 4.1.

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Định lý 4.2.

- Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.
- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.
- Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Định lý 4.3. Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Lưu ý 4.2. Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

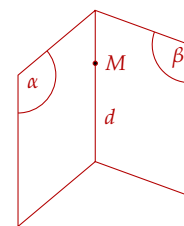
4.1.3 Giao tuyến hai mặt phẳng

Định nghĩa 4.1.

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Lưu ý 4.3. Trong hình, đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của (P) và (Q) , kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$.

Định lý 4.4. Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

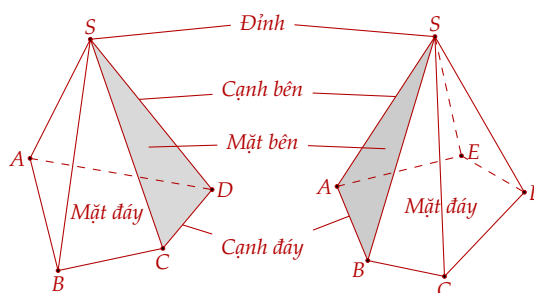


4.1.4 Hình chóp và hình tứ diện

Định nghĩa 4.2. Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α) . Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ được gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2 \dots A_n$.

Trong hình chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$, ta gọi:

- Điểm S là **đỉnh**;
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ là các **mặt bên**;
- Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là **mặt đáy**;
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ là các **cạnh bên**;
- Các cạnh của đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là các **cạnh đáy**.



Ta gọi hình chóp có đáy tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

Lưu ý 4.4.

- Hình chóp tam giác còn gọi là tứ diện. Một tứ diện có thể xem như là một hình chóp tam giác với đỉnh là một đỉnh tùy ý của tứ diện và đáy là mặt của tứ diện không chứa đỉnh đó.
- Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều được gọi là hình tứ diện đều.

Lưu ý 4.5. Trong không gian, đường thẳng khuất vẽ bằng nét đứt và đường nhìn thấy vẽ bằng nét liền.

❖ BÀI TẬP ❖

XÁC ĐỊNH MẶT PHẪNG

Bài tập 1. Với đường thẳng d và hai điểm M, N phân biệt không thuộc d , ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

Bài tập 2. Với ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm O , ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

Bài tập 3. Cho ba điểm phân biệt M, N, P không thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong ba điểm đã cho?

Bài tập 4. Cho đường thẳng a đi qua hai điểm phân biệt M, N và điểm O không thuộc a . Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O ?

Bài tập 5. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và một điểm M nằm trên đường thẳng BC . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C . Chứng tỏ rằng $M \in (P)$.

TÌM GIAO TUYẾN HAI MẶT PHẪNG

Phương pháp giải 4.1. Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của 2 mặt phẳng đó. Đường thẳng nối hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

Bài tập 6. Cho tam giác ABC và một điểm O không thuộc mặt phẳng (ABC) . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC) .

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác không có cặp cạnh đối song song. Điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD) c) (SAB) và (SCD) d) (MBC) và (SAD)

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$. Lấy điểm M thuộc miền trong tam giác SCD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- a) (SBM) và (SCD) b) (ABM) và (SCD) c) (ABM) và (SAC)

Bài tập 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC

- a) Tìm giao tuyến của (IBC) và (JAD)
b) Gọi M là điểm nằm trên đoạn AB , N là điểm nằm trên đoạn AC . Tìm giao tuyến của (IBC) và (DMN) .

Bài tập 10. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên đoạn SB và SC sao cho MN không song song với BC .

- a) Tìm giao tuyến (AMN) và (ABC) b) Tìm giao tuyến (ABN) và (ACM) .

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB cắt CD tại E ; AC cắt BD tại F .

- a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) b) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD)
c) Tìm giao tuyến của (SEF) và (SAD) d) Tìm giao tuyến của (SEF) và (SBC)

Bài tập 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC ; K là một điểm trên cạnh BD sao cho $KD < KB$

- a) Tìm giao tuyến của (IJK) và (ACD) b) Tìm giao tuyến của (IJK) và (ABD)

Bài tập 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bên trong tam giác ABD , N là điểm bên trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- a) (AMN) và (BCD) b) (DMN) và (ABC)

Bài tập 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD , M là điểm trên AO

- a) Tìm giao tuyến của (MCD) với (ABC) và (ABD)
b) Gọi I, J là hai điểm trên BC và BD . Tìm giao tuyến của (IJM) và (ACD)

Bài tập 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD ; P là điểm trên SC và $SP > PC$. Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt (SAC) , (SAB) , (SAD) , $(ABCD)$.

Bài tập 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD , M thuộc cạnh AB .

- a) Vẽ đường thẳng qua M , cắt AO và CD .
b) N là một điểm trên BC và ON không song song với BD . Dựng đường thẳng qua N , cắt AO và DM .

GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Phương pháp giải 4.2. Muốn tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng, ta có hai cách sau:

Cách 1. Tìm đường thẳng trong mặt phẳng cắt đường thẳng đã cho.

Cách 2.

- Bước 1: chọn mặt phẳng phụ chứa đường thẳng đã cho.

- Bước 2: tìm giao tuyến của mặt phẳng phụ với mặt phẳng đã cho.

- Bước 3: giao điểm cần tìm là giao điểm của giao tuyến với đường thẳng đã cho.

Bài tập 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt nằm trên AB và AD với $IB = 2IA$ và $AD = 2AJ$. Tìm giao điểm của IJ với (BCD) .

Bài tập 18. Cho tứ diện $SABC$, M là điểm thuộc tia đối của tia SA , O là điểm nằm trong tam giác ABC . Tìm các giao điểm sau:

- a) BC và (SOA) . b) MO và (SBC) . c) AB và (MOC) . d) SB và (MOC) .

Bài tập 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AD .

- a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD)
b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, CD . Tìm giao điểm K của MN và (SBD) .

Bài tập 20. Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N tương ứng là các điểm thuộc cạnh SC và BC . Tìm giao điểm của SD với (AMN) .

Bài tập 21. Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M và N là trung điểm AC và BC . Lấy điểm K thuộc đoạn BD (K không là trung điểm của BD). Tìm giao điểm của AD và (MNK) .

Bài tập 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang (đáy nhỏ AB). Gọi M là điểm thuộc BD sao cho $MB = 3MD$ và G là trọng tâm tam giác SAD . Tìm các giao điểm của GM với (SAC) .

Bài tập 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi và không có cặp cạnh đối nào song song. Lấy điểm M trên cạnh SC và điểm N trên cạnh SD

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (NBC)
- Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD)

Bài tập 24. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm I và lấy điểm J, K lần lượt thuộc miền trong tam giác BCD và ACD

- Tìm giao điểm của JK với (ABC)
- Tìm giao tuyến của (IJK) với các mặt của tứ diện $ABCD$.

Bài tập 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, cạnh đáy lớn là AB . Gọi I, J, K là ba điểm trên SA, AB, BC .

- Tìm giao điểm của IK với (SBD)
- Tìm giao điểm của mặt (IJK) với SD và SC .

CHỨNG MINH 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG VÀ 3 ĐƯỜNG ĐỒNG QUY

Phương pháp giải 4.3.

- Muốn chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này thuộc đường thẳng kia.
- Muốn chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta chứng minh 3 điểm đó thuộc cùng hai mặt phẳng.

Bài tập 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và $O = AC \cap BD$.

- Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD)
- Tìm giao điểm P của DN và (SAB)
- Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh 3 điểm S, K, O thẳng hàng.

Bài tập 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SC .

- Tìm giao điểm Q của SD và (MNP)
- Gọi $E = MN \cap PQ, F = AB \cap CD$. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

Bài tập 28. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB, SC lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SC .

- Tìm giao điểm R của SD và (BQP)
- Gọi M là giao điểm của PR và AD, N là giao điểm của QR và CD . Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Bài tập 30. Cho tứ giác $ABCD$ nằm trong mặt phẳng (α) , điểm S nằm ngoài (α) . Lấy một điểm M trên cạnh SC .

- Tìm giao điểm N của SD và (ABM)
- Giả sử AB và CD cắt nhau. Khi đó hãy chứng tỏ ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

Bài tập 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC .

- Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .
- Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Bài tập 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
- Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .
- Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Bài tập 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) .
- Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 34. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I ($I \neq C$), EG cắt AD tại H ($H \neq D$).

- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và (BCD) ; (EFG) và (ACD) .
- Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

Bài tập 35. Thước laser phát ra tia laser, khi tia này quay sẽ tạo ra mặt phẳng ánh sáng. Giải thích tại sao các thước kẻ laser lại giúp người thợ xây dựng kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà.



4.2 Hai đường thẳng song song

4.2.1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Định nghĩa 4.3.

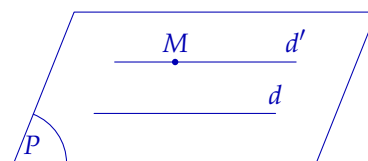
- Hai đường thẳng gọi là **song song** nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.
- Hai đường thẳng gọi là **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.

Định lý 4.5. Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu $mp(a, b)$.

4.2.2 Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song

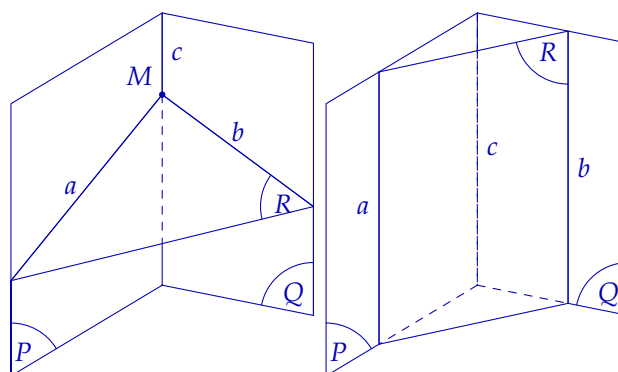
Định lý 4.6.

Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

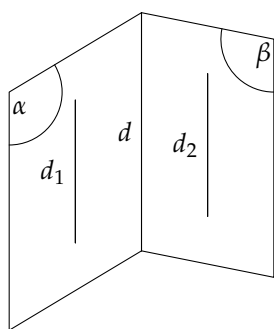


Định lý 4.7.

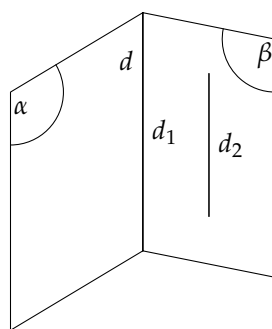
Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



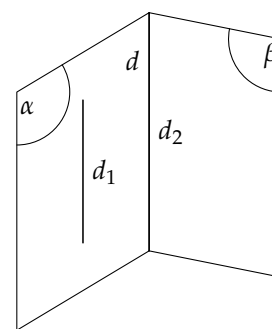
Hệ quả 4.1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



a)



b)



c)

Hình 11

Định lý 4.8. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lưu ý 4.6. Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu là $a \parallel b \parallel c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

❖ BÀI TẬP ❖

NHẬN DẠNG VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

- a) AB và CD ; b) SA và SC ; c) SA và BC .

Bài tập 2. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

- a) MN và BC ; b) AN và CD ; c) MN và CD .

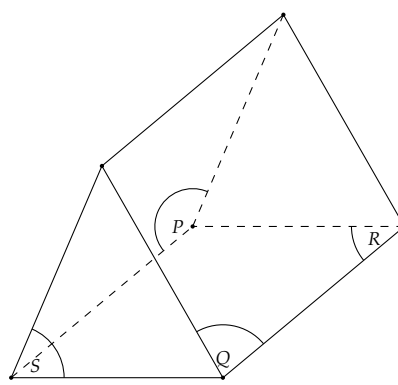
Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$. Vẽ hình thang $ADMS$ có hai đáy là AD và MS . Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua S và song song với AD . Chứng minh đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (SAD) .

Bài tập 4. Một chiếc lều (Hình a) được minh họa như Hình b.

- a) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến song song.
b) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến đồng quy.



a)

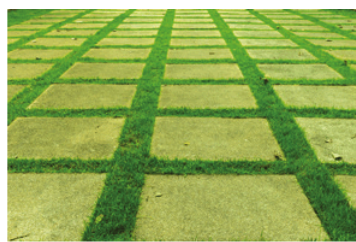


b)

Bài tập 5. Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



a)



b)



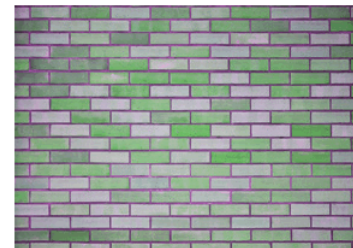
c)



d)



e)



g)

TÌM GIAO TUYẾN HAI MẶT PHẪNG

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.

- a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) .
b) Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

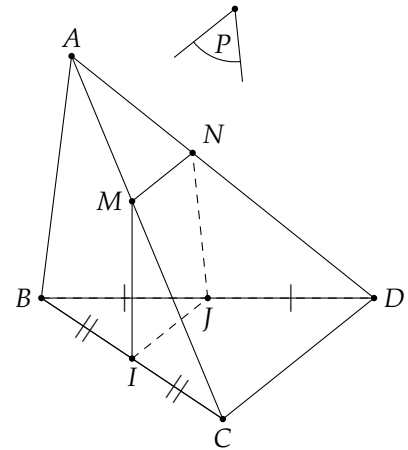
Bài tập 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của BD và CD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) .

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang đáy AB . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Bài tập 10. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD . Tìm giao tuyến của (AIJ) và (ACD)

Bài tập 11. Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N .

- Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.
- Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.



Bài tập 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, AD, AC, BD .

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Chứng minh ba đoạn MP, NQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Bài tập 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD .

- Chứng minh $HKEF$ là hình bình hành.
- Tìm giao tuyến của (SHK) và (SCD) .
- Tìm giao tuyến của (SEK) và (SAD) .
- Gọi M là điểm bất kỳ trên BC . Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng $(ABCD)$ và (HKM) .

Bài tập 14. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB và AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

- Chứng minh $MN \parallel BC$
- Chứng minh giao tuyến của (MND) và (BCD) song song với BC .

TÌM GIAO ĐIỂM, ĐỒNG QUY VÀ THẲNG HÀNG

Bài tập 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, BC, CD sao cho $AB = 3AI, 2BC = 3BJ, 4CD = 5CK$. Tìm giao điểm của (IJK) với AD .

Bài tập 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của AB, BC . Lấy Q thuộc AD và gọi P là giao điểm của CD và MNQ . Chứng minh $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của SA, SB, BC .

- Chứng minh rằng $MN \parallel CD$ và $NH \parallel SC$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNH) và $(ABCD)$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MDH) và (NAC) .

Bài tập 18. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang có đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA, SB .

- Chứng minh $EF \parallel CD$.
- Tìm giao điểm P của SC với (AFD) .
- Gọi I là giao điểm của AF và DP . Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.
- Hình tính của tứ giác $SABI$.

Bài tập 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS, NP \parallel CD, MQ \parallel CD$.

- Chứng minh $PQ \parallel SA$.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ . Chứng minh $SK \parallel AD \parallel BC$.

Bài tập 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC

a) Tìm giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD).

c) Gọi N là giao điểm của SD và mặt phẳng (ABM). Chứng minh (d), AN , BM đồng quy.

Bài tập 21. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q là trung điểm của AB và CD . Điểm R thuộc BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của AD và (PQR). Chứng minh $AS = 2SD$.

Bài tập 22. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không nằm trong cùng một mặt phẳng. Điểm M nằm trên đường chéo AC và điểm N nằm trên đường chéo BF với $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$

a) Chứng minh DM và EN đồng quy tại trung điểm I của AB

b) Chứng minh rằng $MN \parallel DE$

Bài tập 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của OB (O là giao điểm của BD và AC).

a) Tìm giao điểm I của SD và (AMN)

b) Tính tỷ số $\frac{SI}{ID}$.

Bài tập 24. Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC . Qua M , vẽ đường thẳng d song song với SA , cắt (SBC) tại N . Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN).

Bài tập 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD . Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx . Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

Bài tập 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N . Cho $AB = a$. Tính MN theo a .

b) Trong mặt phẳng ($CDMN$), gọi K là giao điểm của CN và DM . Chứng minh $SK \parallel BC \parallel AD$.

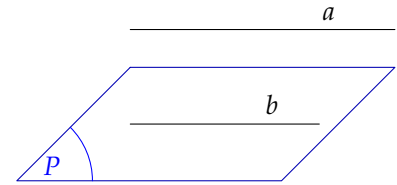
4.3 Đường thẳng và mặt phẳng song song

4.3.1 Khái niệm

Định nghĩa 4.4. Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu chúng không có điểm chung.

Định lý 4.9.

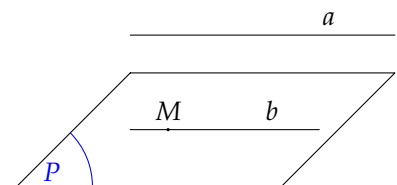
Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P) .



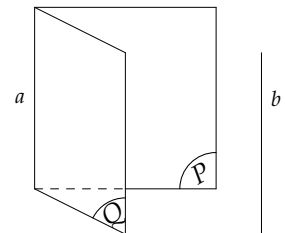
4.3.2 Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song

Định lý 4.10. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a , cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b .

Hệ quả 4.2. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P) .



Hệ quả 4.3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Định lý 4.11. Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a , có một và chỉ một mặt phẳng song song với b .

❖ BÀI TẬP ❖

NHẬN DẠNG VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI ĐƯỜNG VÀ MẶT

Bài tập 1. Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a, b, c, d, e với mặt phẳng (P) là mặt trước của toà nhà trong hình dưới đây.



CHỨNG MINH ĐƯỜNG SONG SONG VỚI MẶT

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Chứng minh rằng:

- a) $BC \parallel (SAD)$. b) $AD \parallel (SBC)$. c) $MN \parallel (ABCD)$.
d) $MN \parallel (SBC)$. e) $MO \parallel (SCD)$. f) $NO \parallel (SBC)$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB . Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA , (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

Bài tập 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) .

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE) .

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SAB).
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Bài tập 7. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

- Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDEF)$, (ADF) và (BCE) .
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE . Chứng minh $MN \parallel (CDEF)$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$.

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (α) qua M , song song với CD và SA , cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- a) $MNPQ$ là hình gì?
- b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

Bài tập 9. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

Bài tập 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của CD , (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

Bài tập 11. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

- Chứng minh $MG \parallel (ABD)$.
- Tìm $(ABD) \cap (BGM)$.
- Tìm $(ABD) \cap (AGM)$.

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- a) Chứng minh $OI \parallel (SAB)$ và $OI \parallel (SCD)$.
b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

Bài tập 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD .

- a) Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.
- b) Gọi P là trung điểm cạnh SA . Chứng minh $SB \parallel (MNP)$ và $SC \parallel (MNP)$.

c) Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh $GI \parallel (PAM)$.

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB , với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

a) $DI \parallel (SBC)$.

b) $GO \parallel (SCD)$.

c) $SB \parallel (ACE)$.

Bài tập 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là trung điểm của các cạnh AB, AD . Gọi I, J thuộc SM, SN sao cho $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$. Chứng minh

a) $MN \parallel (SBD)$.

b) $IJ \parallel (SBD)$.

c) $SC \parallel (IJO)$.

Bài tập 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và P lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và ABC . Chứng minh rằng $GP \parallel (BCD)$, $GP \parallel (ABD)$.

Bài tập 17. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm của tam giác ABD và I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh $IG \parallel (ACD)$.

4.4 Hai mặt phẳng song song

4.4.1 Khái niệm hai mặt phẳng song song

Định nghĩa 4.5. Hai mặt phẳng được gọi là **song song** nếu chúng không có điểm chung.

