

NGUYỄN HOÀNG THANH - VÕ ĐĂNG KHOA



TÀI LIỆU KHAI PHÓNG NĂNG LỰC HỌC TOÁN 12

THĂNG LONG BÌNH TÂN

542/8 TỈNH LỘ 10, P. BÌNH TRỊ ĐÔNG, Q. BÌNH TÂN, HCM

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

1	Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số	1
1.1	Tính đơn điệu của hàm số	1
1.1.1	Khái niệm hàm số đơn điệu	1
1.1.2	Nhận biết tính đơn điệu của hàm số	1
1.1.3	Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số	2
1.2	Điểm cực trị của đồ thị hàm số	3
1.2.1	Cực đại và cực tiểu	3
1.2.2	Dấu hiệu nhận biết cực trị	3
1.3	Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất	5
1.3.1	Khái niệm	5
1.3.2	Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất	5
1.4	Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	8
1.4.1	Đường tiệm cận ngang	8
1.4.2	Đường tiệm cận đứng	8
1.4.3	Đường tiệm cận xiên	9
1.5	Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số	11
1.5.1	Dạng đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	11
1.5.2	Dạng đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$	11
1.5.3	Dạng đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$	12
1.6	Ôn tập chương	15
1.6.1	Đề số 1	15
1.6.2	Đề số 2	20
1.6.3	Đề số 3	25
2	Véc-tơ và tọa độ trong không gian	29
2.1	Véc-tơ và các phép toán	29
2.1.1	Khái niệm véc-tơ trong không gian	29
2.1.2	Tổng và hiệu của hai véc-tơ trong không gian	29
2.1.3	Tích của một số với một véc-tơ trong không gian	30
2.1.4	Tích vô hướng của hai véc-tơ trong không gian	30
2.2	Tọa độ véc-tơ	34
2.2.1	Hệ trục tọa độ	34
2.2.2	Tọa độ của điểm	34
2.2.3	Tọa độ véc-tơ	34
2.3	Biểu thức tọa độ của phép toán véc-tơ	38
2.3.1	Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, trừ hai vectơ, phép nhân một số với vectơ	38
2.3.2	Tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm tam giác	38
2.3.3	Biểu thức tọa độ tích vô hướng	38
2.3.4	Tích có hướng của hai véc-tơ	38
2.4	Ôn tập chương	42
2.4.1	Đề số 1	42
2.4.2	Đề số 2	46
2.4.3	Đề số 3	51
3	Các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm	55

3.1	Khoảng biến thiên, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	55
3.1.1	Khoảng biến thiên	55
3.1.2	Khoảng tứ phân vị	55
3.2	Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm	60
3.2.1	Khái niệm	60
3.2.2	Ý nghĩa	60
3.3	Ôn tập chương	64
3.3.1	Đề số 1	64
3.3.2	Đề số 2	70
3.3.3	Đề số 3	75
4	Nguyên hàm và tích phân	81
4.1	Nguyên hàm	81
4.1.1	Định nghĩa	81
4.1.2	Tính chất của nguyên hàm	81
4.2	Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	83
4.2.1	Hàm số lũy thừa	83
4.2.2	Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	83
4.2.3	Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$	83
4.2.4	Nguyên hàm của hàm số lượng giác	84
4.2.5	Nguyên hàm của hàm số mũ	84
4.3	Tích phân	88
4.3.1	Định nghĩa tích phân	88
4.3.2	Tính chất của tích phân	88
4.4	Ứng dụng tích phân	92
4.4.1	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$	92
4.4.2	Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$	93
4.4.3	Thể tích của vật thể	94
4.4.4	Thể tích khối tròn xoay	96
4.5	Ôn tập chương	98
4.5.1	Đề 1	98
4.5.2	Đề 2	102
5	Mặt phẳng. Đường thẳng. Mặt cầu	107
5.1	Mặt phẳng	107
5.1.1	Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng	107
5.1.2	Phương trình tổng quát của mặt phẳng	107
5.1.3	Hai mặt phẳng song song. Hai mặt phẳng vuông góc	110
5.1.4	Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	111
5.2	Đường thẳng	115
5.2.1	Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng	115
5.2.2	Phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng	115
5.2.3	Vị trí tương đối của hai đường thẳng	116
5.3	Góc	118
5.3.1	Góc giữa hai đường thẳng	118
5.3.2	Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	118
5.3.3	Góc giữa hai mặt phẳng	119
5.4	Mặt cầu	123
5.4.1	Định nghĩa mặt cầu	123
5.4.2	Phương trình mặt cầu	123
5.5	Ôn tập chương	126
5.5.1	Đề 1	126

5.5.2	Đề 2	129
6	Xác suất có điều kiện	133
6.1	Xác suất có điều kiện	133
6.1.1	Định nghĩa xác suất có điều kiện	133
6.1.2	Sử dụng sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện	134
6.2	Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes	136
6.2.1	Công thức xác suất toàn phần	136
6.2.2	Công thức tính Bayes	136
6.2.3	Luyện tập	137
6.3	Ôn tập chương	141
6.3.1	Đề 1	141
6.3.2	Đề 2	145

Chương 1

Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số

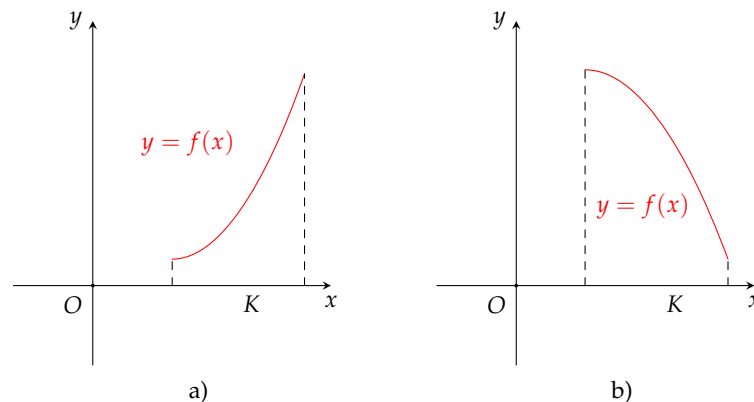
1.1 Tính đơn điệu của hàm số

1.1.1 Khái niệm hàm số đơn điệu

Định nghĩa 1.1. Ký hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , ta có

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là **đơn điệu** trên K .



Lưu ý 1.1. Quan sát hình vẽ ta thấy

- Hình a đồ thị đi từ trái sang phải và **đi lên**, đây là biểu diễn của hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Hình b đồ thị đi từ trái sang phải và **đi xuống**, đây là biểu diễn của hàm số nghịch biến trên khoảng K .

1.1.2 Nhận biết tính đơn điệu của hàm số

Định lý 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

1.1.3 Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

Phương pháp giải 1.1. Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, ta có thể lập bảng xét dấu của đạo hàm (y') hoặc lập cả bảng biến thiên. Các bước lập bảng biến thiên như sau

- Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
- Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- Bước 4. Dựa vào dấu của đạo hàm vẽ chiều biến thiên của hàm số.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Lập bảng biến thiên, xác định các khoảng đơn điệu của các hàm số sau

- a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$. b) $h(x) = x^3$. c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$.
d) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$. e) $y = -x^3 + 3x + 1$. f) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.
g) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. h) $y = -x^3 + 3x^2$. i) $g(x) = x + \frac{1}{x}$;

Bài tập 2. Lập bảng biến thiên, xác định các khoảng đơn điệu của các hàm số sau

- a) $y = \frac{1}{x-1}$. b) $y = \frac{x+1}{x-1}$. c) $y = \frac{5-2x}{x+1}$.
d) $y = \frac{2x}{x-9}$. e) $y = 4 - \frac{2}{2x-1}$. f) $y = 1 - \frac{1}{x-1}$.

Bài tập 3. Lập bảng biến thiên, xác định các khoảng đơn điệu của các hàm số sau

- a) $y = x - \frac{1}{2x-1}$. b) $y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$. c) $y = \frac{x^2-x-1}{x+1}$.
d) $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$. e) $y = \sqrt{9-x^2}$. f) $y = x + \sqrt{3-x}$.

❖ LUYỆN TẬP NÂNG CAO ❖

Bài tập 4. Tìm m để các hàm số sau nghịch biến trên $\mathbb{R}$

- a) $y = -x^3 + mx^2 - 10x + 3$. b) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m+1)x - 3m + 2$.
c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m-2)x + 1$. d) $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - (m-1)x^2 - x + 1$.

Bài tập 5. Tìm m để hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$

- a) $y = (m^2-1)\frac{x^3}{3} + (m+1)x^2 + 3x$. b) $y = \frac{m}{3}x^3 + x^2 + (m-1)x$.
c) $y = x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + 5m - 2$. d) $y = \frac{1}{2}x^3 - mx^2 + (m+2)x - (3m-1)$.

Bài tập 6. Tìm m để các hàm số sau đồng biến trên từng khoảng xác định

- a) $y = \frac{mx-3}{2x-m}$. b) $y = \frac{2x-m}{mx+1}$. c) $y = \frac{x^2+mx-1}{x-1}$. d) $y = x + 2 + \frac{m}{x-1}$.

Bài tập 7. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 2(m+1)x + 4$ đồng biến trên khoảng $[0; 1]$.

Bài tập 8. Tìm m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + 2(m+1)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Bài tập 9. Cho hàm số $\frac{x^2+mx+2}{x+2}$

- a) Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

1.2 Điểm cực trị của đồ thị hàm số

1.2.1 Cực đại và cực tiểu

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in K$, $x_1 \in K$.

- x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b)$ và $x \neq x_0$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CD} .
- x_1 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c; d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c; d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c; d)$ và $x \neq x_1$. Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT} .
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị).
- Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì người ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

1.2.2 Dấu hiệu nhận biết cực trị

Định lý 1.2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

- a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ (f' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_0) thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
- b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ (f' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0) thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

Phương pháp giải 1.2. Để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$, ta lập bảng biến thiên của hàm số. Dựa vào bảng biến thiên kết luận cực trị.

✎ BÀI TẬP TỰ LUẬN ✎

Bài tập 1. Lập bảng biến thiên xác định điểm cực trị (nếu có) của các hàm số sau

- a) $y = x^3 - 3x^2$. b) $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. c) $y = -x^3 + x^2 + 5x + 1$.
d) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$. e) $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. f) $y = x^4 + 2x^2 + 3$.
g) $y = -x^4 + 6x^2 - 8$. h) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$. i) $y = \frac{-x^2 - x + 1}{2x - 1}$.

Bài tập 2. Tìm các điểm cực trị (nếu có) của các hàm số sau

- a) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$. b) $y = \sqrt{4x - x^2}$. c) $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài tập 3. Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức sau:

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

(Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012)

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Bài tập 4. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ (s), cho bởi hàm số sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23.$$

(v được tính bằng ft/s và 1 feet = 0,3048 m)

(Nguồn: J. Stewart, *Calculus, Seventh Edition*, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012).

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Bài tập 5. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (xem hình bên) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt ngang của máng trượt là hình chữ nhật (thiếu cạnh ngang) có chiều cao máng độ dài bằng x . Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



- Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x .
- Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất trẻ em?

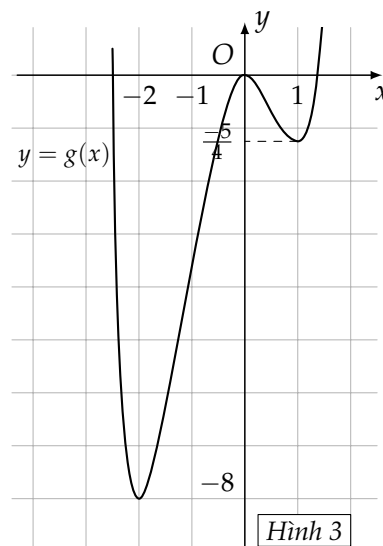
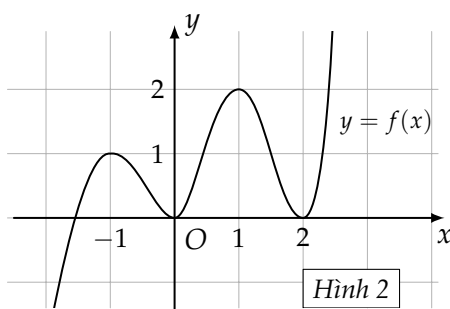
Bài tập 6. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

- Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.
- Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Bài tập 7. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.
- Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Bài tập 8. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt được cho ở Hình 2, Hình 3. Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của mỗi hàm số đó.



1.3 Giá trị lớn nhất. Giá trị nhỏ nhất

1.3.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$.

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$, kí hiệu $M = \max_{\mathcal{D}} f(x)$, nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in \mathcal{D}$ và tồn tại $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$.
- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$, kí hiệu $m = \min_{\mathcal{D}} f(x)$, nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in \mathcal{D}$ và tồn tại $x_1 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_1) = m$.

1.3.2 Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Phương pháp giải 1.3. Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng, ta làm như sau

- Lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó.
- Căn cứ vào bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số trên các khoảng đã cho

- a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$. b) $y = f(x) = 1 + x^2$ trên đoạn $[0; 2]$.
 c) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên $[-1; 1]$. d) $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên $[0; 2]$.
 e) $y = x^4 - 8x^2 + 16$ trên $[-1; 3]$. f) $y = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên $[0; 2]$.

Bài tập 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số trên các khoảng đã cho

- a) $g(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 5)$. b) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ trên $[2; 4]$.
 c) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$. d) $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$ trên đoạn $[0; 3]$.

Bài tập 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau

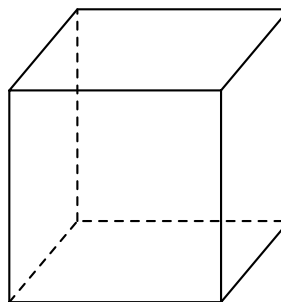
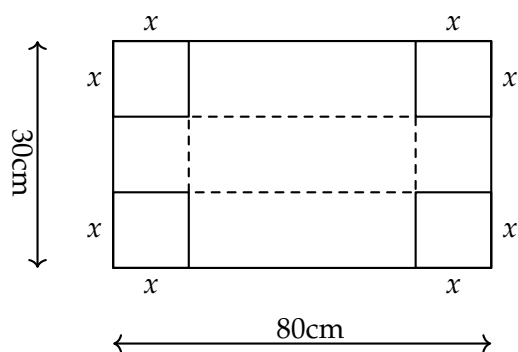
- a) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. b) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ trên khoảng $(1; +\infty)$.
 c) $f(x) = x - \frac{3}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 3]$. d) $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bài tập 4. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau

- a) $h(x) = x\sqrt{2 - x^2}$. b) $f(x) = \frac{4}{1 + x^2}$. c) $y = 2x^2 - x^4$. d) $y = 4x^3 - 3x^4$.
 e) $y = x^3$. f) $y = 2x^4 + 3x^2 - 3$. g) $y = \frac{x^2 + 4x}{x}, x > 0$. h) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

❖ ỨNG DỤNG ❖

Bài tập 5. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình 4a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình 4 b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hình 4

Bài tập 6. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

- Viết công thức biểu diễn R theo p .
- Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

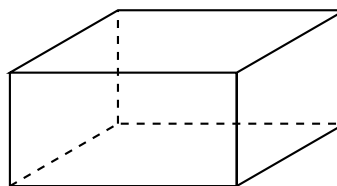
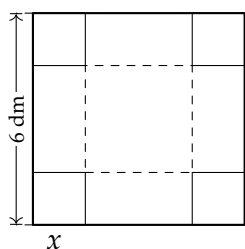
Bài tập 7. Hộp sữa 1 lít được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Bài tập 8. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1 000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức

$$N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2} \text{ (con)}.$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây (Nguồn: R.Larson and B.Edwards. Calculus 10e.Cengage 2014). Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Bài tập 9. Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 6 dm. Bác Ánh cắt bốn góc bốn hình vuông cùng độ dài bằng x (dm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ để được một các hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó. Tìm x để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.



Bài tập 10. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5.$$

trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trên 5 giây đầu tiên đó?

Bài tập 11. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4, \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5.$$

- Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

- b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích xăng trong xe là bao nhiêu lít?
- c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$.
Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Bài tập 12. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng của tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản được cho bởi công thức

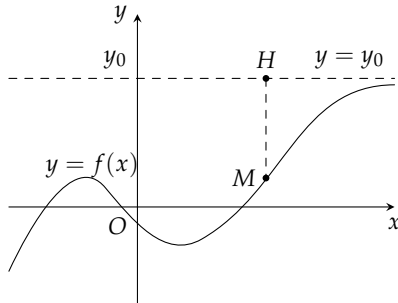
$$V = k(R - r)r^2, \text{ với } 0 \leq r < R.$$

trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (Nguồn: R.Larson and B.Edwards. Calculus 10e.Cengage 2014). Hỏi bán kính của khí quản ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

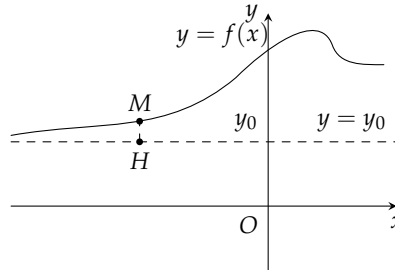
1.4 Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1.4.1 Đường tiệm cận ngang

Nhận xét 1.1. Cho đường thẳng $y = y_0$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = y_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \rightarrow +\infty$ (Hình 5a) hay $x \rightarrow -\infty$ (Hình 5b).



Hình 5a



Hình 5b

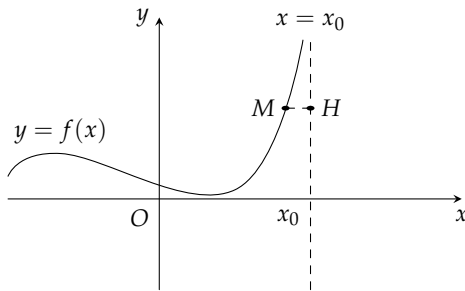
Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị (C): $y = f(x)$.

Định nghĩa 1.4. Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

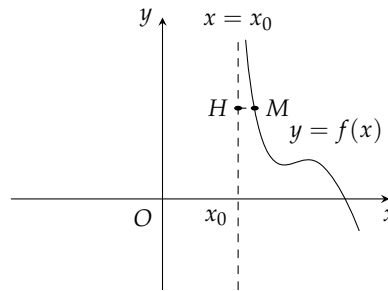
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

1.4.2 Đường tiệm cận đứng

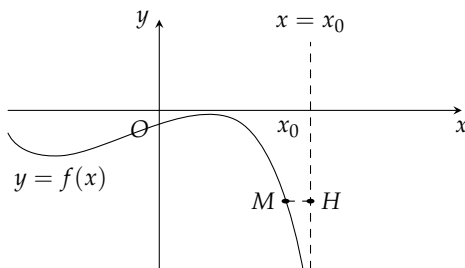
Nhận xét 1.2. Cho đường thẳng $x = x_0$ và hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $x = x_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \rightarrow x_0^+$ (Hình 6b, d) hay $x \rightarrow x_0^-$ (Hình 6a, c).



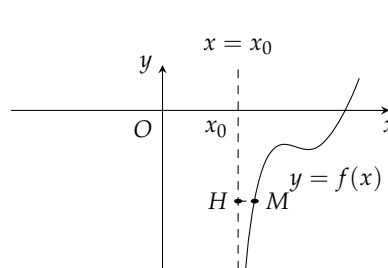
Hình 6a



Hình 6b



Hình 6c



Hình 6d

Và đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị (C): $y = f(x)$.

Định nghĩa 1.5. Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

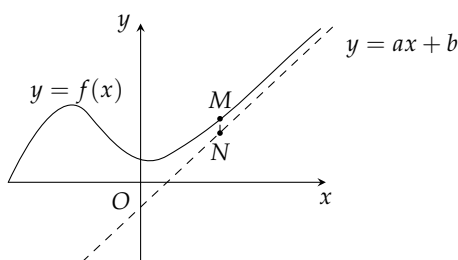
$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

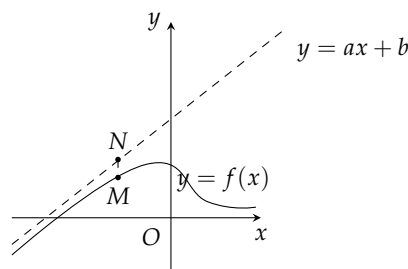
$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

1.4.3 Đường tiệm cận xiên

Nhận xét 1.3. Cho đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ và điểm N thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có cùng hoành độ x . Khi đó, độ dài MN tiến tới 0 khi $x \rightarrow +\infty$ (Hình 7a) hay $x \rightarrow -\infty$ (Hình 7b).



Hình 7a



Hình 7b

Và đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$.

Định nghĩa 1.6. Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Định lý 1.3. Để xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có thể áp dụng công thức sau

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$$

(Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang $y = b$).

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Tìm các đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{4}{x-2}$

b) $y = \frac{x+2}{x}$

c) $y = 1 - \frac{x+2}{x}$

d) $y = \frac{x-1}{x+2}$

e) $y = \frac{3-2x}{x+5}$

f) $y = \frac{-x+2}{x-1}$

g) $y = 2 - \frac{1}{x-2}$

h) $y = \frac{1}{x-2} + \sqrt{2}$

Bài tập 2. Tìm các đường tiệm cận đứng và xiên của đồ thị hàm số

a) $y = x - 3 + \frac{1}{x-4}$

b) $y = x + \frac{2}{x+1}$

c) $y = x + 1 + \frac{3}{x-2}$

d) $y = \frac{x^2+2}{2x-4}$

e) $y = \frac{2x^2-3x-6}{x+2}$

f) $y = \frac{2x^2+9x+11}{2x+5}$

Bài tập 3. Tìm các đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số

a) $y = \sqrt{x^2-1}$

b) $y = x + \sqrt{x^2-4}$

c) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Bài tập 4. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau

a) $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

b) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 3}$.

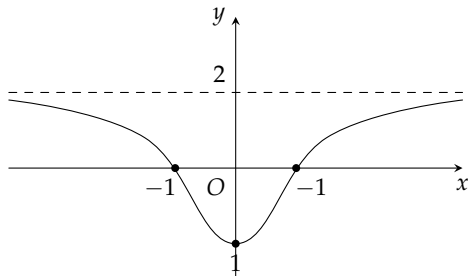
c) $y = 2x - 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$.

d) $y = \frac{x}{2 - x}$;

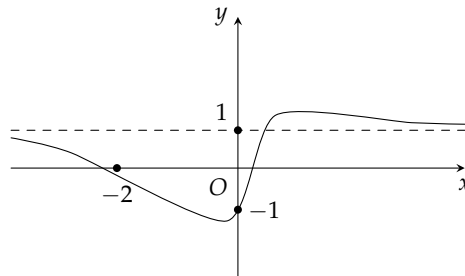
e) $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$;

f) $y = x - 3 + \frac{1}{x^2}$

Bài tập 5. Đồ thị hàm số ở Hình 8a, Hình 8b đều có đường tiệm cận ngang là đường thẳng nét đứt. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



Hình 8a



Hình 8b

a) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$

c) $y = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

❖ ỨNG DỤNG ❖

Bài tập 6. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

- Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200 + t}$.
- Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Bài tập 7. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2 + x} \right)$, trong đó $x \geq 1$ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus I Oe, Cengage 2014).

- Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- Nếu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Bài tập 8. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

1.5 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Phương pháp giải 1.4. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số là bài toán tổng hợp nhiều kỹ năng. Người ta thực hiện khảo sát và vẽ đồ thị hàm số theo các bước sau:

- a) Tìm tập xác định của hàm số.
- b) Xét sự biến thiên của hàm số.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
 - Tính đạo hàm y' và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên, cực trị của hàm số (nếu có).
- c) Vẽ đồ thị hàm số.
 - Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
 - Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (trong trường hợp đơn giản), ...

1.5.1 Dạng đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt	$y' = 0$ vô nghiệm	$y' = 0$ có nghiệm kép

Nhận xét 1.4. Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{b}{3a}; f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$. Hoành độ $-\frac{b}{3a}$ của tâm đối xứng đó là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

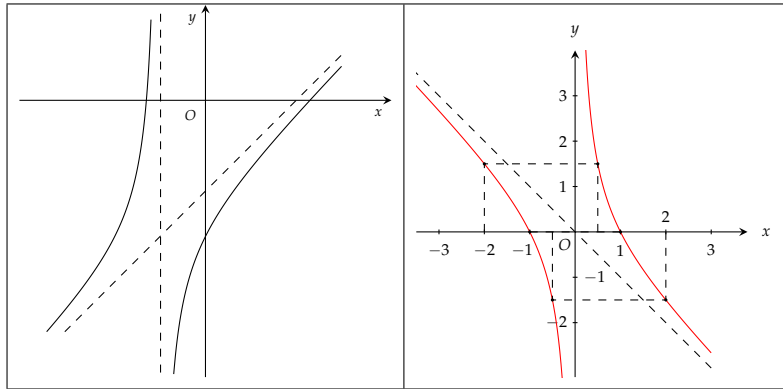
1.5.2 Dạng đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

đồng biến ($y' > 0$)	nghịch biến ($y' < 0$)

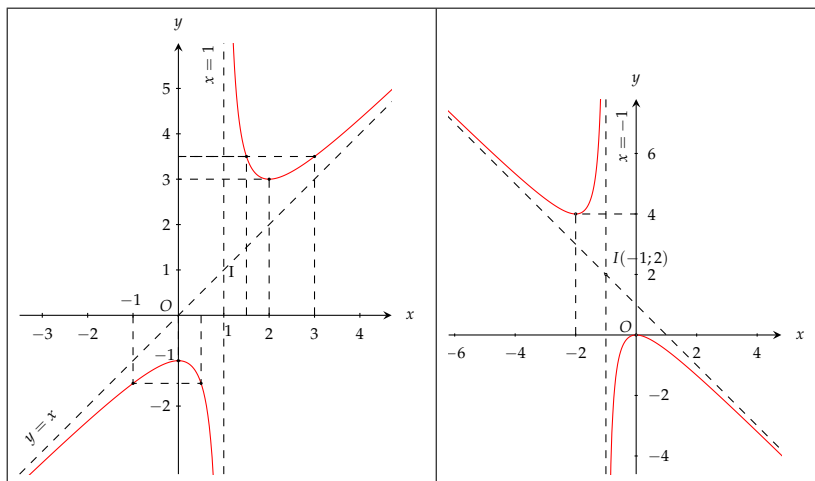
Nhận xét 1.5. Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) nhận giao điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

1.5.3 Dạng đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

- Dạng không có cực trị



- Dạng có 2 cực trị



Nhận xét 1.6. Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0, -\frac{n}{m}$ không là nghiệm của đa thức ax^2+bx+c) nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

b) $y = -x^3 + 3x + 2$.

c) $y = 3x - x^3 - 2$;

d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

e) $y = -x^3 + x^2 - x - 1$.

f) $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Bài tập 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số sau

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

b) $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

c) $y = \frac{1-x}{x+2}$.

d) $y = 1 + \frac{1}{1-x}$.

e) $y = \frac{-x+1}{x+3}$.

f) $y = \frac{x-1}{x-2}$.

g) $y = \frac{1-2x}{x+3}$.

h) $y = 1 + \frac{1}{1-2x}$.

Bài tập 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số sau

a) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

b) $y = \frac{-x^2}{x + 1}$.

c) $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$.

d) $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$.

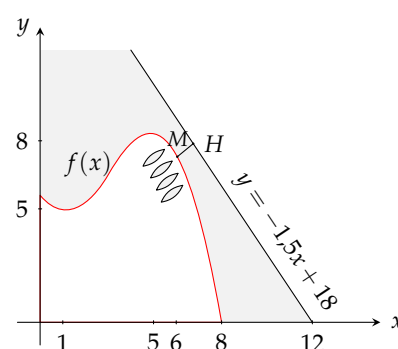
⇔ ỨNG DỤNG ⇔

Bài tập 4. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người)

- Tính số dân của thị trấn vào năm 2022 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).
- Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác tìm trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $f(t)$.
- Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).
 - Tính tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn đó.
 - Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm?