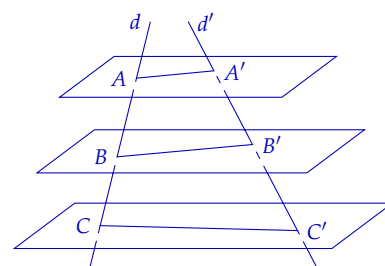
Định lý 4.12. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .

Định lý 4.13. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Định lý 4.14. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Nếu (R) cắt (P) thì cắt (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.

4.4.2 Định lý Thalés trong không gian

Định lý 4.15. Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

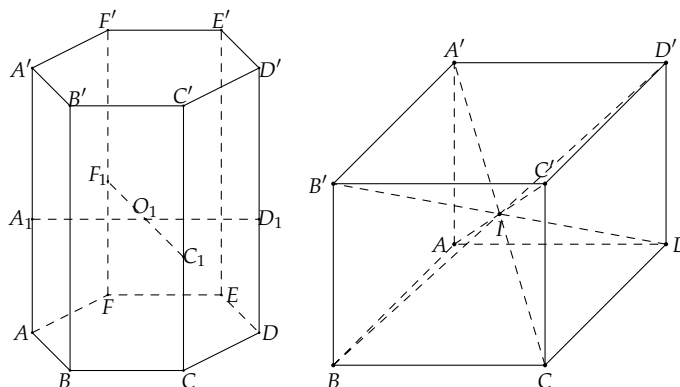


4.4.3 Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa 4.6. Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ gọi là hình lăng trụ, kí hiệu $A_1A_2 \dots A_n \cdot A'_1A'_2 \dots A'_n$. Trong hình lăng trụ $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$, ta gọi

- Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $A'_1A'_2 \dots A'_n$ là hai **mặt đáy** nằm trên hai mặt phẳng song song.
- Các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ là các **đỉnh**.
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ là các **mặt bên**.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ là các **cạnh bên**.
- Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Các cạnh của hai đa giác đáy là các **cạnh đáy**. Các cạnh đáy tương ứng song song và bằng nhau.

Lưu ý 4.7. Hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, ...



Định nghĩa 4.7. Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Trong một hình hộp ta có

- Sáu mặt là sáu hình bình hành. Mỗi mặt đều có một mặt song song với nó.

- Hai mặt như thế gọi là hai mặt đối diện.
- Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo.
- Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

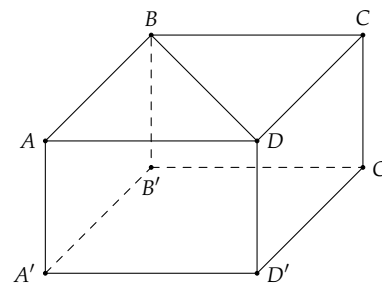
❖ BÀI TẬP ❖

NHẬN DẠNG VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Bài tập 1. Hộp giấy có các mặt là hình chữ nhật ở Hình 3a được vẽ lại với các đỉnh là $A, B, C, D, A', B', C', D'$ như Hình 3b. Quan sát hộp giấy và chỉ ra các cặp mặt phẳng song song với nhau ở Hình 3b.



Hình 3a



Hình 3b

CHỨNG MINH HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Phương pháp giải 4.4. Cách chứng minh hai mặt phẳng song song, ta cần chỉ ra

$$\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \parallel (\alpha) \\ a, b \subset (\beta) \\ a \cap b = A \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BMN) và (SCD) song song với nhau.

Bài tập 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P là trung điểm của AB, AC, AD . Chứng minh $(MNP) \parallel (BCD)$.

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là trung điểm của SA, SB, SC . Chứng minh $(MNP) \parallel (ABCD)$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm I, J, K lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SBC, SCA . Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (ABC)$.

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là trung điểm của AD, BC, SA . Chứng minh $(MNP) \parallel (SCD)$.

Bài tập 7. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$.

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi M, N là 2 điểm trên cạnh SA sao cho $SM = MN = NA$.

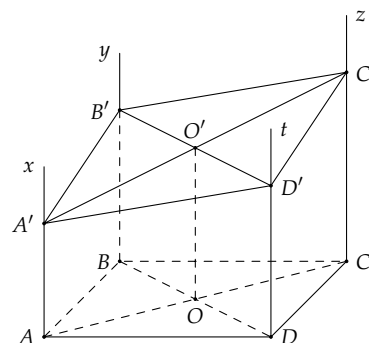
- Chứng minh $GM \parallel (SBC)$
- Gọi D là điểm đối xứng của A qua G . Chứng minh $(MCD) \parallel (NBG)$

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Gọi M là giao điểm của AH và DK , N là giao điểm của DI và CH .

- Chứng minh $(IHK) \parallel (ABCD)$.
- Chứng minh $(SMN) \parallel (IHK)$.

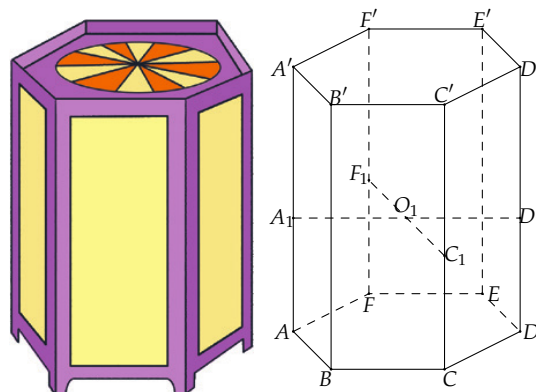
Bài tập 10. Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song với nhau, nằm về một phía đối với (P) và lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' .

- Chứng minh $mp(AA', BB')$ song song với $mp(CC', DD')$.
- Chứng minh tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Chứng minh $OO' \parallel AA'$.



Bài tập 11. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (hình bên dưới).

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (A_1D_1, F_1C_1) với các mặt bên của lăng trụ.
- Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70$ cm, tính CC_1 và C_1C' .



Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm trên AD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và SC . Chứng minh $(\alpha) \parallel (SDC)$.

Bài tập 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi J là trung điểm SD và $O = AC \cap BD$.

- Tìm giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (BCJ)
- Gọi E, F, Q lần lượt là trung điểm của AD, DE, OA . Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (SQE) và (SCF) .
- Gọi M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $MC = 3MS$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (MFJ) và (SQE) song song với nhau.

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

- Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$
- Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON . Chứng minh $PQ \parallel (SBC)$.

Bài tập 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O . Gọi H, K, I lần lượt là trung điểm của SA, CD, KS

- Chứng minh $(OHK) \parallel (SBC)$
- Gọi J là điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD . Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$
- Giả sử tam giác SAD, ABC đều cân tại A . Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của tam giác ACD và SAB . Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

Bài tập 16. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song. Hai đường thẳng d và d' cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C và A', B', C' . Cho $AB = 3, BC = 7, A'C' = 20$. Tính các độ dài $A'B', B'C'$.

Bài tập 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh (BDA') và $(B'D'C)$ là các mặt phẳng song song.

Bài tập 18. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Bài tập 19. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

- Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.
- Gọi E là trung điểm của AB và F là một điểm thuộc ON . Chứng minh EF song song với (SBC) .

Bài tập 20. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

a) Chứng minh $(CBE) \parallel (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

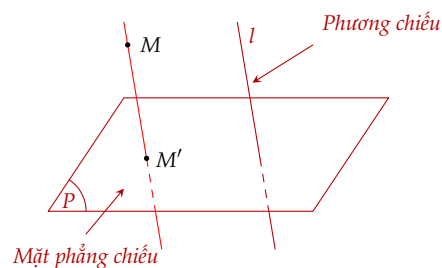
Bài tập 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác $B'D'A$ và BDC' . Chứng minh G và G' chia đoạn $A'C$ thành ba phần bằng nhau.

4.5 Phép chiếu song song

4.5.1 Khái niệm phép chiếu song song

Định nghĩa 4.8.

Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P) . Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt (P) tại M' . Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l .



- Mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng chiếu** và đường thẳng l được gọi là **phương chiếu** của phép chiếu song song nói trên.
- Phép chiếu song song theo phương l còn được gọi tắt là **phép chiếu theo phương l** .
- Điểm M' gọi là **ảnh** của điểm M qua phép chiếu theo phương l .
- Cho hình $\mathcal{H}$ trong không gian. Ta gọi tập hợp $\mathcal{H}'$ các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song theo phương l là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ lên mặt phẳng (P) .

4.5.2 Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song

Định lý 4.16.

- Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng. Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng. Hình chiếu song song của một tia là một tia.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

4.5.3 Hình biểu diễn của một hình không gian

Định nghĩa 4.9. Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

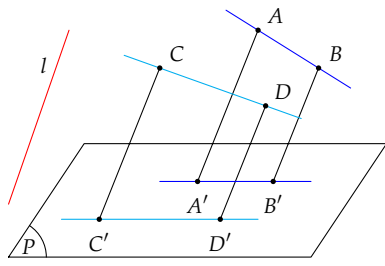
Lưu ý 4.8. Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta phải tuân theo một số quy tắc khi vẽ hình biểu diễn, chẳng hạn như

- Nếu trên hình $\mathcal{H}$ có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) và tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải bằng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình $\mathcal{H}$.
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì
 - Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
 - Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
 - Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

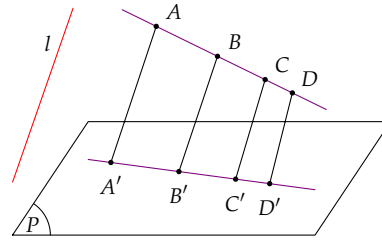
❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1.

- Tìm hình chiếu song song của đoạn thẳng AC , tia AB và đường thẳng AD trong Hình b).
- Quan sát Hình a) và so sánh hai tỉ số $\frac{AB}{CD}, \frac{A'B'}{C'D'}$.
- Quan sát Hình b) và so sánh hai tỉ số $\frac{DA}{DB}, \frac{D'A'}{D'B'}$.



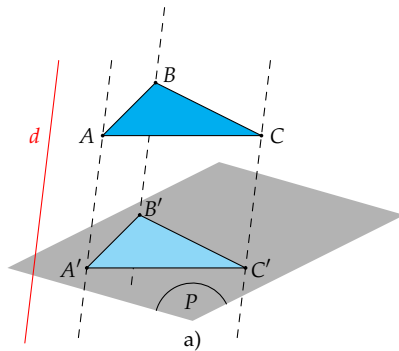
a)



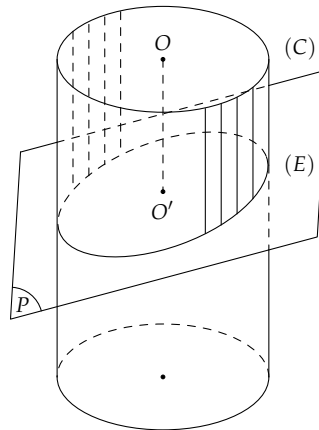
b)

Bài tập 2. Quan sát bên dưới và tìm hình biểu diễn của

- đoạn thẳng AB .
- tam giác ABC .
- đường tròn (C) tâm O .



a)



b)

Bài tập 3. Vẽ hình biểu diễn và nêu nhận xét về hình biểu diễn của các mặt của các hình sau

- Hình hộp.
- Lăng trụ có đáy là lục giác đều.
- Tứ diện.

Bài tập 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
- Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

Bài tập 5. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Bài tập 6. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

Bài tập 7. Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α) . Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O . Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (α) theo phương của đường thẳng d . Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho

- $A'B' = AB$.
- $A'B' = 2AB$.

Bài tập 8. Vẽ hình biểu diễn của

- Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.
- Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.
- Hình hộp.

4.6 Bài tập cuối chương

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$ và O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên $CC'D'D$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (OMN) với các mặt của hình hộp.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tam giác SAD đều, M là điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q .

- Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang cân.
- Đặt $AM = x$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x .

Bài tập 3. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (α) tại A và B . Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (α) và cắt a tại M , cắt b tại N . Qua điểm N dựng đường thẳng song song với a cắt (α) tại điểm C .

- Tứ giác $MNCA$ là hình gì?
- Chứng minh rằng điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC và BF sao cho $MC = 2MA; NF = 2NB$. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB , cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1 . Chứng minh rằng

- $MN \parallel DE;$
- $M_1N_1 \parallel (DEF);$
- $(MNN_1M_1) \parallel (DEF).$

Chương 5

Thống kê

5.1 Số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm

5.1.1 Số liệu ghép nhóm

Định nghĩa 5.1. *Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:*

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Lưu ý 5.1.

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.
- Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.
- Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j; u_{j+1})$.

Lưu ý 5.2. *Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:*

- Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thỏa mãn $R < k \cdot L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.
- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

Lưu ý 5.3.

- Các đầu mút của các nhóm có thể không là giá trị của mẫu số liệu.
- Ta hay gặp các bảng số liệu ghép nhóm là số nguyên, chẳng hạn như bảng thống kê số lỗi chính tả trong bài kiểm tra giữa học kì 1 môn Ngữ Văn của học sinh khối 11 như sau:

Số lỗi	[1; 2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số bài	122	75	14	5	2

Bảng số liệu này không có dạng như Bảng 1. Để thuận lợi cho việc tính các số đặc trưng cho bảng số liệu này, người ta hiệu chỉnh về dạng như Bảng 1 bằng cách thêm và bớt 0,5 đơn vị vào đầu mút bên phải và bên trái của mỗi nhóm số liệu như sau:

Số lỗi	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số bài	122	75	14	5	2

5.1.2 Số trung bình

Định nghĩa 5.2. *Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính như sau*

$$\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{n},$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ và $c_i, i = 1, \dots, k$ là đại diện của các nhóm.

Lưu ý 5.4. Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

5.1.3 Một

Định nghĩa 5.3. Nhóm chứa một của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất. Giả sử nhóm chứa một là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó một của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là M_0 , được xác định bởi công thức

$$M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Lưu ý 5.5. Nếu không có nhóm kế trước của nhóm chứa một thì $u_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kế sau của nhóm chứa một thì $n_{m+1} = 0$.

Lưu ý 5.6. Ý nghĩa của một của mẫu số liệu ghép nhóm

- Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_0 xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_0 thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.
- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều một.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Tính giá trị đại diện và độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu sau

Khoảng tuổi	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số khách hàng nữ	3	9	6	4	4

Bài tập 2. Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4 62,6 54,2 56,8 58,8 59,4 60,7 58 59,5 63,6 61,8 52,3 63,4 57,9
49,7 45,1 56,2 63,2 46,1 49,6 59,1 55,3 55,8 45,5 46,8 54 49,2 52,6

Hãy chia mẫu dữ liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

Bài tập 3. Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

12 29 12 19 15 21 19 29 28 12 15 25 16 20 29
21 12 24 14 10 12 10 23 27 28 18 16 10 20 21

Hãy chia mẫu số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

Bài tập 4. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

Bài tập 5. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Bài tập 6. Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3; 5]	[6; 8]	[9; 11]	[12; 14]	[15; 17]
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Bài tập 7. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.

b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2;70)	[70;70,8)	[70,8;71,6)	[71,6;72,4)	[72,4;73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.

d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

Bài tập 8. Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.

b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

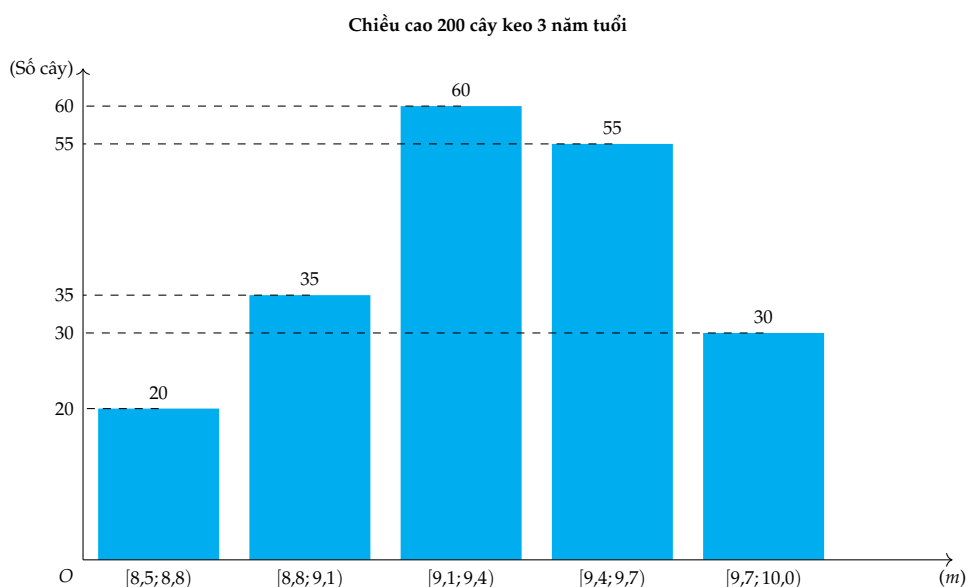
c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài tập 9. Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 10. Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

5.2 Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

5.2.1 Trung vị

Định nghĩa 5.4. Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Lưu ý 5.7. Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm: Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

5.2.2 Tứ phân vị

Định nghĩa 5.5. Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2 , cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm. Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1 , ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3 , ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1}$.

Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j).$$

Lưu ý 5.8. Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.

Lưu ý 5.9. Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

- Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau.
- Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.
- Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

Bài tập 1. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 2. Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 29]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 3. Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

Bài tập 4. Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.

Huấn luyện viên muốn xác định nhóm gồm 25% các vận động viên có số giờ luyện tập cao nhất. Hỏi huấn luyện viên nên chọn các vận động viên có thời gian luyện tập từ bao nhiêu giờ trở lên vào nhóm này?

Bài tập 5. Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	[1; 2)	[3; 4)	[5; 6)	[7; 8)	[9; 10)
Số xe	17	33	25	20	5

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về động cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lý không?

Bài tập 6. Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau:

Thời gian (đơn vị: giây)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)	[300; 360)
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1

Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 7. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau:

Số bệnh nhân	[1; 10]	[11; 20]	[21; 30]	[31; 40]	[41; 50]
Số ngày	7	8	7	6	2

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Quản lý phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lý không?

Bài tập 8. Lương tháng của một số nhân viên văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

12,5	9,6	11,7	12,7	10,0	10,0	12,2	9,8	10,9	6,7	13,6	9,2
13,1	6,5	10,7	8,9	11,2	13,2	8,3	11,1	11,9	8,4	6,7	13,8

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên dựa vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lương tháng (triệu đồng)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số nhân viên	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài tập 9. Số điểm một cầu thủ bóng rổ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bảng sau:

25	23	21	13	8	14	15	18	22	11
24	12	14	14	18	6	8	25	10	11

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Điểm số	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]
Số trận	?	?	?	?

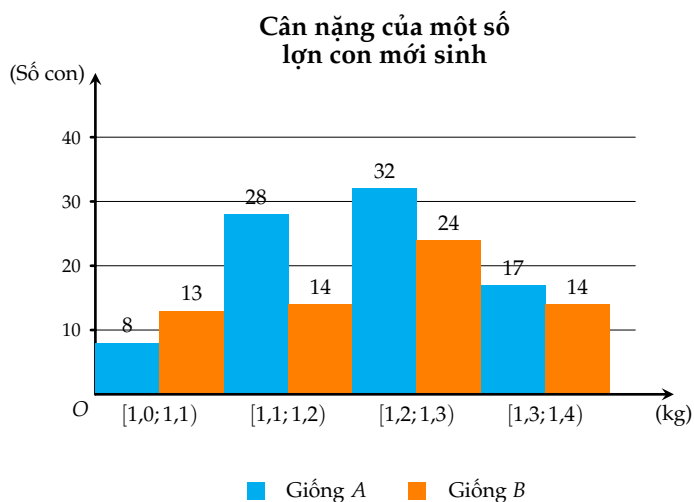
c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu từ bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài tập 10. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả như sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình, môđ và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 11. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg).



a) Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.

b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B.

5.3 Bài tập cuối chương

Câu 1. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 2. Để kiểm tra thời gian sử dụng pin của một chiếc điện thoại mới, chị An thống kê thời gian sử dụng điện thoại của mình từ lúc sạc đầy pin cho đến khi hết pin ở bảng sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)	[15;17)
Số lần	2	5	7	6	3

- a) Hãy ước lượng thời gian sử dụng trung bình từ lúc chị An sạc đầy pin điện thoại cho tới khi hết pin.
b) Chị An cho rằng có khoảng 25% số lần sạc điện thoại chỉ dùng được 10 giờ. Nhận định của chị An có hợp lí không?

Câu 3. Tổng số lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm)

121,8 158,3 334,9 200,9 165,6 161,5 194,3 220,7 189,8 243,2
165,9 165,9 134 173 169, 189, 254 168 255

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- a) Xác định số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu trên.
b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm)	[120;175)	[175;230)	[230;285)	[285;340)
Số năm	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Câu 4. Bảng sau thống kê số ca nhiễm mới SARS-CoV-2 mỗi ngày trong tháng 12/2021 tại Việt Nam.

Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca
1	15 139	9	15 965	17	15 685	25	16 046
2	14 295	10	15 474	18	16 363	26	15 667
3	14 254	11	16 830	19	16 586	27	15 310
4	14 598	12	15 264	20	15 420	28	14 866
5	14 927	13	16 035	21	16 806	29	14 299
6	15 215	14	15 871	22	17 044	30	20 454
7	14 433	15	16 192	23	16 860	31	17 004
8	15 223	16	15 720	24	16 633		

(Nguồn: worldmeters.info)

- a) Xác định số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu trên. Mẫu số liệu có bao nhiêu có bao nhiêu giá trị ngoại lệ?
b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số ca (nghìn)	[14; 15,5)	[15,5; 17)	[17; 18,5)	[18,5; 20)	[20; 21,5)
Số ngày	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Chương 6

Hàm số mũ và hàm số logarit

6.1 Phép tính lũy thừa

6.1.1 Phép toán lũy thừa với số mũ nguyên âm

Định nghĩa 6.1. Với số nguyên dương n , số thực $a \neq 0$, lũy thừa của a với số mũ $-n$ xác định bởi

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Lưu ý 6.1.

- $a^0 = 1$ với mọi $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
- 0^0 và 0^{-n} (với $n > 0$) không có nghĩa.

6.1.2 Lũy thừa với số mũ hữu tỷ

Định nghĩa 6.2. Cho số nguyên dương n ($n \geq 2$) và số thực b bất kì. Nếu có số thực a sao cho

$$a^n = b$$

thì a được gọi là một căn bậc n của b .

Định lý 6.1. Cho n là số nguyên dương ($n \geq 2$), b là số thực bất kì. Khi đó:

a) Nếu n là số chẵn thì:

- $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b .
- $b = 0$: có một căn bậc n của b là 0.
- $b > 0$: có hai căn bậc n của b đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$ và giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

b) Nếu n là số lẻ thì có duy nhất một căn bậc n của b , kí hiệu $\sqrt[n]{b}$.

Lưu ý 6.2.

- Nếu n chẵn thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa chỉ khi $b \geq 0$.
- Nếu n lẻ thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ luôn có nghĩa với mọi số thực b .

Tính chất 6.1. Ta có các tính chất sau đây (với điều kiện các căn thức đều có nghĩa)

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}. & \text{b) } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. & \text{c) } (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m}. \\ \text{d) } \sqrt[n]{a^n} &= \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn.} \end{cases} & \text{e) } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a}. \end{aligned}$$

Định nghĩa 6.3. Cho số thực dương a và số hữu tỷ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu a^r , được xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

6.1.3 Lũy thừa với số mũ thực

Với a là số thực dương, α là số vô tỉ bất kì, người ta chứng minh được rằng có dãy số hữu tỉ (r_n) sao cho $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ và dãy số (a^{r_n}) có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy (r_n) .

Định nghĩa 6.4. *Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) được gọi là lũy thừa của số thực dương a với số mũ α , kí hiệu là a^α .*

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} \text{ với } \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n.$$

Lưu ý 6.3. $1^\alpha = 1$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tính chất 6.2. Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

$$a) \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

$$b) \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$$

$$c) \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

$$d) \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha.$$

$$e) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Tính

$$a) \quad 2^{-4}.$$

$$b) \quad 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}.$$

$$c) \quad (-5)^{-1}.$$

$$d) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}.$$

$$e) \quad 2^{-3}.$$

$$f) \quad \frac{1}{2^{-3}}.$$

$$g) \quad \left(\frac{1}{2^{-3}}\right)^{-2}.$$

$$h) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{3^{-2}}\right)^{-2}.$$

Bài tập 2. Tìm điều kiện của a để biểu thức sau có nghĩa

$$a) \quad \frac{1}{a-2}.$$

$$b) \quad \frac{1}{(2a+1)^2}.$$

$$c) \quad (2a+3)^{-2}.$$

$$d) \quad (a^2 - 3a + 2)^{-5}.$$

Bài tập 3. Tính giá trị biểu thức

$$a) \quad \text{Cho } 4^\alpha + 4^{-\alpha} = 1. \text{ Tính } M = 2^\alpha + 2^{-\alpha}.$$

$$b) \quad \text{Cho } 25^\alpha + 25^{-\alpha} = 1. \text{ Tính } N = 5^\alpha + 5^{-\alpha}.$$

$$c) \quad \text{Cho } 9^\alpha + \frac{1}{9^\alpha} = 2. \text{ Tính } 3^\alpha + \frac{1}{3^\alpha}.$$

$$d) \quad \text{Cho } 9^\alpha + 9^{-\alpha} = 7. \text{ Tính } M = 3^{3\alpha} + 3^{-3\alpha}.$$

Bài tập 4. Thực hiện phép tính

$$a) \quad 2^{-4}.$$

$$b) \quad 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}.$$

$$c) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : (\sqrt{3})^0.$$

$$d) \quad (-5)^{-1}.$$

$$e) \quad 2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}.$$

$$f) \quad 6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : 2^{-2}.$$

$$g) \quad (2^2)^3.$$

$$h) \quad \left(\frac{1}{2^2}\right)^3.$$

Bài tập 5. Thực hiện phép tính

$$a) \quad \sqrt[4]{(3-\pi)^4}.$$

$$b) \quad \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{-4}.$$

$$c) \quad \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}.$$

$$d) \quad \sqrt[4]{\frac{1}{16}}.$$

$$e) \quad (\sqrt[6]{8})^2.$$

$$f) \quad \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}.$$

$$g) \quad 25^{\frac{1}{2}}.$$

$$h) \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

$$i) \quad \left(\frac{36}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$j) \quad 100^{1,5}.$$

$$k) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0.$$

$$l) \quad \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Bài tập 6. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số với số mũ hữu tỷ

$$a) \quad \sqrt{2^3}.$$

$$b) \quad \sqrt[5]{\frac{1}{27}}.$$

$$c) \quad 2\sqrt[4]{81}.$$

$$d) \quad (\sqrt[5]{a})^4 \quad (a > 0).$$

$$e) \quad \sqrt[3]{x}.$$

$$f) \quad \sqrt{x^3} \cdot x \geq 0.$$

$$g) \quad \sqrt[5]{x^2}.$$

$$h) \quad \sqrt[6]{\frac{1}{x^3}} \quad (x > 0).$$

Bài tập 7. Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa $(a > 0)$

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sqrt[3]{a\sqrt{a}}. & \text{b)} \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}} : \sqrt[6]{a^{-1}}. & \text{c)} a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}}. & \text{d)} \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}}}. \\ \text{e)} 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3}. & \text{f)} \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}. & \text{g)} \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}}. \end{array}$$

Bài tập 8. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số với số mũ hữu tỷ

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}, x > 0. & \text{b)} \sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}. & \text{c)} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[2]{\frac{2}{3}}}. \end{array}$$

Bài tập 9. Rút gọn biểu thức

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}}. & \text{b)} \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2. \\ \text{c)} \frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}. & \text{d)} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}. \end{array}$$

Bài tập 10. Rút gọn các biểu thức sau ($a > 0, b > 0$)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}}. & \text{b)} a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}}. & \text{c)} \left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}} \right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} \right). \end{array}$$

Bài tập 11. Thực hiện phép tính

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (0,5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}. & \text{b)} 2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}. & \text{c)} 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}. \\ \text{d)} 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16} \right)^{-0,75} - 25^{0,5}. & \text{e)} (0,5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}. & \text{f)} 2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}. \\ \text{g)} 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}. & \text{h)} \sqrt[3]{27^2} + \sqrt[4]{\frac{1}{16}} - \sqrt{25}. \end{array}$$

Bài tập 12. Rút gọn biểu thức

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}. & \text{b)} a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a} \right)^{\sqrt{2}-1}. & \text{c)} a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2}. \\ \text{d)} a^{\pi \sqrt[4]{a^2}} : a^{4\pi}. & \text{e)} \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}. & \text{f)} \left(\frac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}. \\ \text{g)} \frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1. & \text{h)} \frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}. & \text{i)} (x^{\sqrt{2}} y)^{\sqrt{2}} (9y^{-\sqrt{2}}). \end{array}$$

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 13. Rút gọn các biểu thức sau

$$\begin{array}{ll} \text{a)} A = \frac{(-3)^2 \cdot (-15)^6 \cdot 8^4}{9^2 \cdot (-5)^6 \cdot (-6)^4}. & \text{b)} B = 4^{\frac{3}{2}} + 8^{\frac{2}{3}}. \\ \text{c)} C = \left(32^{\frac{3}{2}} \right)^{-\frac{2}{5}}. & \text{d)} D = \frac{(-18)^7 \cdot 2^4 \cdot (-50)^3}{(-25)^4 \cdot (-4)^5}. \\ \text{e)} E = \frac{125^6 \cdot (-16)^3 \cdot (-2)^3}{25^3 \cdot [(-5)^2]^4}. & \text{f)} F = \left(4^{\frac{1}{3}} - 10^{\frac{1}{3}} + 25^{\frac{1}{3}} \right) \left(2^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{1}{3}} \right). \\ \text{g)} G = \frac{\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[4]{64} \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}} \right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{32}}}. & \text{h)} H = \frac{\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt{12}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt{6}}. \end{array}$$

Bài tập 14. Rút gọn biểu thức

$$a) \sqrt{(a^\pi + b^\pi)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi}.$$

$$b) (0,001)^{\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2.$$

$$c) (a - 2 + a^{-1})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}).$$

$$d) (\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1)(\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1).$$

Bài tập 15. Rút gọn biểu thức

$$a) A = \left(\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} \right)^2.$$

$$b) B = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right) \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Bài tập 16. So sánh các cặp số

$$a) \sqrt{2} \text{ và } \sqrt{3}.$$

$$b) 7^{30} \text{ và } 4^{40}.$$

$$c) 2^{300} \text{ và } 3^{200}.$$

$$d) 3^{600} \text{ và } 5^{400}.$$

$$e) 4^{-\sqrt{3}} \text{ và } 4^{-\sqrt{2}}.$$

$$f) 2^{\sqrt{3}} \text{ và } 2^{1,7}.$$

$$g) 2^{-2} \text{ và } 1.$$

$$h) (0,013)^{-1} \text{ và } 1.$$

Bài tập 17. So sánh các cặp số

$$a) \sqrt[3]{10} \text{ và } \sqrt[3]{20}.$$

$$b) \sqrt[3]{5} \text{ và } \sqrt[3]{7}.$$

$$c) \sqrt{17} \text{ và } \sqrt[3]{28}.$$

$$d) \sqrt[4]{13} \text{ và } \sqrt[5]{23}.$$

Bài tập 18. Biết rằng $4^\alpha = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) 16^\alpha + 16^{-\alpha}.$$

$$b) (2^\alpha + 2^{-\alpha})^2.$$

Bài tập 19. Cho $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ và $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$. Tính $M = (a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1}$

Bài tập 20. Cho $a = (5 + 2\sqrt{6})^{-1}$ và $b = (5 - 2\sqrt{6})^{-1}$. Tính $M = (a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1}$

Bài tập 21. Cho $f(x) = \frac{25^x}{25^x + 5}$. Tính $f(2024) + f(-2023)$.

Bài tập 22. Trong khoa học, người ta thường phải ghi các số rất lớn hoặc rất bé. Để tránh phải viết và đếm quá nhiều chữ số 0, người ta quy ước cách ghi các số dưới dạng $A \cdot 10^m$, trong đó $1 \leq A \leq 10$ và m là số nguyên.

Khi một số được ghi dưới dạng này, ta nói nó được ghi dưới dạng kí hiệu khoa học. Chẳng hạn, khoảng cách 149 600,000 km từ Trái Đất đến Mặt Trời được ghi dưới dạng kí hiệu khoa học là $1,496 \cdot 10^8$ km.

Ghi các đại lượng sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

a) Vận tốc ánh sáng trong chân không là 299 790 000 m/s;

b) Khối lượng nguyên tử của oxygen là 0,000 000 000 000 000 000 000 026 57 kg.

Bài tập 23. Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.

a) Tại độ sâu 1 m, cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0 ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 2 m gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu 10 m? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.

Bài tập 24. Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1 m^2 và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Đồng xu 5 000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5 000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

Bài tập 25. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

6.2 Phép tính logarit

6.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 6.5. Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Hệ quả 6.1. Biểu thức $\log_a b$ chỉ có nghĩa khi $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$. Từ định nghĩa logarit, ta có:

- $\log_a 1 = 0;$ (1)
- $\log_a a = 1;$ (2)
- $\log_a a^b = b;$ (3)
- $a^{\log_a b} = b.$ (4)

Hai công thức (3) và (4) cho thấy phép lấy logarit và phép nâng lên lũy thừa là hai phép toán ngược nhau.

6.2.2 Logarit thập phân & logarit tự nhiên

Định nghĩa 6.6. Logarit thập phân và logarit tự nhiên

- logarit cơ số 10 được gọi là **logarit thập phân**. Ta viết $\log N$ hoặc $\lg N$ thay cho $\log_{10} N$.
- logarit cơ số e còn được gọi là **logarit tự nhiên**. Ta viết $\ln N$ thay cho $\log_e N$.

❖ BÀI TẬP ❖

TÍNH LOGARIT

Bài tập 1. Tìm logarit theo cơ số 3 của các số 3; 81; $1; \frac{1}{9}; \sqrt[3]{3}; \frac{1}{3\sqrt{3}}; 5$.

Bài tập 2. Tính giá trị các biểu thức

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $\log_2 \frac{1}{4}.$ | b) $\log_3 \sqrt[3]{3}.$ | c) $\log_{\frac{1}{2}} 8.$ | d) $\log_3 9.$ |
| e) $\log_2 \frac{1}{8}.$ | f) $\log_2 8.$ | g) $\log_{\frac{1}{5}} 125.$ | h) $\log_{0,5} \frac{1}{2}.$ |
| i) $\log_{2\sqrt{2}} 8.$ | j) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}.$ | | |

Bài tập 3. Tính giá trị các biểu thức

- | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| a) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt[5]{2}.$ | b) $\log_a a^2.$ | c) $\log_y y^3.$ | d) $\log_a \sqrt[3]{a}.$ |
| e) $\log_{\frac{1}{a^3}} a^3.$ | f) $\log_{a^4} a^{\frac{1}{3}}.$ | g) $\log_{\frac{1}{a}} a^7.$ | h) $\log_{\frac{1}{a^2}} a^6.$ |

Bài tập 4. Tính giá trị các biểu thức:

- | | | | |
|---------------------------------|---|--|---|
| a) $a^{\log_a 2}.$ | b) $3^{\log_3 18}.$ | c) $9^{\log_3 5}.$ | d) $(5^{\log_5 3})^2.$ |
| e) $3^{5\log_3 2}.$ | f) $4^{\log_2 3}.$ | g) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}.$ | h) $4^{\log_8 27}.$ |
| i) $25^{\frac{1}{2}\log_5 10}.$ | j) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5}.$ | k) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2}.$ | l) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{4}{3}} 3}.$ |
| m) $a^{\log_{\sqrt{a}} 5}.$ | n) $a^{4\log_a 2 \cdot 5}.$ | o) $a^{\frac{1}{3}\log_{\sqrt{a}} 5^3}.$ | |

Bài tập 5. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa

- | | | | |
|----------------------|----------------------------|--------------------|----------------------------|
| a) $\log_3(1 - 2x).$ | b) $\log_3(x^2 - 3x + 2).$ | c) $\log_{x+1} 5.$ | d) $\log_x \frac{1}{x-2}.$ |
|----------------------|----------------------------|--------------------|----------------------------|

TÍNH LOGARIT BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Bài tập 6. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ sáu)

- a) $\log_3 5$; b) $\log 0,2$; c) $\ln 10$.

Bài tập 7. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ sáu)

- a) $\log_5 0,5$; b) $\log 25$; c) $\ln \frac{3}{2}$.

6.2.3 Logarit của tích, thương và lũy thừa

Định lý 6.2. Cho các số thực dương a, M, N với $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Hệ quả 6.2. Đặc biệt, với a, M, N dương, $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$
- $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ với $n \in \mathbb{N}^*$

BÀI TẬP

Bài tập 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12$; b) $\log_3 (9^2 \cdot 3^2)$; c) $\log_5 \sqrt[3]{25}$.
- d) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4}$; e) $\log_2 28 - \log_2 7$; f) $\log \sqrt{1000}$.

Bài tập 9. Thu gọn và tính giá trị của các biểu thức

- a) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$.
- b) $\log \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \log 4 + 4 \log \sqrt{2}$.
- c) $\log 72 - 2 \log \frac{27}{256} + \log \sqrt{108}$.
- d) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21}$
- e) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$
- f) $\sqrt{(\log 5 + 2 \log 2 - \log 50)^2 + 4 \log 5 \cdot (\log 2 + \log 50)}$

Bài tập 10. Trong hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, trong đó $[\text{H}^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

- a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là $0,0001 \text{ mol/L}$. Dung dịch này có tính acid, hay kiềm hay trung tính?
- b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

Bài tập 11. Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn ($A_0 = 1 \mu m$).

- a) Tính độ lớn của trận động đất có biên độ A bằng
- i) $10^{5,1} A_0$; ii) $65\,000 A_0$.
- b) Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P . So sánh độ lớn của hai trận động đất.