Bài tập 5. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa (Hình bên dưới), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100 m (Nguồn: A. Bigalke et al, Mathematik, Gnanthars ma-1, Carnelsen 2010).

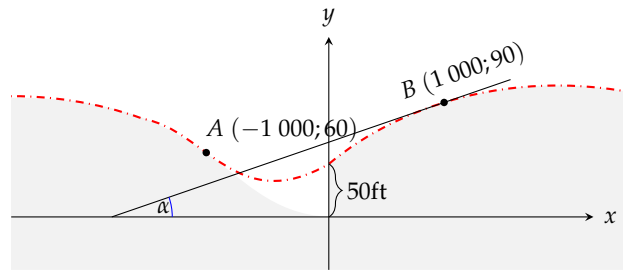
- Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài bao nhiêu mét?
- Tại những điểm nào trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) thì khoảng cách theo phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất? Tìm khoảng cách lớn nhất đó.
- Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tìm tọa độ của điểm để xây bến thuyền này.



Lưu ý 1.2. Để vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số vào giải quyết một số bài toán trong thực tiễn, trước hết ta cần xây dựng mô hình toán học cho bài toán, trong đó khâu then chốt là đưa ra một hàm số mô phỏng được mối liên hệ giữa các đối tượng, hiện tượng trong bài toán đó. Ở các ví dụ trên, những hàm số như vậy được cho sẵn. Trong các bài tập dưới đây, ta sẽ tìm hiểu một vài cách xây dựng đơn giản cho những hàm số như thế.

Bài tập 6. (Bài toán thiết kế mô hình đường giao thông) Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet (Hình 27), người ta có thể làm như sau

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox , đơn vị trên mỗi trục tọa độ là feet (1 feet = 0,3048 m).
- Chọn hai vị trí A, B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác tìm được tọa độ của hai điểm A, B và góc dốc α (đơn vị: độ) tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1\ 000; 60), B(1\ 000; 90)$ và $\tan \alpha = 0,04$ (Hình 27) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).
- Trong hệ trục tọa độ Oxy , quan sát đường cong (vẽ bằng nét đứt) mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gợi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) sao cho trong hệ trục tọa độ Oxy , đồ thị của hàm số đó trên đoạn $[-1\ 000; 1\ 000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: Hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04.



Hãy xác tìm hàm số bậc ba đó.

Bài tập 7. (Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau

- Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau t tuần học ($5 \leq t \leq 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong Bảng 1 (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

- Ta cần chọn hàm số $y = f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở Bảng 1, tức là ở hệ trục tọa độ Oxy , đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0; +\infty)$ "gần" với các điểm $A(5; 38)$, $B(10; 56)$, $C(15; 79)$, $D(20; 90)$, $E(25; 93)$, $G(30; 94)$. Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y = f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}, M > 94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở Bảng 1. Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t) = \frac{at+b}{ct+d} (ac \neq 0)$ cho mục đích đó. Dựa vào Bảng 1, ta chọn hàm số $f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2} (t > 0)$.

- Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).
- Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

1.6 Ôn tập chương

1.6.1 Đề số 1

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 2$.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

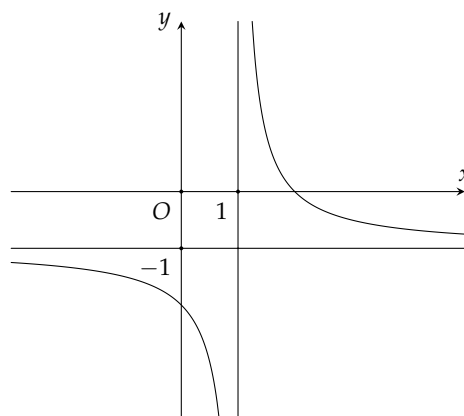
Câu 2. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A. $y = -2$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 2$.
- D. $y = 1$.

Câu 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang là

- A. $y = -1$.
- B. $x = 1$.
- C. $x = 0$.
- D. $y = 1$.



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	1

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

- A. 1.
- B. 4.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng phân biệt.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ là

- A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

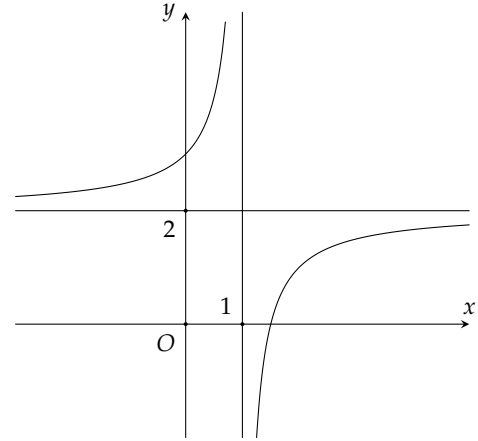
Câu 7. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$ là

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = 2$.

Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận đứng của đồ thị là

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = 2$.



Câu 9. Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- A. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (ax + b)] = 0$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = a$.
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$. D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = b$.

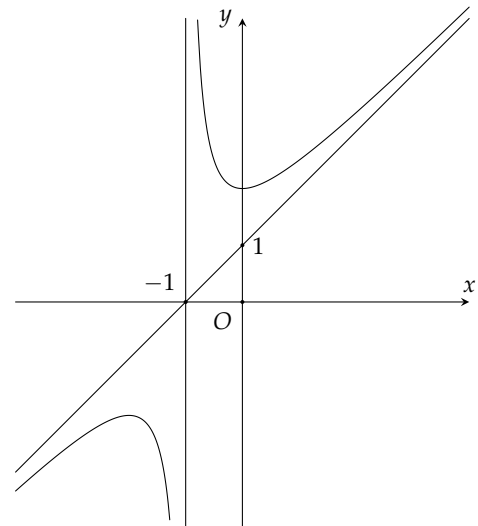
Câu 10. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng

- A. $y = x$. B. $y = x - 1$. C. $y = 2x - 1$. D. $y = x + 1$.

Câu 11.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng

- A. $y = x$. B. $y = x - 1$.
C. $y = 2x - 1$. D. $y = x + 1$.



Câu 12. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ có mấy đường tiệm cận xiên?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. C	Câu 2. D	Câu 3. A	Câu 4. C	Câu 5. C	Câu 6. A
Câu 7. A	Câu 8. B	Câu 9. C	Câu 10. D	Câu 11. D	Câu 12. C

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$ có đồ thị (C).

Phát biểu	Đ	S
a) Tiệm cận đứng của hàm số là $x = \frac{3}{2}$.		
b) Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận thuộc đường thẳng $x - y - 1 = 0$.		
c) Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại các điểm A và B. Diện tích của tam giác IAB bằng $\frac{25}{4}$, với I là giao điểm hai đường tiệm cận.		
d) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ I đến một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.		

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 4x + 3 + m}{x - 2}$ có đồ thị (C).

Phát biểu	Đ	S
a) Khi $m = 0$, tiệm cận đứng của (C) là $x = 2$.		
b) Khi $m = 0$, tọa độ giao điểm của tiệm cận đứng của (C) và đường thẳng $x - y - 1 = 0$ thuộc parabol $y = x^2$.		
c) Khi $m = 0$, lấy M là điểm bất kỳ trên (C), gọi d_1 là khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng, gọi d_2 là khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x + 2$. Tích $d_1 \cdot d_2 = 7$.		
d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số không có tiệm cận đứng. Số phần tử của S là 1.		

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2 - 2x + 3}$ có đồ thị (C).

Phát biểu	Đ	S
a) Khi $m \neq 0$, (C) có tiệm cận ngang $y = 0$.		
b) Khi $m = 0$, tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) thuộc đường thẳng $x - y - 2 = 0$.		
c) (C) có một tiệm cận đứng khi $m = 2$.		
d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên âm của $m \in [-5; -1]$ để (C) có ba đường tiệm cận. Số phần tử của S là 1.		

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + m}$ có đồ thị (C).

Phát biểu	Đ	S
a) Khi $m = 0$, (C) có tiệm cận ngang $y = 1$.		
b) Khi $m = 0$, (C) có ba đường tiệm cận.		
c) Có hai giá trị của m để (C) có đúng một tiệm cận đứng.		
d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của $m \in [-8; 8]$ để (C) có ba đường tiệm cận. Số phần tử của S là 7.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.**a Đ b Đ c S d Đ****Câu 14.****a Đ b S c S d S****Câu 15.****a Đ b Đ c S d S****Câu 16.****a Đ b Đ c Đ d S****PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn****Câu 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	—
$f(x)$	4		3	2
		—1		

Biết đồ thị hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x} - x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = a$ và $y = b$, trong đó $a < b$. Tính $S = a - 100b$.

KQ:

Câu 18. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 150x + 900$ (nghìn đồng). Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm không vượt quá t (nghìn đồng). Tìm giá trị t .

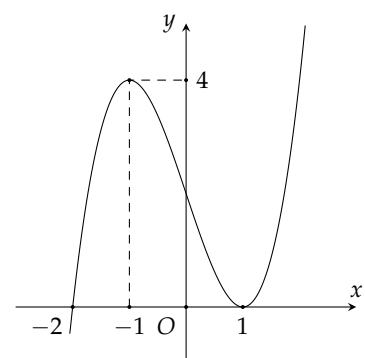
KQ:

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) =$

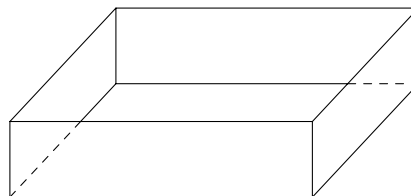
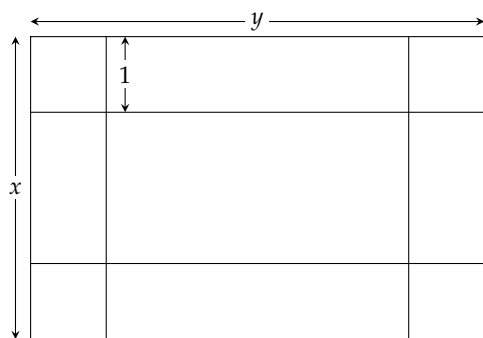
$$\frac{\sqrt{x}}{f(x^2 - 1) - 4}.$$

KQ:



Câu 20. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là x mét, y mét với $x > 2$, $y > 2$ và diện tích bằng 10 m^2 , người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng 1 mét. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(2; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

KQ:

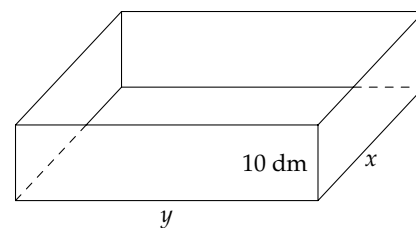


Câu 21. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

KQ:

Câu 22.

Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng 5 m^3 . Chiều cao của bể là 10 dm, các kích thước khác là x mét, y mét với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17.
-298

Câu 18. 150

Câu 19. 2

Câu 20. 2

Câu 21. 2

Câu 22. 29

1.6.2 Đề số 2

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

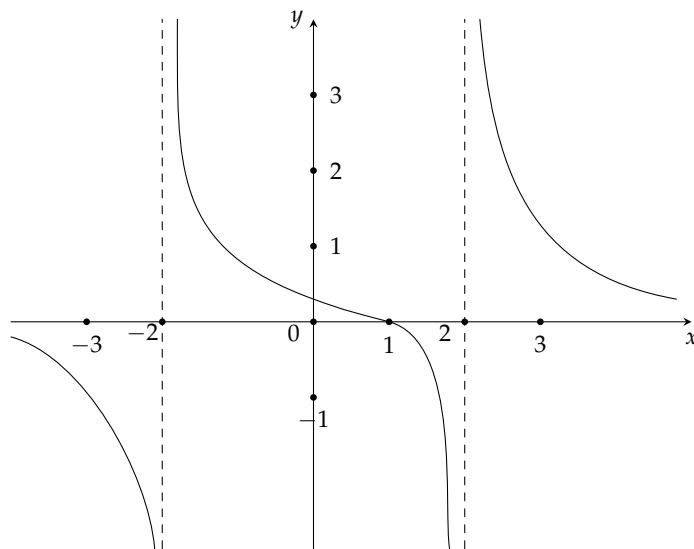
Câu 1. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

- A. $y = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $y = 2$.

Câu 2. Tiệm cận đứng của đồ thị số hàm số $y = \frac{4x^2 - x + 1}{3x + 2}$ là đường thẳng

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = \frac{4}{3}$. C. $x = -\frac{2}{3}$. D. $x = -\frac{3}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng

- A. $y = 0$. B. $x = 2$ và $x = -2$. C. $x = 0$. D. $y = 2$ và $y = -2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	—		—
y	2	$+\infty$	2
	$-\infty$		

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
 B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
 C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$.

Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3-2x}{x+1}$ là

- A. $x = -2$. B. $y = -2$. C. $y = -1$. D. $x = -1$.

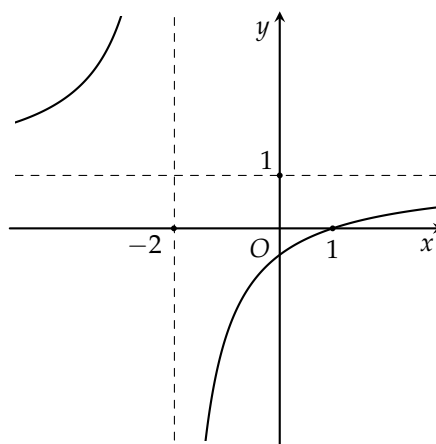
Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	0	2	$-\infty$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. $x = 1$. B. $y = -2$. C. $x = -2$. D. $y = 1$.

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau có đường tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$. B. $y = x^3 - 3x$. C. $y = \log_2 x$. D. $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$.

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận xiên?

- A. $y = x^2$. B. $y = x^3 - 3x + 4$. C. $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Câu 10. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$ là

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = x + 2$. C. $y = 2 - x$. D. $y = x - 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2}$. Tọa độ giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- A. $(-2; 3)$. B. $(2; 1)$. C. $(2; -1)$. D. $(3; 2)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 16}{x}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng

- A. 8. B. 16. C. 4. D. 12.

BẢNG ĐÁP ÁN

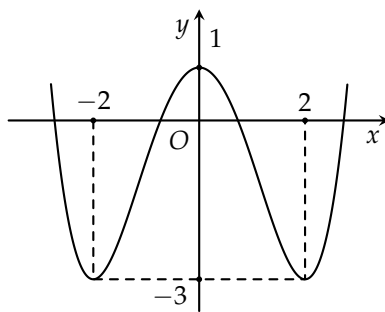
Câu 1. B	Câu 2. C	Câu 3. B	Câu 4. A	Câu 5. B	Câu 6. A
Câu 7. D	Câu 8. A	Câu 9. D	Câu 10. B	Câu 11. C	Câu 12. A

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 + 2x - 1}{x-1}$ với m là tham số. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

- a) Với $m = -1$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
- b) Với $m = 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x - 1$.
- c) Với $m = 2$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.
- d) Với $m = 1$, tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 14. Cho hàm số trùng phương $y = f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $y = g(x) = \frac{x^2 - 2x}{(f(x))^2 + 2f(x) - 3}$.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 6.
- b) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đúng một tiệm cận ngang.
- c) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 tiệm cận đứng.
- d) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 4.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{mx-3}$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

- a) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
- b) Với $m = 3$ thì điểm $A(1; 2)$ thuộc tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- c) Với $m = 1$ thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 9.
- d) Với $m = 1$ tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng 7.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x + m^2 - 2m + 1}{1-x}$ (1), với m là tham số. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

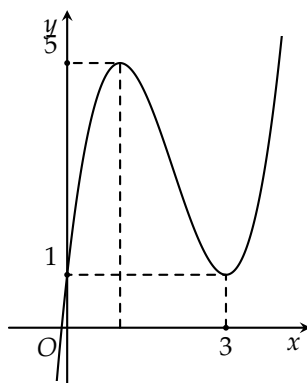
- a) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên đi qua $M(2; -3)$.
- b) Với $m = 1$ thì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là $\frac{1}{2}$.
- c) Với $m = 1$ thì tâm đối xứng của đồ thị là điểm $I(1; -2)$.
- d) Với $m = 1$ thì tiệm cận xiên, tiệm cận đứng cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình thang vuông có diện tích bằng 3.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.**a Đ b S c S d Đ****Câu 14.****a Đ b Đ c S d S****Câu 15.****a S b Đ c S d Đ****Câu 16.****a S b S c Đ d S****PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn****Câu 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	+	-
$f(x)$	5	3		1	2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[0; 10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{f(x) - m + 2}$ có đúng 4 đường tiệm cận?

KQ: **Câu 18.** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.Cố bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2020}{f^2(x) - 2(m+1) \cdot f(x) + 5(2m-3)}$$

có đúng 6 đường tiệm cận.

KQ:

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{2x+4}{(m-1)x^2 - 2mx - 6}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2025; 2025]$ để đồ thị hàm số có đúng 3 đường tiệm cận?

KQ:

Câu 20. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2 + 4x + m}$ có đúng 3 đường tiệm cận. Tổng giá trị các phần tử của tập S bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 21. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24 \text{ (m}^2\text{)}$. Gọi $x \text{ (m)}$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

KQ:

Câu 22. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường $y = ax + b$. Tính $4a + b$.

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN**Câu 17.** 5**Câu 18.** 1**Câu 19.** 4043**Câu 20.** -9**Câu 21.** 2**Câu 22.** 2024

1.6.3 Đề số 3

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = 2x + 3$.

Câu 2. Xác định tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

- A. (1;2). B. (1;1). C. (1;-1). D. (1;0).

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		-	+
y	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 4. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x}$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

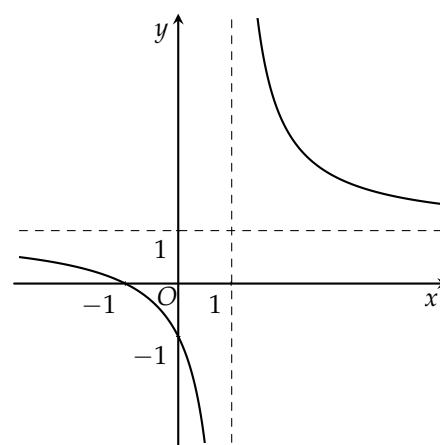
Câu 5. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

- A. $x = 2$. B. $y = 2$. C. $x = 1$. D. $y = 1$.

Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là

- A. $x = -1; y = 1$. B. $x = 1; y = -1$.
C. $x = -1; y = -1$. D. $x = 1; y = 1$.



Câu 7. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$ là

- A. $y = x + 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = x + 1$. D. $y = x - 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'	$-$		$+$	
y	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$	

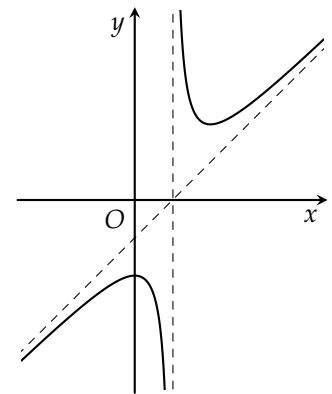
Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận xiên và một tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên.
 D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận xiên.



Câu 10. Đồ thị hàm số nào sau đây có tiệm cận xiên

- A. $y = x^2 - 2x$. B. $y = x + 1$. C. $y = \frac{x}{x+2}$. D. $y = \frac{x^2}{x+1}$.

Câu 11. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$ là

- A. $y = x$. B. $y = x + 1$. C. $y = x + 2$. D. $y = x + 3$.

Câu 12. Số tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 - x + 3}$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. B	Câu 2. B	Câu 3. D	Câu 4. D	Câu 5. B	Câu 6. D
Câu 7. B	Câu 8. A	Câu 9. C	Câu 10. D	Câu 11. B	Câu 12. A

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 2)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{1 \pm \sqrt{3}\}$.
 b) Hàm số $y = g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.

- c) Hàm số $y = g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.
 d) Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 3.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1), với m là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khi $m = 1$ thì đồ thị hàm số của (1) không có tiệm cận ngang.
 b) Khi $m = 1$ thì đồ thị hàm số của (1) có tiệm cận đứng là $y = -3$.
 c) Khi $m = 1$ thì đồ thị hàm số của (1) có tiệm cận xiên là $y = x - 2$.
 d) Khi góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng 45° thì $m = 2$.

Câu 15. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^2 + (3 - m)x + m^2 - 2}{x - 1}$, với m là tham số. Gọi (d) là đường tiệm cận xiên của (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khi $m = 2$ thì (d) có phương trình là $y = 2x + 3$.
 b) Khi $m = 1$ thì (d) đi qua $A(1; 4)$.
 c) Có 2 đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 9.
 d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\sqrt{3}$ thì $m = \sqrt{5}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; 2) \setminus \{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+		-	0	+
y	-2	3	$+\infty$	$+\infty$	

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
 b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3.
 c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x = -2$ và $x = 2$.
 d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = -2$ và $y = 3$.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a S b Đ c S d S

Câu 14.

a Đ b S c Đ d S

Câu 15.

a Đ b Đ c Đ d S

Câu 16.

a Đ b S c Đ d S

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

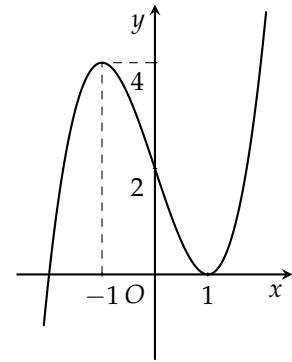
Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x^2 - 8x + m}$ có 3 đường tiệm cận?

KQ:

Câu 18.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x) - 2f(x)}$.

KQ:

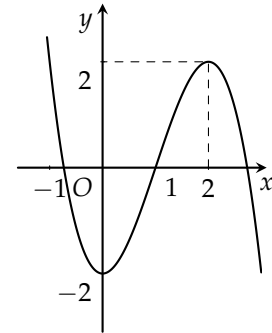
**Câu 19.**

Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{1+mx^2}}{f(x) - m}$$

có đúng hai đường tiệm cận?

KQ:



Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{10 + \sqrt{6x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tìm số giá trị nguyên của tham số m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

KQ:

Câu 21. Người ta thống kê được chi phí sửa chữa, vận hành máy móc trong một năm của một xưởng sản xuất được tính bởi công thức $f(x) = \frac{2000x - 1500}{35x + 5}$ (triệu đồng). Biết x là số năm kể từ lúc máy móc vận hành lần đầu tiên, số năm càng nhiều thì chi phí càng cao. Khi số năm x đủ lớn thì chi phí vận hành máy móc trong một năm gần với số nào? (làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

KQ:

Câu 22. Để thiết kế một bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 80 cm, thể tích là 12800 cm³. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70 000 VNĐ/m² và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100 000 VNĐ/m². Gọi x là chiều dài của đáy bể cá với $(x > 0, x(m))$; $f(x)$ là hàm số xác định chi phí để hoàn thành bể cá. Xác định số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)$.

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17. 14

Câu 18. 5

Câu 19. 99

Câu 20. 2

Câu 21. 57,1

Câu 22. 2

Chương 2

Véc-tơ và tọa độ trong không gian

2.1 Véc-tơ và các phép toán

2.1.1 Khái niệm véc-tơ trong không gian

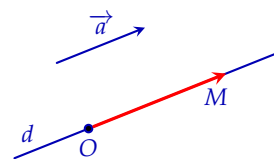
Định nghĩa 2.1. Véc-tơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

- Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B thì ta có một véc-tơ, ký hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là “véc-tơ AB ”.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ, véc-tơ còn được ký hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Định lý 2.1. Cho điểm O và véc-tơ $\vec{a}$. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm M trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Để xác định điểm M , ta làm như sau

- Qua O kẻ đường thẳng d song song hoặc trùng với giá của véc-tơ $\vec{a}$.
- Lấy điểm M trên đường thẳng d sao cho hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}$ là cùng hướng và độ dài đoạn thẳng OM bằng độ dài véc-tơ $\vec{a}$.



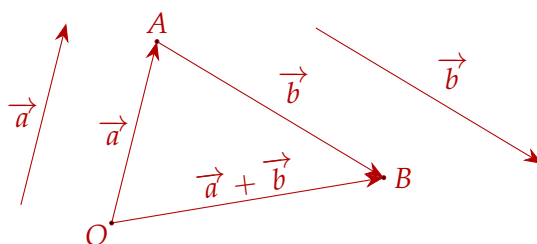
Lưu ý 2.1. Các khái niệm có liên quan đến véc-tơ trong không gian như: giá của véc-tơ, độ dài của véc-tơ, véc-tơ cùng phương, véc-tơ cùng hướng, véc-tơ-không, hai véc-tơ bằng nhau, hai véc-tơ đối nhau, ... được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

2.1.2 Tổng và hiệu của hai véc-tơ trong không gian

Định nghĩa 2.2. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là **tổng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$** , ký hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **phép cộng véc-tơ**.



Quy tắc 2.1. Đối với véc-tơ trong không gian, ta cũng có các quy tắc sau

- Với ba điểm A, B, C trong không gian, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm);
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).

Quy tắc 2.2. Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp).

Định nghĩa 2.3. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Hiệu của hai véc-tơ $\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{b}$ là tổng của véc-tơ $\vec{a}$ và véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{b}$, ký hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Quy tắc 2.3. Với ba điểm O, A, B trong không gian, ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (Quy tắc hiệu).

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba véc-tơ đó

- a) Bằng véc-tơ $\overrightarrow{AD}$.
 b) Là véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{AD}$.
 c) Bằng véc-tơ $\overrightarrow{AA'}$.
 d) Là véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{AA'}$.

Bài tập 2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Bài tập 3. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

Bài tập 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$.

Bài tập 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$.

Bài tập 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.

Bài tập 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$.

Bài tập 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng đơn vị. Tìm độ dài các véc-tơ sau đây:

- a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$.
 b) $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}$.

2.1.3 Tích của một số với một véc-tơ trong không gian

Định nghĩa 2.4. Cho số thực $k \neq 0$ và véc-tơ $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Tích của số k với véc-tơ $\overrightarrow{a}$ là một véc-tơ, kí hiệu là $k\overrightarrow{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với véc-tơ $\overrightarrow{a}$ nếu $k < 0$.
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\overrightarrow{a}|$.

Lưu ý 2.2. Người ta quy ước: $0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Do đó, $k\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

Tính chất 2.1. Với hai véc-tơ bất kì $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và hai số thực h , k ta có

- a) $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$
 b) $k(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} - k\overrightarrow{b}$
 c) $(h + k)\overrightarrow{a} = h\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{a}$
 d) $h(k\overrightarrow{a}) = (hk)\overrightarrow{a}$
 e) $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$
 f) $(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$.

2.1.4 Tích vô hướng của hai véc-tơ trong không gian

Định nghĩa 2.5. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Lấy một điểm O tùy ý và vẽ hai véc-tơ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ trong không gian, kí hiệu $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

Lưu ý 2.3. $0^\circ \leq (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \leq 180^\circ$.

Định nghĩa 2.6. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}),$$

trong đó $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

Lưu ý 2.4. Người ta quy ước: Tích vô hướng của một véc-tơ bất kì với véc-tơ $\overrightarrow{0}$ bằng 0.

Tính chất 2.2. Với các véc-tơ bất kì $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ và số thực k tùy ý, ta có

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán).
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối).
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai véc-tơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 9. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Chứng minh rằng

a) $\vec{BC} = 2\vec{HK}$.

b) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}$.

Bài tập 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC , I là trung điểm MN . Chứng minh rằng

a) $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$.

b) $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$.

Bài tập 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của BB' . Đặt $\vec{CA} = \vec{a}, \vec{CB} = \vec{b}, \vec{CC'} = \vec{c}$. Chứng minh rằng $\vec{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Bài tập 12. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

b) $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{DB}$.

Bài tập 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính:

a) $\vec{A'B} \cdot \vec{D'C'}$.

b) $\vec{D'A} \cdot \vec{BC}$.

c) Các góc $(\vec{A'D}, \vec{B'C'})$. d) $(\vec{AD'}, \vec{BD})$.