6.2.4 Công thức đổi cơ số

Định lý 6.3. Cho các số dương a, b, N với $a \neq 1, b \neq 1$, ta có $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$. Đặc biệt, ta có

- $\log_a N = \frac{1}{\log_N a} \quad (N \neq 1);$
- $\log_a^\alpha N = \frac{1}{\alpha} \log_a N \quad (\alpha \neq 0).$

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 12. Tính giá trị các biểu thức

- a) $\log_9 27;$ b) $\log_8 16;$ c) $\log_{\sqrt{2}} 8;$ d) $\log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4}.$
- e) $\frac{\frac{1}{25}}{\log_9 \frac{1}{5}}.$ f) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}.$ g) $\frac{\log_3 \sqrt{16}}{\log_3 4}.$ h) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$
- i) $\frac{\log_3 \sqrt{16}}{\log_3 4}.$ j) $2^{1+\log_2 3}.$ k) $25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}.$ l) $25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}.$

Bài tập 13. Tính giá trị các biểu thức

- a) $2^{1+\log_2 3}.$ b) $8^{1-\log_2 3}.$ c) $25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}.$ d) $25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}.$
- e) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}.$ f) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}.$ g) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}.$ h) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}.$

Bài tập 14. Rút gọn biểu thức

- a) $\log_3 5 \cdot \log_5 7.$ b) $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_4 10.$ c) $\log_2 \sqrt{5} \cdot \log_5 7.$
- d) $\log_3 \sqrt{16} \cdot \log_2 3.$ e) $\log_3 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_{\sqrt{5}} 2.$ f) $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_7 3 \cdot \log_5 7.$

Bài tập 15. Rút gọn biểu thức

- a) $1 + \log_2 3.$ b) $1 - \log_2 3.$ c) $\frac{1}{\log_9 \frac{1}{5}}.$
- d) $\frac{\frac{1}{25}}{\log_9 \frac{1}{3}}.$ e) $2\log_3 2 + 4\log_{81} 2.$ f) $\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5.$
- g) $\log_3 36 \cdot \log_6 3.$ h) $\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81.$ i) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}.$
- j) $\log_3 \sqrt{16} \cdot \log_4 3.$ k) $\log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2.$ l) $\log_3 2 \cdot \log_4 5 \cdot \log_{49} 9 \cdot \log_5 7.$

Bài tập 16. Thực hiện phép tính sau

- a) $A = \log_2 4 \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2.$ b) $B = \log_5 \frac{1}{25} \cdot \log_{27} 9.$ c) $C = \log_a \sqrt[3]{\sqrt{a}}.$ d) $D = 4^{\log_2 3} + 9^{\log_{\sqrt{3}} 2}.$
- e) $E = \log_{2\sqrt{2}} 8.$ f) $F = 27^{\log_9 2} + 4^{\log_8 27}.$ g) $G = \frac{\log_{a^3} a \cdot \log_{a^4} a^{\frac{1}{3}}}{\log_{\frac{1}{a}} a^7}.$ h) $H = \log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2.$

Bài tập 17. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $\log_2 16;$ b) $\log_3 27;$ c) $\log 1000;$ d) $9^{\log_3 12}.$
- e) $\log_6 9 + \log_6 4;$ f) $\log_5 2 - \log_5 50;$ g) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2}\log_3 15.$ h) $\log_2 9 \cdot \log_3 4;$
- i) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}};$ j) $\log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4;$ k) $\log_{\frac{1}{4}} 8;$ l) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8.$

Bài tập 18. Thu gọn và tính giá trị của các biểu thức

a) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$.

b) $\log \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \log 4 + 4 \log \sqrt{2}$.

c) $\log 72 - 2 \log \frac{27}{256} + \log \sqrt{108}$.

d) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21}$.

e) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$.

f) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}$.

g) $\sqrt{(\log 5 + 2 \log 2 - \log 50)^2 + 4 \log 5 \cdot (\log 2 + \log 50)}$.

Bài tập 19. Biểu diễn logarit thông qua các giá trị đã biết

a) Cho $\log_7 2 = a$. Tính $\log_{\frac{1}{2}} 28$ theo a .

b) Cho $\log_a b = \sqrt{13}$. Tính $\log_{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{ab^2}$.

c) Cho $\log_{25} 7 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$ theo a, b .

d) Cho $\log_3 = a$; $\log 2 = b$. Tính $\log_{125} 30$ theo a, b .

e) Cho $\log_{30} 3 = a$; $\log_{30} 5 = b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo a, b .

f) Cho $\log_{14} 7 = a$; $\log_{14} 5 = b$. Tính $\log_{35} 28$ theo a, b .

g) Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. Biểu thị $\log_9 10$ theo a và b .

h) Đặt $\log_3 2 = a$, $\log_3 7 = b$. Biểu thị $\log_{12} 21$ theo a và b .

Bài tập 20. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số hàng thứ tư)

a) $\log_3 15$;

b) $\log 8 - \log 3$;

c) $3 \ln 2$;

d) $2 \log 3$.

Bài tập 21.

a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L. Tính nồng độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính pH của dung dịch đó.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 22. Hãy biểu diễn các số sau qua cơ số a, b

a) $\log 64$ với $a = \log_4 125$.

b) $\log_4 1250$ với $a = \log_2 5$.

c) $\log_{25} 15$ với $a = \log_{15} 3$.

d) $\log_6 16$ với $a = \log_{12} 27$.

e) $\log_2 90$ với $a = \log_2 3, b = \log_2 5$.

f) $\log_3 \frac{15}{4}$ với $a = \log_3 2, b = \log_3 5$.

g) $\log_9 20$ với $a = \log 2, b = \log 3$.

h) $\log_{25} 24$ với $a = \log_6 15, b = \log_{12} 18$.

Bài tập 23. Chứng minh

a) $\log_{ax} bx = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$.

b) $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^n} x} = \frac{n(n+1)}{2 \log_a x}$.

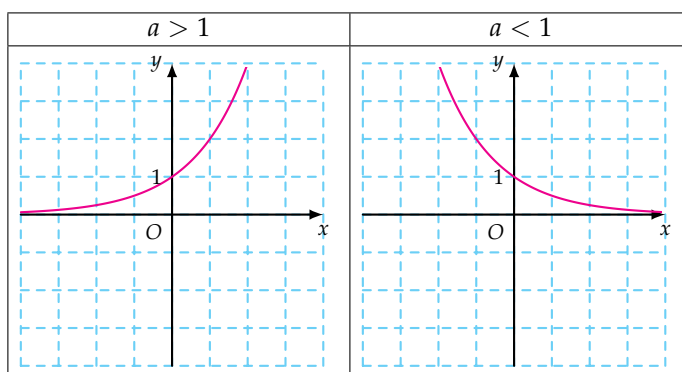
Bài tập 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, tính tổng $S = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

6.3 Hàm số mũ

Định nghĩa 6.7. Cho số dương a khác 1. Hàm số cho tương ứng mỗi số thực x với số thực a^x được gọi là **hàm số mũ cơ số a** , kí hiệu $y = a^x$.

Tính chất 6.3. Hàm số $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ có

- Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị là $T = (0; +\infty)$.
- Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:
 - Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.
 - Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.
- Đồ thị của hàm số
 - Cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$, đi qua điểm $(1; a)$.
 - Nằm phía trên trục hoành.



❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số mũ? Chỉ ra cơ số của nó.

- a) $y = 3^{\frac{x}{2}}$. b) $y = x^{-4}$. c) $y = 4^{-x}$. d) $y = \sqrt{2^x}$.

Bài tập 2. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

- a) $y = 2^x$. b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. c) $y = 4^x$. d) $y = 4^{-x}$.

Bài tập 3. Tìm a để các hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$

- a) $y = (a - 1)^x$; b) $y = (1 - 2a)^x$; c) $y = (a^2 + a - 1)^x$; d) $y = (a^2 + 1)^x$.

Bài tập 4. Tìm b để các hàm số sau nghịch biến trên $\mathbb{R}$

- a) $y = (b + 1)^x$; b) $y = (1 + 3b)^x$; c) $y = (b^2 + b - 1)^x$; d) $y = (b^2 + 2)^x$.

Bài tập 5. Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

- a) $1,4^2$ và $1,4^{1,8}$. b) $0,3^2$ và $0,3^5$. c) $0,9^{-1,2}$ và $0,9^{-0,8}$. d) $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[5]{4}$.
 e) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$. f) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$. g) $\pi^{2,3}$ và π^2 . h) $\pi^{-2,3}$ và 1.

Bài tập 6. Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số là 1,05%/năm. Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức

$$P(t) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^t \text{ (tỉ người)}. \quad (*)$$

Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7.)

(nguồn: <http://www.worldmeters.info/world-population>)

Chú ý: Với giả thiết tốc độ tăng dân số 1,05%/năm không đổi, công thức (*) được áp dụng để tính dân số thế giới tại thời điểm bất kì sau năm 2020. Chẳng hạn, dân số thế giới tại thời điểm ngày 1 tháng 1 năm 2022 (ứng với $t = 1,5$) là

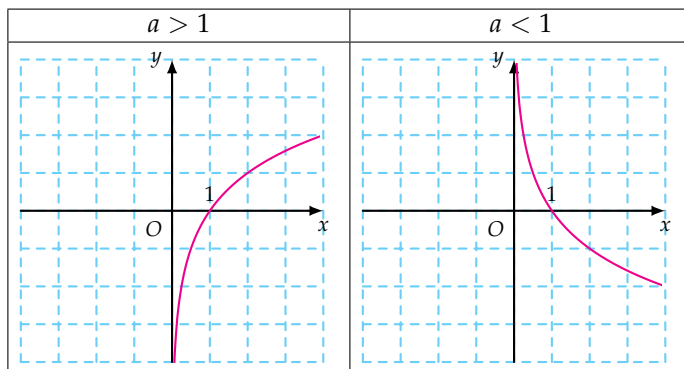
$$P(1,5) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{1,5} \approx 7,918 \text{ (tỉ người)}.$$

6.4 Hàm số logarit

Định nghĩa 6.8. Cho số dương a khác 1. Hàm số cho tương ứng mỗi số thực dương x với số thực $\log_a x$ được gọi là **hàm số logarit cơ số a** , kí hiệu $y = \log_a x$.

Tính chất 6.4. Hàm số $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ có

- Tập xác định là $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị là $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.
- Sự biến thiên:
 - Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$.
 - Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$.
- Đồ thị của hàm số
 - Cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, đi qua điểm $(a; 1)$.
 - Nằm bên phải trục tung.



❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số logarit? Chỉ ra cơ số của nó.

- a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$. b) $y = -\log_3 x$. c) $y = x \log_2 3$. d) $y = x \log 3$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định của các hàm số:

- a) $y = \log_2(3 - 2x)$. b) $y = \log_5(\sqrt{x})$. c) $y = \log_5 \frac{1}{x}$. d) $y = \log_3(x^2 + 4x)$.

Bài tập 3. Vẽ đồ thị các hàm số:

- a) $y = \log_2 x$. b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. c) $y = \log x$. d) $y = \log_{0,2} x$.

Bài tập 4. So sánh các cặp số sau:

- a) $\log_2 3$ và $\log_2 4$. b) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ và 0. c) $\log_3 7$ và $3 \log_3 2$. d) $2 \log_{0,4} 5$ và $3 \log_{0,4} 3$.
- e) $\log_{\pi} 0,8$ và $\log_{\pi} 1,2$. f) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$. g) $\log_{\sqrt{2}} 3$ và $\log_{\sqrt{2}} 2,1$. h) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2}$ và $\log_{0,3} 0,1$.

Bài tập 5. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, $a > 0$ là hằng số và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <http://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

- a) Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.
- b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .
- c) Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Bài tập 6. Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng ki-lô-mét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <http://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6>)

- a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu ki-lô-mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Bài tập 7. Trong âm học, mức cường độ âm được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ (dB) (dB là đơn vị mức cường độ âm, đọc là đề-xi-ben), trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ là cường độ âm chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được).

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52,53)

- a) Mức cường độ âm L thấp nhất mà tai người có thể nghe được là bao nhiêu?
- b) Cuộc trò chuyện có cường độ âm $10^{-9} W/m^2$ thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
- c) Cường độ âm tại một khu văn phòng nằm trong miền từ $10^{-7} W/m^2$ đến $5 \cdot 10^{-6} W/m^2$ (tức là $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$). Mức cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

6.5 Phương trình mũ và logarit

6.5.1 Phương trình mũ

Định nghĩa 6.9. Phương trình dạng $a^x = b$, trong đó a và b là những số cho trước, $a > 0, a \neq 1$, được gọi là **phương trình mũ cơ bản**.

Định lý 6.4. Cho phương trình $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$)

- Nếu $b > 0$ thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Hệ quả 6.3.

- Nếu $b = a^\alpha$ thì ta có $a^x = a^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$.
- Tổng quát hơn, $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

❖ BÀI TẬP ❖

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2^x = \frac{1}{8}. & \text{b) } 5 \cdot 10^x = 1. & \text{c) } \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}. \\ \text{d) } 3^{x+2} = \sqrt[3]{9}. & \text{e) } 2 \cdot 10^{2x} = 30. & \text{f) } 4^{2x} = 8^{2x-1}. \end{array}$$

Bài tập 2. Giải các phương trình

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2^x = 8. & \text{b) } 3^{1-2x} = \frac{1}{9}. & \text{c) } 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}. \\ \text{d) } 32^{-x} = 8^{2(x-3)}. & \text{e) } 6^{|4x-6|} = 36^{3x-4}. & \text{f) } (3-2\sqrt{2})^{4x} = 3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

Bài tập 3. Giải các phương trình

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0. & \text{b) } 25^x - 6 \cdot 5^{x+1} + 125 = 0. & \text{c) } 5^{2x} - 6 \cdot 5^{x+1} + 125 = 0. \\ \text{d) } 1 - 3 \cdot 2^{1-x} + 2^{3-2x} = 0. & \text{e) } 5^{x-1} + 5^{3-x} = 26. & \text{f) } 3^{2x+8} - 4 \cdot 3^{x+5} + 27 = 0. \end{array}$$

Bài tập 4. Giải các phương trình

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 9^{x^2+x-1} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 = 0. & \text{b) } 2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3. & \text{c) } 4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x. \\ \text{d) } 2^{2x+2} + 9^x = 5 \cdot 6^x. & \text{e) } 2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0. & \text{f) } 3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0. \end{array}$$

Bài tập 5. Giải các phương trình

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10. & \text{b) } \left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0. \\ \text{c) } \left(4+\sqrt{7}\right)^x + \left(4-\sqrt{7}\right)^x = 8 \cdot 3^{x-1}. & \text{d) } \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} = 4. \end{array}$$

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH MŨ KHÁC

Bài tập 6. Giải các phương trình

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2^{x+1} + 3^x = 6^x + 2. & \text{b) } 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{2x} = 6 + 2^{3x}. \\ \text{c) } 3^{4x-3} + 3^{x-2} = 9 + 3^{5x-7}. & \text{d) } 5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x. \end{array}$$

Bài tập 7. Giải các phương trình

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5^{x+1} + 12^{x+1} = 13^{x+1}. & \text{b) } 9 \cdot 3^x - 7^x = 5 \cdot 4^x. \\ \text{c) } x^2 - (3-2^x)x + 2(1-2^x) = 0. & \text{d) } 3^{2x} + 2(x-1)3^x - 2x + 1 = 0. \end{array}$$

Bài tập 8. Giải các phương trình

a) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$.

b) $2^{2x-1} + 3^{2x} + 5^{2x+1} = 2^x + 3^{x+1} + 5^{x+2}$.

c) $2^{x^2-3x+3} + 2^{x-1} = 2 + 2^{(x-1)^2}$.

d) $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$.

e) $(2 + \sqrt{3})^x + x(2 - \sqrt{3})^x = 4^x$.

f) $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 2^x$.

Bài tập 9. Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là M_0 (g) thì khối lượng carbon-14 còn lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g), trong đó $T = 5730$ (năm) là chu kỳ bán rã của carbon-14. Nghiên cứu hoá thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hoá thạch là $5 \cdot 10^{-13}$ g. Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể lúc sinh vật chết là $M_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}$ (g). Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hàng trăm.)

Bài tập 10. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kỳ bán rã của chất. Đồng vị plutonium-234 có chu kỳ bán rã là 9 giờ.

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium#section=AtomicMass-Half-Life-and-Deca>)

Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là

- a) 100 g?
- b) 50 g?
- c) 20 g?

6.5.2 Phương trình lôgarit

Định nghĩa 6.10. Phương trình dạng $\log_a x = b$, trong đó a, b là những số cho trước, $a > 0, a \neq 1$, được gọi là **phương trình lôgarit cơ bản**.

Định lý 6.5. Phương trình $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Lưu ý 6.4. Tổng quát, xét phương trình dạng

$$\log_a u(x) = \log_a v(x) \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (1)$$

Để giải phương trình (1), trước hết cần đặt điều kiện có nghĩa: $u(x) > 0$ và $v(x) > 0$. Khi đó, (1) được biến đổi thành phương trình

$$u(x) = v(x). \quad (2)$$

Sau khi giải phương trình (2), ta cần kiểm tra sự thoả mãn điều kiện. Nghiệm của phương trình (1) là những nghiệm của (2) thoả mãn điều kiện.

❖ BÀI TẬP ❖
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỞ
Bài tập 11. Giải phương trình

a) $\log_2 (x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}} (x - 1)$.

b) $\log_7 \frac{x+4}{21} = \log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{3x-3}$.

c) $\log (x^2 + 2x - 3) + \log \frac{x+3}{x-1} = 0$.

d) $\log_2 (x-1)^2 = 2 \log_2 (x^3 + x + 1)$.

e) $\log_5 x = \log_5 (x+6) - \log_5 (x+2)$.

f) $\log_4 (x+3) - \log_2 (x+7) + 2 = 0$.

g) $\log_5 x + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = 0.$

h) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11.$

i) $\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_8 x = \frac{5}{3}.$

j) $\log_3 (x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}} (2x-1) = 2.$

Bài tập 12. Giải phương trình

a) $\frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x + 4 = \log_2 (3-x).$

b) $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} (x+3) + \frac{1}{4} \log_4 (x-1)^8 = \log_2 (4x).$

c) $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} (x-1) - \log_{\frac{1}{2}} (x+5) = \log_4 (3x+1)^2.$

d) $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} 4 - x + \log_8 (4+x)^3.$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN SỐ PHỤ**Bài tập 13.** Giải các phương trình

a) $\log_{\frac{1}{4}} x^2 + \log_2^2 x = 2.$

d) $\frac{4}{\log_4 x} - \log_2 \sqrt{x} = 3.$

b) $\log_9^2 x - \log_3 x - 3 = 0.$

e) $2(\log_2 x + 1) \log_4 x + \log_2 \frac{1}{4} = 0.$

c) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$

f) $\log_2^2 (x+1) - 6 \log_2 \sqrt{(x+1)} + 2 = 0.$

Bài tập 14. Giải phương trình

a) $\log_x^2 + \sqrt{10 \log_2 x} = 9.$

d) $\log_{\frac{1}{2}}^2 (4x) + \log_2 x = 8 \log_2 \frac{x^2}{2}.$

b) $\log_2^2 (x-1)^2 + \log_2 (x-1)^3 = 7.$

e) $\log_2 2^x - 1) \log_2 (2^{x+1} - 2) = 12.$

c) $\log^4 (x-1)^2 + \log^2 x - 1)^3 = 7.$

f) $\log_2 (5^x - 1) \log_2 (2.5^x - 2) = 2.$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HÓA**Bài tập 15.** Giải phương trình

a) $2^{x^2-4} \cdot 5^{2-x} = 1.$

b) $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36.$

c) $3^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}.$

d) $2^{3^x} = 3^{2^x}.$

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT KHÁC**Bài tập 16.** Giải các phương trình

a) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{10} x.$

b) $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x + \log_6 x.$

Bài tập 17. Giải phương trình

a) $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50.$

c) $x^{\log 9} - 4.9^{\log x} + 3 = 0.$

b) $x^{2+\log_2^2 x} = 8.$

d) $5^{2(\log_5 2+x)} - 2 = 5^{x+\log_5 2}.$

Bài tập 18. Giải các phương trình

a) $1 + \log_2 (9^x - 6) = \log_2 (4 \cdot 3^x - 6).$

c) $\log_2 (25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2 5^{x+3} + 1.$

b) $\log (6 \cdot 5^x + 25 \cdot 20^x) = x + \log 25.$

d) $x(\log 5 - 1) = \log (2^x + 1) - \log 6.$

Bài tập 19. Giải các phương trình

a) $\log_3 x + 5 \log_5 x = 5 + \log_3 x \log_5 x.$

b) $2 \log_2 x + \log_7 x = 2 + \log_3 x \log_7 x.$

Bài tập 20. Giải các phương trình

a) $\log(x-2) = -x^2 + 2x + 3.$

c) $\log(x^2 - 6x + 5) + \log(x-1) + 6 - x = 0.$

b) $x + \log(x^2 - x - 6) = 4 + \log(x+2).$

d) $\log(x^2 - x - 12) + x = \log(x+3) + 5.$

Bài tập 21. Giải các phương trình

a) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2(x-3) = 0.$

b) $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0.$

Bài tập 22. Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

6.6 Bất phương trình mũ và lôgarit

6.6.1 Bất phương trình mũ

Định nghĩa 6.11. *Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$), với a, b là những số cho trước, $a > 0, a \neq 1$.*

Định lý 6.6. *Nghiệm của bất phương trình mũ $a^x > b$*

- Nếu $b \leq 0$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của bất phương trình.
- Nếu $b > 0$ thì:
 - Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$;
 - Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Lưu ý 6.5.

- Tương tự như trên, ta nhận được kết quả về nghiệm của mỗi bất phương trình $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$ (các bất phương trình $a^x < b, a^x \leq b$ vô nghiệm nếu $b \leq 0$).
- Nếu $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.
Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

6.6.2 Bất phương trình lôgarit

Định nghĩa 6.12. *Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$), với a, b là những số cho trước, $a > 0, a \neq 1$.*

Định lý 6.7. *Nghiệm bất phương trình $\log_a x > b$ (*)*

- Với $a > 1$, nghiệm của (*) là $x > a^b$.
- Với $0 < a < 1$, nghiệm của (*) là $0 < x < a^b$.

Định lý 6.8.

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) > v(x) > 0$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow 0 < u(x) < v(x)$.

❖ BÀI TẬP ❖

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài tập 1. Giải các bất phương trình sau

- a) $10^x < 0,001$. b) $0,4^x > 2$. c) $2^x > 16$. d) $2^x > 8$.
- e) $3^{2x} > 1$. f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \cdot 4^{2x}$. g) $0,1^x \leq 0,001$. h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^x$.

Bài tập 2. Giải các bất phương trình

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$. b) $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0$.
- c) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x \leq 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$. d) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} \leq 0$.

Bài tập 3. Giải các bất phương trình

- a) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x \leq 3^x + 3^{x-1}$. b) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} \geq 3^{x+4} - 5^{x+3}$.
- c) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$. d) $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x \leq 0$.
- e) $4^{-x^2} - 5 \cdot 2^{-x^2+3x} + 4^{3x+1} \leq 0$. f) $4x^2 + x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x$.

Bài tập 4. Giải các bất phương trình

a) $2^{2x^2-4x-2} - 16 \cdot 2^{2x-x^2-1} - 2 \leq 0.$

b) $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0.$

c) $\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0.$

d) $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1.$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT**Bài tập 5.** Giải các bất phương trình sau

a) $\log_2(2x - 1) \leq 1.$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(1 - x) > \log_{\frac{1}{2}}(3x + 2).$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) < 2.$

d) $\log_5(x + 2) \leq 1.$

Bài tập 6. Giải các bất phương trình

a) $\log_2 x > 4.$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(1 - 2x) < 1.$

c) $2\log_2(x - 1) > \log_2(5 - x) + 1.$

d) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{x^2 + 6x + 9}{2x + 2} < -\log_7(x + 1).$

e) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0.$

f) $2\log_3(4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2.$

g) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 8) + 2\log_5(x - 4) < 0.$

h) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) + \log_{\sqrt{3}}(5 - x) < 1.$

Bài tập 7. Giải các bất phương trình

a) $3^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} \leq 6.$

b) $5^{(\log_5 x)^2} + x^{\log_5 x} \geq 10.$

Bài tập 8. Giải các bất phương trình

a) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1 + 2x}{1 + x} < -1.$

b) $\log_{\frac{\pi}{4}} [\ln(x^2 - 1)] \leq 0.$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_2 \frac{2x + 3}{x + 1} \right) \geq 0.$

d) $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) \geq 0.$

Bài tập 9. Giải các bất phương trình

a) $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(3^{x+1} - 3) < 6.$

b) $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > 2.$

Bài tập 10. Giải các bất phương trình

a) $(\log_x 8 + \log_4 x^2) \cdot \log_2 \sqrt{2x} \geq 0.$

b) $(4^x - 2 \cdot 2^x - 3) \cdot \log_2 x - 3 > 4^{\frac{x+1}{2}} - 4^x.$

Bài tập 11. Giải các bất phương trình

a) $\frac{3}{\log_2(x + 1)} > \frac{2}{\log_3(x + 1)}$

b) $\frac{1}{\log_2 x} \geq \frac{1}{\log_2 \sqrt{1 + x^2}}$

c) $\frac{1}{\log_4(x^2 + 3x)} < \frac{1}{\log_2(3x - 1)}$

d) $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x + 3)^2 - \log_{\frac{1}{3}}(x + 3)^3}{x + 1} > 0$

Bài tập 12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $4^x + 2^x + m = 0.$ **Bài tập 13.** Tìm các giá trị của m thỏa mãn $3^x + (m - 1) \cdot 2^x + (m - 1) > 0$ **Bài tập 14.** Chứng minh các bất đẳng thức

a) $\ln(1 + x) < x, \forall x > 0.$

b) $e^x > x + 1, (x > 0).$

c) $\tan x > x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

d) $\ln(1 + x) > \frac{x}{x + 1}, (x > 0).$

e) $\frac{2x}{\pi} < \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

f) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, (x \geq 0).$

Bài tập 15. Nước uống đạt tiêu chuẩn phải có độ pH nằm trong khoảng từ 6,5 đến 8,5 (theo Quy chuẩn Việt Nam QCVN 01 : 2009/BYT). Nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng nào?

Bài tập 16. Chất phóng xạ polonium-210 có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}}$ (g).

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium#section=Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay>)

- a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?
- b) Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

Bài tập 17. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ (dB), trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

(Nguồn: Vật lý 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

- a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là 50 dB. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?
- b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ 75 dB đến 90 dB. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

Chương 7

Đạo hàm

7.1 Đạo hàm

7.1.1 Khái niệm

Định nghĩa 7.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn này được gọi là **đạo hàm** của hàm số $f(x)$ tại x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$. Vậy:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

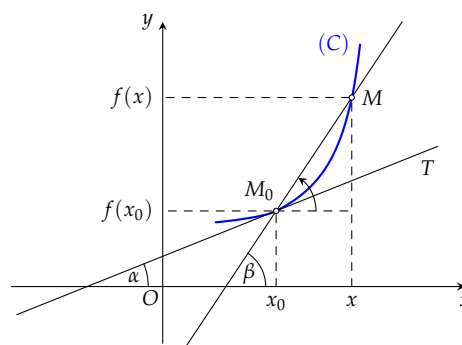
7.1.2 Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .

7.1.3 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ thuộc (C) . Xét $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C) . Đường thẳng M_0M là một cát tuyến của (C) . Hệ số góc của cát tuyến M_0M được tính bởi công thức $k_{M_0M} = \tan \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Khi cho x dần tới x_0 thì M di chuyển trên (C) tới M_0 . Giả sử cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn là M_0T thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0 và M_0 được gọi là tiếp điểm.



Ta có hệ số góc của tiếp tuyến M_0T là

$$k_{M_0T} = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \tan \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Định lý 7.1. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$. Tiếp tuyến M_0T có phương trình là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị $C: y = f(x)$ tại $M(x_0; f(x_0))$. Phương trình này ta sử dụng nhiều trong các bài tập sau này.

Lưu ý 7.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số này có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì ta nói nó có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, kí hiệu y' hoặc $f'(x)$.

Lưu ý 7.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$.

a) Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến tại x_0 . Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó, $x = x_0 + \Delta x$ và

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

b) Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ biểu thị tốc độ thay đổi trung bình của đại lượng y theo đại lượng x trong khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$; còn $f'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi (tức thời) của đại lượng y theo đại lượng x tại điểm x_0 .

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x) = x^2$. Tính $f'(x_0)$ với $x_0 \in \mathbb{R}$.

Bài tập 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = C$ (C là hằng số);

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$.

Bài tập 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$.

Bài tập 4. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau.

a) $f(x) = -x^2$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f(x) = x^3 - 2x$;

d) $f(x) = \frac{4}{x}$.

Bài tập 5. Cho $f(x) = 2x^2 + x + 1$. Tính $f'(2)$?

Bài tập 6. Cho $y = x^3 - 2x + 1$. Tính $y'(1)$?

Bài tập 7. Cho $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Tính $f'(1)$?

7.1.4 Hằng số e

Bài tập 8. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền A triệu đồng (gọi là vốn) với lãi suất $r/\text{năm}$ theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn được cộng gộp vào vốn). Tính tổng số tiền vốn và lãi sau một năm của người gửi nếu kì hạn là

a) Một năm;

b) Một tháng.

Lưu ý: Nếu một năm được chia thành n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) thì lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{n}$.

Bài tập 9. Công thức $T = A \cdot e^{rt}$ được dùng để tính tổng số tiền vốn và lãi mà người gửi nhận được sau thời gian t kể từ thời điểm người đó gửi tiết kiệm A đồng theo thể thức "lãi kép liên tục" với lãi suất $r/\%$ năm. Trong đó, A và T tính theo đồng, t tính theo năm và t có thể nhận giá trị thực bất kì. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của T (làm tròn đến hàng đơn vị) khi $A = 2000000, r = 0,05$ và

a) $t = \frac{1}{4}$;

$$\text{b) } t = \frac{1}{365}.$$

Bài tập 10. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 4%/ năm và theo thể thức lãi kép liên tục. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau

a) 1 ngày;

b) 30 ngày.

(Luôn coi một năm có 365 ngày.)

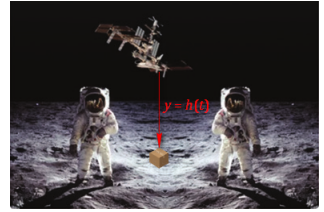
Bài tập 11. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

Bài tập 12. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5%/ năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức

a) Lãi kép với kì hạn 6 tháng;

b) Lãi kép liên tục.

Bài tập 13. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.



7.2 Các quy tắc tính đạo hàm

7.2.1 Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

Định lý 7.2. Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Ta có

a) $(u + v)' = u' + v'$.

b) $(u - v)' = u' - v'$.

c) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.

d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

Hệ quả 7.1.

a) Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C \cdot v)' = C \cdot v'$.

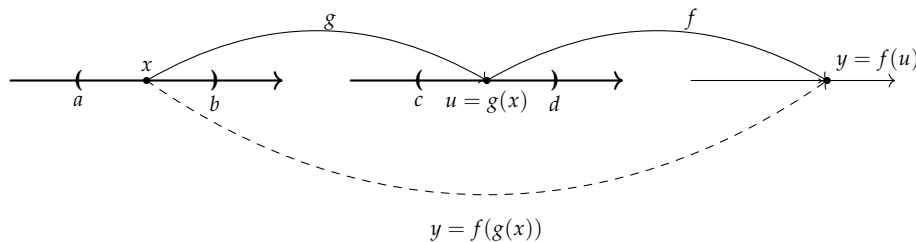
b) Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

7.2.2 Đạo hàm của hàm hợp

Cho $u = g(x)$ là hàm số của x xác định trên khoảng $(a; b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c; d)$. $y = f(u)$ là hàm số của u xác định trên khoảng $(c; d)$ và lấy giá trị trên khoảng $\mathbb{R}$. Ta lập hàm số xác định trên $(a; b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ như sau:

$$x \mapsto f(g(x))$$

Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Định lý 7.3. Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

7.2.3 Đạo hàm của hàm số $y = x^n, n \in \mathbb{N}^*$

Định lý 7.4.

- Hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- Đạo hàm hàm hợp: $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Hãy cho biết hàm số sau là hàm hợp của các hàm số nào

a) $y = (2x + 1)^3$.

b) $y = \cos(x^2 + 1)$.

c) $y = \sqrt{\sin x}$.

d) $y = \ln(x^2 + 3x + 3)$.

e) $y = e^{\sqrt{x}}$.

f) $y = 3^{\sin x}$.

Bài tập 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Bài tập 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^{10}$ tại điểm $x = -1$ và $x = \sqrt[3]{2}$.

Bài tập 4. Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = x^2$.

b) $y = x^2 - 2x + 1$.

c) $y = -x^3 + 3x + 2$.

d) $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

e) $y = x^{-5} + 2x^2 - 6$.

f) $y = \frac{x^4}{2} - \frac{5}{x} + 3$.

Bài tập 5. Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = x(x^2 + 1).$

b) $y = 5x^3(3x - 2).$

c) $y = (x^2 + x)(x^3 - 2).$

d) $y = (x + 1)(x - 2x^4).$

e) $y = x(1 - 2x)^2.$

f) $y = (x^2 - 3x + 5)(x^3 + 2x).$

Bài tập 6. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = (2x - 1)^2.$

b) $y = (3x + 2)^5.$

c) $y = (1 - 5x)^7.$

d) $y = (x^2 + 2)^4.$

e) $y = (2x^2 - 3x + 1)^6.$

f) $y = [(x - 1)(x + 2)]^5.$

Bài tập 7. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{2x}.$

b) $y = \frac{2x + 3}{x - 4}.$

c) $y = \frac{x + 7}{-2x + 1}.$

d) $y = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}.$

e) $y = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}.$

f) $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{2x + 3}.$

g) $y = \frac{1 - 4x + x^2}{x^3}.$

h) $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 4}.$

i) $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{6 - 2x - x^2}.$

7.2.4 Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ **Định lý 7.5.**

- Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
- Đạo hàm hàm số hợp $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$

Bài tập 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}.$ **Bài tập 9.** Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = x\sqrt{2x + 1}.$

b) $y = (x - 3)\sqrt{x^2 + 1}.$

c) $y = (x\sqrt{x} + 1)(x^2 + 2).$

d) $y = x^3 - 4x^2 - \frac{5}{x^3}.$

e) $y = -\frac{x^6}{6} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}.$

f) $y = \sqrt{x} - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + 3x.$

Bài tập 10. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \frac{3x + 2}{\sqrt{x}}.$

b) $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}.$

c) $y = \frac{2x + 3}{x + \sqrt{x}}.$

d) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - \sqrt{x}}.$

Bài tập 11. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \sqrt{\frac{3}{2 - x}}.$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$

c) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

d) $y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{1 - x}.$

e) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x + 1}}.$

f) $y = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{3 - 4x}.$

g) $y = \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 5x + 9}}.$

h) $y = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$

Bài tập 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.

7.2.5 Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Định nghĩa 7.2. Cho số thực α . Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là hàm số lũy thừa (với tập xác định $(0; +\infty)$).

Định lý 7.6.

- Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ còn đúng khi n là số thực, tức là với số thực α bất kì $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($x > 0$).
- Đạo hàm hàm số hợp $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$.

Lưu ý 7.3. Với $\alpha = \frac{1}{2}$, ta nhận được công thức đã biết:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Bài tập 13. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$.

Bài tập 14. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$.

b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x = -\frac{1}{4}$.

Bài tập 15. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = (3x - 1)^2$.

b) $y = (2 - 5x)^6$.

c) $y = (2x - 3)^{-5}$.

d) $y = (4x - \sqrt{x})^2$.

e) $y = \sqrt{4 - 3x}$.

f) $y = \sqrt{x^2 + 5x}$.

g) $y = \sqrt{2 - x^3}$.

h) $y = \sqrt{4 + \sqrt{x}}$.

7.2.6 Đạo hàm của hàm số lượng giác

Định lý 7.7.

- Ta có công thức tính đạo hàm của các hàm số lượng giác như sau:

a) $(\sin x)' = \cos x$.

b) $(\cos x)' = -\sin x$.

c) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

d) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

- Đạo hàm hàm số hợp

a) $(\sin u)' = u' \cos u$.

b) $(\cos u)' = -u' \sin u$.

c) $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} \quad \left(u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

d) $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \quad (u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

❖ BÀI TẬP ❖

TÍNH ĐẠO HÀM

Bài tập 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$.

Bài tập 17. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại $x = \frac{3\pi}{4}$.

Bài tập 18. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \sin(2x + 1)$.

b) $y = \cos(3 - 5x)$.

c) $y = \sin(\sqrt{x})$.

d) $y = \cos(\sqrt{x} + 1)$.

e) $y = \sin \frac{3}{x}$.

f) $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + 5\right)$.

g) $y = \tan(x^2 + 1)$.

h) $y = \cos(\sin x)$.

i) $y = \frac{1}{\sin x}$.

j) $y = \frac{1}{\cos 2x}$.

k) $y = \sin^2 x$.

l) $y = \cos^3 4x$.

Bài tập 19. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \sin(2x)$.

b) $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) $y = \sin(2 \sin x)$.

d) $y = \sin(\cos 3x)$.

e) $y = x \sin x \cdot \cos x$.

f) $y = (2x - \cos x)^3$.

g) $y = (\sin x - \cos x)^4$.

h) $y = (\sin x + 2\sqrt{x})^5$.

i) $y = \sin^2(\cos x)$. j) $y = \sin^2(3x^5 - 4x)$. k) $y = \cos^2 x \cdot \sin^2 x$. l) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Bài tập 20. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \cot \sqrt{x^2 - x + 1}$ b) $y = 3 \sin^2 x + \sqrt{\tan x}$ c) $y = \sin^2 \sqrt{\cos 3x}$ d) $y = \tan^2 \sqrt{x^2 + 1}$

Bài tập 21. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 \sin x}{\cos x}$. b) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$. c) $y = \frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x}$. d) $y = \frac{x \sin x}{x + \tan x}$.

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ ĐẠO HÀM

Bài tập 22. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh $y' - y^2 - 1 = 0$.

Bài tập 23. Chứng minh rằng hàm số:

a) $y = \cot 2x$ thỏa mãn $y' + 2y^2 + 2 = 0$
b) $y = x + \tan 5x$ thỏa mãn $y' - 5(y - x)^2 - 6 = 0$

Bài tập 24. Cho hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \frac{1}{4} \cos 4x$. Chứng minh $f'(x) = g'(x)$.

Bài tập 25. Cho hàm số $f(x) = 2 \cos^2(4x - 1)$. Chứng minh rằng với mọi x ta có $|f'(x)| \leq 8$. Tìm các giá trị của x để đẳng thức xảy ra.

7.2.7 Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Định lý 7.8.

• Ta có công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số lôgarit sau:

a) $(e^x)' = e^x$.	b) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$.
c) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$.	d) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$.
• Đạo hàm hàm số hợp	
a) $(e^u)' = u' e^x$.	b) $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$.
c) $(a^u)' = u' a^u \cdot \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$.	d) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (u > 0, a > 0, a \neq 1)$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 26. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = e^x$ tại $x = 2 \ln 3$. b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2$. c) $y = 9^x$ tại $x = 1$. d) $y = \ln x$ tại $x = \frac{1}{3}$.

Bài tập 27. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 \cdot 3^x$. b) $y = \frac{e^x}{\cos x}$. c) $y = x \cdot \log_2 x$. d) $y = x^3 \cdot e^x$.