Bài tập 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$. Chứng minh rằng $\vec{A'C} = 3\vec{A'G}$.

Bài tập 15. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) Tính các tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{AB} \cdot \vec{AM}$.

b) Tính góc $(\vec{AB}, \vec{CD})$.

Bài tập 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1.

a) Tính các tích vô hướng: $\vec{AB} \cdot \vec{A'C'}, \vec{AB} \cdot \vec{CC'}$.

b) Tính góc $(\vec{AC}, \vec{AC'})$ (kết quả làm tròn đến phút).

Bài tập 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{BD}, \vec{B'C}$.

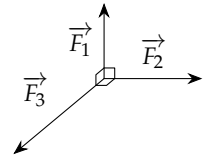
Bài tập 18. Cho tứ diện đều $ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC . Hãy tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{MN}$ và $\vec{BD}$.

Bài tập 19. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{OM}$ và $\vec{AC}$.

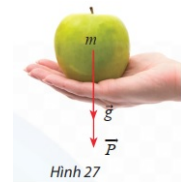
Bài tập 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính $\vec{A'B} \cdot \vec{D'C'}$ và $\vec{D'A} \cdot \vec{BC}$.

❖ ỨNG DỤNG ❖

Bài tập 21. Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.

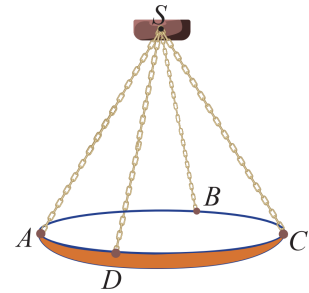


Bài tập 22. Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình bên).



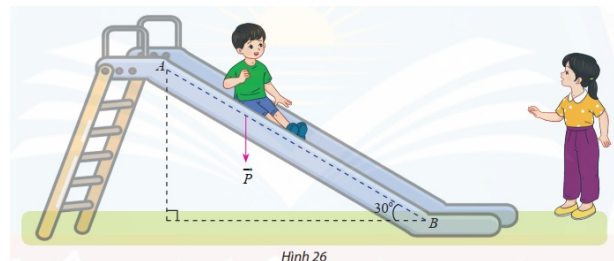
Bài tập 23. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$.

- Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2 , tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.
- Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích.

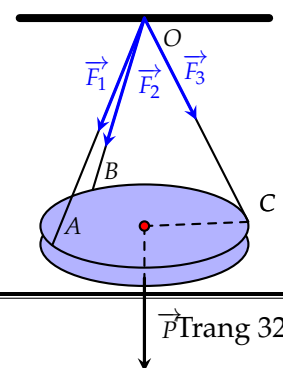


Bài tập 24. Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình bên).

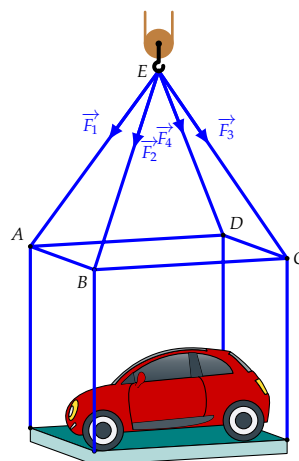
- Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
- Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.



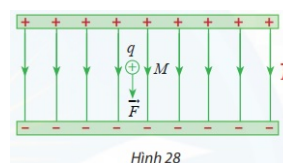
Bài tập 25. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



Bài tập 26. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng ($ABCD$) song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng ($ABCD$) một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

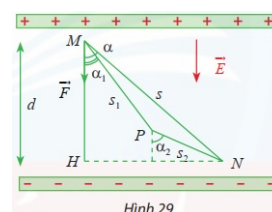


Bài tập 27. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C (Hình bên).



Hình 28

Bài tập 28. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình bên). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}$ C, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5$ N/C và $d = MH = 5$ mm. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Hình 29

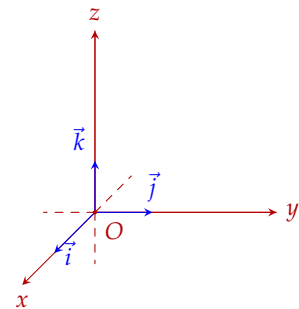
2.2 Tọa độ véc-tơ

2.2.1 Hệ trục tọa độ

Định nghĩa 2.7.

Hệ gồm 3 trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một chung gốc tọa độ O . Gọi $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là các véc-tơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian hay hệ trục $Oxyz$.

- Điểm O : Gốc tọa độ.
- Trục Ox : Trục hoành.
- Trục Oy : Trục tung.
- Trục Oz : Trục cao.



Tính chất 2.3.

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$; $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$;
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.
- Các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc với nhau.

2.2.2 Tọa độ của điểm

Định nghĩa 2.8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M . Nếu $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục $Oxyz$. Kí hiệu là $M(x; y; z)$ hoặc $M = (x; y; z)$; x được gọi hoành độ, y được gọi tung độ, z được gọi cao độ.

Ta có thể viết

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \Leftrightarrow M = (x; y; z).$$

Định lý 2.2. Tọa độ của một điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ luôn tồn tại và duy nhất.

2.2.3 Tọa độ véc-tơ

Định nghĩa 2.9. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ véc-tơ $\vec{a}$ đối với hệ $Oxyz$ và ta viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hay $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$. Trong đó, a_1 gọi là hoành độ của véc-tơ $\vec{a}$, a_2 gọi là tung độ của véc-tơ $\vec{a}$, a_3 gọi là cao độ của véc-tơ $\vec{a}$.

Ta có thể viết

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3).$$

Định lý 2.3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,

- Nếu $\vec{u} = (a; b; c)$ thì $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.
- Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ thì $\vec{u} = (a; b; c)$.

Định lý 2.4. Với $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, ta có

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

Như vậy, mỗi véc-tơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

Định lý 2.5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó, ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Tìm tọa độ điểm trong các trường hợp sau

- a) $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. b) $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. c) $\overrightarrow{OK} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$.
 d) $\overrightarrow{OP} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. e) $\overrightarrow{OH} = 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}$. f) $\overrightarrow{OT} = 2\vec{i}$.

Bài tập 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = (3; 1; -2)$. Tìm tọa độ điểm A .

Bài tập 3. Viết $\overrightarrow{OA}$ dạng tổng các véc tơ đơn vị biết

- a) $A(1; 2; 3)$. b) $A(0; 1; -3)$. c) $A(0; 0; 3)$. d) $A(4; 0; 1)$.

Bài tập 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4; 3; -1)$ và $N(2; -1; -3)$. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$.

Bài tập 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và véc-tơ $\vec{u} = (3; -4; 2)$. Hãy biểu diễn theo các véc-tơ $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi véc-tơ sau

- a) $\overrightarrow{OA}$; b) $\vec{u}$.

Bài tập 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ và véc-tơ $\vec{v} = -7\vec{j} + \vec{k}$. Hãy tìm tọa độ của

- a) Điểm B ; b) Véc-tơ $\vec{v}$.

Bài tập 7. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{x}$ biết

- a) $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j}$. b) $\vec{x} = 2\vec{i}$. c) $\vec{x} = \vec{j} - 3\vec{k}$. d) $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Bài tập 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; -2)$, $B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2)$.

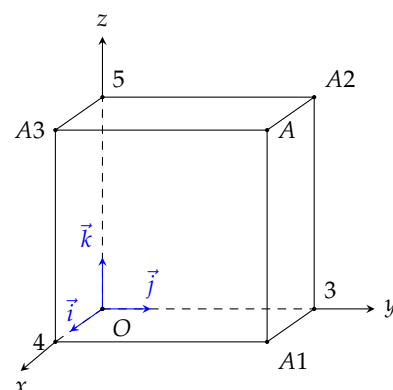
- a) Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.
 b) Tìm tọa độ của điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Bài tập 9. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$.

- a) Chứng minh A, B, C lập thành một tam giác; b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC ;
 c) Tìm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành; d) Tìm độ dài đường cao AK của tam giác ABC ;
 e) Tính góc A của tam giác ABC ; f) Xác định tọa độ điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Bài tập 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4; 3; 5)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) (Hình bên).

- a) Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .
 b) Tìm tọa độ hình chiếu của A lên Ox, Oy, Oz .



Bài tập 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

Bài tập 12. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O ; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ các điểm A, B, B' .

Bài tập 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với A ; các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ các điểm B, C, C' .

Bài tập 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'(1;0;1), B'(2;1;2), D'(1;-1;1), C(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh A của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Bài tập 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;-2;-1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$. Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

Bài tập 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-2;3;4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

Bài tập 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(4;6;-5), B(5;7;-4), C(5;6;-4), D'(2;0;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

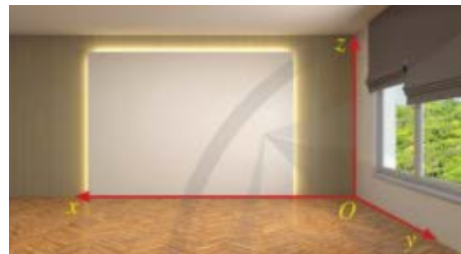
❖ ỨNG DỤNG ❖

Bài tập 18. Một sân tennis với hệ tọa độ $Oxyz$ được chọn như ở hình bên.

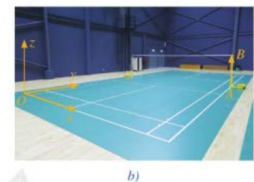
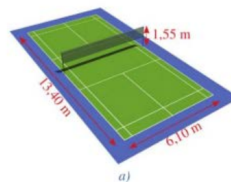
- Hỏi mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?
- Trục Oz có vuông góc với mặt sân hay không?



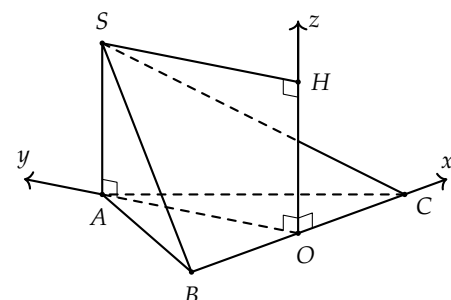
Bài tập 19. Một căn phòng với hệ tọa độ $Oxyz$ được chọn như ở hình bên. Cho biết bức tường phía sau của căn phòng nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?



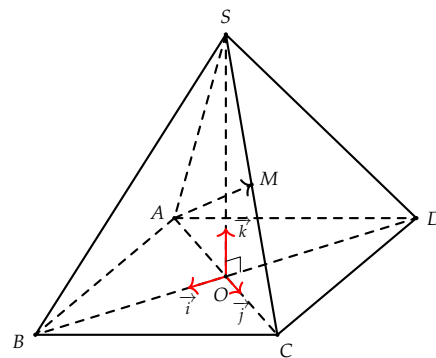
Bài tập 20. Hình a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như ở (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.



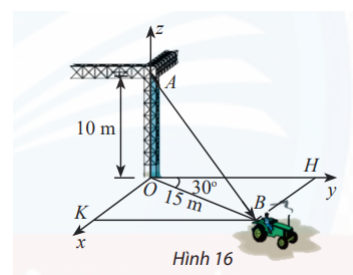
Bài tập 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và $SA = 1$. Thiết lập hệ trục tọa độ như hình vẽ bên, hãy vẽ các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



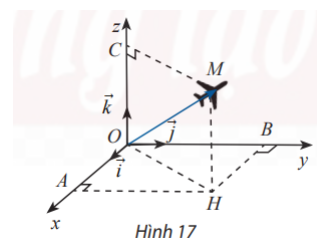
Bài tập 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O . Các véc-tơ $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và $OA = OS = 4$ (hình vẽ bên). Tìm tọa độ các véc-tơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AS}$ và $\vec{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC .



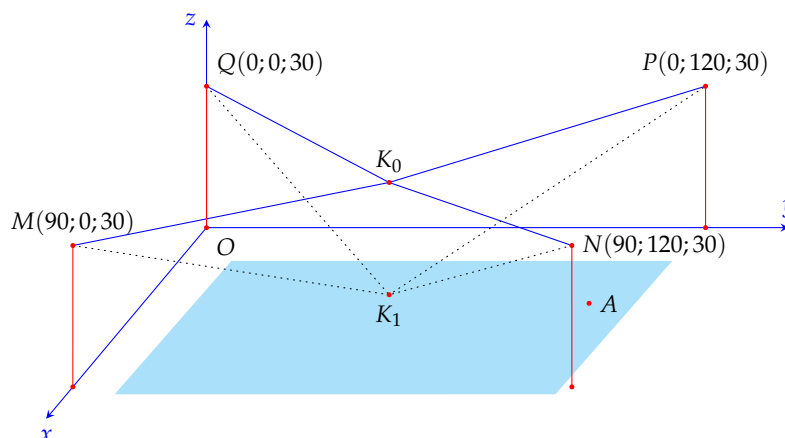
Bài tập 23. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình bên với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1(m). Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{AB}$.



Bài tập 24. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$, $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .



Bài tập 25. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m) các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình bên dưới). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19. (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).



Tìm tọa độ các điểm K_0 , K_1 và của vectơ K_0K_1 .

2.3 Biểu thức tọa độ của phép toán véc-tơ

2.3.1 Biểu thức tọa độ của phép cộng hai véc-tơ, trừ hai véc-tơ, phép nhân một số với véc-tơ

Định lý 2.6. Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ thì

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$
- $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),$
- $m\vec{u} = (mx_1; my_1; mz_1)$ với $m \in \mathbb{R}.$

Định lý 2.7. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1) \neq \vec{0}, \vec{v} = (x_2; y_2; z_2) \neq \vec{0}$. Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực m sao cho

$$\begin{cases} x_1 = mx_2, \\ y_1 = my_2, \\ z_1 = mz_2. \end{cases}$$

2.3.2 Tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm tam giác

Định lý 2.8. Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Định lý 2.9. Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$. Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

2.3.3 Biểu thức tọa độ tích vô hướng

Định lý 2.10. Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Định lý 2.11.

- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
- Nếu $A(x_1; y_1; z_1)$ và $B(x_2; y_2; z_2)$ thì $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$
- Với hai véc-tơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ khác $\vec{0}$, ta có
 - $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$
 - $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$

2.3.4 Tích có hướng của hai véc-tơ

Bài tập 1. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ không cùng phương. Chứng minh, véc-tơ

$$\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; x_1y_2 - x_2y_1)$$

vuông góc với cả hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Định nghĩa 2.10. véc-tơ $\vec{w}$ trong ví dụ nêu trên còn được gọi là tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}]$.

Định lý 2.12. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

trong đó $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, với a, b, c, d là các số thực.

Định lý 2.13. Hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương khi và chỉ khi véc-tơ $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}] \neq \vec{0}$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 2. Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi véc-tơ sau:

- a) $3\vec{a}$; b) $-2\vec{b}$; c) $2\vec{a} - \vec{b}$; d) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Bài tập 3. Cho $\vec{u} = (-2; 0; 1)$, $\vec{v} = (0; 6; -2)$, $\vec{w} = (-2; 3; 2)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w}$.

Bài tập 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (0; 1; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 3; 1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$.

Bài tập 5. Tính:

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 2; -4)$, $\vec{b} = (4; -2; 2)$. b) $\vec{c} \cdot \vec{d}$ với $\vec{c} = (2; -3; 4)$, $\vec{d} = (6; 5; -3)$.

Bài tập 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; -2)$ và $\vec{b} = (3; 1; -1)$,

- a) Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$.
b) Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} + 2\vec{b}$.
c) Tìm tọa độ của véc-tơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Bài tập 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ và $\vec{b} = (3; 1; -2)$, $\vec{c} = (4; 2; -3)$.

- a) Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.
b) Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

Bài tập 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (0; 1; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 1; 0)$. Tính góc giữa hai véc-tơ

- a) $\vec{a}$ và $\vec{b}$. b) $2\vec{a}$ và $\vec{b}$. c) $2\vec{a}$ và $3\vec{b}$.

Bài tập 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; 2; -1)$ và $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Tính cosin của góc $(\vec{a}, \vec{b})$.

Bài tập 10. Cho ba điểm $A(-1; -3; -2)$, $B(2; 3; 4)$, $C(3; 5; 6)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài tập 11. Cho tam giác ABC có $A(-2; 1; 0)$, $B(0; 2; 5)$, $C(5; 0; 2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC .

Bài tập 12. Cho ba điểm $A(0; -1; 1)$, $B(1; 0; 5)$, $G(1; 2; 0)$.

- a) Chứng minh ba điểm A, B, G không thẳng hàng.
b) Tìm tọa độ điểm C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC .

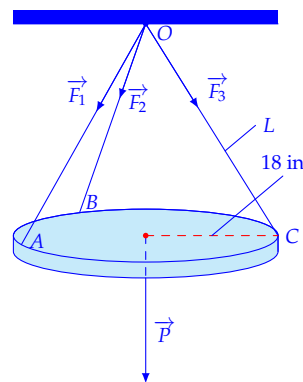
Bài tập 13. Trong không gian, với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$ và $C(2; 1; 1)$.

- a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng. b) Tính chu vi của tam giác ABC .
c) Tính $\cos \widehat{ABC}$.

Bài tập 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; -1; 1)$, $B(1; -1; 2)$ và $C(3; 0; 2)$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

Bài tập 24. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình 38). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in ($1\text{ inch} = 2,54\text{ cm}$). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây. Khi đó $F = F(L)$ là một hàm số với biến số L .

- Xác định công thức tính hàm số $F = F(L)$.
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$.
- Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N .



2.4 Ôn tập chương

2.4.1 Đề số 1

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

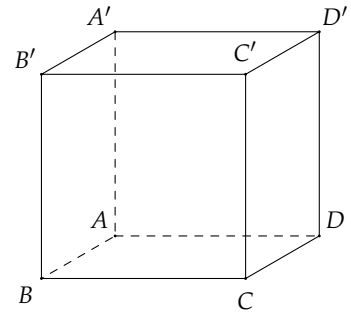
Câu 1. Trong không gian cho 3 điểm M, N, P phân biệt. Tính $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN}$.

- A. $\overrightarrow{NM}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{NP}$. D. $\overrightarrow{PN}$.

Câu 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ là

- A. $\overrightarrow{B'C'}$. B. $\overrightarrow{DA}$. C. $\overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB}$.



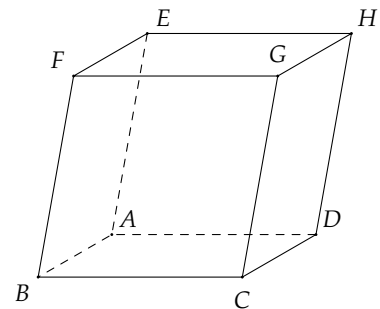
Câu 3. Gọi I là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. B. $IA = IB$. C. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. D. $\frac{\overrightarrow{MA}}{2MI} + \frac{\overrightarrow{MB}}{2MI} =$

Câu 4.

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Kết quả của phép toán $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EH}$ là

- A. $\overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AE}$. C. $\overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{BH}$.



Câu 5. Cho hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ có $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4$ và góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 60° . Tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

- A. 12. B. 6. C. -12. D. -6.

Câu 6. Trong không gian, cho 3 điểm A, B, C phân biệt. Hiệu hai véc-tơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ bằng

- A. $\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{BA}$. D. $\overrightarrow{CA}$.

Câu 7. Cho hình hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, có đáy $ABCD$ hình bình hành tâm O . Khi đó $2\overrightarrow{AO}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

- A. $\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AD}$. C. $\overrightarrow{A'C}$. D. $\overrightarrow{AB}$.

Câu 8. Cho biết G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $GA = GB = GC = GD$. B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD}$. D. $GA + GB + GC + GD = 0$.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là a . Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

- A. a^2 . B. 0. C. a . D. $\frac{a^2}{2}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O . Hãy chỉ ra đẳng thức sai trong các đẳng thức sau đây

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'C'}$.

Câu 11. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Câu 12. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

A. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. D	Câu 2. A	Câu 3. C	Câu 4. C	Câu 5. B	Câu 6. A
Câu 7. A	Câu 8. B	Câu 9. B	Câu 10. C	Câu 11. A	Câu 12. C

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Trong không gian cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là a . Gọi O là giao điểm của BD và AC .

Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.		
b) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'C'}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\overrightarrow{C'O} = \overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{OA'}$.		
d) $\overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$.		

Câu 14. Trong các khẳng định dưới đây khẳng định nào đúng?

Phát biểu	Đ	S
a) Trong không gian lấy ba điểm A, B, C tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.		
b) Trong không gian cho hình bình hành $ABCD$ thì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.		
c) Với véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k \in \mathbb{R}$ ta luôn có $ k \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} $.		
d) Với véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ là hai véc-tơ tùy ý khác véc-tơ $\vec{0}$ ta luôn có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$.		

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}; \overrightarrow{AD} = \vec{y}; \overrightarrow{AA'} = \vec{z}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$.		
b) $\overrightarrow{A'B} = \vec{x} + \vec{z}$.		
c) Góc giữa véc-tơ $\overrightarrow{AA'}$ và véc-tơ $\overrightarrow{A'C'}$ bằng 60° .		
d) Gọi M là trung điểm của BC . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{A'M}$ bằng $\frac{3a}{2}$.		

Câu 16. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau đây.

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.		
b) $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AD}$.		
c) $\vec{CG} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD}$.		
d) Gọi I là điểm thuộc đoạn AG và thỏa mãn $AI = 3IG$. Khi đó $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.**a** Đ **b** S **c** Đ **d** S**Câu 14.****a** S **b** Đ **c** Đ **d** Đ**Câu 15.****a** Đ **b** S **c** S **d** Đ**Câu 16.****a** Đ **b** S **c** Đ **d** Đ

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm trên đoạn $C'D$ sao cho $DN = \frac{1}{3}DC'$. Khi phân tích $\vec{BN} = x\vec{BA} + y\vec{BC} + z\vec{BB'}$ thì giá trị $x + y + z$ bằng

KQ:

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$, và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I là điểm trên cạnh AB sao cho $AI = 3IB$ và J là trung điểm của CD . Tính độ dài đoạn thẳng IJ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

KQ:

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Khi $MN \parallel BD'$ thì giá trị x (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là

KQ:

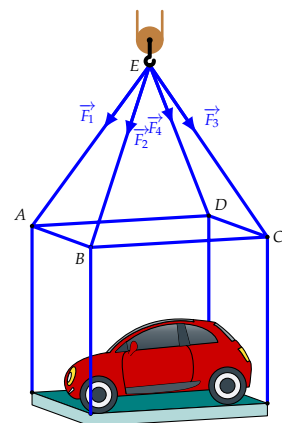
Câu 20. Cho tứ diện đều $S.ABC$ cạnh a , M là trung điểm của cạnh BC . Tính $\cos(\vec{AM}, \vec{SB})$ (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 21.

Một chiếc ô-tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được đặt vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết các lực căng $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4800 N, trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô-tô là $7200\sqrt{6}$ N. Tính $\sin \alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:



Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $SA = 4$, $AB = 1$, $AD = 2$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{SC}$ và $\vec{DM}$, làm tròn đến độ.

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN**Câu 17.** 2**Câu 18.** 0,56**Câu 19.** 0,67**Câu 20.** 0,29**Câu 21.** 0,92**Câu 22.** 112°

2.4.2 Đề số 2

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AA'}$ là

- A. $\overrightarrow{A'C'}$. B. $\overrightarrow{BA'}$. C. $\overrightarrow{BB'}$. D. $\overrightarrow{C'C}$.

Câu 2. Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ bằng

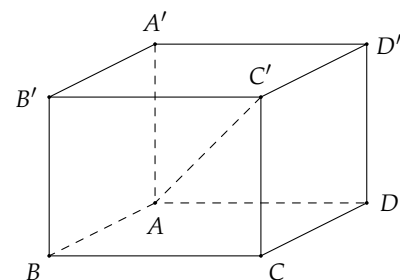
- A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 3. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 4.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ dưới). Khẳng định nào dưới đây đúng?



- A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD'}$. B. $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{B'C'}$.
C. $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{D'C'}$. D. $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$.

Câu 5. Cho $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$, góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 40$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{3}$.

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình hộp, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\vec{OA} + \vec{OA'} = \vec{0}$. B. $\vec{OA} + \vec{OC'} = \vec{0}$. C. $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{0}$. D. $\vec{OA} + \vec{OD} = \vec{0}$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{AA'} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$. Khi đó biểu diễn $\vec{BC'}$ theo các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ được

- A. $\vec{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. B. $\vec{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. C. $\vec{BC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\vec{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC có $AB = AC = 5a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Độ dài của véc-tơ tổng $\vec{AB} + \vec{AC}$ bằng

- A. $10a$. B. $\frac{5a\sqrt{3}}{2}$. C. $5a$. D. $5a\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G , gọi M là trung điểm AD , khi đó

- A. $\vec{MG} = \frac{1}{4}(\vec{MA} + \vec{MB})$. B. $\vec{MG} = \frac{1}{4}(\vec{MC} + \vec{MB})$.
C. $\vec{MG} = \frac{1}{4}(\vec{MC} + \vec{MD})$. D. $\vec{MG} = \frac{1}{4}(\vec{MC} - \vec{MD})$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức sai?

- A. $\vec{BC} + \vec{BA} = \vec{B_1C_1} + \vec{B_1A_1}$. B. $\vec{AD} + \vec{D_1C_1} + \vec{D_1A_1} = \vec{DC}$.
C. $\vec{BC} + \vec{BA} + \vec{BB_1} = \vec{BD_1}$. D. $\vec{BA} + \vec{DD_1} + \vec{BD_1} = \vec{BC}$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = k\vec{DG}$

A. $k = \frac{1}{3}$.

B. $k = 2$.

C. $k = 3$.

D. $k = \frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$.

A. $k = 0$.

B. $k = 1$.

C. $k = 4$.

D. $k = 2$.

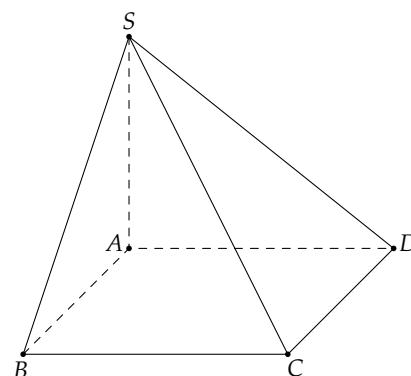
BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. D	Câu 2. D	Câu 3. C	Câu 4. B	Câu 5. C	Câu 6. B
Câu 7. B	Câu 8. C	Câu 9. B	Câu 10. D	Câu 11. C	Câu 12. B

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC và G là trọng tâm tam giác SBD .

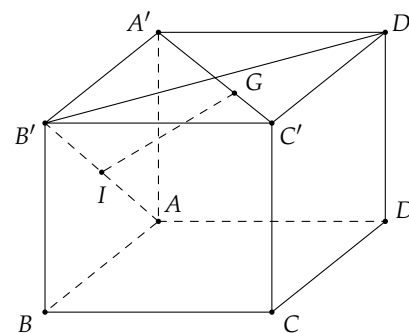


Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.		
b) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.		
d) $\overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AS}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2$.		

Câu 14.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $B'C'D'$, I là trung điểm của AB' .



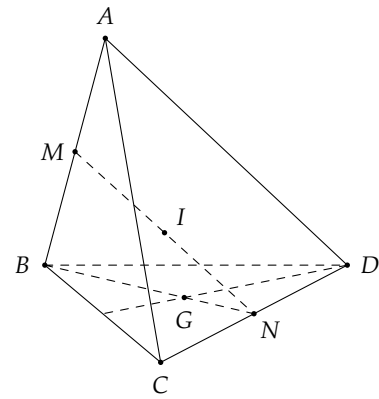
Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD}$.		
b) $\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $6\overrightarrow{IG} = 3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$.		
d) $\cos(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{IG}) = \frac{\sqrt{13}}{26}$.		

Câu 15.