Bài tập 28. Tính đạo hàm các hàm số

a) $y = e^{4x-3}$. b) $y = 5^{\cos x}$. c) $y = e^x \cos x$.
d) $y = x \ln x + 1$. e) $y = \log_2 x - 3 \log_3 x$. f) $y = 2^x + 3^{5-x}$.
g) $y = 2^x - \sqrt{e^x}$. h) $y = (x-1)e^{2x}$. i) $y = e^x + e^{-x}$.

Bài tập 29. Tính đạo hàm các hàm số

a) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$. b) $y = (x^2 - 4x + 3) \ln x$. c) $y = 5x^2 - 2^x \cos x$.
d) $y = e^x (\sin x - \cos x)$. e) $y = \frac{x+1}{3^x}$. f) $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$.

Bài tập 30. Tính đạo hàm các hàm số

a) $y = 2x + 1 - \ln(1 - 2x).$

b) $y = \log(x^2 + 1) - \ln 2x.$

c) $y = \log_2 \sqrt{x + 3}.$

d) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

e) $y = \frac{\ln x^2 + 1}{x}.$

f) $y = (3x - 2) \ln^2 x.$

Bài tập 31. Tính đạo hàm các hàm số

a) $y = (\cos x + \sin x)e^{-2x}.$

b) $y = x \ln \frac{1}{1+x}.$

c) $y = \frac{1}{e^x} + \sqrt{e^x} - \frac{4}{\sqrt[3]{e^x}}.$

TIẾP TUYẾN**Bài tập 32.** Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2; 4) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình của tiếp tuyến đó.**Bài tập 33.** Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ và điểm $M(1; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.**Bài tập 34.** Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A.**Bài tập 35.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$.a) Tại điểm $(-1; 1).$

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

Bài tập 36. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ (C)a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(0; 1).$ b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(0; 1).$ **Bài tập 37.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) qua điểm A biết:a) (C): $y = x^2$ và $A(0; -1).$ b) (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$ và $A(3; 2).$ c) (C): $y = x^4 - 3x^2 - 4$ và $A(0; -4).$ d) (C): $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ và $A(3; 2).$ **Bài tập 38.** Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) qua điểm $M(-1; -9).$ **Bài tập 39.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp saua) (C): $y = x^2 - 3x$ và tiếp tuyến song song với $\Delta: y = x + 1.$ b) (C): $y = \frac{1}{x}$ và tiếp tuyến song song với $\Delta: y = -4x + 2.$ c) (C): $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ và tiếp tuyến song song với $\Delta: y = \frac{1}{2}x + 3.$ **Bài tập 40.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp saua) (C): $y = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2$ và tiếp tuyến vuông góc với $\Delta: y = \frac{1}{4}x + 3.$ b) (C): $y = \frac{x - 3}{x + 1}$ và tiếp tuyến vuông góc với $\Delta: x + 2y - 4 = 0.$ c) (C): $y = \frac{x + 2}{x + 3}$ và tiếp tuyến vuông góc với $\Delta: x + 4y - 1 = 0.$ **Bài tập 41.** Cho $(C_m): y = x^3 + mx - m + 1$, định m để:a) Hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại $A(1; 2)$ bằng 5.b) Tiếp tuyến của (C_m) tại A vuông góc với đường thẳng $(\Delta): y = 4x - 1.$ **Bài tập 42.** Cho (C): $y = \frac{2x^2 + 5x}{x + 2}$, M là điểm trên (C). Tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm M cắt 2 đường thẳng $(d_1): x + 2 = 0$, $(d_2): 2x - y + 1 = 0$ lần lượt tại A và B. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn AB.**Bài tập 43.** Cho (C): $y = x^3 - 3x^2 + 1.$

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ là 1.

b) Tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến của (C).

Bài tập 44. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

Bài tập 45. Tìm một điểm trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

7.3 Đạo hàm cấp hai

Định nghĩa 7.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$.

7.3.1 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Tính chất 7.1. Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} & \text{b) } y = \frac{-2x + 3}{x - 4} & \text{c) } y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} & \text{d) } y = \sqrt{5x} \end{array}$$

Bài tập 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = \sin 3x & \text{b) } y = \cos^3 2x & \text{c) } y = \tan^2 x & \text{d) } y = \cot(4 - x^2) \end{array}$$

Bài tập 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = (x^2 - x) \cdot 2^x & \text{b) } y = x^2 \cdot \log_3 x & \text{c) } y = (x^2 + 1) \cdot \ln x & \text{d) } y = e^{3x+1} \end{array}$$

Bài tập 4. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = 2x^4 - 5x^2 + 3 & \text{b) } y = x \cdot e^x & \text{c) } y = x^3 + \sin 2x & \text{d) } y = e^{x-\tan x} \\ \text{e) } y = 3x^2 + 5x + 1 & \text{f) } y = \sin x & \text{g) } y = \sin 2x & \text{h) } y = \ln x \\ \text{i) } y = \sqrt{x^2 + 1} & \text{j) } y = e^{x^2+1} & \text{k) } y = x + \sin 3x & \text{l) } y = 2^{3x} + 1 \end{array}$$

Bài tập 5. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = x^2 - x & \text{b) } y = \cos x & \text{c) } y = \frac{1}{x} & \text{d) } y = e^{\sin x} \end{array}$$

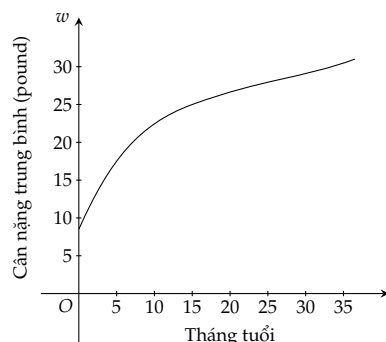
Bài tập 6. Chứng minh các đẳng thức về đạo hàm

$$\begin{array}{l} \text{a) Cho } y = (x^2 + 1)e^x. \text{ Chứng minh } y'' - y' = 2(x + 1)e^x. \\ \text{b) Cho } y = e^{\sin x}. \text{ Chứng minh } y' \cos x - y \sin x = y''. \\ \text{c) Cho } y = e^x \sin x. \text{ Chứng minh } y'' - 2y' + 2y = 0. \end{array}$$

Bài tập 7. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s là quãng đường tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

Bài tập 8. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Bài tập 9. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (nguồn: <https://www.cdc.gov/growthcharts/data/who/GrChrt-Boys>). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



Bài tập 10. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

Bài tập 11. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật thả rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính:

- a) Quãng đường vật đã rơi;
- b) Gia tốc của vật.

7.4 Bài tập cuối chương

❖ TRẮC NGHIỆM 4 ĐÁP ÁN ❖

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -4)$ có hệ số góc bằng

- (A) -3 . (B) 9 . (C) -9 . (D) 72 .

Câu 2. Hàm số $y = -x^2 + x + 7$ có đạo hàm tại $x = 1$ bằng

- (A) -1 . (B) 7 . (C) 1 . (D) 6 .

Câu 3. Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ và $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 5$. Bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ có tập nghiệm là

- (A) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. (B) $(0; 1)$. (C) $[0; 1]$. (D) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 4. Hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đạo hàm là

- (A) $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. (B) $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$. (C) $y' = \frac{-1}{(x+2)^2}$. (D) $y' = \frac{-5}{(x+2)^2}$.

Câu 5. Hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ có đạo hàm cấp hai tại $x = 1$ là

- (A) $y''(1) = \frac{1}{2}$. (B) $y''(1) = -\frac{1}{4}$. (C) $y''(1) = 4$. (D) $y''(1) = \frac{1}{4}$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 6) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M .

Bài tập 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 1$ b) $y = (x^2 - x)^3$ c) $y = \frac{4x-1}{2x+1}$.

Bài tập 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = (x^2 + 3x - 1)e^x$; b) $y = x^3 \log_2 x$.

Bài tập 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = \tan(e^x + 1)$; b) $y = \sqrt{\sin 3x}$; c) $y = \cot(1 - 2^x)$.

Bài tập 5. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a) $y = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$; b) $y = x^2 e^x$.

Bài tập 6. Một viên sỏi rơi từ độ cao 44,1 m thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

- a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$; b) Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

Bài tập 7. Một vật chuyển động trên một đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t = 1$.

Bài tập 8. Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được tính theo công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$.

Bài tập 9. Hàm số $S(r) = \frac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0,8$.

Bài tập 10. Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

Bài tập 11. Hàm số $R(v) = \frac{600}{v}$ có thể dùng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể lấy đi được 6000 ml máu trên mỗi phút và v ml máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's

internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.

Quan hệ vuông góc trong không gian

- a) Tính góc tạo bởi hai véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{SD}$.
 b) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AM và SC .

Bài tập 11. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi O là trọng tâm tam giác BCD .

- a) Chứng minh $AO \perp CD$.
 b) Gọi M là trung điểm CD , tính góc giữa AC và BM .

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , biết $AD = DC = a$, $AB = 2a$ và $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

- a) Tính góc giữa SB và DC .
 b) Tính góc giữa SD và CD .

CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Bài tập 13. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC và AC . Chứng minh

- a) $MN \perp RP$.
 b) $MN \perp RQ$.
 c) $AB \perp CD$.

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , tam giác SAC vuông tại A và $SA \perp AB$. Kẻ đường cao AH của tam giác SAB .

- a) Chứng minh tam giác SBC vuông tại B .
 b) Chứng minh $AH \perp SC$.

Bài tập 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

Bài tập 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm AB và CD . Chứng minh

- a) $AB \perp CD$.
 b) $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

Bài tập 17. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tất cả các cạnh bên và cạnh đáy của hình chóp đều bằng a . Chứng minh $SA \perp SC$ và $SB \perp SD$.

8.2 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

8.2.1 Khái niệm

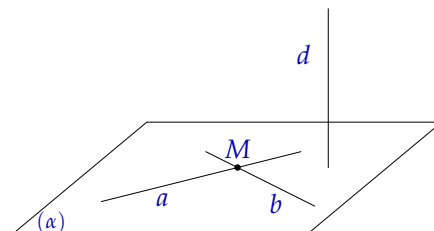
Định nghĩa 8.2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nếu đường thẳng đó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng. Ký hiệu: $d \perp (P)$.

8.2.2 Chứng minh “đường vuông góc với mặt”

Định lý 8.1.

- Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì nó vuông góc với mặt phẳng (α) .

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$



Hệ quả 8.2.

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Định lý 8.2.

$$a) \begin{cases} a \parallel b \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp (\alpha).$$

$$b) \begin{cases} a \neq b \\ a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

$$c) \begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$$

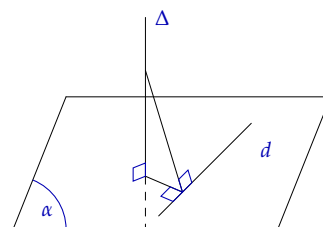
$$d) \begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

$$e) \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a.$$

$$f) \begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha).$$

Định lý 8.3.

Cho đường thẳng (a) không vuông góc với mặt phẳng (α) và đường thẳng (d) nằm trong (α) . Khi đó, điều kiện cần và đủ để (d) vuông góc với (a) là (d) vuông góc với hình chiếu (a') của (a) trên (α) .



❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho tứ diện $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh

a) $OA \perp (OBC)$.

b) $OB \perp (OAC)$.

c) $OC \perp (OAB)$.

Bài tập 2. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Chứng minh $\triangle SBC$ vuông tại B .

c) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp SC$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tâm O và $SA \perp (ABCD)$, Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD .

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp SB$.

b) Chứng minh $CD \perp (SAD)$, suy ra $CD \perp SD$.

c) Chứng minh $BD \perp (SAC)$.

d) Chứng minh $HK \perp (SAC)$.

e) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

f) Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD . Chứng minh $MN \perp (SAC)$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao trong các tam giác SAB và SAC .

- a) Chứng minh tam giác SBC vuông.
- b) Chứng minh tam giác AHK vuông.
- c) Chứng minh $\triangle SHK$ vuông, suy ra $SC \perp (AHK)$.

Bài tập 6. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $SB \perp (ABC)$ và $SB = AB$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC và AB .

- a) Chứng minh $AC \perp (SAB)$.
b) Chứng minh $BH \perp (SAC)$.
c) Chứng minh $KI \perp SA$.
d) Chứng minh $AB \perp IH$.

Bài tập 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC, BD = CD$. Gọi I là trung điểm BC .

- a) Chứng minh $BC \perp (AID)$.
b) Gọi AH là đường cao của tam giác AID . Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SBC vuông tại B và tam giác SCD vuông tại D . Chứng minh $SA \perp (ABCD)$.

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O với $SA = SC, SB = SD$. Chứng minh

- a) $SO \perp (ABCD)$. b) $AC \perp SD$.

Bài tập 10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là trực tâm $\triangle BCD$. Chứng minh

- a) $AH \perp (BCD)$. b) $AD \perp BC$.

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi I là trung điểm cạnh BC . Chứng minh

- a) $BC \perp (SAI)$.
b) $\triangle SIA = \triangle SIB$.
c) $SI \perp (ABC)$.

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (P) qua A và song song BD , cắt SB và SD lần lượt tại M, N . Chứng minh $MN \perp (SAC)$.

Bài tập 13. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Kẻ AM vuông góc SB tại M và lấy điểm N trên SC sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng

- a) $AM \perp (SBC)$. b) $SB \perp AN$.

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm BC . Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh $G_1G_2 \perp (ABC)$.

Bài tập 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$ là các tam giác đều cạnh a , $AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $AI \perp (BCD)$ với I là trung điểm BC .

Bài tập 16. Cho hình chóp $O.ABC$ có $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 45^\circ$, $OA = a$, $OB = OC = a\sqrt{2}$. Chứng minh

- a) $OA \perp AB$. b) $OA \perp (ABC)$.

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$.

- a) Chứng minh tam giác ABC vuông.
b) Xác định hình chiếu H của S lên mặt phẳng (ABC) .

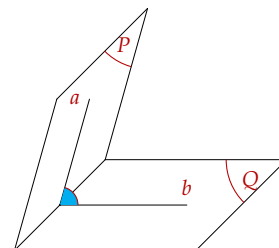
Bài tập 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh

- a) Ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy. b) $SC \perp (BHK)$.
c) $HK \perp (SBC)$.

8.3 Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa 8.3.

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến.
- Ta có
$$\begin{cases} \Delta = (P) \cap (Q) \\ a \perp \Delta, a \subset (P) \\ b \perp \Delta, b \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow [(P); (Q)] = (a; b).$$



Lưu ý 8.1. Góc giữa hai mặt phẳng là góc nhọn hoặc góc vuông.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C với $AB = 2a$, $AC = a$, SA vuông góc với (ABC) , $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các mặt phẳng sau đây

- a) (SAB) và (SAC) b) (SBC) và (ABC) c) (SAC) và (SBC) .

Bài tập 2. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{a}{2}$. Tính góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) .

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a$. Tính góc giữa các mặt phẳng sau đây

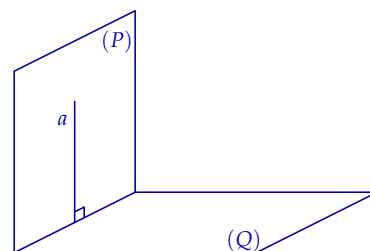
- a) (SAB) và (SBD) . b) (SBC) và $(ABCD)$. c) (SBD) và $(ABCD)$. d) (SBC) và (SAD) .
- e) (SBC) và (SAC) . f) (SBC) và (SCD) . g) (SBD) và (SAC) .

8.4 Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa 8.4. Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

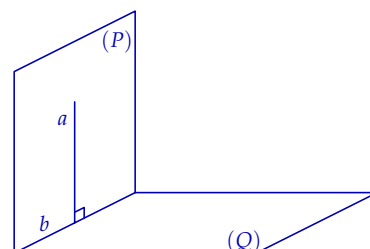
Định lý 8.4.

- Muốn chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta chứng minh một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng kia.
- Ta có
$$\begin{cases} a \perp (P) \\ a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



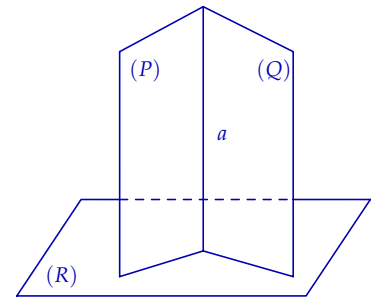
Định lý 8.5.

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.
- Ta có
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ b = (P) \cap (Q) \\ a \subset (P) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).$$



Định lý 8.6.

- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.
- Ta có
$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R).$$



❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Chứng minh

- a) $(SAB) \perp (ABC)$. b) $(SBC) \perp (SAB)$.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh

- $(SAB) \perp (SBC)$.
- $(SAC) \perp (SBD)$.
- $(AMN) \perp (SAC)$ với M, N lần lượt là trung điểm SB, SD .
- $(SIH) \perp (SAD)$ với I là trung điểm AD và H là giao điểm các đường chéo của hình vuông.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi SH, SK lần lượt là đường cao của các tam giác SAB và SCD với $H \in AB, K \in CD$. Chứng minh $(SHK) \perp (ABCD)$.

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Hai mặt phẳng (SBC) và (SAB) vuông góc với nhau. Chứng minh hai tam giác ABC và SBC là tam giác vuông.

Bài tập 5. Cho hình vuông $ABCD$. Điểm M không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ sao cho các góc $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMD}$ vuông. Chứng minh $(MAC) \perp (ABCD)$.

Bài tập 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a .

- a) Tính độ dài đường cao hình chóp.
b) Gọi M là trung điểm SC . Chứng minh $(MBD) \perp (SAC)$.

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi AH, AK lần lượt là đường cao của các tam giác SAB, SAD . Chứng minh $(AHK) \perp (SAC)$.

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Kẻ đường cao AH của tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp (SBC)$ và $(SBC) \perp (AHC)$.

Bài tập 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm AB, CD . Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại I , lấy điểm S sao cho $AB = 2SI$. Chứng minh

- a) $(SAB) \perp (ABCD)$. b) $(SCD) \perp (SIJ)$. c) $(SAD) \perp (SBC)$.

Bài tập 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Chứng minh

- a) $BC \perp (SAB)$. b) $AB' \perp (SBC)$. c) $(AB'C') \perp (SBC)$. d) Tứ giác $BCC'B'$ nội tiếp.

Bài tập 11. Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC$, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60^\circ$, $\widehat{AOC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $(ABC) \perp (AOC)$.

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại C , tam giác SAC đều và $(SAC) \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm SC . Chứng minh

- a) $(SBC) \perp (SAC)$. b) $(ABI) \perp (SBC)$.

Bài tập 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Biết tam giác SAB đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm AB, BC . Chứng minh

- a) $(SAD) \perp (SAB)$. b) $(SHC) \perp (SDM)$.

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B với $AB = BC = a$. Hai mặt bên SAB và SBC là hai tam giác đều. Gọi H là trung điểm AC .

- a) Chứng minh $SH \perp (ABC)$.
b) Gọi M là trung điểm SB . Chứng minh $(ACM) \perp (SBC)$.

Bài tập 15. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$.

- Gọi M là trung điểm AB . Chứng minh $DM \perp (SAC)$.
- Gọi E là điểm trên SB sao cho $SB = 2SE$. Chứng minh $SB \perp (DAE)$.

8.5 Hình lăng trụ đứng, hình hộp và hình lập phương

8.5.1 Nhận diện hình lăng trụ đứng, hình hộp và hình lập phương

Định nghĩa 8.5.