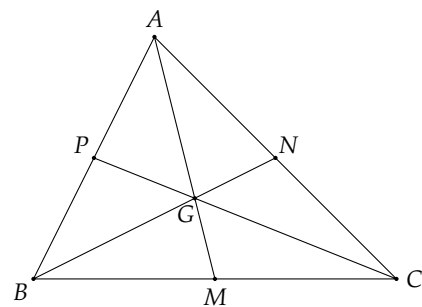
Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN và G là trọng tâm tam giác BCD . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MN}$.		
b) $\vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{MN}$.		
c) $\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = 3\vec{IG}$.		
d) $2\vec{IG} + \vec{IA} = \vec{0}$.		



Câu 16. Trong không gian, xét tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{BM} + \vec{CN} = \vec{MN}$.		
b) $\vec{PA} + \vec{BM} + \vec{CN} = \vec{0}$.		
c) $\vec{AN} = \vec{AM} + \vec{AP}$.		
d) $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$.		



BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a Đ b S c S d S

Câu 14.

a S b Đ c Đ d Đ

Câu 15.

a S b Đ c Đ d S

Câu 16.

a Đ b S c S d Đ

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 4$. Tính $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$?

KQ:

Câu 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh $\sqrt{6}$ và các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính độ dài AC' ?

KQ:

Câu 19. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Tính góc tạo bởi hai véc-tơ $\vec{AC}$ và $\vec{OM}$? (Biết đơn vị đo góc tính bằng độ)

KQ:

Câu 20. Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$. Trong đó $\vec{a}$ là véc-tơ gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là véc-tơ lực (N) tác dụng lên vật, $m(\text{kg})$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5 \text{ kg}$ một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

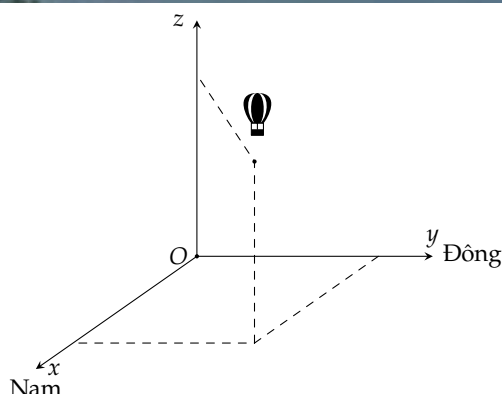
KQ:



Hình 20

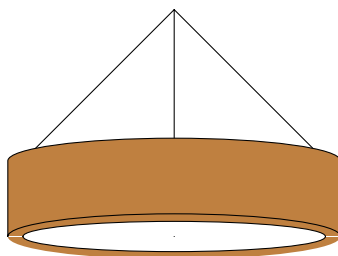
Câu 21. Một chiếc khinh khí cầu bay lên từ địa điểm cho trước. Sau khoảng thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách địa điểm xuất phát 2,5 km về hướng nam và 1,7 km về hướng đông, đồng thời cách mặt đất là 0,6 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilomet. Tính khoảng cách từ địa điểm xuất phát đến địa điểm hiện tại của khinh khí cầu (đơn vị lấy theo kilomet và làm tròn đến 2 chữ số sau phần thập phân).

KQ:



Câu 22. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là 0,5 m. Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N. (Chiều dài tính theo đơn vị cm và làm tròn đến 1 chữ số sau phần thập phân).

KQ:

**BẢNG ĐÁP ÁN****Câu 17.** 56**Câu 18.** 6**Câu 19.** 120**Câu 20.** 25**Câu 21.** 3,08**Câu 22.** 75,6

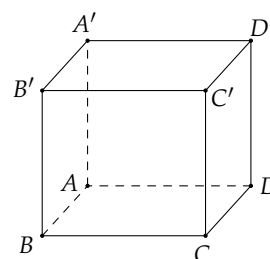
2.4.3 Đề số 3

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn**Câu 1.** Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

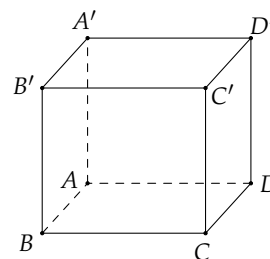
- A. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song với nhau.
 B. Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
 C. Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.
 D. Nếu vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ cùng bằng vectơ $\vec{c}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ bằng nhau.

Câu 2.Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ $\vec{AB}$ là

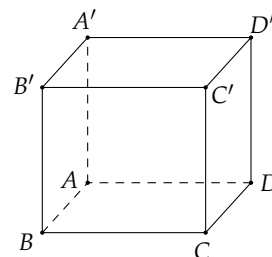
- A. $\vec{D'C'}$. B. $\vec{BA}$. C. $\vec{CD}$. D. $\vec{B'A'}$.

**Câu 3.**Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào dưới đây ngược hướng với vectơ $\vec{AB}$?

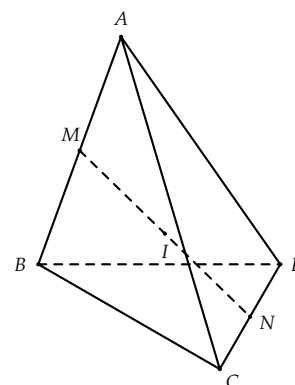
- A. $\vec{CD}$. B. $\vec{B'C'}$. C. $\vec{AD}$. D. $\vec{D'C'}$.

**Câu 4.**Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$. B. $\vec{BC'} = \vec{BC} + \vec{BD} + \vec{BB'}$.
 C. $\vec{DB'} = \vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD'}$. D. $\vec{BD'} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'}$.

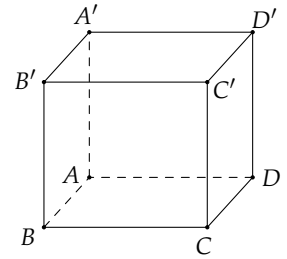
**Câu 5.**Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD và I là trung điểm của đoạn MN . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{AN} = (\vec{AD} + \vec{AC})$. B. $\vec{IN} + \vec{IM} = \vec{0}$.
 C. $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$. D. $\vec{NC} + \vec{ND} = \vec{0}$.

**Câu 6.**

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khẳng định nào dưới đây là đúng?

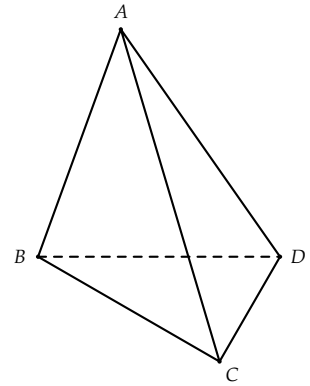
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
 B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{B'A}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.
 D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CB'}$.



Câu 7.

Cho tứ diện $ABCD$, có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?

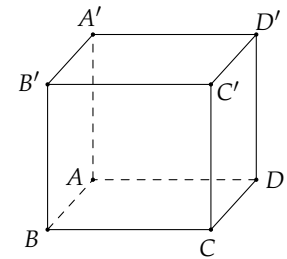
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.



Câu 8.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

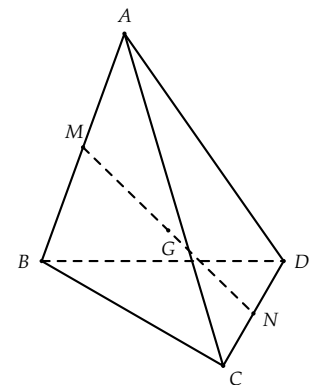
- A. $\overrightarrow{A'B}$ và $\overrightarrow{A'B'}$. B. $\overrightarrow{B'C'}$ và $\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{B'C'}$. D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.



Câu 9.

Cho tứ diện $ABCD$ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Vectơ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$ bằng vectơ nào sau đây?

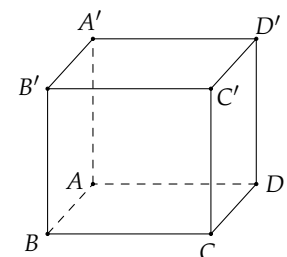
- A. $4\overrightarrow{MG}$. B. $\overrightarrow{GD}$. C. $\vec{0}$. D. $\overrightarrow{MN}$.



Câu 10.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn mệnh đề đúng?

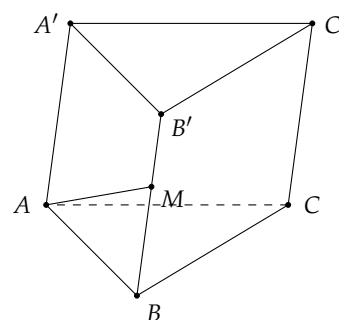
- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}$.
 C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'D'} = \vec{0}$.



Câu 11.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

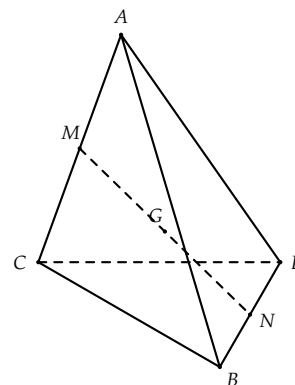
- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



Câu 12.

Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và BD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{MN}$.
C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. D. $2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.



BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. A	Câu 2. A	Câu 3. A	Câu 4. B	Câu 5. A	Câu 6. A
Câu 7. B	Câu 8. D	Câu 9. C	Câu 10. D	Câu 11. D	Câu 12. D

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Độ dài của vector $\overrightarrow{SA}$ bằng a .		
b) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.		
c) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{MN}$.		
d) Gọi I là trọng tâm của tứ diện. Khoảng cách từ I đến (ABC) bằng $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$.		

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CD}$.		
b) $\overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0$.		
d) $\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$.		

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.		

b) $\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} + \vec{ED} = \vec{0}$ với E là trung điểm MN .		
c) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = \vec{0}$.		
d) Điểm I xác định bởi $P = 3\vec{IA}^2 + \vec{IB}^2 + \vec{IC}^2 + \vec{ID}^2$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là $2a^2$.		

Câu 16. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a có G là trọng tâm của tam giác BCD và I là điểm thuộc đoạn thẳng AG sao cho $\vec{AI} = 3\vec{IG}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.		
b) $\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = 3\vec{IG}$.		
c) $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}$.		
d) $\vec{IB} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC} - \frac{1}{4}\vec{AD}$.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a Đ b Đ c S d S

Câu 14.

a S b S c S d S

Câu 15.

a S b Đ c Đ d Đ

Câu 16.

a S b Đ c Đ d Đ

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$, gọi E là trung điểm AD , F là trung điểm BC . Khi đó $\vec{AB} + \vec{DC} = k\vec{EF}$, giá trị của k bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$. Độ dài vectơ $\vec{B'D'}$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

KQ:

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{A'B}$ và $\vec{AC'}$ (kết quả tính theo đơn vị độ).

KQ:

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai vectơ $\vec{SM}$ và $\vec{BC}$.

KQ:

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC và J là trọng tâm tam giác ADC . Khi đó $\vec{SI} + \vec{SJ} = x\vec{SA} + y\vec{SB} + z\vec{SC} + t\vec{SD}$, tổng giá trị $x + y + z + t$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng $A'C, C'D$ sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BD' . Khi đó tỉ số $\frac{MN}{BD'}$ bằng bao nhiêu?

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17. 2

Câu 18. 3,61

Câu 19. 90

Câu 20. 120

Câu 21. 2

Câu 22. 0,25

Chương 3

Các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm

3.1 Khoảng biến thiên, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

3.1.1 Khoảng biến thiên

Ví dụ mở đầu 1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm như bảng sau

Bảng 1

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\cdots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Em hãy cho biết khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên?

Định nghĩa 3.1. Gọi u_1, u_{m+1} lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm m . Hiệu $R = u_{m+1} - u_1$ được gọi là khoảng biến thiên của mẫu số liệu nhóm đó.

Lưu ý 3.1.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán của mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị u_1 và u_m của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Lưu ý 3.2.

- Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng 1. Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc

3.1.2 Khoảng tứ phân vị

Lớp 11 chúng ta đã học tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm. Bây giờ chúng ta nhắc lại công thức tính tứ phân vị thứ k , kí hiệu là Q_k , với $k = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm (Bảng 1) được xác định như sau

$$Q_k = u_m + \frac{\frac{kn}{4} - C}{n_m} (u_{m+1} - u_m).$$

trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ là cỡ mẫu.
- $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ k .
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ k .

$$\bullet C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm. Người ta định nghĩa khoảng tứ phân vị như sau:

Định nghĩa 3.2.

Xét mẫu số liệu được cho bởi bảng bên. Gọi Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu $\Delta = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[a_1; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a_m; a_{m+1}]$	n_m	$cf = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

Lưu ý 3.3. Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

⇔ BÀI TẬP TỰ LUẬN ⇔

Bài tập 1. Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 2. Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau.

Chiều cao \ Lớp	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)
12C	2	7	12	3	0	1
12D	5	9	8	2	1	0

Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì chiều cao của học sinh lớp nào có độ phân tán lớn hơn?

Bài tập 3. Biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao (đơn vị centimet) của 36 học sinh nam lớp 12 ở một trường trung học phổ thông. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
[160; 163)	6
[163; 166)	11
[166; 169)	9
[169; 172)	7
[172; 175)	3
	$n = 36.$

Bài tập 4. Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường

Cân nặng (g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

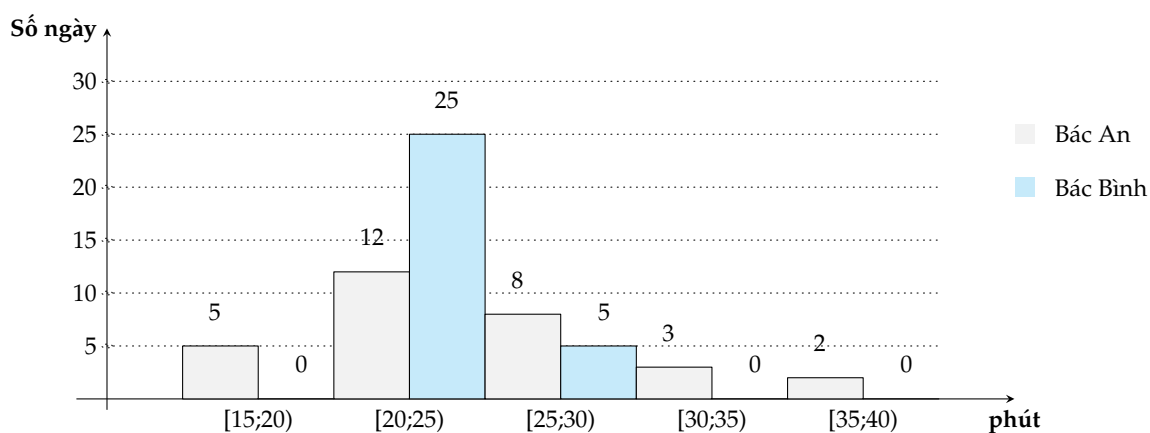
Bài tập 5. Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2022 của một số hộ gia đình trong một địa phương được ghi lại ở bảng sau

Tổng thu nhập (triệu đồng)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

a) Hãy tìm các tứ phân vị Q_1 và Q_3 .

b) Một doanh nghiệp địa phương muốn hướng dịch vụ của mình đến các gia đình có mức thu nhập ở tầm trung, tức là 50% các hộ gia đình có mức thu nhập ở chính giữa so với tất cả các hộ gia đình của địa phương. Hỏi doanh nghiệp cần hướng đến các gia đình có mức thu nhập trong khoảng nào?

Bài tập 6. Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.



Hãy so sánh khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An.

Bài tập 7. Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

Thời gian (phút)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)	[30; 33)
Số lượt	22	38	27	8	4	1

a) Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết hơn 30 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?

Bài tập 8. Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau.

Chiều cao \ Lớp	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)
12C	2	7	12	3	0	1
12D	5	9	8	2	1	0

Hãy so sánh độ phân tán của nửa giữa hai mẫu số liệu chiều cao của các học sinh nữ lớp 12C và 12D.

Bài tập 9. Giả sử kết quả khảo sát hai khu vực A và B về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau

Tuổi kết hôn	[19; 22)	[22; 25)	[25; 28)	[28; 31)	[31; 34)
Số phụ nữ khu vực A	10	27	31	25	7
Số phụ nữ khu vực B	47	40	11	2	0

- a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của từng mẫu số liệu ghép nhóm ứng với mỗi khu vực A và B.
- b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực nào có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn?

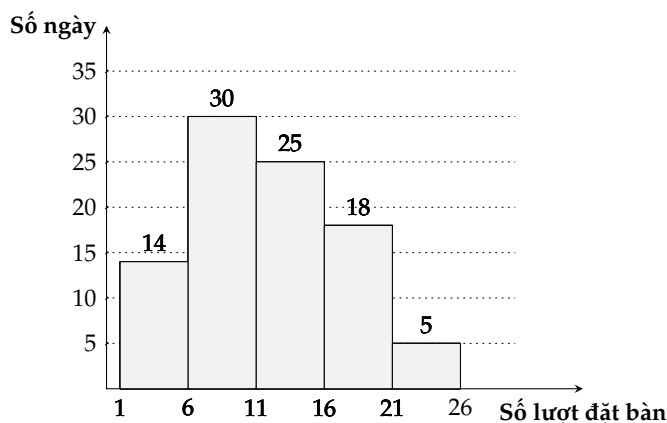
Bài tập 10. Bảng sau thống kê tổng lượng mưa (đơn vị: mm) đo được vào tháng 7 từ năm 2002 đến 2021 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau.

341,4	187,1	242,2	522,9	251,4	432,2	200,7	388,6	258,4	288,5
298,1	413,5	413,5	332	421	475	400	305	520	147

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- a) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.
- b) Hãy chia mẫu số liệu trên thành 4 nhóm với nhóm đầu tiên là $[140; 240)$ và lập bảng tần số ghép nhóm.
- c) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm và so sánh với kết quả tương ứng thu được ở câu a.

Bài tập 11. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn;...



Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên.

Bài tập 12. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

Chiều cao (m)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)	[9,2; 9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

- a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi chiều cao của cây keo này có phải là giá trị ngoại lệ không?

Bài tập 13. Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới ở 50 quốc gia.

Nhóm (Tuổi thọ)	Giới tính	
	Nam	Nữ
[50; 55)	4	3
[55; 60)	7	4
[60; 65)	4	5
[65; 70)	6	3
[70; 75)	15	7
[75; 80)	12	14
[80; 85)	2	13
[85; 90)	0	1

- a) Hãy tính các khoảng tứ phân vị của tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới trong mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Hãy cho biết tuổi thọ trung bình của nam giới hay nữ giới trong mẫu số liệu ghép nhóm trên đồng đều hơn

Bài tập 14. Bảng 9 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng).

- a) Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- b) Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
[10; 15)	15
[15; 20)	18
[20; 25)	10
[25; 30)	10
[30; 35)	5
[35; 40)	2
	$n = 60$
Bảng 9	

Bài tập 15. Bảng 10 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố.

- a) Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- b) Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
[20; 30)	25
[30; 40)	20
[40; 50)	20
[50; 60)	15
[60; 70)	14
[70; 80)	6
	$n = 100$
Bảng 10	

3.2 Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

3.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 3.3. Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi Bảng 14.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a_m; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

Bảng 14

- Gọi $\bar{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó. Số

$$s^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{n}$$

được gọi là phương sai của mẫu số liệu đó.

- Căn bậc hai (số học) của phương sai gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s , nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

Lưu ý 3.4.

- Người ta còn tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm theo công thức

$$s^2 = \frac{1}{n} (n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_m x_m^2) - \bar{x}^2$$

- Và người ta còn dùng đại lượng sau để đo độ phân tán mẫu số liệu ghép nhóm

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} (n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_m(x_m - \bar{x})^2)$$

3.2.2 Ý nghĩa

- Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc và được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.
- Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau

111,6	134,9	130,3	134,2	140,9	109,3	154,4	156,3	116,1	96,7
105,2	80,8	80,8	110	109	139	145	161	126	114

- Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[80; 98)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 18. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

- c) Hãy tính sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.
(Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn.)

Bài tập 2. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở Bảng 17 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Nhóm	Tần số
[50; 60)	6
[60; 70)	12
[70; 80)	7
[80; 90)	8
[90; 100)	7
	$n = 40$

Bảng 17

Bài tập 3. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn.

Theo quan điểm trên, hãy so sánh độ rủi ro của cổ phiếu A và cổ phiếu B.

Bài tập 4. Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm sau

Chiều cao (cm)	[160; 164)	[164; 168)	[168; 172)	[172; 176)	[176; 180)
Số học sinh	3	5	8	4	1

Bài tập 5. Mai và Ngọc cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau

Số bước (đơn vị: nghìn)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)
Mai	6	7	6	6	5
Ngọc	2	5	13	8	2

- a) Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn nào có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn?

Bài tập 6. Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19; 19,5)	[19,5; 20)	[20; 20,5)	[20,5; 21)	[21; 21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

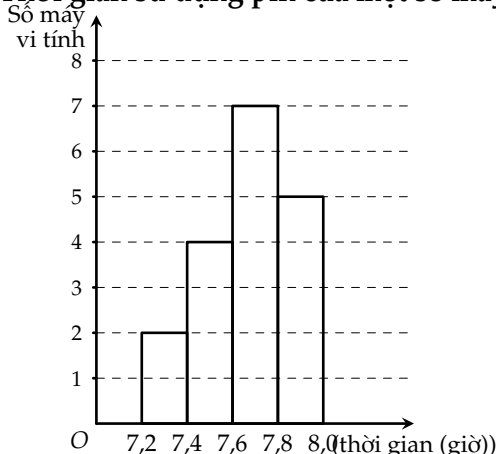
Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 7.

Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục (đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết của pin một số máy vi tính cùng loại được mô tả bằng biểu đồ bên.

- Hãy cho biết có bao nhiêu máy vi tính có thời gian sử dụng pin từ 7,2 đến dưới 7,4 giờ?
- Hãy xác định số trung bình và độ lệch chuẩn của thời gian sử dụng pin.

Thời gian sử dụng pin của một số máy vi tính



Bài tập 8. Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau

42	43,4	43,4	46,5	46,7	46,8	47,5	47,7	48,1	48,4
50,8	52,1	52,7	53,9	54,8	55,6	57,5	59,6	60,3	61,1

- Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[42; 46)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 4.
- Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bài tập 9. Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau

Đường kính (cm)	$[30; 32)$	$[32; 34)$	$[34; 36)$	$[36; 38)$	$[38; 40)$
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	18	14

- Hãy so sánh đường kính trung bình của thân cây xoan đào trồng tại địa điểm A và địa điểm B.
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm nào có đường kính đồng đều hơn?

Bài tập 10. Bảng 19, Bảng 20 lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị: triệu đồng).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[10; 15)$	12,5	15	$[10; 15)$	12,5	25
$[15; 20)$	17,5	18	$[15; 20)$	17,5	15
$[20; 25)$	22,5	10	$[20; 25)$	22,5	7
$[25; 30)$	27,5	10	$[25; 30)$	27,5	5
$[30; 35)$	32,5	5	$[30; 35)$	32,5	5
$[35; 40)$	37,5	2	$[35; 40)$	37,5	3
		$n = 60$			$n = 60$

- Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm lần lượt biểu diễn mức lương của hai công ty A, B.
- Công ty nào có mức lương đều hơn?

Bài tập 11. Bảng sau biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[20; 30)	25	25
[30; 40)	35	10
[40; 50)	45	20
[50; 60)	55	15
[60; 70)	65	14
[70; 80)	75	6
		$n = 100$

3.3 Ôn tập chương

3.3.1 Đề số 1

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Kết quả khảo sát cân nặng của 1 thùng táo ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả táo	4	7	12	6	2

Khoảng biến thiên R của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. $R = 5$. B. $R = 24$. C. $R = 25$. D. $R = 10$.

Câu 2. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

Khoảng biến thiên R của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. $R = 4$. B. $R = 20$. C. $R = 9$. D. $R = 108$.

Câu 3. Thống kê chỉ số chất lượng không khí (AQI) tại một địa điểm vào các ngày trong tháng 6/2022 được cho trong bảng sau

Chỉ số AQI	[0; 50)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Số ngày	5	11	7	4	3

Khoảng biến thiên R của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. $R = 50$. B. $R = 250$. C. $R = 150$. D. $R = 8$.

Câu 4. Bạn Linh thống kê chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12A và lớp 12B ở bảng sau:

Chiều cao (cm)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)
Số học sinh nữ lớp 12A	2	7	12	3	0	1
Số học sinh nữ lớp 12B	0	9	8	2	1	5

Gọi R_1 ; R_2 lần lượt là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp 12A và 12B. Tìm R_1 ; R_2 .

- A. $R_1 = 30$ (cm); $R_2 = 25$ (cm). B. $R_1 = 30$ (cm); $R_2 = 30$ (cm).
C. $R_1 = 25$ (cm); $R_2 = 25$ (cm). D. $R_1 = 12$ (cm); $R_2 = 9$ (cm).

Câu 5. Gọi Q_1 , Q_2 , Q_3 là tứ phân vị của một mẫu số liệu ghép nhóm. Khi đó khoảng tứ phân vị Δ_Q của mẫu số liệu trên được xác định bởi công thức

- A. $\Delta_Q = Q_2 - Q_1$. B. $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$. C. $\Delta_Q = Q_2 - Q_3$. D. $\Delta_Q = Q_1 - Q_3$.

Câu 6. Một ý nghĩa của khoảng tứ phân vị là

- A. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị không bất thường của mẫu số liệu đó.
B. Khoảng tứ phân vị thường không được sử dụng thay cho khoảng biến thiên.
C. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của nửa giữa mẫu số liệu.
D. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và là một đại lượng cho biết mức độ không phân tán của nửa giữa mẫu số liệu.

Câu 7. Số lượng đặt bàn của một nhà hàng được cho bởi bảng sau:

Số lượt đặt bàn	Tần số	Tần số tích lũy
[1; 6)	14	14
[6; 11)	30	44
[11; 16)	25	69
[16; 21)	18	87
[21; 26)	5	92

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng trên.

A. $\Delta_Q = \frac{11}{6}$.

B. $\Delta_Q = \frac{17}{2}$.

C. $\Delta_Q = \frac{5}{2}$.

D. $\Delta_Q = \frac{17}{6}$.

Câu 8. Giả sử kết quả khảo sát khu vực A về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau:

Tuổi kết hôn	Tần số	Tần số tích lũy
[19; 22)	10	10
[22; 25)	27	37
[25; 28)	31	68
[28; 31)	25	93
[31; 34)	7	100

Hãy tính khoảng tứ phân vị Δ_Q của mẫu số liệu trên.

A. $\Delta_Q = \frac{388}{75}$.

B. $\Delta_Q = \frac{378}{75}$.

C. $\Delta_Q = \frac{386}{75}$.

D. $\Delta_Q = \frac{288}{75}$.

Câu 9. Điều tra về khối lượng 27 củ khoai tây (đơn vị: gam) thu hoạch tại nông trường, ta có kết quả sau:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[74; 80)	4	4
[80; 86)	6	10
[86; 92)	3	13
[92; 98)	4	17
[98; 104)	3	20
[104; 110)	7	27
	$n = 27$	

Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên lần lượt là

A. 36 và 21,45.

B. 7 và 23.

C. 11 và 25,3.

D. 33 và 20,5.

Câu 10. Điểm kiểm tra 15 phút của 36 học sinh lớp 11A được cho bởi bảng tần số ghép nhóm sau:

Nhóm điểm	Tần số	Tần số tích lũy
[1; 3)	3	3
[3; 5)	2	5
[5; 7)	10	15
[7; 9)	14	29
[9; 11)	7	36
	$n = 36$	

Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên lần lượt là

A. 10 và 9,2.

B. 10 và 2,9.

C. 10 và 25,3.

D. 6 và 20,5.

Câu 11. Điều tra 42 học sinh của một lớp 11 về số giờ tự học ở nhà, người ta có bảng sau đây:

Lớp (Số giờ tự học)	Tần số	Tần số tích lũy
[1; 2)	8	8
[2; 3)	10	18
[3; 4)	12	30
[4; 5)	9	39
[5; 6)	3	42
	$n = 42$	

Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên lần lượt là

- A. 5 và 1,95. B. 2 và 3,1. C. 2 và 3,2. D. 3 và 1,2.

Câu 12. Thống kê điểm học kì môn toán của các học sinh lớp 11A của một trường THPT, ta có bảng tần số ghép lớp, tần số tích lũy sau:

Lớp (điểm)	Tần số	Tần số tích lũy
[3; 4)	5	5
[4; 5)	11	16
[5; 6)	9	25
[6; 7)	6	31
[7; 8)	8	39
[8; 9)	4	43
[9; 10)	2	45

Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên lần lượt là

- A. 7 và 2,77. B. 13 và 2,1. C. 2 và 3,2. D. 5 và 3,3.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. C	Câu 2. B	Câu 3. B	Câu 4. A	Câu 5. B	Câu 6. C
Câu 7. B	Câu 8. A	Câu 9. A	Câu 10. B	Câu 11. A	Câu 12. A

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và 12D ở bảng sau.

Chiều cao (cm)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)
Lớp 12C	2	7	12	3	0	1
Lớp 12D	5	9	8	2	1	0

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Chiều cao cao nhất của các bạn học sinh trong lớp 12D là 185 (cm).		
b) Khoảng biến thiên của chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp 12C là 30 (cm).		
c) Khoảng biến thiên của chiều cao các bạn học sinh nữ lớp 12D là 25 (cm).		
d) Chiều cao của học sinh lớp 12C có độ phân tán bé hơn.		

Câu 14.

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng).

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu này là $R = 30$.		
b) Số phần tử của mẫu là $n = 60$.		
c) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $Q_1 = 15$.		
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = 3$.		

Nhóm	Tần số
[10; 15)	15
[15; 20)	18
[20; 25)	10
[25; 30)	10
[30; 35)	5
[35; 40)	2
	$n = 60$

Câu 15. Thời gian tập đàn mỗi ngày (tính theo phút) của bạn Thu trong thời gian gần đây được thống kê như sau:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[20; 25)	6	6
[25; 30)	5	11
[30; 35)	7	18
[35; 40)	8	26
[40; 45)	2	28

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = 25$.		
b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm [20; 25).		
c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 37$.		
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = \frac{87}{8}$.		

Câu 16. Thời gian sử dụng internet (tính theo giờ) của bạn Khánh trong 20 ngày nghỉ hè đầu tiên được thống kê như sau:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[1; 1,5)	3	3
[1,5; 2)	6	9
[2; 2,5)	5	14
[2,5; 3)	4	18
[3; 3,5)	2	20

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = 2$.		
b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm [2; 2,5).		
c) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = \frac{4}{3}$.		
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = 1$.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a S b Đ c Đ d S

Câu 14.

a Đ b Đ c Đ d S

Câu 15.

a Đ b S c S d Đ

Câu 16.

a S b S c S d S

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Cho bảng thống kê thời gian sử dụng điện thoại vào buổi sáng mỗi ngày trong tháng 4 năm 2024 của Tuấn và An ở bảng như sau:

Thời gian (phút)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
Tuấn	5	12	8	3	2
An	0	25	5	0	0

Gọi R_1 và R_2 lần lượt là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian sử dụng điện thoại vào buổi sáng mỗi ngày của Tuấn và An. Tính $R_1 + R_2$.

KQ:

Câu 18. Thống kê lại cân nặng (đơn vị: kg) của các bạn học sinh nam lớp 12A và lớp 12B ở bảng sau.

Cân nặng	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)	[65; 70)	[70; 75)	[75; 80)	[80; 85)
Lớp 12A	1	2	7	10	3	0	2
Lớp 12B	2	5	9	6	2	1	0

Gọi R_1 và R_2 lần lượt là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của học sinh nam lớp 12A và 12B. Khi đó $R_1 + R_2$ bằng

KQ:

Câu 19. Khảo sát thời gian đọc sách trong ngày của một số học sinh khối 12 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 30)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)	[120; 150)
Số học sinh	4	6	15	12	3

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

KQ:

Câu 20. Người ta ghi lại tuổi thọ của một số con ong cho kết quả như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số lượng	5	12	23	31	29

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

Câu 21. Cho thời gian (đơn vị: phút) xem tivi mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[6,5; 9,5)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)	[24,5; 27,5)
Số học sinh	2	3	12	15	24	2	2

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

KQ:

Câu 22. Một cửa hàng trang sức khảo sát khách hàng xem họ dự định mua trang sức với giá nào (đơn vị: triệu đồng). Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)	[18; 21)
Số khách hàng	20	78	45	23	12

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN**Câu 17.** 35**Câu 18.** 65**Câu 19.** 42,5**Câu 20.** 35,8**Câu 21.** 5,13**Câu 22.** 4,42

3.3.2 Đề số 2

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau

Nhóm	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17)	[17; 20)	[20; 23)	
Tần số	5	6	8	7	4	$n = 30$

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm bằng

- A. 3.
- B. 8.
- C. 31.
- D. 15.

Câu 2. Biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng (đơn vị: kilogam) của 40 học sinh một lớp 12 ở một trường trung học phổ thông được cho dưới bảng sau

Nhóm	[36; 40)	[40; 44)	[44; 48)	[48; 52)	[52; 56)	[56; 60)	
Tần số	4	7	9	12	6	2	$n = 40$

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

- A. 24.
- B. 4.
- C. 12.
- D. 6.

Câu 3. Biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về tiền điện (đơn vị: nghìn đồng) của 58 hộ gia đình ở một tổ dân phố được cho dưới bảng sau

Nhóm	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)	[450; 500)	
Tần số	6	10	15	21	4	2	$n = 58$

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

- A. 21.
- B. 50.
- C. 300.
- D. 299.

Câu 4. Biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh được cho dưới bảng sau

Nhóm	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	
Tần số	6	9	11	5	4	$n = 35$

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

- A. 11.
- B. 15.
- C. 3.
- D. 12.

Câu 5. Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2024 của một số hộ gia đình ở thành phố Nha Trang được ghi lại ở bảng sau

Tổng thu nhập (triệu đồng)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

Tứ phân vị Q_1 bằng

- A. $\frac{675}{62}$.
- B. $\frac{9775}{31}$.
- C. $\frac{16715}{62}$.
- D. $\frac{16175}{62}$.

Câu 6. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2024 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn;...



Tứ phân vị Q_1 bằng

- A. 13.
- B. 15.
- C. 18,5.
- D. 16.
- Câu 7.** Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo ba năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

Chiều cao	[8,4;8,6)	[8,6;8,8)	[8,8;9,0)	[9,0;9,2)	[9,2;9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng

- A. 0,886.
- B. 0,115.
- C. 0,826.
- D. 0,286.
- Câu 8.** Bảng số liệu ghép nhóm tổng lượng mưa (đơn vị: mm) đo được vào tháng 7 từ năm 2005 đến 2024 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau

Lượng mưa	[150;225)	[225;300)	[300;375)	[375;450)	[450;525)
Số năm	3	5	3	6	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng

- A. 375.
- B. 175.
- C. 225.
- D. 200.
- Câu 9.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng).

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. [7;9).
- B. [9;11).
- C. [11;13).
- D. [13;15).
- Câu 10.** Khảo sát cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilogram), ta có bảng tần số ghép nhóm

Cân nặng (kg)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)	[50;55)
Số học sinh	1	0	0	1	10	17	0	1

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

- A. 20.
- B. 32.
- C. 37.
- D. 40.
- THĂNG LONG BÌNH TÂN
- Trang 71

Câu 11. Tìm hiểu thời gian chạy cự li 1000 mét (đơn vị: giây) của các bạn học sinh trong một lớp thu được kết quả sau

Thời gian	[125; 127)	[127; 129)	[129; 131)	[131; 133)	[133; 135)
Số bạn	3	7	15	10	5

Thời gian chạy trung bình cự li 1000 mét (giây) của các bạn học sinh là

- A. 130,35. B. 131,03. C. 130,4. D. 132,5.

Câu 12. Một công ty bảo hiểm thống kê lại độ tuổi các khách hàng mua bảo hiểm xe ô tô ở bảng sau

Độ tuổi	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)
Số khách hàng	25	38	62	42	37	29

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc khoảng nào sau đây?

- A. [25; 35). B. [35; 40). C. [40; 45). D. [45; 55).

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. D	Câu 2. A	Câu 3. C	Câu 4. B	Câu 5. C	Câu 6. D
Câu 7. D	Câu 8. D	Câu 9. B	Câu 10. D	Câu 11. A	Câu 12. B

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Bảng dưới đây cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11A trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam).

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	2	2
[40; 50)	10	12
[50; 60)	16	28
[60; 70)	8	36
[70; 80)	2	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = 60$.		
b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta Q = 14,5$.		
c) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm là $\bar{x} = 56$.		
d) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $s^2 = 128$.		

Câu 14. Bảng sau cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 học sinh (đơn vị: cm)

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[140; 145)	2	2
[145; 150)	3	5
[150; 155)	5	10
[155; 160)	15	25
[160; 165)	10	35
[165; 170)	5	40
	$n = 40$	

Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau?

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = 30$.		
b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta Q = 7$.		
c) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm là $\bar{x} = 159$.		
d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $s \approx 6,42$.		

Câu 15. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Phát biểu	Đ	S
a) Lượng nước tiêu thụ trung bình trong tháng của một hộ gia đình trong khu vực nói trên xấp xỉ bằng $9,4 (\text{m}^3)$.		
b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 15 (\text{m}^3)$.		
c) Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất. Vậy công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ 11 m^3 nước trở lên.		
d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên bằng $3 (\text{m}^3)$.		

Câu 16. Phỏng bạn Hùng và bạn Vương làm thí nghiệm trồng cây. Mỗi bạn trồng 40 cây cần tây trong cốc, phần gốc của các cây khi bắt đầu trồng đều dài 4 cm. Bảng 1 và Bảng 2 lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao của các cây (đơn vị: centimét) mà bạn Hùng và bạn Vương trồng sau 5 tuần.

Bảng 1

Nhóm	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	
Tần số	2	16	20	2	$n = 40$

Bảng 2

Nhóm	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	
Tần số	5	9	25	1	$n = 40$

Phát biểu	Đ	S
a) Chiều cao trung bình của mỗi cây do hai bạn Hùng và Vương trồng không bằng nhau.		
b) Khoảng biến thiên của cả hai mẫu số liệu trên là 20.		
c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng 1 là 5,5.		
d) Chiều cao của các cây mà bạn Vương trồng đồng đều hơn các cây mà bạn Hùng trồng.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a Đ b Đ c Đ d S

Câu 14.

a Đ b S c S d S

Câu 15.

a Đ b Đ c S d S

Câu 16.

a S b Đ c Đ d S

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Khảo sát thời gian (phút) tập thể dục trong ngày của một số học sinh lớp 12 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Số học sinh	11	10	13	9	7

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

Câu 18. Khảo sát thời gian (phút) tập thể dục trong ngày của một số học sinh lớp 12 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Số học sinh	11	10	13	9	7

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

Câu 19. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 40 học sinh nam lớp 12 ở một trường trung học phổ thông

Nhóm	[160; 163)	[163; 166)	[166; 169)	[169; 172)	[172; 175)	
Tần số	8	10	12	8	2	$n = 40$

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu?

KQ:

Câu 20. Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên Nam được cho như bảng sau

Nhóm	[6,22; 6,46)	[6,46; 6,70)	[6,70; 6,94)	[6,94; 7,18)	[7,18; 7,42)	
Tần số	4	6	5	18	7	$n = 40$

Tính phương sai của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

KQ:

Câu 21. Điểm thi học kì của hai lớp 12A1 và 12A2 cho bởi bảng sau:

Điểm thi	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]	
Lớp 12A1	3	5	17	15	5	$n = 45$
Lớp 12A2	2	8	15	14	6	$n = 45$

Gọi s_{A1}^2, s_{A2}^2 lần lượt là phương sai điểm thi của lớp 12A1 và lớp 12A2. Tính $s_{A1}^2 - s_{A2}^2$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

Câu 22. Cho mẫu thống kê trả lương của hai công ty A và B (đơn vị: triệu đồng).

Lương	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	
Công ty A	18	13	9	5	3	2	$n = 50$
Công ty B	19	12	7	6	3	3	$n = 50$

Gọi $\bar{x}_A, \bar{x}_B$ lần lượt là lương trung bình của công ty A, công ty B. Tính $\bar{x}_A - \bar{x}_B$.

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17. 22,4

Câu 18. 13,4

Câu 19. 15

Câu 20. 0,09

Câu 21. -0,2

Câu 22. -0,3

3.3.3 Đề số 3

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Khảo sát thời gian xem tivi trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Khoảng biến thiên R của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. $R = 20$. B. $R = 100$. C. $R = 50$. D. $R = 60$.

Câu 2. Biết Q_1 , Q_2 , Q_3 là tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba của một mẫu số liệu ghép nhóm. Khi đó khoảng tứ phân vị Δ_Q của mẫu số liệu đó là

- A. $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$. B. $\Delta_Q = Q_1 - Q_3$. C. $\Delta_Q = Q_2 - Q_1$. D. $\Delta_Q = Q_3 - Q_2$.

Câu 3. Thống kê thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các học sinh tổ 1 và tổ 2 lớp 12A thu được bảng sau:

Thời gian sử dụng (phút)	[0; 10)	[10; 30)	[30; 60)	[60; 90)
Số học sinh Tổ 1	2	4	3	1
Số học sinh Tổ 2	5	1	3	0

Tìm khoảng biến thiên R_1 , R_2 cho thời gian sử dụng mạng xã hội của tổ 1 và tổ 2.

- A. $R_1 = 60$; $R_2 = 90$. B. $R_1 = 90$; $R_2 = 60$. C. $R_1 = 30$; $R_2 = 30$. D. $R_1 = 10$; $R_2 = 30$.

Câu 4. Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau:

Thời gian (phút)	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)
Số học sinh	2	4	7	4	3

Tìm khoảng biến thiên cho mẫu số liệu ghép nhóm trên

- A. 20. B. 15. C. 16. D. 4.

Câu 5. Tìm hiểu thời gian chạy cự li (đơn vị: giây) của các học sinh trong một lớp thu được kết quả sau:

Thời gian	[125; 127)	[127; 129)	[129; 131)	[131; 133)	[133; 135)
Số bạn	3	7	15	10	5

Nhóm [131; 133) có tần số là

- A. 3. B. 15. C. 10. D. 7.

Câu 6. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về khối lượng (đơn vị: gram) của 30 củ khoai tây như sau:

Khối lượng	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120)
Tần số	3	6	12	6	3

Giá trị đại diện của nhóm [90; 100) là

- A. 85. B. 95. C. 90. D. 100.

Câu 7. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của dân cư của khu phố A như sau

Nhóm	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)
Số người	24	26	20	15	11	4

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 30,29.

B. 63,33.

C. 32,95.

D. 32,94.

Câu 8. Ta có bảng sau về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác Bình và bác An.

Thời gian (phút)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
Bác Bình	5	12	8	3	2
Bác An	0	25	5	0	0

Hỏi hiệu khoảng biến thiên của mẫu số liệu của bác Bình và bác An là bao nhiêu?

A. 11.

B. 9.

C. 15.

D. 10.

Câu 9. Lương tháng (đơn vị: triệu đồng) của một số nhân viên một văn phòng được ghi lại như sau:

Lương tháng (triệu đồng)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số nhân viên	3	6	8	7

Tìm khoảng tứ phân vị của dãy số liệu trên.

A. 1,75.

B. 3,3.

C. 3,25.

D. 2,3.

Câu 10. Số lượng học sinh trên lớp đăng ký tham gia hoạt động Hoa phượng đỏ ở một trường THPT trên địa bàn TP.HCM được cho ở bảng sau

Điểm số	[6; 10)	[11; 15)	[16; 20)	[21; 25)
Số học sinh	4	8	2	6

Giá trị nào sau đây là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu trên?

A. 38.

B. 9.

C. 15.

D. 10.

Câu 11. Các bạn học sinh lớp 12A5 trả lời 40 câu hỏi trong một bài kiểm tra. Kết quả số câu trả lời đúng được thống kê ở bảng sau.

Thời gian (phút)	[16; 21)	[21; 26)	[26; 31)	[31; 36)	[36; 41)
Bác Bình	4	8	8	16	4

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là

A. 9,375.

B. 8,625.

C. 10,15.

D. 7,5.

Câu 12. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây cam giống như sau

Chiều cao (cm)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Số cây	4	6	7	5	3

Từ một mẫu số liệu về chiều cao của cây xoài giống người ta tính được khoảng tứ phân vị bằng 13,94. Đối với các cây cam giống và xoài giống được khảo sát ở trên, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chiều cao của các cây xoài giống phân tán hơn.

B. Chiều cao của các cây cam giống phân tán hơn.

C. Các cây cam và xoài giống có chiều cao phân tán như nhau.

D. Không so sánh được độ phân tán của các cây cam giống và xoài giống được khảo sát.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. B	Câu 2. A	Câu 3. B	Câu 4. A	Câu 5. C	Câu 6. B
Câu 7. A	Câu 8. C	Câu 9. B	Câu 10. A	Câu 11. A	Câu 12. B

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Cho bảng mẫu số liệu ghép nhóm về mức lương của hai công ty và (đơn vị: triệu đồng) như sau:

Mức lương	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21)	[21; 25)	[25; 29)	[29; 34)
Số người công ty A	10	37	20	13	13	5	2
Số người công ty B	16	38	27	11	10	3	0

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên cho mức lương của hai công ty là 29.		
b) Khoảng biến thiên cho mức lương của công ty B là 24.		
c) Mức lương của công ty A biến động nhiều hơn mức lương của công ty B.		
d) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của công ty A là nhóm [17; 21).		

Câu 14. Cho bảng mẫu số liệu ghép nhóm về điểm môn Toán của hai lớp 12A và 12B được cho như sau:

Khoảng điểm	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Số học sinh 12A	0	1	3	6	17	7	2
Số học sinh 12B	1	3	13	11	5	3	0

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên cho điểm môn Toán của lớp 12A là 7.		
b) Khoảng biến thiên cho điểm môn Toán của lớp 12B là 6.		
c) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của lớp 12A là nhóm [6; 7).		
d) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của lớp 12B là nhóm [7; 8).		

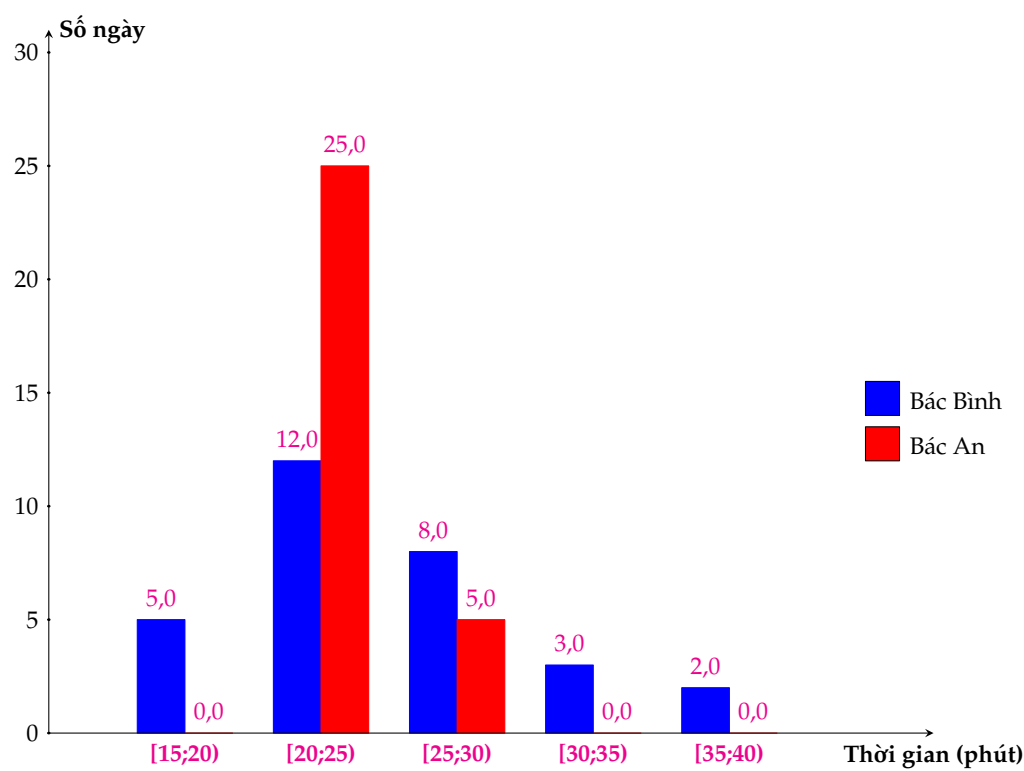
Câu 15. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho ở bảng sau

Thời gian	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	4	12	14	23	3

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 15.		
b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là [15,5; 18,5).		
c) Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 15$.		
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bé hơn 6.		

Câu 16. Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác Bình là 25 (phút).		
b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác An là $\Delta_Q = 2$.		
c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác Bình là $Q_3 = \frac{455}{16}$.		
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác An lớn hơn bác Bình.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13. a S b Đ c Đ d Đ	Câu 14. a S b Đ c Đ d S	Câu 15. a Đ b S c Đ d Đ	Câu 16. a Đ b S c Đ d S
-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Cho bảng số liệu ghép nhóm về chiều cao (đơn vị: centimét) của 36 học sinh trong lớp 12A1 như sau

Nhóm	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)	[175;180)
Tần số	6	11	8	7	3	1

Xác định khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm?

KQ:

Câu 18. Cho bảng số liệu ghép nhóm về chiều cao (đơn vị: centimét) của 36 học sinh trong lớp 12A1 như sau

Nhóm	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)
Tần số	6	11	8	7	3	1

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất có tần số bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 19. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau là bao nhiêu?

KQ:

Nhóm	[15; 22)	[22; 29)	[29; 36)	[36; 43)	[43; 50)
Tần số	1	6	21	21	11

Câu 20. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân).

KQ:

Nhóm	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Tần số	2	17	10	25

Câu 21. Số tiền (đơn vị nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở hai cửa hàng A, B trong một ngày được cho trong hai bảng sau

Số tiền (nghìn đồng)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Số khách hàng cửa hàng A	3	6	19	23	9

Số tiền (nghìn đồng)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Số khách hàng cửa hàng B	5	9	15	20	11

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm của cửa hàng A là s_A^2 , cửa hàng B là s_B^2 . Khi đó $s_A^2 - s_B^2$ là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

KQ:

Câu 22. Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên Dũng và Huy được lần lượt thống kê trong Bảng 1 và Bảng 2 (đơn vị: mét)

Bảng 1

Nhóm	[6,22; 6,46)	[6,46; 6,70)	[6,70; 6,94)	[6,94; 7,18)	[7,18; 7,42)	
Tần số	3	7	5	20	5	$n = 40$

Bảng 2

Nhóm	[6,22; 6,46)	[6,46; 6,70)	[6,70; 6,94)	[6,94; 7,18)	[7,18; 7,42)	
Tần số	2	5	8	19	6	$n = 40$

Gọi a, b lần lượt là phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng và Huy. Khi đó, hiệu số của $a - b$ bằng bao nhiêu (giả sử các kết quả được lấy hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17. 30

Câu 18. 11

Câu 19. 35

Câu 20. 8,92

Câu 21.
-35,3

Câu 22. 0,01

Chương 4

Nguyên hàm và tích phân

4.1 Nguyên hàm

4.1.1 Định nghĩa

Ví dụ mở đầu 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$. Ta có đạo hàm của nó là $f'(x) = (x^2)' = 2x$. Khi đó ta nói x^2 là một nguyên hàm của $2x$. Một cách đầy đủ, ta có định nghĩa nguyên hàm như sau,

Định nghĩa 4.1. Cho $\mathcal{H}$ là một khoảng, đoạn hay nửa khoảng của tập hợp số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{H}$. Khi đó hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{H}$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{H}$.

4.1.2 Tính chất của nguyên hàm

Định lý 4.1. Cho $\mathcal{H}$ là một khoảng, đoạn, nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$. Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{H}$. Khi đó

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{H}$.
- Ngược lại, với mỗi hàm số $H(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{H}$ thì tồn tại hằng số C sao cho $H(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in \mathcal{H}$.

Lưu ý 4.1. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{H}$ được kí hiệu là $\int f(x) dx$.

Tính chất 4.1.

- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{H}$ thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{H}$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số. Do đó $\int f(x) dx = F(x) + C$.
- Mọi hàm số liên tục trên $\mathcal{H}$ đều có nguyên hàm trên $\mathcal{H}$.

Tính chất 4.2.

- $\int F'(x) dx = F(x) + C$.
- $\int 0 dx = C$ và $\int dx = x + C$.
- Biểu thức $f(x) dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, ký hiệu là $dF(x)$. Vậy $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

Định lý 4.2. Cho $\mathcal{H}$ là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$.

- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với k là hằng số khác 0.
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
- $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖**Bài tập 1.** Chứng minh rằng:

- a) $F(x) = 5x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5 + 2x$ trên $\mathbb{R}$.
- b) $G(x) = \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- c) Hàm số $F(x) = \frac{x^5}{5}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4$ trên $\mathbb{R}$.
- d) Hàm số $F(x) = \sin x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ trên $\mathbb{R}$.
- e) $\int k \, dx = kx + C$ với k là hằng số thực.
- f) $\int kx \, dx = \frac{k}{2} \cdot x^2 + C$ với k là hằng số thực khác 0.

Bài tập 2. Cho n là số nguyên dương.

- a) Chứng tỏ rằng $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
- b) Cho k là hằng số thực khác không. Tính $\int kx^n \, dx$.

Bài tập 3. Chứng tỏ rằng $\int (n+1) \cdot x^n \, dx = x^{n+1} + C$.

4.2 Nguyên hàm của hàm số sơ cấp

4.2.1 Hàm số lũy thừa

Định nghĩa 4.2. Cho số thực α . Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là hàm số lũy thừa.

Ví dụ 1. Các hàm số $y = x^2$; $y = x^{-4}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $y = x^{\sqrt{2}}$ là những hàm số lũy thừa.

Tính chất 4.3. Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α . Cụ thể như sau

- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$.

Định lý 4.3. Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

4.2.2 Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Định lý 4.4. Với $\alpha \neq -1$, ta có $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Hệ quả 4.1 (Công thức mở rộng). Với $\alpha \neq -1$, ta có $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Tìm nguyên hàm

- | | | | |
|------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|--|
| a) $\int x^4 dx$. | b) $\int x^{-5} dx$. | c) $\int x^{10} dx$. | d) $\int x^{\sqrt{3}} dx$. |
| e) $\int \frac{1}{x^5} dx$. | f) $\int \frac{4}{x^6} dx$. | g) $\int x^{\frac{1}{2}} dx$. | h) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. |
| i) $\int \frac{1}{x^2} dx$. | j) $\int \frac{x^{1/3}}{2} dx$. | k) $\int x^{\frac{3}{5}} dx$. | l) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx$. |

Bài tập 2. Tìm nguyên hàm

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $\int (x+3) dx$. | b) $\int (x^2 - 2x) dx$. | c) $\int (3x - 4x^2) dx$. | d) $\int (x^3 - 9x + 4) dx$. |
| e) $\int (-2x^2 + 3x - 5) dx$. | f) $\int (x+1)(1-2x) dx$. | g) $\int (3x-2)(x^2-5x) dx$. | h) $\int (x^2+1)^2 dx$. |

Bài tập 3. Tìm nguyên hàm

- | | | | |
|---------------------------------|--|------------------------------------|--|
| a) $\int (x^2 - 2x)^3 dx$. | b) $\int \left(\frac{1}{x^3} - 2x^2 \right) dx$. | c) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx$. | d) $\int (x+1) \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{4}{x^5} \right) dx$. |
| e) $\int (x^4 - 5x^2 + 1) dx$. | f) $\int (2\sqrt[5]{x} - 3x) dx$. | g) $\int (\sqrt[6]{x^2} - 1) dx$. | h) $\int (3x^2 + \sqrt{x}) dx$. |

4.2.3 Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$

Định lý 4.5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Hệ quả 4.2 (công thức mở rộng). $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 4. Tính nguyên hàm

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int \frac{3}{x} dx. & \text{b) } \int \frac{4}{9x} dx. & \text{c) } \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx. & \text{d) } \int \frac{x+1}{x} dx. \\ \text{e) } \int \frac{2x-1}{3x} dx. & \text{f) } \int \frac{(x+1)^2}{x} dx. & \text{g) } \int \frac{(x-2)^3}{x^2} dx. & \text{h) } \int \frac{x^3-2x^2+3}{x^2} dx. \end{array}$$

4.2.4 Nguyên hàm của hàm số lượng giác

Định lý 4.6. *Ta có một số nguyên hàm sau*

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \sin x dx = -\cos x + C. & \text{b) } \int \cos x dx = \sin x + C. \\ \text{c) } \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C. & \text{d) } \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C. \end{array}$$

Hệ quả 4.3 (công thức mở rộng).