- Hình lăng trụ đứng = hình lăng trụ + cạnh bên vuông góc với đáy.
- Hình lăng trụ đều = hình lăng trụ đứng + đáy là đa giác đều.
- Hình hộp đứng = hình hộp + cạnh bên vuông góc với đáy.
- Hình hộp chữ nhật = hình hộp đứng + đáy là hình chữ nhật.
- Hình lập phương = hình hộp đứng + các cạnh bằng nhau.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $AA' = h$. Tính độ dài đường chéo $A'C$ theo a và h .

Bài tập 2. Cho hình trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a . Trên các cạnh AA' , BB' và CC' lần lượt lấy các điểm M , N , P sao cho diện tích tam giác MNP bằng $2a^2$. Tính góc giữa (MNP) và (ABC) .

Bài tập 3. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC . Tính $\cos \alpha$ với α là góc giữa AA' và $B'C'$.

8.6 Hình chóp đều, hình chóp cụt đều

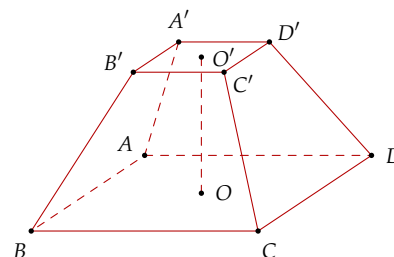
Định nghĩa 8.6. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Tính chất 8.1. Hình chóp đều có

- Các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau, có chung đỉnh.
- Đoạn nối từ đỉnh xuống tâm của đáy thì vuông góc với đáy và được gọi là đường cao hình chóp.
- Độ dài đường cao hình chóp gọi là chiều cao hình chóp.

Định nghĩa 8.7.

Phần hình chóp đều nằm giữa đáy và mặt phẳng song song với đáy cắt cạnh bên hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.



❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$. Tính độ dài đường cao SO .

Bài tập 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$. Tính độ dài đường cao SO .

Bài tập 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng

- (SAB) và $(ABCD)$
- (SAB) và (SCD)

Bài tập 4. Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy là tam giác ABC tâm O cạnh a . Góc giữa mặt bên và mặt đáy là 60° . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và BC . Tính góc giữa hai mặt phẳng

a) (SAB) và (SBC)

b) (SAJ) và (SCI)

Bài tập 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SC . Biết hai mặt phẳng (AMN) và (SBC) vuông góc với nhau, tính $S_{\triangle AMN}$ theo a .

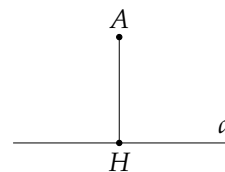
Bài tập 6. Cho hình chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng a , đáy nhỏ $A'B'C'D'$ cạnh bằng b , chiều cao OO' bằng h , với O, O' lần lượt là tâm hai đáy. Tính độ dài cạnh bên AA' .

Bài tập 7. Cho hình chóp cụt tứ giác đều có đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a . Tính độ dài cạnh bên và đường cao mặt bên.

8.7 Khoảng cách

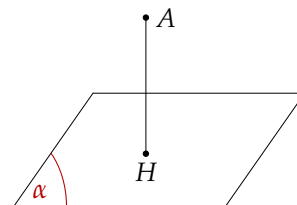
Định nghĩa 8.8.

- Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng là độ dài đoạn vuông góc kẻ từ điểm đó đến đường thẳng đã cho.
- Ta có $\begin{cases} AH \perp d \\ H \in d \end{cases} \Rightarrow d_{[A,d]} = AH.$



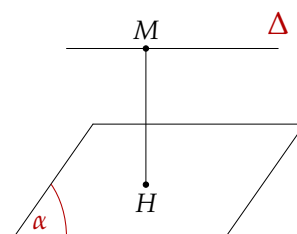
Định nghĩa 8.9.

- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là độ dài đoạn vuông góc kẻ từ điểm đó đến mặt phẳng đã cho.
- Ta có $\begin{cases} AH \perp (\alpha) \\ H \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d_{[A,(\alpha)]} = AH.$



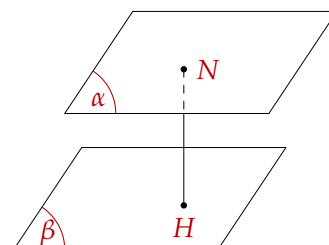
Định nghĩa 8.10.

- Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng đến mặt phẳng đã cho.
- Ta có $\begin{cases} \Delta \parallel (\alpha) \\ M \in \Delta \end{cases} \Rightarrow d_{[\Delta,(\alpha)]} = d_{[M,(\alpha)]}.$



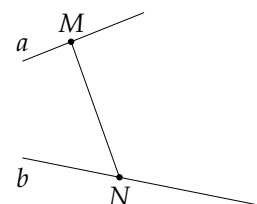
Định nghĩa 8.11.

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ N \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d_{[(\alpha),(\beta)]} = d_{[N,(\beta)]} = NH.$



Định nghĩa 8.12.

- Đoạn vuông góc chung:** là đoạn thẳng có 2 đầu nằm trên hai đường thẳng và vuông góc với hai đường thẳng đó.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:** là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Ta có $\begin{cases} MN \perp a, M \in a \\ MN \perp b, N \in b \end{cases} \Rightarrow d_{[a,b]} = MN.$



❖ BÀI TẬP ❖

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Bài tập 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi I là trung điểm của BC . Tính khoảng cách từ O đến SA .

Bài tập 2. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A trên SB .

a) Tính khoảng cách từ S đến BC .

b) Tính khoảng cách từ trung điểm O của AC đến đường thẳng CH .

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I , M lần lượt là trung điểm của cạnh SC và AB . Tính khoảng cách từ I đến CM .

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Xác định khoảng cách từ chân đường cao A đến mặt bên (SBC) .

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$ tâm O , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$.

- a) Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .
- b) Tính khoảng cách từ A đến (SCD) .
- c) Tính khoảng cách từ O đến (SCD) .
- d) Tính khoảng cách từ O đến (SBC) .
- e) Tính khoảng cách từ A đến (SBD) .
- f) Tính khoảng cách từ C đến (SBD) .

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tâm O , cạnh a . Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi I là trung điểm của SC và G là trọng tâm của tam giác SCD . Xác định và tính khoảng cách

- a) $d(A, (SBD))$
- b) $d(C, (SBD))$
- c) $d(I, (SBD))$
- d) $d(O, (SAB))$
- e) $d(G, (SAB))$
- f) $d(G, (SBD))$

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi I , M lần lượt là trung điểm của SC , CD . Tính các khoảng cách sau

- a) $d(A, (SBD))$.
- b) $d(I, (SBD))$.
- c) $d(A, (SBM))$.

Bài tập 8. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh a và $AC = a$. Từ trung điểm H của AB dựng SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ với $SH = a$. Tính các khoảng cách sau

- a) $d(H, (SCD))$.
- b) $d(O, (SCD))$.
- c) $d(A, (SBC))$.

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , B và $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính các khoảng cách sau

- a) $d(A, (SCD))$.
- b) $d(B, (SCD))$.
- c) $d(AD, (SBC))$.

Bài tập 10. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi I là trung điểm BC , K là hình chiếu của O trên SI .

- a) Chứng minh $OK \perp (SBC)$.
- b) Tính khoảng cách từ O đến (SBC) .

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a tâm O , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

- a) Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .
- b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC) , từ đó suy ra khoảng cách từ O đến (SBC) .

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm O của BC .

- a) Chứng minh $BC \perp SA$. Tính SA theo a , biết $SO = AB$.
- b) Dựng $OH \perp AB$ tại H . Chứng minh $(SOH) \perp (SAB)$.
- c) Tính khoảng cách từ O đến (SAB) theo a .

Bài tập 13 (KD-2002). Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$ và $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .

Bài tập 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = a$, $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi J , K lần lượt là trung điểm của AB , CD . Gọi G_1 , G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SCD .

- a) Chứng minh $(SG_1G_2) \perp (SAB)$.
- b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SG_1G_2) và $(ABCD)$.
- c) Tính khoảng cách từ G_1 đến (SCD) .

Bài tập 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = SA = a$, $AC = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

- a) Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .

- b) Gọi D là điểm sao cho $ACBD$ là hình thang với AC song song BD và $BD = 3a$. Tính khoảng cách từ D đến (SBC) và khoảng cách từ C đến (SBD) .

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD = a$, $AD = SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

- a) Tính khoảng cách từ A và C đến (SBD) .
b) Tính khoảng cách từ B đến (SCD) .
c) Tính khoảng cách từ D đến (SBC) .

Bài tập 18 (HKII-NK 2011-2012). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 5. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và có cạnh $SA = 7$, trung tuyến $AI = \sqrt{21}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến $(ABCD)$.

KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ CÁC MẶT PHẪNG SONG SONG

Bài tập 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SI \perp (ABCD)$ với I là trung điểm AD và $SI = a$. Gọi J là trung điểm BC .

- a) Chứng minh $(SIJ) \perp (SBC)$.
b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Bài tập 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp đường tròn có đường kính $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và $SA \perp (ABCD)$.

- a) Tính khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD) .
b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC) .

KHOẢNG CÁCH GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Bài tập 21. Cho hình chóp $S.ABCD$, có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Xác định và tính khoảng cách giữa cạnh bên SB và cạnh thuộc mặt phẳng đáy AC .

Bài tập 22. Cho tứ diện $OABC$ với OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Khi đó đường cao OH của tứ diện $OABC$ được tính theo công thức $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Bài tập 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a

- a) Chứng minh $AB \perp CD$.
b) Tính khoảng cách giữa AB và CD .

Bài tập 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = h$ và $SA \perp (ABCD)$.

- a) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SB và CD .
b) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AD và SB .
c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và BD .
d) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và AB .
e) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và AD .

Bài tập 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC .

Bài tập 26. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm BC . Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng

- a) OA và BC .
b) AI và OC .

Bài tập 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC .

Bài tập 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng

- a) SB và CD
b) SB và AD
c) BD và SC
d) AC và SD

Bài tập 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa SA và BC .

Bài tập 30. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AB và O là tâm của đáy.

- Xác định hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (SCD) .
- Tính góc giữa hai mặt phẳng (SMO) và (SCD) .
- Tính khoảng cách giữa AB và SC .

Bài tập 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi K là điểm bất kì trên CD . Tính khoảng cách giữa AB và SK .

Bài tập 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và đường cao $SO = a$.

- Tính khoảng cách từ O đến (SBC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB .

Bài tập 33. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a và $AD \perp BC$. Biết khoảng cách từ D đến BC bằng a và $AD = a$. Gọi H, I lần lượt là trung điểm BC, AH .

- Chứng minh $DI \perp (ABC)$.
- Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC .

Bài tập 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại B , $SA = AB = a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm AC . Hãy dựng và tính độ dài đường vuông góc chung giữa SM và BC .

Bài tập 35. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

Bài tập 36. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$.

- Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy.
- Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và $B'C'$ vuông góc và tính khoảng cách giữa chúng.

Bài tập 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a , đường cao $SA = a$. Dựng đường vuông góc chung giữa BD và SC . Tính độ dài đường vuông góc chung đó.

Bài tập 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$.

- Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.
- Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Gọi K là điểm bất kì thuộc cạnh AD . Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K , tính khoảng cách đó theo a .

Bài tập 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AD . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- Chứng minh $(SBM) \perp (SAC)$.
- Tính SA và $d[A; (SBM)]$.

Bài tập 40. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA , M là trung điểm AE , N là trung điểm BC .

- Chứng minh $MN \perp BD$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

8.8 Thể tích khối hộp, lăng trụ và khối chóp

8.8.1 Công thức tính thể tích

Công thức 8.1.

- Thể tích của khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao $V = S_{\text{đáy}} \cdot h$.
- Thể tích của khối hộp chữ nhật với ba kích thước: chiều dài a , chiều rộng b , chiều cao c , là $V = abc$.

- Thể tích của khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao $V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}}.h$.
- Thể tích của khối chóp cắt đều được tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3}h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right),$$

trong đó h là chiều cao và S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai đáy của khối chóp cắt đều.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a .

- Chứng minh rằng các tam giác ASC và BSD là tam giác vuông cân.
- Gọi O là giao điểm của AC và BD , chứng minh rằng đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Chứng minh rằng góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Bài tập 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

- Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc với nhau.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.

Bài tập 3. Một chiếc bánh chưng có dạng khối hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là 15 cm, 15 cm và 6 cm. Tính thể tích của chiếc bánh chưng đó.

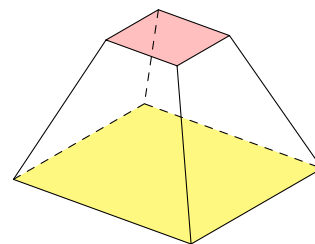
Bài tập 4. Một miếng pho mát có dạng khối lăng trụ đứng với chiều cao 10 cm và đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 12 cm. Tính khối lượng của miếng pho mát theo đơn vị gam, biết khối lượng riêng của loại pho mát đó là 3 g/cm^3 .

Bài tập 5. Một loại đèn đá muối có dạng khối chóp tứ giác đều (Hình 97). Tính theo a thể tích của đèn đá muối đó, giả sử các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng a .



Hình 97

Bài tập 6. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cắt tứ giác đều (Hình 98). Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1 470 000 đồng/ m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.

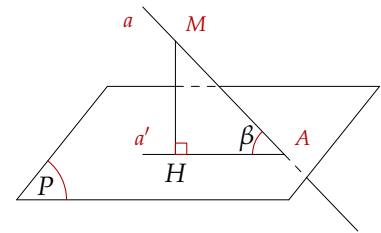


Hình 98

8.9 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 8.13.

- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của nó lên mặt phẳng.
- Lưu ý: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn hoặc vuông.



❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng bao nhiêu độ?

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Biết rằng $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng bao nhiêu?

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh SA vuông góc với đáy, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Số đo của góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của các cạnh BC . Xác định và tính góc giữa

- | | |
|---|---|
| a) Đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) . | b) Đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$. |
| c) Đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$. | d) Đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. |
| e) Đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$. | f) Đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . |
| g) Đường thẳng CD và mặt phẳng (SAC) . | h) Đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) . |
| i) Đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) . | j) Đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) . |

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa

- | | |
|-------------------|----------------------|
| a) SB và CD . | b) SD và (SAB) . |
|-------------------|----------------------|

Bài tập 6. Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác đều cạnh a , $AB \perp (BCD)$ và $AB = 2a$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm AD, BD . Tính góc giữa

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) CM và (BCD) . | b) AI và (ABC) . |
|----------------------|----------------------|

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| a) SC và $(ABCD)$. | b) SC và (SAB) . | c) SC và (SBD) . |
|-----------------------|----------------------|----------------------|

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) SB và (SAC) . | b) CA và (SCD) . | c) BD và (SCD) . |
|----------------------|----------------------|----------------------|

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại C với $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi I là trung điểm SC .

- | | |
|---|--|
| a) Chứng minh $BC \perp (SAC)$, $AI \perp (SBC)$. | b) Tính góc giữa SA và (SBC) . |
| c) Tính góc giữa SB và (ABC) , (SAC) . | d) Tính góc giữa SC và (ABC) , (SAB) . |

Bài tập 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2a$, $AB = BC = a$, $SA \perp (ABCD)$, SC hợp với đáy một góc 45° . Gọi M là trung điểm AD .

- | |
|--|
| a) Chứng minh $CD \perp (SAC)$ và $(SAC) \perp (SBM)$. |
| b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính góc giữa SG và (SDC) . |

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$.

a) Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy.

b) Gọi I là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $AI = 2IB$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SI và mặt phẳng (SBC) .

Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SAB là tam giác đều. Biết I là trung điểm AB và $SI \perp (ABCD)$.

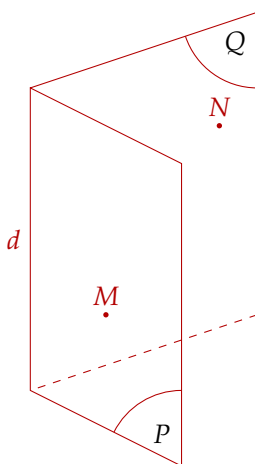
a) Chứng minh SC và SD tạo với mặt phẳng (SAB) hai góc bằng nhau.

b) Gọi M là trung điểm SD . Tính góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) .

Bài tập 13. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , biết $SO = 3a$ với O là giao điểm của AC và BD . Gọi G là trọng tâm tam giác SAB . Tính góc tạo bởi BD và (BCG) .

8.10 Góc nhị diện

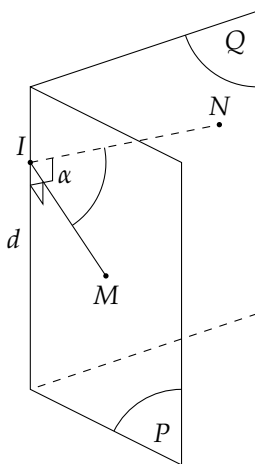
Định nghĩa 8.14. Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ.



Lưu ý 8.2. Góc nhị diện còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N lần lượt là các điểm thuộc các nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ nhưng không thuộc đường thẳng d .

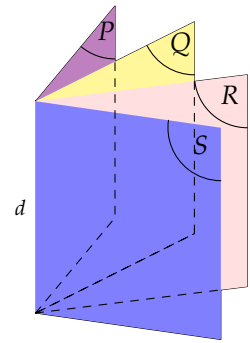
Định nghĩa 8.15. Trong không gian, cho góc nhị diện.

- Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho.
- Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện đó.
- Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng 90° thì góc nhị diện đó gọi là góc nhị diện vuông.

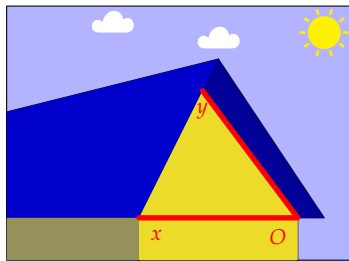


❖ BÀI TẬP ❖

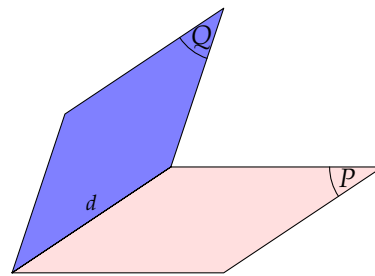
Bài tập 1. Trong không gian cho bốn nửa mặt phẳng (P) , (Q) , (R) , (S) cắt nhau theo giao tuyến d (Hình bên). Hãy chỉ ra ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d .



Bài tập 2. Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát hình dưới và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.



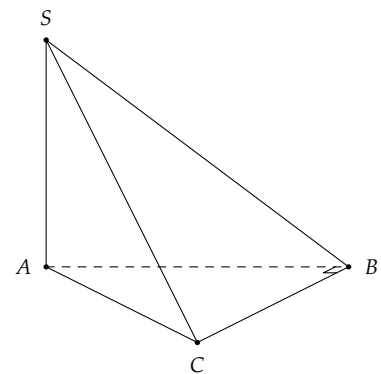
a)



b)

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$ (Hình bên). Tính số đo theo đơn vị độ của mỗi góc nhị diện sau:

- $[B, SA, C]$;
- $[A, BC, S]$.



Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$.

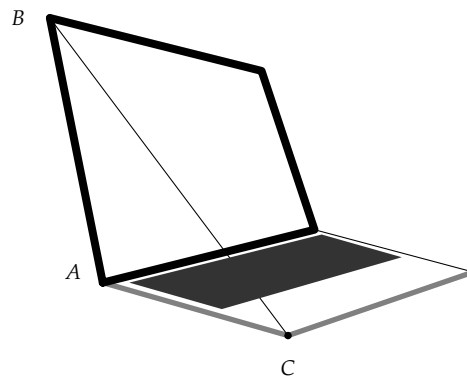
- Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.
- Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$.
- Biết $SA = a$, tính số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O , $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều.