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C. & \text{b) } \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C. \\ \text{c) } \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C. & \text{d) } \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C. \end{array}$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 5. Tìm nguyên hàm

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int 3 \cos x dx. & \text{b) } \int (\sin x + \cos x) dx. & \text{c) } \int 8 \sin x dx. \\ \text{d) } \int (2 \sin x - 5 \cos x) dx. & \text{e) } \int (3 \sin x + \sqrt{x}) dx. & \text{f) } \int (3 \sin x - \cos x + x^2) dx. \\ \text{g) } \int \left(3 \sin x + 1 - \frac{1}{x}\right) dx. & \text{h) } \int \left(\frac{1}{2} \cos x - \sqrt{x}\right) dx. & \text{i) } \int \left(\cos x - \frac{x+2}{\pi} - 3x\sqrt{x}\right) dx. \end{array}$$

Bài tập 6. Tìm nguyên hàm

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx. & \text{b) } \int (1 + \tan^2 x) dx. & \text{c) } \int (1 + \cot^2 x) dx. \\ \text{d) } \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx. & \text{e) } \int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx. & \text{f) } \int \frac{2}{\cos^2 x} dx. \\ \text{g) } \int \tan^2 x dx. & \text{h) } \int \cot^2 x dx. & \text{i) } \int \frac{1}{\tan^2 x} dx. \end{array}$$

Bài tập 7. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

4.2.5 Nguyên hàm của hàm số mũ

Định lý 4.7.

- Với $a > 0, a \neq 1$, ta có: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
- $\int e^x dx = e^x + C$.

Hệ quả 4.4 (công thức mở rộng).

- Với $a > 0, a \neq 1$, ta có: $\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$.

$$\bullet \int e^{mx+n} dx = \frac{1}{m} e^{mx+n} + C.$$

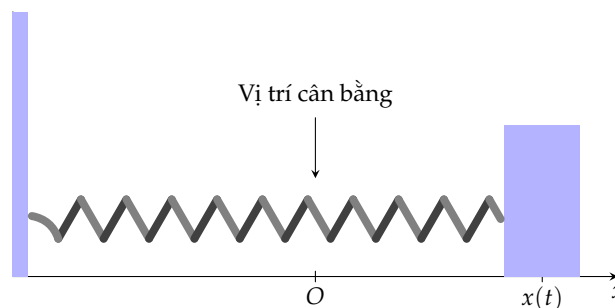
❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 8. Tìm nguyên hàm

- a) $\int 3^x dx.$ b) $\int 2e^x dx$ c) $\int 2^{x+1} dx.$ d) $\int 4^{x+2} dx$
- e) $\int (5^{x+2} - e^{x+1}) dx.$ f) $\int (2e^x + 3e^{-2x}) dx.$ g) $\int (e^{-x} + e^{2-x}) dx.$ h) $\int (e^{3x} - 2^x) dx.$
- i) $\int (3e^{2x+1} - 1) dx.$ j) $\int (e^{2-x} + 3^x) dx.$ k) $\int \frac{3}{\sqrt{e^{x+2}}} dx.$ l) $\int (\sqrt[3]{e^{x-3}} + 2) dx.$

❖ ỨNG DỤNG ❖

Bài tập 9. Một con lắc lò xo dao động theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình 1. Có vận tốc tức thời cho bởi $v(t) = 4\cos t$, trong đó t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng centimet/giây. Tại thời điểm $t = 0$, con lắc đó ở vị trí cân bằng. Phương trình chuyển động của con lắc đó được tính bằng cách nào?



Hình 1

Bài tập 10. Một xe ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 80 m. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t (giây) kể từ lúc đạp phanh.

- Lập công thức biểu diễn hàm số $s(t)$.
- Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là bao nhiêu giây?
- Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là bao nhiêu mét? Xe ô tô liệu có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật trên đường hay không?

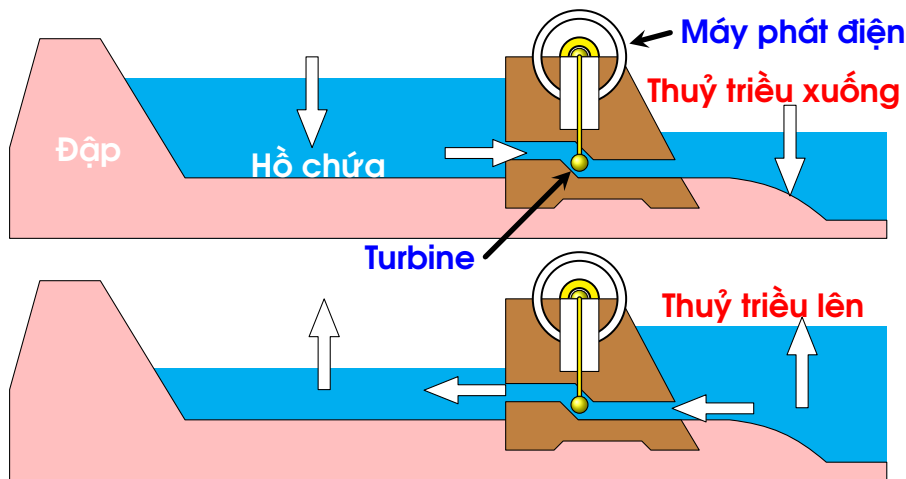
Bài tập 11. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số

$$v(t) = -0,1t^3 + t^2$$

trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimet/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng centimet) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t (Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1*, Cornelsen 2016).

- Viết công thức xác định hàm số $h(t)$ ($t \geq 0$).
- Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài bao lâu?
- Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là bao nhiêu?
- Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua sẽ cao bao nhiêu?

Bài tập 12. Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra (khi thủy triều xuống) và nước chảy vào (khi thủy triều lên) (Hình 2).



Hình 2

Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa được cho bởi hàm số

$$h'(t) = \frac{1}{216} (5t^2 - 120t + 480),$$

trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa là 6 m (Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

- Viết công thức xác định hàm số $h(t)$.
- Mực nước trong hồ chứa cao nhất và thấp nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét)?
- Mực nước trong hồ chứa thay đổi nhanh nhất khi nào? Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa khi đó là bao nhiêu?

Bài tập 13. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t , trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài tập 14. Một quả bóng được ném lên từ độ cao 24,5 (m) với vận tốc được tính bởi công thức $v(t) = -9,8t + 19,6$ (m/s).

- Viết công thức tính độ cao của quả bóng theo thời gian t .
- Sau bao nhiêu lâu kể từ khi ném lên thì quả bóng chạm đất?

Bài tập 15. Khi được thả từ độ cao 20 m, một vật rơi với gia tốc không đổi 10 m/s^2 . Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu và đi được quãng đường bao nhiêu?

Bài tập 16. Một ô tô đang chạy với tốc độ 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t$ (m/s). Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 1 giây, 2 giây, 3 giây là bao nhiêu?

Bài tập 17. Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = xe^x$, suy ra nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)e^x$.

Bài tập 18. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 2 m. Trong 10 năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{1}{x}$ (m/năm).

- Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1 \leq x \leq 11$).
- Sau bao nhiêu năm cây cao 3 m?

Bài tập 19. Một chiếc xe đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 10 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 2 \text{ m/s}^2$. Tính quãng đường xe đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Bài tập 20. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x^5 + 2x - 3$ biết $F(-1) = -5$.

Bài tập 21. Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 1,5t + 5$, trong đó $h(t)$ (cm) là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10e Cengage* 2014). Cây con khi được trồng cao 12 (cm).

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Bài tập 22. Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 15$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. (Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen* 2016). Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Viết công thức của hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0 \leq t \leq 15$.

b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội.

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Bài tập 23. Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$, trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người (Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen* 2016). Đơn giá cho một ngày công lao động là 400000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

4.3 Tích phân

4.3.1 Định nghĩa tích phân

Định nghĩa 4.3. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Trong đó, a được gọi là cận dưới và b là cận trên.

Lưu ý 4.2. Như vậy, để tính tích phân chúng ta cần phải tìm nguyên hàm trước và sau đó thế cận vào tính.

4.3.2 Tính chất của tích phân

Định lý 4.8. Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có:

$$a) \int_a^a f(x) dx = 0; \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$b) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ (k là hằng số).}$$

$$c) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$d) \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Định lý 4.9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử c là số thực tùy ý thuộc đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Tính các tích phân

$$a) \int_1^3 x^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$b) \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx.$$

$$c) \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$d) \int_1^3 x^{\sqrt{2}} dx.$$

$$e) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx.$$

$$f) \int_1^2 (x^3 - 9x + 4) dx.$$

$$g) \int_{-1}^3 (x+1)(1-2x) dx.$$

$$h) \int_0^3 (x^2 + 1)^2 dx.$$

$$i) \int_1^2 (3x^2 - 2) dx.$$

$$j) \int_{-1}^0 (x^2 - 2x)^3 dx.$$

$$k) \int_2^e \left(\frac{1}{x^3} - 2x^2 \right) dx.$$

$$l) \int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx$$

Bài tập 2. Tính tích phân

a) $\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^2} dx.$

b) $\int_1^2 (x + 1) \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{4}{x^5} \right) dx.$ c) $\int_0^2 x^2(1 + x^3) dx.$

d) $\int_1^e \frac{7}{3x} dx$

e) $\int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx.$

f) $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx.$

Bài tập 3. Tính tích phân

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 \sin x - 2 \cos x) dx.$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx.$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$

e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx.$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x + 3\sqrt{x}) dx.$

h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx.$

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} dx.$

Bài tập 4. Tính tích phân

a) $\int_0^1 e^x dx.$

b) $\int_0^1 2^x dx.$

c) $\int_0^1 (3 \cdot 2^x - e^x) dx.$

d) $\int_0^1 3^x dx.$

e) $\int_0^1 (2 \cdot 3^x - 5e^x) dx.$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x + e^x) dx.$

Bài tập 5. Tính tích phân

a) $\int_0^1 (x^6 - 4x^3 + 3x^2) dx;$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^4} dx;$

c) $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx;$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin x + 3 \cos x) dx;$

e) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x dx;$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx;$

g) $\int_{-1}^0 e^{-x} dx;$

h) $\int_{-2}^{-1} e^{x+2} dx;$

i) $\int_0^1 (3 \cdot 4^x - 5e^{-x}) dx.$

Bài tập 6. Tính tích phân

a) $\int_{-1}^1 |x| dx.$

b) $\int_1^3 |x - 2| dx.$

c) $\int_{-4}^0 |x + 2| dx.$

d) $\int_0^2 |x^2 - x| dx.$

e) $\int_{-3}^5 (|x + 2| - |x - 2|) dx.$

f) $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx.$

g) $\int_0^2 |e^x - 1| dx.$

h) $\int_0^3 |2^x - 4| dx.$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx.$

Bài tập 7. Cho $\int_{-2}^3 f(x) dx = -10$, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$, $F(3) = -8$. Tính $F(-2)$.

Bài tập 8. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 4$, $\int_3^4 f(x) dx = 6$. Tính $\int_0^3 f(x) dx$.

❖ ỨNG DỤNG ❖

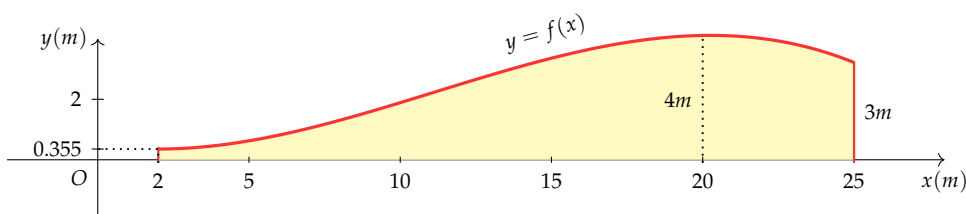
Bài tập 9. Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t)$ (m/s). Cho $0 < a < b$ và $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$.

- a) Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t) dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (a, b tính theo giây).
- b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 - \sin t$ (m/s). Tính quãng đường vật đi chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s).

Bài tập 10. Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường các chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành điện năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (tô màu vàng) trong hình mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 2$, $x = 25$, trục Ox và đồ thị hàm số

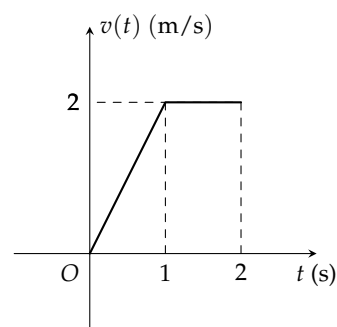
$$y = f(x) = -\frac{1}{800} (x^3 - 33x^2 + 120x - 400).$$

Hãy tính diện tích hình thang cong đó.



Bài tập 11. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở Hình bên.

- a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.
b) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.



Bài tập 12. Ở nhiệt độ 37°C , một phản ứng hoá học từ chất đầu A, chuyển hoá thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05 \text{ mol L}^{-1}$.

- a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$, từ đó hãy tìm hàm số $f(x)$.

- b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

4.4 Ứng dụng tích phân

4.4.1 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Định lý 4.10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Hệ quả 4.5. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Nếu phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a; b)$ thì công thức trên vẫn đúng.

✧ BÀI TẬP TỰ LUẬN ✧

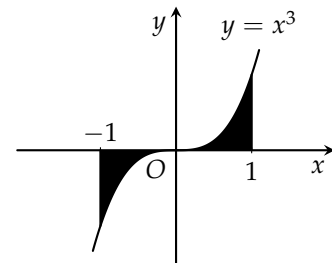
Bài tập 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.

Bài tập 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3\pi$.

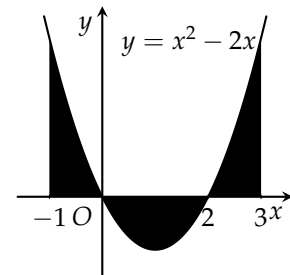
Bài tập 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.

Bài tập 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \cos x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = x^3$ có đồ thị như hình. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.



Bài tập 6. Trong hình bên, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 3$.



4.4.2 Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Định lý 4.11. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2$, $y = 2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

Bài tập 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 - 3x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$.

Bài tập 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, $y = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

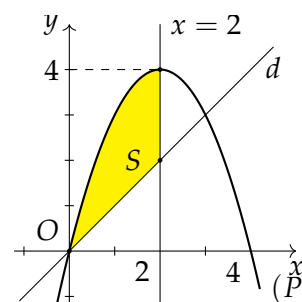
Bài tập 10. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3 + 2x + 1$, $y = x^3 + x + 3$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$.

Bài tập 11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

Bài tập 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 10 - x^2$, $y = x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 2$.

Bài tập 13. Cho hai hàm số $y = 4x - x^2$ và $y = x$ lần lượt có đồ thị (P) và d như Hình 3.

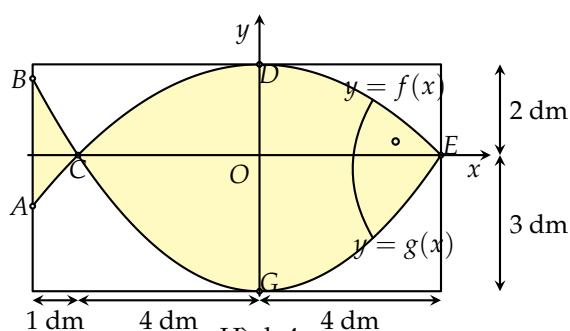
- Tính diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi (P) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.
- Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (P) , d và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.



Hình 3

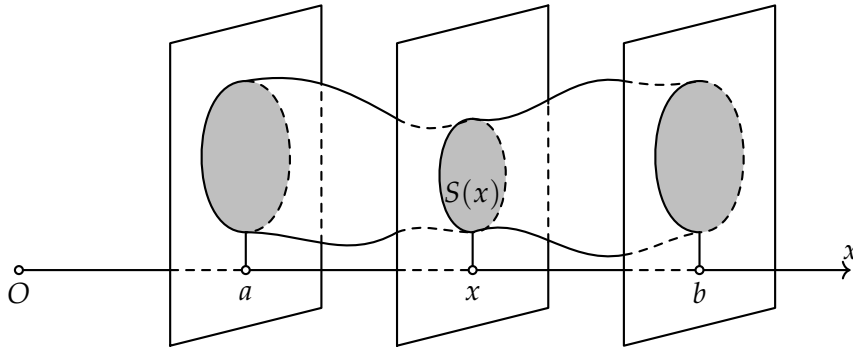
Bài tập 14. Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong Hình 4 (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet).

- Lập phương trình các parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$.
- Tính diện tích của logo.
- Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 4

4.4.3 Thể tích của vật thể

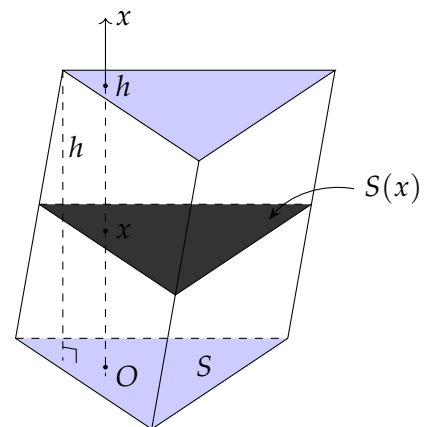


Định lý 4.12. *Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = a$ và $x = b$, ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại x , ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x)$. Giả sử hàm số $S(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính bởi công thức $V = \int_a^b S(x) dx$.*

Lưu ý 4.3. *Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a; b]$ thì $V = (b - a)S$.*

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 15. Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy S và chiều cao h . Sử dụng tích phân, tính thể tích của khối lăng trụ theo S và h .

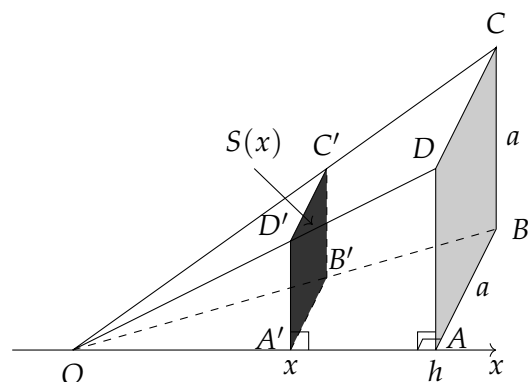


Hình 5

Bài tập 16. Trong không gian, cho hình chóp $O.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $OA \perp (ABCD)$, $OA = h$. Đặt trục số Ox như Hình 8. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 < x \leq h$), cắt hình chóp $O.ABCD$ theo mặt cắt là hình vuông $A'B'C'D'$. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích của hình vuông $A'B'C'D'$.

a) Tính $S(x)$ theo a, h và x .

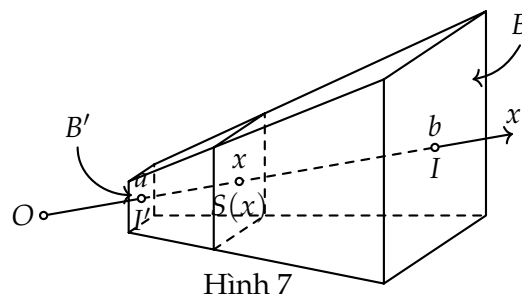
b) Tính $\int_0^h S(x) dx$ và so sánh với thể tích khối chóp $O.ABCD$.



Hình 6

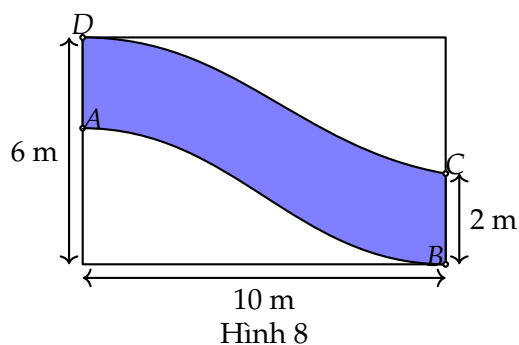
Bài tập 17. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại x , ($1 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x) = 2x$. Tính thể tích V của phần vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

Bài tập 18. Cho khối chóp cắt đều tạo bởi khối chóp đỉnh S , diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao h . Chọn trục Ox chứa đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S (Hình 7). Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cắt đều lần lượt cắt Ox tại I và I' . Đặt $OI = b$, $OI' = a$, ($a < b$). Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x , ($a \leq x \leq b$), cắt khối chóp cắt đều theo hình phẳng có diện tích $S(x)$. Người ta chứng minh rằng $S(x) = B \frac{x^2}{b^2}$. Tính thể tích khối chóp cắt đều đó.



Hình 7

Bài tập 19. Cô Hạnh đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong Hình 8. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra, cô Hạnh quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m³ bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó.

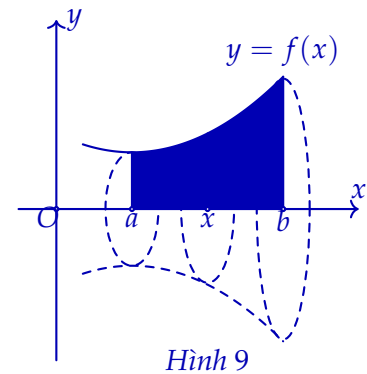


Hình 8

4.4.4 Thể tích khối tròn xoay

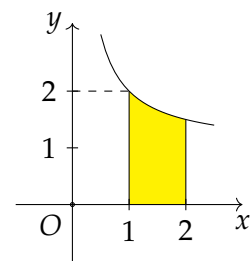
Định lý 4.13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$



❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 20. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ (Hình 10). Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .

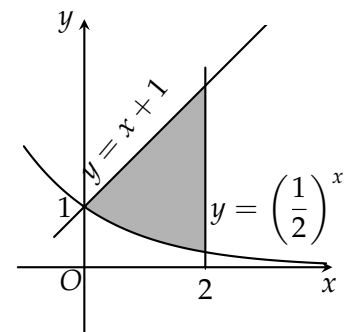


Hình 10

Bài tập 21. Sử dụng tích phân, tính thể tích khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h

Bài tập 22. Cho đồ thị các hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = x + 1$ và hình phẳng được tô màu như Hình 11.

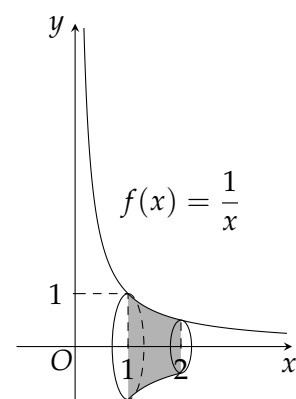
- Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?
- Tính diện tích hình phẳng đó.



Hình 11

Bài tập 23. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và khối tròn xoay như Hình 12.

- Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như Hình 12?
- Tính thể tích khối tròn xoay đó.

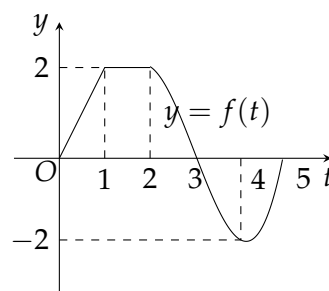


Hình 12

Bài tập 24. Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như Hình 13.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0, t = 2$.

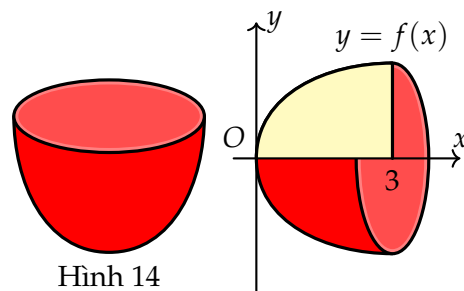
b) Hỏi $\int_0^1 f(u) du$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường nào trong Hình 13?



Hình 13

Bài tập 25. Xét chiếc chén trong bộ ấm chén uống trà ở phần mở đầu, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = 0,14x^3 - 0,87x^2 + 1,92x + 0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimét) (Hình 14).

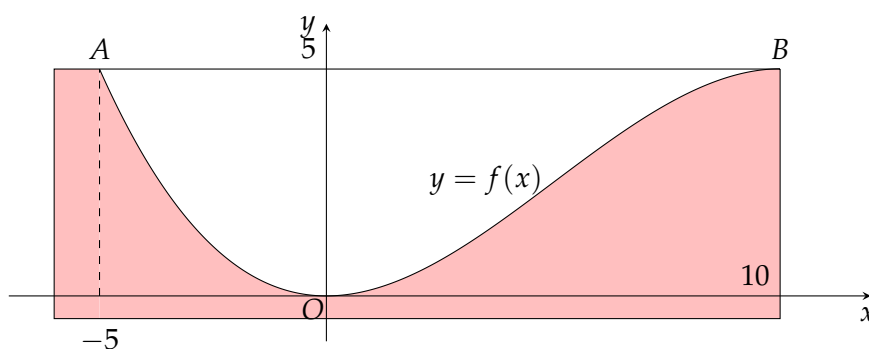
Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến hàng đơn vị của centimét khối).



Hình 14

Bài tập 26. Hình 15 minh họa mặt cắt đứng của một con kênh đặt trong hệ trục tọa độ Oxy . Đáy của con kênh là một đường cong cho bởi phương trình

$$y = f(x) = \frac{3}{100} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 \right).$$



Hình 15

Hãy tính diện tích hình phẳng tô màu xanh trong Hình 34, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét.

Bài tập 27. Sau khi đo kích thước của thùng rượu vang (hình bên), bạn Quân xác định thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$y = -0,011x^2 - 0,071x + 40,$$

trục Ox và hai đường thẳng $x = -35, x = 35$ quay quanh trục Ox . Tính thể tích thùng rượu vang đó, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimét.



4.5 Ôn tập chương

4.5.1 Đề 1

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

- A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$ B. $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$
 C. $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$ D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Câu 2. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $(\mathcal{D})$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$). Diện tích của $(\mathcal{D})$ được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $S = \int_b^a |f(x) - g(x)| dx.$ B. $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$
 C. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$ D. $S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a là số thực dương. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\int_a^a f(x) dx = 1.$ B. $\int_a^a f(x) dx = a^2.$ C. $\int_a^a f(x) dx = 0.$ D. $\int_a^a f(x) dx = 2a.$

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \cos x$ là

- A. $2x - \sin x + C.$ B. $\frac{1}{3}x^3 + \sin x + C.$ C. $x^3 + \sin x + C.$ D. $\frac{1}{3}x^3 - \sin x + C.$

Câu 5. Nếu $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$, với C là hằng số thì $f(x)$ là hàm số nào sau đây?

- A. $f(x) = 3x^2 + e^x.$ B. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x.$ C. $f(x) = x^2 + e^x.$ D. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x.$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[-3; 5]$. Tính $\int_{-3}^5 4f'(x) dx$, biết $f(-3) = 1$ và $f(5) = 9$.

- A. $I = 40.$ B. $I = 36.$ C. $I = 8.$ D. $I = 32.$

Câu 7. Biết $\int_1^3 f(x) dx = 8$. Khi đó kết quả của $\int_1^3 (2f(x) - 3) dx$ bằng

- A. 16. B. 10. C. 13. D. 9.

Câu 8. Cho vật thể $(\mathcal{B})$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt vật thể $(\mathcal{B})$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x , ($0 \leq x \leq 2$) ta được thiết diện có diện tích bằng $x^2(2 - x)$. Thể tích của vật thể $(\mathcal{B})$ là

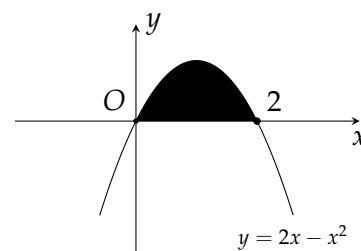
- A. $V = \frac{4}{3}\pi.$ B. $V = \frac{4}{3}.$ C. $V = \frac{2}{3}\pi.$ D. $V = \frac{2}{3}.$

Câu 9. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là

- A. $S = 12.$ B. $S = 8.$ C. $S = 9.$ D. $S = 10.$

Câu 10. Kí hiệu ($\mathcal{H}$) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục Ox (hình bên). Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng ($\mathcal{H}$) khi nó quay quanh trục Ox .

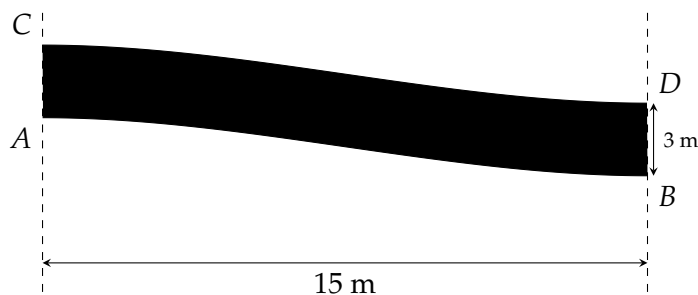
- A. $\frac{18\pi}{15}$. B. $\frac{17\pi}{15}$. C. $\frac{16\pi}{15}$. D. $\frac{19\pi}{15}$.



Câu 11. Vi khuẩn E. coli sống chủ yếu ở đường ruột và có số lượng lớn nhất trong hệ vi sinh vật của cơ thể. Một quần thể vi khuẩn E. coli được quan sát trong điều kiện thích hợp, có tốc độ sinh trưởng được cho bởi hàm số $f(t) = 480 \cdot 2^t \ln 2$. Trong đó t tính bằng giờ ($t > 0$), $f(t)$ tính bằng cá thể/giờ. Biết tại thời điểm bắt đầu quan sát, số lượng cá thể được ước tính một cách chính xác khoảng 480 cá thể. Hàm số biểu thị số lượng cá thể theo thời gian t là

- A. $F(t) = 480 \cdot 2^t$. B. $F(t) = 480 \cdot 2^t + \ln 2$.
C. $F(t) = 480 \cdot 2^t - 480$. D. $F(t) = 480 \cdot 2^t + 480$.

Câu 12. Người ta muốn đổ bê tông một con đường giới hạn bởi hai đường cong AB và CD (phần gạch sọc) với kích thước như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 3 m, lớp bê tông cần đổ dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền cần dùng để đổ bê tông con đường đó.

- A. 6 580 000 đồng. B. 7 290 000 đồng. C. 6 850 000 đồng. D. 8 420 000 đồng.

BẢNG ĐÁP ÁN

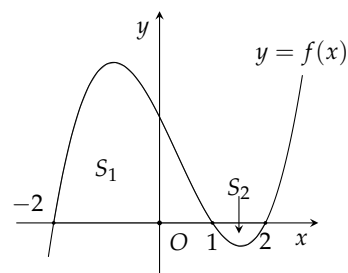
Câu 1. B	Câu 2. C	Câu 3. C	Câu 4. B	Câu 5. C	Câu 6. D
Câu 7. B	Câu 8. B	Câu 9. D	Câu 10. C	Câu 11. A	Câu 12. B

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Biết $F(x) = x^3 + 3x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $F(1) = 4$.		
b) $\int_0^1 f(x) dx = 4$.		
c) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + C$.		
d) Nếu $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thì $F(x) = G(x)$.		

Câu 14. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành (xem hình vẽ). Biết $S_1 = 10$ và $S_2 = 1$.



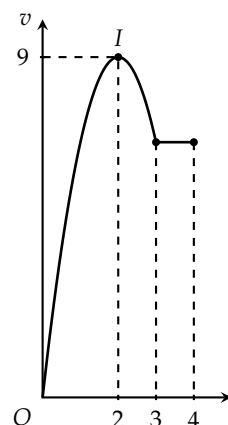
Phát biểu	Đ	S
e) $\int_{-2}^1 f(x) dx = 10.$		
f) $\int_1^2 f(x) dx = 1.$		
g) $\int_{-2}^2 f(x) dx = 11.$		
h) $\int_{-2}^2 f(x) dx = 11.$		

Câu 15. Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 13$), $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage). Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

Phát biểu	Đ	S
a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$.		
b) Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1325 người.		
c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1296 người.		
d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 6$.		

Câu 16.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành.



Phát biểu	Đ	S
a) Vận tốc lớn nhất của chuyển động là 9 (km/h).		
b) $v(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$, với $0 \leq t \leq 3$.		
c) $v(t) = \frac{27}{4}t$, với $3 \leq t \leq 4$.		
d) Quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ là 27 km.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a Đ b Đ c S d S

Câu 14.

a Đ b S c S d Đ e

Câu 15.

a S b Đ c S d S

Câu 16.

a Đ b Đ c S d Đ

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$ thỏa mãn $F(2) = \frac{3}{2}$. Tính $F(1)$.

KQ:

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 2x & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

KQ:

Câu 19. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$ (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

KQ:

Câu 20. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Giả sử nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày được mô phỏng bởi công thức $h(t) = 29 + 3 \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right]$, với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Tìm nhiệt độ trung bình (đơn vị: độ) của ngày trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

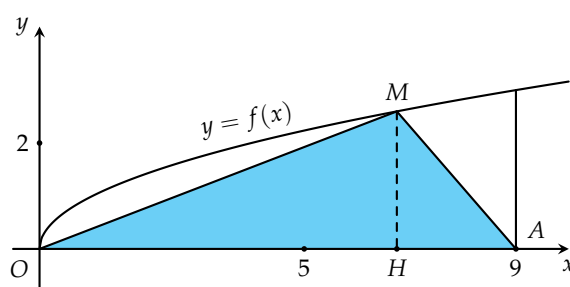
KQ:

Câu 21. Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x tấn sản phẩm trong một tuần. Khi đó, đạo hàm $P'(x)$, gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức

$$P'(x) = 16 - 0,02x \text{ với } 0 \leq x \leq 100.$$

Tính lợi nhuận (triệu đồng) nhà máy thu được khi bán 90 tấn sản phẩm trong tuần. Biết rằng nhà máy lỗ 25 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần. KQ:

Câu 22. Gọi $(\mathcal{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y = \sqrt{x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 9$. Cho điểm M thuộc đồ thị $(\mathcal{C})$ và điểm $A(9; 0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi hình phẳng $(\mathcal{H})$ quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi tam giác OMA quay quanh trục Ox .



Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(\mathcal{C})$ và đường thẳng OM (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17. 1

Câu 18. 4,33

Câu 19. 0,49

Câu 20. 29

Câu 21. 1334

Câu 22. 2,92

4.5.2 Đề 2

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K và các hằng số $a, b, c \in K$ và $a < c < b$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$ B. $\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(t) dt.$
 C. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ với $k \in \mathbb{R}.$ D. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 2$ là

- A. $-\cos x + 2x + C.$ B. $-\cos x + 2x + C.$ C. $\cos x + 2x + C.$ D. $\cos x + C.$

Câu 3. Tích phân $\int_1^2 x^3 dx$ bằng

- A. $\frac{15}{3}.$ B. $\frac{17}{4}.$ C. $\frac{7}{4}.$ D. $\frac{15}{4}.$

Câu 4. Nếu $\int_1^3 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 g(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 [3f(x) + 2g(x)] dx$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 7. D. 5.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0; 2]$ và $f(0) = -1$, biết $\int_0^2 f'(x) dx = 5$. Tính $f(2)$.

- A. $f(2) = 6.$ B. $f(2) = 2.$ C. $f(2) = 5.$ D. $f(2) = 4.$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F'(x) = f(x)$ với mọi số thực x . Tính $\int_0^1 f(x) dx$. Biết $F(0) = 2; F(1) = 5$.

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 7. Tích phân $\int_1^3 [2f(x) + 1] dx = 5$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

- A. 3. B. 2. C. $\frac{3}{4}.$ D. $\frac{3}{2}.$

Câu 8. Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox , biết (H) được giới hạn bởi các đường $y = 4x^2 - 1, y = 0$.

- A. $\frac{8\pi}{15}.$ B. $\frac{4\pi}{15}.$ C. $\frac{16\pi}{15}.$ D. $\frac{2\pi}{15}.$

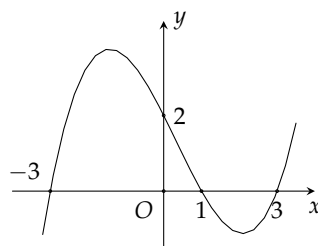
Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong $y = x^2 - 2x$ và $y = 2x^2 - x - 2$ là

- A. 4. B. 9. C. 5. D. $\frac{9}{2}.$

Câu 10. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 1)^2 e^x$. Tính $S = a + 2b + c$.

- A. $S = 3.$ B. $S = -2.$ C. $S = 0.$ D. $S = 4.$

Câu 11. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức

A. $S = \int_{-3}^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = \left| \int_{-3}^3 f(x) dx \right|.$

D. $S = \int_{-3}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

Câu 12. Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức

$$C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2 \text{ với } 0 \leq x \leq 150.$$

Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

- A. 570 triệu đồng. B. 470 triệu đồng. C. 420 triệu đồng. D. 440 triệu đồng.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. B	Câu 2. A	Câu 3. D	Câu 4. B	Câu 5. D	Câu 6. A
Câu 7. D	Câu 8. A	Câu 9. D	Câu 10. B	Câu 11. D	Câu 12. B

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^2$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + C.$		
b) $\int_0^2 f(x) dx = \frac{7}{3}.$		
c) Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó $f'(x) = F(x)$.		
d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Nếu đồ thị hàm số của $F(x)$ đi qua điểm $(3;1)$ thì $F(x) = \frac{x^3}{3} - 8..$		

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\int f(x) dx = f'(x) + C.$		
b) $\int f'(x) dx = f(x) + C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int f'(x) dx = f(x).$		
d) $\int f''(x) dx = f'(x) + C.$		

Câu 15. Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây). Xét chuyển động trong khoảng thời gian từ c (giây) đến b (giây).

Phát biểu	Đ	S
a) $\int_c^b a(t) dt = v(b) - v(c).$		
b) $\int_c^b v(t) dt = a(b) - a(c).$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int_c^b v'(t) dt = v(c) - v(b).$		
d) $\int_c^b v'(t) dt = v(b) - v(c).$		

Câu 16. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 2 \cos t$ (m/s²).

Phát biểu	Đ	S
a) Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Khi đó, vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 2 \sin t$ (m/s).		
b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ là 1 m/s.		
c) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \pi$ (s) là 4 m.		
d) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là 2 m.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a Đ b S c S d Đ

Câu 14.

a S b Đ c S d Đ

Câu 15.

a Đ b S c S d Đ

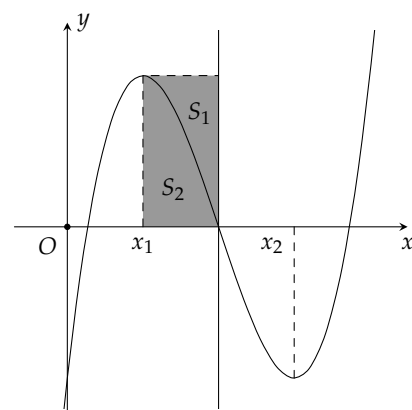
Câu 16.

a Đ b S c Đ d S

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



KQ:

Câu 18. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{2x} - 6}{e^x}$, biết $F(0) = 7$. Tính tổng các nghiệm của phương trình $F(x) = 5$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 19. Xét vật thể ($\mathcal{T}$) nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông có cạnh $2\sqrt{1 - x^2}$. Tính thể tích vật thể ($\mathcal{T}$) (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 20. Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5 \cos t$ (m/s²). Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc 2,5 m/s. Tính gia tốc của vật (đơn vị m/s²) tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên.

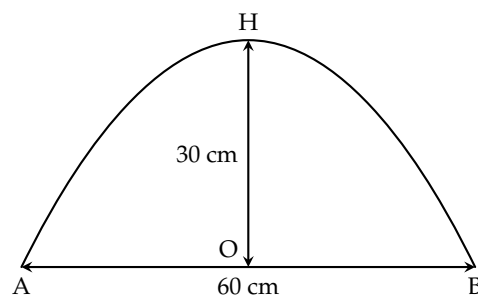
KQ:

Câu 21. Cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB (Làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 22.

Bạn An cần mua một chiếc gương có viền là đường parabol bậc 2 (xem hình vẽ). Biết rằng đoạn $AB = 60$ cm, $OH = 30$ cm. Diện tích của chiếc gương bạn An mua bằng bao nhiêu cm²?



KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17. 0,6

Câu 18. 1,79

Câu 19. 5,33

Câu 20. 0

Câu 21. 1,33

Câu 22. 1200

Chương 5

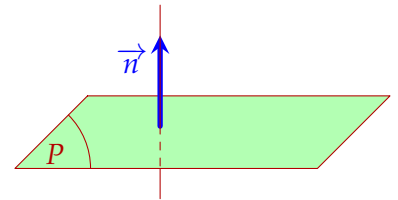
Mặt phẳng. Đường thẳng. Mặt cầu

5.1 Mặt phẳng

5.1.1 Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa 5.1.

Cho mặt phẳng (P) . Nếu véc-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) thì $\vec{n}$ được gọi là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .



Lưu ý 5.1. Nếu $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

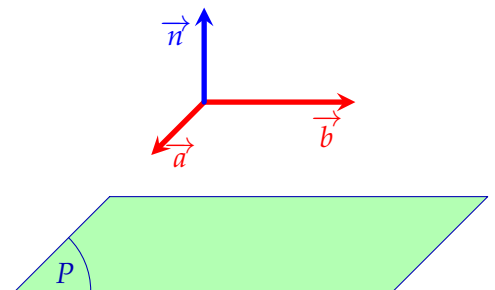
Định nghĩa 5.2. Cho mặt phẳng (P) . Hai véc-tơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) được gọi là cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (P) .

Định lý 5.1.

Nếu hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (P) thì

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .



5.1.2 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa 5.3. Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C không đồng thời bằng 0) là phương trình tổng quát của mặt phẳng. Hệ số D gọi là hệ số tự do của phương trình tổng quát.

Định lý 5.2. Ta có thể chứng minh được rằng nếu mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, thì véc-tơ $\vec{n} = (A; B; C)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

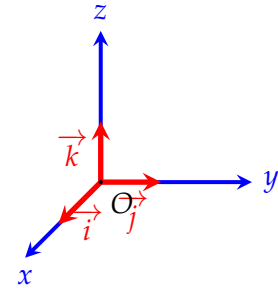
Định lý 5.3. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (5.1)$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖
TÌM VEC-TƠ PHÁP TUYẾN VÀ VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hãy chỉ ra một vec-tơ pháp tuyến của:

- Mặt phẳng (Oyz) .
- Mặt phẳng (Ozx) .
- Mặt phẳng (Oxy) .



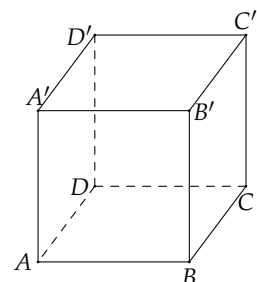
Bài tập 2. Cho hình lập phương như hình bên, hãy chỉ ra vec-tơ pháp tuyến của các mặt phẳng sau

- $(ABCD)$, $(AA'D'D)$.
- $(BCC'B')$, $(DD'C'C)$.
- (ADA') , (ACC') .
- $(ADC'B')$, $(BCD'A')$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hãy chỉ ra một cặp vec-tơ chỉ phương của mỗi mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) .

Bài tập 4. Quan sát hình bên.

- $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'D'}$ có là cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'D')$ hay không? Vì sao?
- $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ có là cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$ hay không? Vì sao?
- Chỉ ra một cặp vec-tơ chỉ phương của $(BB'C'C)$.
- Chỉ ra một cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'D'B)$.



Bài tập 5. Cho mặt phẳng (P) có cặp vec-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; 3; 5)$, $\vec{b} = (-3; -1; 1)$.

- Hãy chỉ ra một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- Vec-tơ $\vec{n} = (1; -2; 1)$ có là vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) hay không? Vì sao?

Bài tập 6. Xác định vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) , biết

- $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ và $C(0, 0, 1)$.
- $A(1, 2, 3)$, $B(1, -1, 2)$ và $C(3, -1, 2)$.

Bài tập 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 5)$.

- Tìm tọa độ của một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC) .
- Tìm tọa độ của một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB) .

Bài tập 8. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

- $x^2 + y + z - 1 = 0$,
- $x + y^2 + z - 1 = 0$.
- $x + y + z^2 - 1 = 0$.
- $x + y + z - 1 = 0$.

Bài tập 9. Chỉ ra một vec-tơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng sau:

- $(P_1): 2x - y + z - 1 = 0$
- $(P_2): 3x + y - z - 1 = 0$.
- $(P_3): -x + 2y + z - 1 = 0$.
- $(P_4): x - y = 0$.
- $(P_5): 2x - z - 1 = 0$.
- $(P_6): z - 2 = 0$.

Bài tập 10. Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) có phương trình tổng quát là $(P): 3x - 5y + 7z + 5 = 0$ và $(Q): x + y - 2 = 0$.

- Tìm một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng (P) , (Q) .
- Tìm điểm thuộc mặt phẳng (P) trong số các điểm $A(1;3;1)$, $B(1;2;3)$.

Bài tập 11. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1;2;7)$ và nhận $\vec{n} = (3;2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Bài tập 12. Viết phương trình mặt phẳng trong các trường hợp sau

- Qua $M(1;-3;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;3)$.
- Qua $N(1;0;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5;-3;0)$.
- Có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;3;2)$ và qua góc tọa độ O .
- Qua $M(-4;-3;0)$ và vuông góc với BC biết $B(0;-3;-2)$ và $C(2;3;0)$.

Bài tập 13. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của AB ,

- $A(1;3;-2)$, $B(0;-1;3)$.
- $A(1;-3;0)$, $B(0;6;-5)$.
- $A(2;1;0)$, $B(0;3;0)$.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG BIẾT BIẾT CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG

Bài tập 14. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $I(-3;1;0)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-1)$, $\vec{v} = (-1;3;2)$.

Bài tập 15. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua $M(0;1;3)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau

- $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-1;0;3)$.
- $\vec{a} = (0;2;-3)$, $\vec{b} = (-1;0;6)$
- $\vec{a} = (1;2;1)$, $\vec{b} = (2;1;3)$.

Bài tập 16. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua $M(1;3;-2)$ và

- vuông góc với trục Ox .
- vuông góc với trục Oz .
- vuông góc với trục Oy .

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỦA MẶT PHẪNG ĐI QUA BA ĐIỂM KHÔNG THẲNG HÀNG

Để viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm H, I, K , không thẳng hàng, ta có thể làm như sau:

- Bước 1.** Tìm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) là: $\vec{HI}$ và $\vec{HK}$.
- Bước 2.** Tìm $\vec{n} = [\vec{HI}, \vec{HK}]$.
- Bước 3.** Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(a_1; b_1; c_1)$ nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến.

Tính chất 5.1. Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$ có phương trình là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Phương trình trên còn được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Bài tập 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(0;1;1)$, $B(2;4;3)$, $C(5;3;1)$.

- Tìm tọa độ một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) .
- Tìm tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

c) Lập phương trình của mặt phẳng (α).

Bài tập 18. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M(1;2;1)$, $N(0;3;2)$ và $P(-1;0;0)$.

Bài tập 19. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm A, B, C trong các trường hợp sau

a) $A(0;0;5), B(0;-2;0), C(-3;0;0)$.

b) $A(0;0;-6), B(0;4;0), C(5;0;0)$.

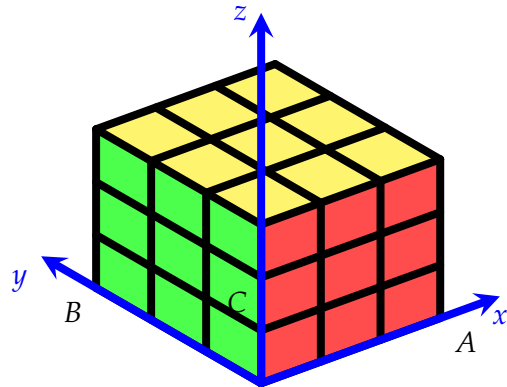
c) $A(1;0;2), B(1;1;1)$ và $C(0;1;2)$.

d) $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$.

Bài tập 20. Khối rubik được gắn với hệ toạ độ $Oxyz$ có đơn vị bằng độ dài cạnh hình vuông nhỏ. Xét bốn điểm $A(3;0;0), B(0;3;0), C(0;0;2)$ và $D(1;1;1)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C .

b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng hay không?



5.1.3 Hai mặt phẳng song song. Hai mặt phẳng vuông góc

Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Gọi $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Khi đó,

a) $(P_1) \parallel (P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho
$$\begin{cases} \vec{n}_1 = k \vec{n}_2 \\ D_1 \neq k D_2 \end{cases}$$

b) $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (tức hai véc-tơ pháp tuyến vuông góc).

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 21. Cho hai mặt phẳng $(P_1): 2x - y - 3z + 1 = 0$ và $(P_2): 6x - 3y - 9z + 1 = 0$. Chứng minh rằng $(P_1) \parallel (P_2)$.

Bài tập 22. Cho $m \neq 0$. Chứng minh rằng các mặt phẳng $(P): x - m = 0$, $(Q): y - m = 0$, $(R): z - m = 0$ lần lượt song song với các mặt phẳng $(Oyz), (Ozx), (Oxy)$.

Bài tập 23. Cho hai mặt phẳng $(P_1): x - y - 2z + 4 = 0$ và $(P_2): x - y + z + 5 = 0$. Chứng minh rằng $(P_1) \perp (P_2)$.

Bài tập 24. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (Ozx) và $(P): x + 2z - 3 = 0$ vuông góc với nhau.

Bài tập 25. Mặt phẳng $(P): 4x - 3y + z + 5 = 0$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

a) $(Q): 8x + 6y + 2z + 9 = 0$; b) $(R): 8x + 6y + 2z + 10 = 0$; c) $(S): 4x + 2y + z + 5 = 0$.

Bài tập 26. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua $M(1;3;-2)$ và

a) song song với mặt phẳng Oxz . b) song song với mặt phẳng Oyz . c) song song với mặt phẳng Oxy .

Bài tập 27. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 12 = 0$.

Bài tập 28. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A và song song với mp(P) trong các trường hợp sau

a) $A(0;0;5)$ và $(P): x + 2y - z - 1 = 0$.

b) $A(-1;0;3)$ và $(P): x - y + 2 = 0$.

Bài tập 29. Mặt phẳng $(E): 2x - y + 8z + 1 = 0$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

- a) $(F): 8x - 4y + 32z + 7 = 0$; b) $(H): 6x - 3y + 24z + 3 = 0$; c) $(G): 10x - 5y + 41z + 1 = 0$.

Bài tập 30. Trên bản thiết kế đồ họa 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng $(P): 6x + 5y + z + 2 = 0$. Một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và song song với (P) . Viết phương trình mặt phẳng (Q) .



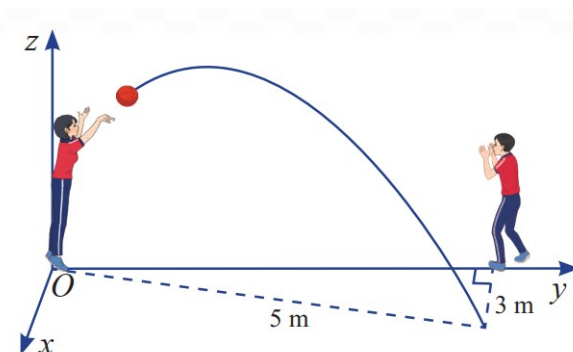
Hình 14

Bài tập 31. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ có phương trình là $(P): x - 4y + 3z + 2 = 0$; $(Q): 4x + y + 8z = 0$; $(R): x + y + z + 9 = 0$. Chứng minh rằng $(P) \perp (Q)$ và $(P) \perp (R)$.

Bài tập 32. Tìm các cặp mặt phẳng vuông góc trong các mặt sau

- a) $(F): 3x + 2y + 5z = 0$, b) $(H): x - 4y + z + 23 = 0$, c) $(G): x - y + 3z + 24 = 0$.

Bài tập 33. Hai học sinh đang chuyền bóng. Bạn nữ ném bóng cho bạn nam. Quả bóng bay trên không, lệch sang phải và rơi xuống tại vị trí cách bạn nam 3 m, cách bạn nữ 5 m. Cho biết quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt đất. Hãy viết phương trình của (P) trong không gian $Oxyz$ được mô tả như trong hình vẽ.



Hình 16

5.1.4 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định lý 5.4. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$, $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$ được tính theo công thức:

$$d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 34. Cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 3 = 0$ và điểm $M_0(3; 1; -5)$. Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P) .

Bài tập 35. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2; 3)$ đến mặt phẳng sau

- a) $(P): x + y + z + 12 = 0$; b) $(Q): 4x + 3y + 10 = 0$.

Bài tập 36. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm $M(a; b; c)$ đến các mặt phẳng $(Oyz), (Ozx), (Oxy)$ lần lượt bằng $|a|, |b|, |c|$.

Bài tập 37. Tính chiều cao của hình chóp $S.ABC$ có tọa độ các đỉnh là $S(5; 0; 1), A(1; 1; 1), B(2; 3; 4), C(5; 2; 3)$.

Bài tập 38. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) cho bởi các phương trình sau đây: $(P) : 2x + y + 2z + 9 = 0$; $(Q) : 2x + y + 2z + 99 = 0$.

Bài tập 39. Cho mặt phẳng $(P_1) : 2x - 4y - 4z + 3 = 0$ và mặt phẳng $(P_2) : x - 2y - 2z + 1 = 0$.

- Chứng minh rằng $(P_1) \parallel (P_2)$.
- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P_1), (P_2)$.

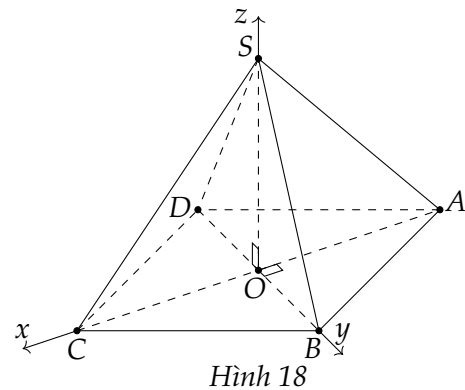
Bài tập 40. Cho mặt phẳng $(P_1) : 6x - 8y - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P_2) : 3x - 4y + 2 = 0$.

- Chứng minh rằng $(P_1) \parallel (P_2)$.
- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P_1), (P_2)$.

Bài tập 41.

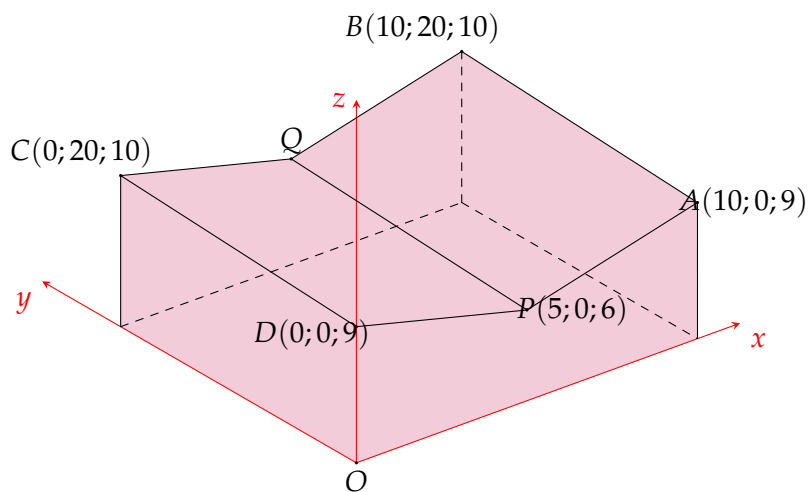
- Tính chiều cao của hình chóp $O.MNP$ với tọa độ các đỉnh là $O(0;0;0)$, $M(2;1;2)$, $N(3;3;3)$, $P(4;5;6)$.
- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(R) : 8x + 6y + 70 = 0$ và $(S) : 16x + 12y - 2 = 0$.