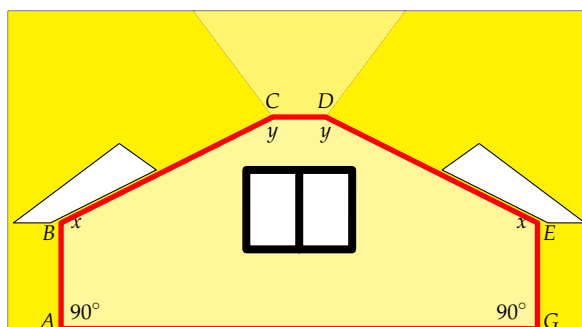
- Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Chứng minh rằng $AC \perp (SBD)$. Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .
- Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính số đo của góc nhị diện $[M, SO, D]$.

Bài tập 6. Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là 100%, tương ứng với góc 90° (độ dốc 10% tương ứng với góc 9°). Giả sử có hai điểm A, B nằm ở độ cao lần lượt là 200 m, 220 m so với mực nước biển và đoạn dốc AB dài 120 m. Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Bài tập 7. Trong hình bên, máy tính xách tay đang mở gợi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính theo đơn vị độ, biết tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm.



Bài tập 8. Trong hình bên, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ trong cùng mặt phẳng. Lục giác $ABCDEG$ nằm trong mặt phẳng đó có $AB = GE = 2$ m, $BC = DE$, $\widehat{A} = \widehat{G} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{E} = x$, $\widehat{C} = \widehat{D} = y$. Biết rằng khoảng cách từ C và D đến AG là 4 m, $AG = 12$ m, $CD = 1$ m. Tìm x, y (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi α là số đo của góc nhị diện $[A, BC, S]$. Chứng minh rằng tỉ số diện tích của hai tam giác ABC và SBC bằng $\cos \alpha$.

Chương 9

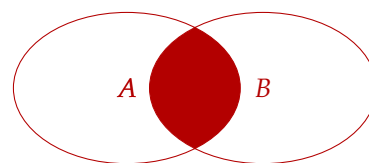
Xác suất

9.1 Biến cố giao và quy tắc nhân xác suất

9.1.1 Biến cố giao

Định nghĩa 9.1.

Cho hai biến cố A và B . Biến cố “Cả A và B cùng xảy ra”, kí hiệu AB hoặc $A \cap B$ được gọi là **biến cố giao** của A và B .



Hình 1

Lưu ý 9.1. Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B . Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

✧ BÀI TẬP ✧

Bài tập 1. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”.

- Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố trên.
- Hãy liệt kê các kết quả của phép thử làm cho cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.

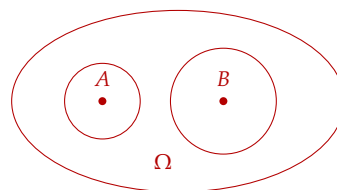
Bài tập 2. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”. Gọi C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm”.

- Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao AC và BC .
- Gọi D là biến cố “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ nhất là 3”. Hãy xác định các biến cố AD , BD và CD .
- Gọi $\bar{A}$ là biến cố đối của biến cố A . Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao $\bar{A}B$ và $\bar{A}C$.

9.1.2 Biến cố xung khắc

Định nghĩa 9.2.

Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nếu A và B không đồng thời xảy ra.



Hình 2

Lưu ý 9.2. Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

✧ BÀI TẬP ✧

Bài tập 3. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, gọi B là biến cố “Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm”. Hai biến cố A và B có thể đồng thời cùng xảy ra không?

Bài tập 4. Một hộp có 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Hãy xác định các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố sau:

A : “Hai viên bi lấy ra cùng màu xanh”;

B : “Hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ”;

C : “Hai viên bi lấy ra cùng màu”;

D : “Hai viên bi lấy ra khác màu”.

Bài tập 5.

- Hai biến cố đối nhau có xung khắc với nhau không?
- Hai biến cố xung khắc có phải là hai biến cố đối nhau không?

9.1.3 Biến cố độc lập

Định nghĩa 9.3. Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Lưu ý 9.3. Nhận xét: Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $\bar{A}$ và B ; A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng độc lập.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 6. An và Bình mỗi người gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “An gieo được mặt 6 chấm” và B là biến cố “Bình gieo được mặt 6 chấm”.

- Tính xác suất của biến cố B .
- Tính xác suất của biến cố B trong hai trường hợp sau:
 - Biến cố A xảy ra;
 - Biến cố A không xảy ra.

Bài tập 7. Trong hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng, xem màu rồi trả lại hộp. Lặp lại phép thử trên 2 lần và gọi A_k là biến cố quả bóng lấy ra lần thứ k là bóng xanh ($k = 1, 2$).

- A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?
 - Nếu trong mỗi phép thử trên ta không trả bóng lại hộp thì A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?
- Bài tập 8.** Hãy chỉ ra 2 biến cố độc lập trong phép thử tung 2 đồng xu cân đối và đồng chất.

9.1.4 Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Định lý 9.1. Nếu hai biến cố A và B độc lập thì

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Lưu ý 9.4. Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 9. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,6$ và $P(B) = 0,8$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

Bài tập 10. Hai bệnh nhân X và Y bị nhiễm vi rút SARS-CoV-2. Biết rằng xác suất bị biến chứng nặng của bệnh nhân X là 0,1 và của bệnh nhân Y là 0,2. Khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập.

Hãy tính xác suất của các biến cố:

- “Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng”;
- “Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng nặng”;
- “Bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng”.

Bài tập 11. Nguyệt và Nhi cùng tham gia bắn một cuộc thi bắn cung độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng tâm bia của Nguyệt là 0,9 và của Nhi là 0,8. Tính xác suất để cả hai bạn cùng bắn trúng tâm bia.

Bài tập 12. Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ”.

- Hãy viết tập hợp mô tả biến cố AB và tính $P(AB)$.
- Hãy tìm một biến cố khác rỗng và xung khắc với cả hai biến cố A và B .

Bài tập 13. Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”.

- Hãy mô tả bằng lời biến cố AB .
- Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Bài tập 14. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- Biết $P(A) = 0,7$ và $P(B) = 0,2$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB , $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.
- Biết $P(A) = 0,5$ và $P(AB) = 0,3$. Hãy tính xác suất của các biến cố B , $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

Bài tập 15. Một xạ thủ bắn lần lượt 2 viên đạn vào một bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất và thứ hai lần lượt là 0,9 và 0,6. Biết rằng kết quả các lần bắn là độc lập với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây:

- “Cả 2 lần bắn đều trúng đích”;
- “Cả 2 lần bắn đều không trúng đích”;
- “Lần bắn thứ nhất trúng đích, lần bắn thứ hai không trúng đích”.

Bài tập 16. Một bệnh truyền nhiễm có xác suất truyền bệnh là 0,8 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang; là 0,1 nếu tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang. Anh Lâm tiếp xúc với 1 người bệnh hai lần, trong đó có một lần đeo khẩu trang và một lần không đeo khẩu trang. Tính xác suất anh Lâm bị lây bệnh từ người bệnh mà anh tiếp xúc đó.

9.2 Biến cố hợp và quy tắc cộng xác suất

9.2.1 Biến cố hợp

Định nghĩa 9.4. Cho hai biến cố A và B . Biến cố “ A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$ được gọi là **biến cố hợp** của A và B

Lưu ý 9.5. Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B .

9.2.2 Quy tắc cộng cho hai biến cố xung khắc

Định lý 9.2. Cho hai biến cố xung khắc A và B . Khi đó: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

9.2.3 Quy tắc cộng cho hai biến cố bất kì

Định lý 9.3. Cho hai biến cố A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1. Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Gọi A là biến cố “Hai viên bi lấy ra đều có màu xanh”, B là biến cố “Hai viên bi lấy ra đều có màu đỏ”.

- Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A ? Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố B ?
- Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$ và tính số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$.

Bài tập 2. Thực hiện hai thí nghiệm. Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các biến cố “Thí nghiệm thứ nhất thành công” và “Thí nghiệm thứ hai thành công”. Hãy biểu diễn các biến cố sau theo hai biến cố T_1 và T_2 .

- A : “Có ít nhất một trong hai thí nghiệm thành công”.
- B : “Có đúng một trong hai thí nghiệm thành công”.

Bài tập 3. Một đội tình nguyện gồm 9 học sinh khối 10 và 7 học sinh khối 11. Chọn ra ngẫu nhiên 3 người trong đội. Tính xác suất của biến cố “Cả 3 người được chọn học cùng một khối”.

Bài tập 4. Ở lúa, hạt gạo đục là tính trạng trội hoàn toàn so với hạt gạo trong. Cho cây lúa có hạt gạo đục thuần chủng thụ phấn với cây lúa có hạt gạo trong được F1 toàn hạt gạo đục. Tiếp tục cho các cây lúa F1 thụ phấn với nhau và thu được các hạt gạo mới. Lần lượt chọn ra ngẫu nhiên 2 hạt gạo mới, tính xác suất của biến cố “Có đúng 1 hạt gạo đục trong 2 hạt gạo được lấy ra”.

Bài tập 5. Một hộp chứa 100 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Tính xác suất của biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3 hoặc 5”.

Bài tập 6. Một hộp chứa 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 2 quả bóng vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 3 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố:

- “Cả 3 quả bóng lấy ra đều có cùng màu”;
- “Có ít nhất 2 quả bóng màu xanh trong 3 quả bóng lấy ra”.

Bài tập 7. Trên đường đi từ Hà Nội về thăm Đền Hùng ở Phú Thọ, Bình, Minh và 5 bạn khác ngồi vào 7 trên chiếc ghế trên một xe ô tô 7 chỗ. Khi xe quay lại Hà Nội, mỗi bạn lại chọn ngồi ngẫu nhiên một ghế. Tính xác suất của biến cố: “Có ít nhất một trong hai bạn Bình và Minh vẫn ngồi đúng ghế cũ của mình”.

Bài tập 8. Cho hai biến cố A và B độc lập với nhau.

- Biết $P(A) = 0,3$ và $P(B) = 0,2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$;
- Biết $P(B) = 0,5$ và $P(A \cup B) = 0,7$. Tính xác suất của biến cố A .

Bài tập 9. Lan gieo một đồng xu không cân đối 3 độc lập với nhau. Biết xác suất xuất hiện mặt sấp trong mỗi lần gieo đều bằng $0,4$. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố “Có đúng 1 lần gieo được mặt sấp trong 3 lần gieo”.

Bài tập 10. Một hộp chứa 50 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 50. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- A : “Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra là số chẵn”;
- B : “Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 4”.

9.3 Bài tập cuối chương

Bài tập 1. Cho A và B là hai biến cố thoả mãn $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,7$ và $P(A \cup B) = 0,8$.

a) Tính xác suất của các biến cố AB , $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

b) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

Bài tập 2. Vệ tinh A lần lượt truyền một tin đến vệ tinh B cho đến khi vệ tinh B phản hồi là đã nhận được. Biết khả năng vệ tinh B phản hồi đã nhận được tin ở mỗi lần A gửi là độc lập với nhau và xác suất phản hồi mỗi lần đều là $0,4$. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất vệ tinh A phải gửi tin không quá 3 lần.

Bài tập 3. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố: "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 6".

Bài tập 4. Một hộp có 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 4 quả bóng vàng có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Cả 4 quả bóng lấy ra có cùng màu";

B: "Trong 4 quả lấy ra có đủ 3 màu".

Bài tập 5. Cường, Trọng và 6 bạn nữ xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất của biến cố: "Có ít nhất một trong hai bạn Cường và Trọng đứng ở đầu hàng".

Bài tập 6. Chọn ngẫu nhiên 3 trong 24 đỉnh của đa giác đều 24 cạnh. Tính xác suất của biến cố: "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông".

Bài tập 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Số được chọn chia hết cho 2 hoặc 7."

B: "Số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn".

Bài tập 8. Cho hai giống cá kiểm mắt đen thuần chủng và mắt đỏ thuần chủng giao phối với nhau được F1 toàn cá kiểm mắt đen. Lại cho cá F1 giao phối với nhau lại được cá con mới. Chọn ra ngẫu nhiên 2 con trong đàn cá con mới. Ước lượng xác suất của biến cố: "Có ít nhất 1 con cá mắt đen trong 2 con cá đó."

Bài tập 9. Hai xạ thủ bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Gọi A là biến cố "Người thứ nhất bắn trúng bia" và B là biến cố "Người thứ hai bắn trúng bia". Hãy mô tả các biến cố $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $A \cup \bar{B}$.

Bài tập 10. Một hộp chứa 6 viên bi, trong đó có 1 bi xanh, 2 bi vàng và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi.

a) Xác định các biến cố sau

A "Hai viên bi cùng màu".

B "Hai viên bi khác màu".

C "Hai viên bi trong đó có ít nhất một viên bi vàng".

b) Hãy mô tả các biến cố $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$.

c) Xét biến cố D "Trong hai viên bi có đúng một viên bi vàng". Chứng minh A và D xung khắc.

Bài tập 11. Cho hai biến cố độc lập A và B biết $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$. Tính

a) $P(A \cup B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$.

b) $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

Bài tập 12. Gieo hai đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để

a) Có ít nhất một đồng xu sấp

b) Có đúng một đồng xu ngửa

Bài tập 13. Một hộp đựng 9 thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

Bài tập 14. Gieo ngẫu nhiên 2 con súc sắc ngẫu nhiên và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố sau

a) Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt một chấm

b) Không có con súc sắc nào xuất hiện mặt một chấm

Bài tập 15. Một hộp đựng 4 bi xanh, 3 bi đỏ và 2 bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để chọn 2 viên bi cùng màu.

Bài tập 16. Hai xạ thủ mỗi người một viên đạn bắn vào bia với xác suất trúng đích của người thứ nhất là $0,85$ và của người thứ hai là $0,7$. Tính xác suất để

a) Cả hai viên đạn trúng đích.

b) Có đúng một viên đạn bắn trúng đích.

c) Có ít nhất một viên đạn bắn trúng đích.

d) Không có viên đạn nào được bắn trúng đích.

Bài tập 17. Một lớp học gồm 40 học sinh trong đó có 15 học sinh nam giỏi Toán và 8 học sinh nữ giỏi Lý. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Hãy tính xác suất để chọn một nam học sinh giỏi Toán hay một nữ học sinh giỏi Lý.

Bài tập 18. Một lớp có 30 học sinh trong đó có 10 nữ sinh. Giáo viên hỏi bài một cách ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh bị hỏi bài

a) Có cùng giới tính

b) Có nhiều hơn một nam sinh

Bài tập 19. Để kiểm tra chất lượng của một công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

Bài tập 20. Có ba bình A, B, C mỗi bình chứa 3 quả cầu trắng, 3 quả cầu xanh và 3 quả cầu đỏ. Từ mỗi bình lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để

a) Ba quả cầu đôi một khác màu.

b) Ba quả cầu có màu giống nhau.

c) Hai quả cầu có cùng màu còn quả kia khác nhau.

Bài tập 21. Từ một hộp đựng 3 quả cầu đen và 4 quả cầu trắng, lấy ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất sao cho

a) 4 quả lấy ra cùng màu

b) Có ít nhất một quả đen

Bài tập 22. Một hộp đựng 8 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để được

a) Ba viên bi đỏ

b) Ba viên bi xanh

c) Ba viên bi cùng màu

d) Ít nhất một viên bi đỏ

Bài tập 23. Một nhóm học sinh có 11 bạn trong đó có 5 bạn nam và 6 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 bạn trong 11 bạn trên để làm trực nhật. Tính xác suất để trong 4 bạn được chọn có

a) 3 bạn nữ và 1 bạn nam

b) Ít nhất 1 bạn là nữ

Bài tập 24. Một nhóm học sinh có 8 bạn trong đó có 3 bạn nam và 5 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 bạn trong 8 bạn trên để làm trực nhật. Tính xác suất để trong 2 bạn được chọn có

a) Có đúng một người là nữ

b) Không có nữ nào

Bài tập 25. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn.

Bài tập 26. Bốn người lên tàu có cầm trên tay 4 vé có ghi số ghế. Tuy nhiên cả 4 người đều không nhìn vào số ghế khi ngồi. Tính xác suất để

a) Cả 4 người ngồi đúng chỗ.

b) Có ít nhất người thứ nhất ngồi đúng chỗ.

c) Chỉ có người thứ nhất ngồi đúng chỗ.

d) Có ít nhất người thứ nhất và người thứ hai ngồi đúng chỗ.

Bài tập 27. An bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư (gửi 4 người bạn) vào 4 phong bì đã ghi địa chỉ (mỗi bì 1 thư). Tìm xác suất để có ít nhất 1 thư đúng địa chỉ.

Bài tập 28. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên nhỏ hơn 2011. Tính xác suất của biến cố sau

A “Số được chọn là số gồm 2 chữ số”

B “Số được chọn là số chia hết cho 3”

Bài tập 29. Trong trò chơi “ném lon”, xác suất mỗi lần ném trúng của bạn Thi là 0,4. Hỏi bạn Thi phải ném bao nhiêu lần, biết rằng xác suất để bạn Thi ném trúng ít nhất một lần trong loạt ném đó là 0,784.

Bài tập 30. Một xạ thủ lần lượt bắn bốn viên đạn độc lập vào một mục tiêu. Xác suất trúng mục tiêu của mỗi viên đạn là 0,7. Tìm xác suất để mục tiêu bị hủy hoàn toàn, biết rằng mục tiêu bị hủy hoàn toàn nếu trúng ít nhất ba viên đạn.

Bài tập 31. Một máy bay có 4 động cơ. Xác suất để mỗi động cơ gặp sự cố khi bay là 0,1. Máy bay thực hiện chuyến bay an toàn nếu chỉ có nhiều nhất một trong bốn động cơ gặp sự cố. Tính xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn.

Bài tập 32. Một nhà trọ có 5 phòng. Có 5 công nhân tới thuê phòng, mỗi người độc lập chọn ngẫu nhiên một phòng. Tính xác suất để nhà trọ còn đúng một phòng trống.

Bài tập 33. Có hai hộp bi. Hộp 1 đựng 10 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp 2 đựng 8 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một viên. Tính xác suất để lấy được

a) Một bi xanh và một bi đỏ

b) Lấy ít nhất một bi đỏ

Bài tập 34. Có hai hộp chứa bi. Hộp thứ nhất có 4 bi đỏ, 3 bi trắng. Hộp thứ hai có 2 bi đỏ, 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để 2 bi cùng màu.

Bài tập 35. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt được chọn từ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Tìm số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

Bài tập 36. Trong đợt ứng phó dịch MERS-CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các Trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất 2 đội của các Trung tâm y tế cơ sở được chọn.

Bài tập 37. Chia ngẫu nhiên 9 hộp sữa (trong đó có 3 hộp có phiếu thưởng) thành 3 phần, mỗi phần 3 hộp. Tính xác suất để mỗi phần có một hộp trúng thưởng.

Bài tập 38. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên x có 2 chữ số. Tính xác suất để $x^2 + 1$ chia hết cho 10.

Bài tập 39. Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

Bài tập 40. Một khách sạn có 6 phòng phục vụ khách. Có 10 khách trong đó có 6 nam và 4 nữ đến đặt phòng. Mỗi phòng chỉ nhận 1 người và ai đến trước được thuê phòng trước. Giả sử 10 người đến ngẫu nhiên. Tìm xác suất sao cho

a) Bốn nam và hai nữ được đặt phòng

b) Có ít nhất 2 trong 4 nữ được đặt phòng