Bài tập 42. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như Hình 18, tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .



MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG TRONG THỰC TIỄN

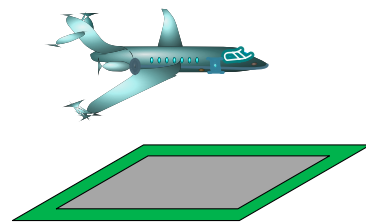
Bài tập 43. Hình dưới đây minh họa hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất.



- Viết phương trình của hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà.
- Tìm tọa độ của điểm Q .
- Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{PQ}$.

Bài tập 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2,5; 0,5)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3; 7,5; 0)$ trên đường băng.

- Sau bao nhiêu phút máy bay từ vị trí A hạ cánh tại vị trí B ? Biết tốc độ của máy bay là 300 km/h trên quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).
- Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(9; 0; 0)$, $N(0; -9; 0)$, $P(0; 0; 9)$. Tính độ cao của máy bay khi máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.



Bài tập 45. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3; -4; 5)$ và nhận $\vec{n} = (2; 7; -1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Bài tập 46. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $K(-1; 2; 3)$ và nhận hai véc-tơ $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (4; 5; 6)$ làm cặp véc-tơ chỉ phương.

Bài tập 47. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

- Điểm $I(3; -4; 1)$ và vuông góc với trục Ox ;
- Điểm $K(-2; 4; -1)$ và song song với mặt phẳng (Ozx) ;
- Điểm $K(-2; 4; -1)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 3x + 7y + 10z + 1 = 0$.

Bài tập 48. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 4; 0)$, $C(2; 2; 0)$.

Bài tập 49. Viết phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của mặt phẳng (P) , biết (P) đi qua ba điểm $A(5; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$.

Bài tập 50. Cho hai mặt phẳng $(P_1): 4x - y - z + 1 = 0$, $(P_2): 8x - 2y - 2z + 1 = 0$.

- Chứng minh rằng $(P_1) \parallel (P_2)$.
- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P_1) , (P_2) .

Bài tập 51. Cho hai mặt phẳng $(P_1): x + 2y + 3z + 4 = 0$,

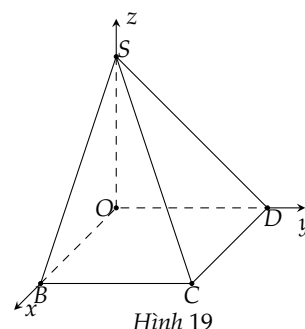
- Chứng minh rằng $(P_1) \perp (P_2)$ biết phương trình mặt phẳng $(P_2): x + y - z + 5 = 0$.
- Tìm m để $(P_1) \perp (P_3)$ biết phương trình mặt phẳng $(P_3): x + y - mz + 5 = 0$.

Bài tập 52. Cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 1 = 0$ điểm $M(1; 1; -6)$ và N nằm trên Oz

- Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .
- Tìm tọa độ N sao cho khoảng cách từ N đến mặt phẳng (P) bằng 2.
- Tìm tọa độ K nằm trên Ox sao cho khoảng cách từ K đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{2}$.

Bài tập 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.OBCD$ có đáy là hình chữ nhật và các điểm $O(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $S(0; 0; 4)$ (Hình 19).

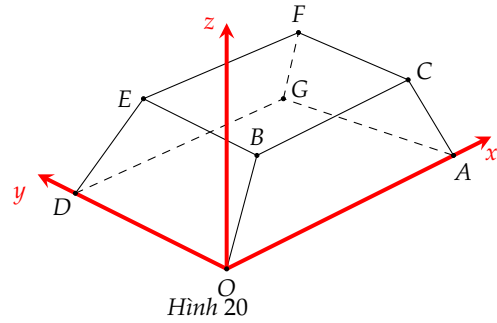
- Tìm tọa độ điểm C .
- Viết phương trình mặt phẳng (SBD) .
- Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .



Hình 19

Bài tập 54. Hình 20 minh hoạ hình ảnh một toà nhà trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết $A(50;0;0)$, $D(0;20;0)$, $B(4k;3k;2k)$ với $k > 0$ và mặt phẳng $(CBEF)$ có phương trình là $z = 3$.

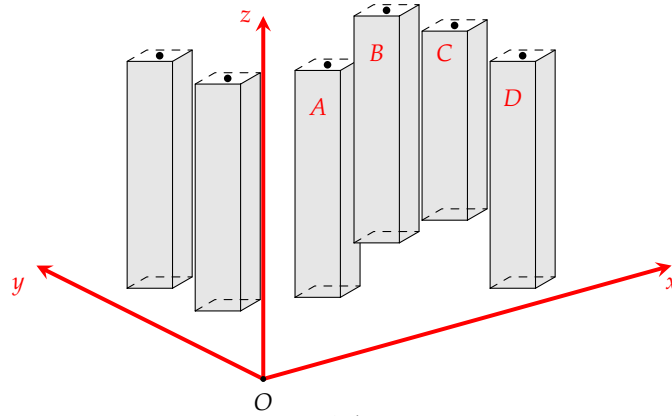
- Tìm tọa độ của điểm B .
- Viết phương trình mặt phẳng $(AOBC)$.
- Viết phương trình mặt phẳng $(DOBE)$.
- Chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng $(AOBC)$ và $(DOBE)$.



Hình 20

Bài tập 55. Hình 21 minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3)$, $B(4;3;3)$, $C(6;3;2,5)$, $D(4;0;2,8)$.

- Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .
- Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng không?



Hình 21

5.2 Đường thẳng

5.2.1 Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 5.4. Cho đường thẳng Δ và véc-tơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$. Véc-tơ $\vec{u}$ được gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

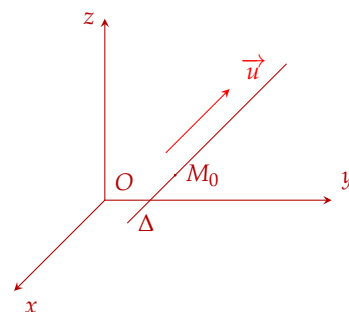
Tính chất 5.2. Nếu $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của một đường thẳng thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đó.

5.2.2 Phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng

Định nghĩa 5.5.

$$\text{Hệ phương trình} \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \text{ trong đó } a, b, c \text{ không đồng thời bằng } 0,$$

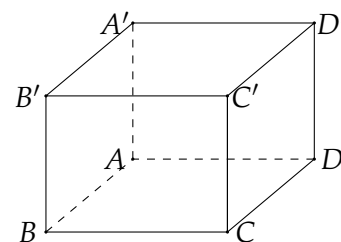
t là tham số, được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.



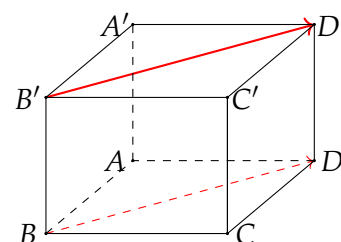
Định nghĩa 5.6. Nếu $abc \neq 0$ thì hệ phương trình $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 1. Trong hình bên, các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ có là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB hay không? Vì sao?



Bài tập 2. Trong hình bên, véc-tơ $\overrightarrow{B'D'}$ có là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng BD hay không? Vì sao?



Bài tập 3. Viết phương trình tham số của đường thẳng trong các trường hợp sau

- Đi qua $A(1; 2; 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 3; 5)$.
- Đi qua $B(0; 2; 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{v} = (1; 1; -1)$.
- Đi qua $O(0; 0; 0)$ và véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (0; 2; -1)$.
- Đi qua $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 2; -5)$.

Bài tập 4. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 - 7t \\ z = 9t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

- Chỉ ra tọa độ một véc-tơ chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ .
- Tìm trên Δ điểm có hoành độ $x = 1$.
- Tìm trên Δ điểm có tung độ gấp ba lần hoành độ.

Bài tập 5. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ , biết Δ đi qua điểm $C(1; 2; -4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$.

Bài tập 6. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 3; 6)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (9; 2; 13)$.

Bài tập 7. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ , biết phương trình tham số của Δ là

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 + 9t \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

Bài tập 8. Lập phương trình chính tắc và phương trình tham số của đường thẳng AB biết $A(4; 1; 2)$ và $B(5; 8; 6)$.

Bài tập 9. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng trong mỗi trường hợp sau:

- Đi qua hai điểm $A(4; 1; 3)$, $B(2; 0; 1)$.
- Đi qua $M(1; 1; 0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 3)$.
- Đi qua gốc tọa độ và vuông góc với $(P): x + y + z - 1 = 0$.
- Giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 1 = 0$ và $(Q): 3x + y - 3z - 1 = 0$.

Bài tập 10. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng OM biết $M(a; b; c)$ với $abc \neq 0$.

5.2.3 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong không gian, hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu các giá của chúng cùng song song với một đường thẳng, ba véc-tơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ

$$\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1); \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2); \vec{u}_3 = (a_3; b_3; c_3).$$

Người ta cũng chứng minh được những điều kiện sau

- Hai véc-tơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ là cùng phương khi và chỉ khi $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$.
- Ba véc-tơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ là đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{u}_3 = 0$.

Định lý 5.5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ là hai véc-tơ chỉ phương. Khi đó, ta có

- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] \neq \vec{0} \end{cases}$
- $\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$

- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

Lưu ý 5.2. Trong một số trường hợp, để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, ta có thể giải hệ phương trình được lập từ những phương trình xác định hai đường thẳng đó, sau đó xét cặp véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó có cùng phương hay không (nếu cần thiết).

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 11. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

- $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 5t_1 \\ y = 2 - t_1 \\ z = 3 + 2t_1 \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 2 + 10t_2 \\ y = 4 - 2t_2 \\ z = 1 + 4t_2 \end{cases};$
- $\Delta_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{1}, \Delta_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-3};$
- $\Delta_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \Delta_2: \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 8 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}.$

Bài tập 12. Bằng cách giải hệ phương trình, xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = t_1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = t_2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Bài tập 13. Xét vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng sau

- a) $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $(d_2): \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}.$
- b) $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$ và $(d'): \frac{x}{-2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-4}{1}.$

Bài tập 14. Cho 2 đường thẳng $(a): \begin{cases} x = 8 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và $(b): \frac{3-x}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

- Xét vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng trên.
- Viết phương trình mặt phẳng chứa (a) và song song (b) .
- Viết phương trình mặt phẳng qua gốc tọa độ và chứa (a) .
- Viết phương trình mặt phẳng qua gốc tọa độ và chứa (b) .
- Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ và cắt cả $(a), (b)$.

5.3 Góc

5.3.1 Góc giữa hai đường thẳng

Định lý 5.6.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó, ta có

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Hệ quả 5.1. $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

✧ BÀI TẬP TỰ LUẬN ✧

Bài tập 1. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 biết

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 2 - \sqrt{3}t_1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = 4 - \sqrt{3}t_2 \\ y = 5 + t_2 \\ z = 6 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \text{ là tham số}).$$

Bài tập 2. Tính góc giữa (d_1) và (d_2) . Biết

a) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3}$ và $d_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{4}$.

b) $d_1: \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$.

c) $d_1: \frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

Bài tập 3. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, $\Delta_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$. Chứng minh rằng $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Bài tập 4. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng Δ và các trục tọa độ.

5.3.2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định lý 5.7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1; b_1; c_1)$ và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a_2; b_2; c_2)$. Gọi $(\Delta, (P))$ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) . Khi đó,

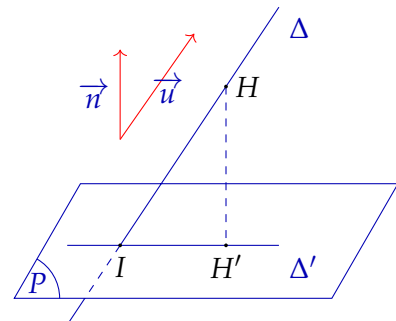
$$\begin{aligned} \sin(\Delta, (P)) &= |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \\ &= \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \end{aligned}$$

✧ BÀI TẬP TỰ LUẬN ✧

Bài tập 5. Tìm góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng α trong các trường hợp sau

a) $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$ và $(\alpha): 2x - y + 2z - 5 = 0$.

b) $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và $(\alpha): 2x + 3y - 2z - 5 = 0$.



$$c) \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (\alpha): 2x + 3y - 2z - 5 = 0.$$

Bài tập 6. Cho mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 2)$ và đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 2; -1)$. Tính sin của góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) . Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

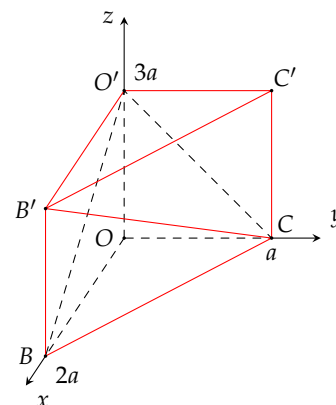
Bài tập 7. Cho $M(1; 2; 3)$, tính số đo góc tạo bởi mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ và trục Ox , biết rằng M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của M lên Ox, Oy, Oz .

Bài tập 8. Cho mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 3; 2)$.

- Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) đi qua $A(1; 1; 2)$.
- Tính số đo góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$.
- Tính số đo góc giữa (P) và các trục tọa độ.

Bài tập 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $OBC.O'B'C'$ với $O(0; 0; 0)$, $B(2a; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$, $O'(0; 0; 3a)$, $a > 0$.

- Xác định tọa độ của điểm B' .
- Viết phương trình mặt phẳng $(O'BC)$.
- Tính sin của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$.



Bài tập 10. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 5 = 0$. Tìm m để số đo góc giữa Δ và α bằng 45° .

5.3.3 Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa 5.7. Góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó, kí hiệu là $((P_1), (P_2))$.

Định lý 5.8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có

$$\cos [(P_1), (P_2)] = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖

Bài tập 11. Cho hai mặt phẳng $(P_1): \sqrt{3}x + z + 5 = 0$ và $(P_2): -\sqrt{3}x + z - 7 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .

Bài tập 12. Tính góc giữa hai mặt phẳng trong các trường hợp sau

- $x + y + z - 1 = 0$ và $-2x + y + z + 1 = 0$.
- $3x + 4y + 5z + 1 = 0$ và $x = 0$.

Bài tập 13. Cho mặt phẳng α có phương trình $2x - 3y + z = 6$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng α .

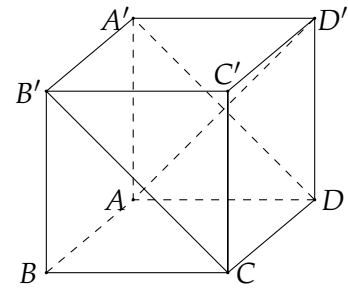
Bài tập 14. Cho mặt phẳng α có phương trình $3x + 2y - z = 5$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1, 2, 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng α .

Bài tập 15. Cho mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$. Tính cosin của góc giữa mặt phẳng (P) và các mặt phẳng tọa độ.

Bài tập 16. Cho mặt phẳng α có phương trình $2x - 3y + mz - 1 = 0$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{3}$. Biết góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng α là 60° , tìm giá trị của m .

Bài tập 17. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

- Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDA'B')$.
- Tính góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(CDA'B')$.



Bài tập 18. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ (t là tham số).

- Chỉ ra tọa độ hai điểm thuộc đường thẳng Δ ;
- Điểm nào trong các điểm $C(6; -7; -16)$, $D(-3; 11; -11)$ thuộc đường thẳng Δ ?

Bài tập 19. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

- Δ đi qua điểm $A(-1; 3; 2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 3; 4)$;
- Δ đi qua hai điểm $M(2; -1; 3)$ và $N(3; 0; 4)$.

Bài tập 20. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -11 - 6t \\ y = -6 - 3t \\ z = 10 + 3t \end{cases}$ (t là tham số);

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ (t là tham số) và $\Delta_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-15}{-3}$;

c) $\Delta_1: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Bài tập 21. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + t_1 \\ y = 4 + \sqrt{3}t_1 \\ z = 0 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t_2 \\ y = 4 + t_2 \\ z = 5 \end{cases}$ (t_1, t_2 là tham số);

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ (t là tham số) và $\Delta_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-2}$;

c) $\Delta_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và $\Delta_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$.

Bài tập 22. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):

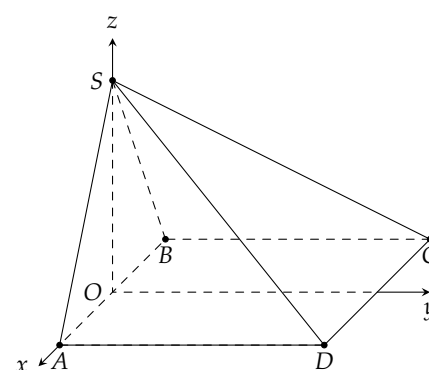
a) $\Delta: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ (t là tham số) và $(P): \sqrt{3}x + z - 2 = 0$;

b) $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ (t là tham số) và $(P): x + y + z - 4 = 0$.

Bài tập 23. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(P_1): x + y + 2z - 1 = 0$ và $(P_2): 2x - y + z - 2 = 0$.

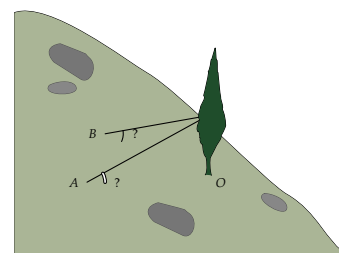
Bài tập 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có các đỉnh lần lượt là $S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}; a; 0\right)$, $D\left(\frac{a}{2}; a; 0\right)$ với $a > 0$.

- a) Xác định tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{CD}$. Từ đó tính góc giữa hai đường thẳng SA và CD (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).
- b) Chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) . Từ đó tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG THỰC TIỄN

Bài tập 25. Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như Hình bên. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0; 0; 0)$, $A(3; -4; 2)$, $B(-5; -2; 1)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét (Hình bên). Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $(0; 0; 5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng.

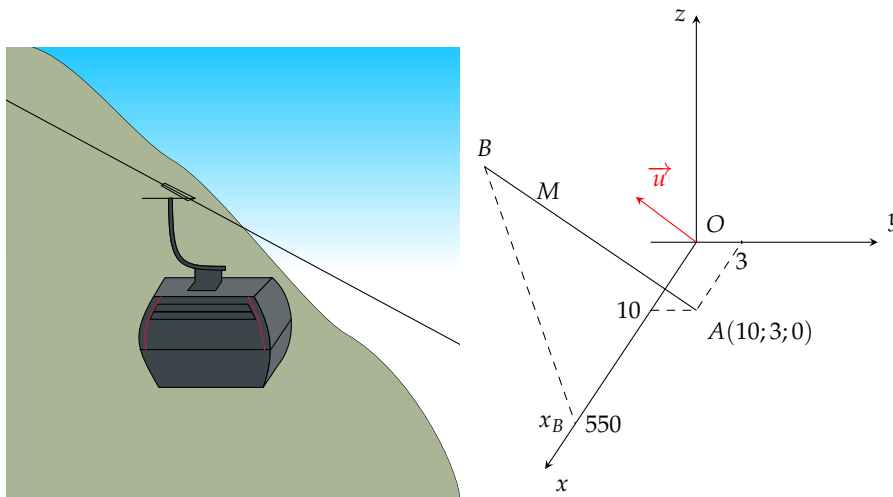


- a) Tính độ dài của mỗi dây neo được sử dụng.
- b) Tính góc tạo bởi mỗi dây neo và mặt phẳng sườn núi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

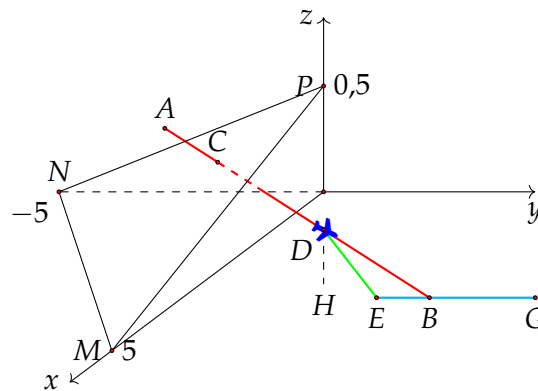
Bài tập 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ là 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét) (Hình bên dưới).

- a) Viết phương trình đường cáp.
- b) Giả sử sau t (s) kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M . Tìm tọa độ của điểm M .
- c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Tìm độ dài quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

- d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



Bài tập 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là ki-lô-mét), một máy bay đang ở vị trí $A(3,5; -2; 0,4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3,5; 5,5; 0)$ trên đường băng EG .

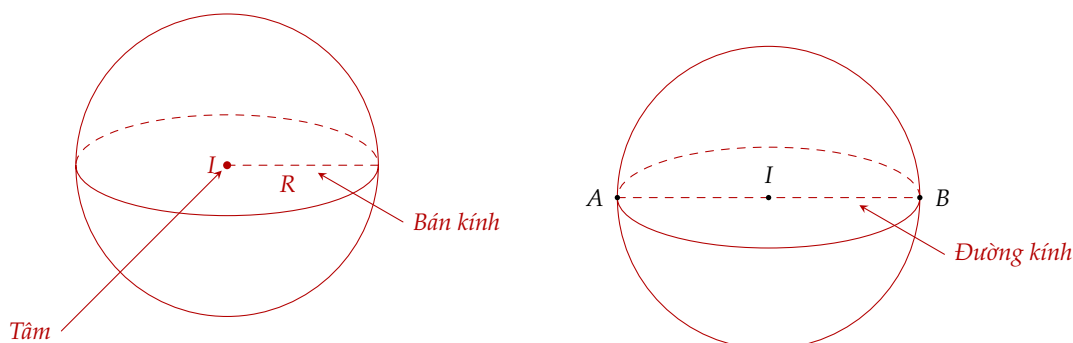


- Viết phương trình đường thẳng AB .
- Hãy cho biết góc trượt (góc giữa đường bay AB và mặt phẳng nằm ngang (Oxy)) có nằm trong phạm vi cho phép từ $2,5^\circ$ đến $3,5^\circ$ hay không?
- Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5; 0; 0)$, $N(0; -5; 0)$, $P(0; 0; 0,5)$. Tìm tọa độ điểm C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.
- Tìm tọa độ điểm D trên đoạn thẳng AB là vị trí mà máy bay ở độ cao 120 m.
- Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu $E(3,5; 6,5; 0)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Hỏi sau khi ra khỏi đám mây, người phi công có đạt được quy định an toàn đó hay không? Biết rằng tầm nhìn của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m (Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e, Cengage, 2014).

5.4 Mặt cầu

5.4.1 Định nghĩa mặt cầu

Định nghĩa 5.8. Cho trước điểm I và số dương R . Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng bằng R .



Nhận xét 5.1.

- Điểm M thuộc mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM = R$.
- Điểm M nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM < R$.
- Điểm M nằm ngoài mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM > R$.

5.4.2 Phương trình mặt cầu

Trong hình vẽ trên rõ ràng $IA = R$. Giả sử $A(x; y; z)$, vì điểm $I(a; b; c)$ cố định và R không đổi. Bằng cách thay thế độ dài AI bằng biểu thức tọa độ ta được

$$IA = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = R \quad (5.2)$$

Bằng cách bình phương (5.2) ta có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ và phương trình này được gọi là phương trình mặt cầu tâm I bán kính R .

Định nghĩa 5.9. Phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (5.3)$$

Bằng cách khai triển phương trình (5.3) ta có được dạng tổng quát của phương trình mặt cầu là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \quad (5.4)$$

trong đó $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Hệ quả 5.2. Phương trình có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

✎ BÀI TẬP TỰ LUẬN ✎

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(-2; 1; 5)$ bán kính 3. Các điểm $A(10; 1; 2)$, $B(0; 1; -4)$ và $C(0; 3; 4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu đó?

Bài tập 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt cầu tâm I đi qua điểm $A(0; 4; 5)$. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

Bài tập 3. Viết phương trình của mặt cầu, biết:

- a) Tâm $I(1; 2; 3)$ bán kính $R = 10$.
 b) Tâm $I(1; 0; -1)$ và bán kính bằng 4.
 c) Tâm $I(3; -1; -5)$ và đi qua điểm $B(0; 2; 1)$.
 d) Tâm $I(3; -2; 4)$ và đi qua điểm $A(7; 2; 1)$.
 e) Tâm $I(1; 0; -1)$ và đường kính bằng 8.
 f) Đường kính AB biết $A(-1; 2; 1), B(0; 2; 3)$.

Bài tập 4. Viết phương trình của mặt cầu, biết:

- a) Tâm O bán kính R với O là gốc tọa độ.
 b) Đường kính OA với $A(1; 2; 3)$.

Bài tập 5. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình: $x^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 2$.

Bài tập 6. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 4z - 11 = 0$ là phương trình của một mặt cầu. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

Bài tập 7. Mỗi phương trình sau có là phương trình mặt cầu hay không? Tìm tâm và bán kính của mặt cầu đó.

- a) $2x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 1 = 0$.
 b) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8z - 3 = 0$.
 c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z + 14 = 0$.
 d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 20 = 0$.
 e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$.
 f) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y = -1$.

Bài tập 8. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$, tìm m để nó là phương trình mặt cầu và tìm m để bán kính mặt cầu nhỏ nhất.

Bài tập 9. Viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4)$ và có tâm nằm trên mp(Oyz).

Bài tập 10. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, với:

- a) $A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(-5; -4; 8)$.
 b) $A(5; 7; -2), B(3; 1; -1), C(9; 4; 4), D(1; 5; 0)$.
 c) $A(6; -2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; -1), D(4; 1; 0)$.
 d) $A(0; 1; 0), B(2; 3; 1), C(-2; 2; 2), D(1; -1; 2)$.

Bài tập 11. Cho mặt cầu có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 7)^2 = 100$.

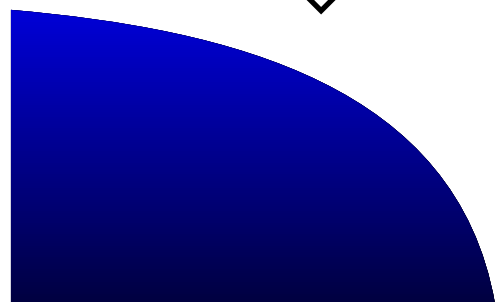
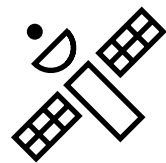
- a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu.
 b) Mỗi điểm $A(1; 1; 1), B(9; 4; 7), C(9; 9; 10)$ nằm trong, nằm ngoài hay nằm trên mặt cầu đó?

Bài tập 12. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 10z + 2 = 0$. Chứng minh rằng phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Bài tập 13. Lập phương trình mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau:

- a) (S) có tâm $I(3; -7; 1)$ và bán kính $R = 2$;
 b) (S) có tâm $I(-1; 4; -5)$ và đi qua điểm $M(3; 1; 2)$;
 c) (S) có đường kính là đoạn thẳng CD với $C(1; -3; -1)$ và $D(-3; 1; 2)$.

Bài tập 14. Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình bên). Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy, điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.



Ta xét một ví dụ cụ thể như sau: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn vectơ $A(3; -1; 6)$, $B(1; 4; 8)$, $C(7; 9; 6)$, $D(7; -15; 18)$. Tìm tọa độ của điểm M trong không gian biết khoảng cách từ các vectơ đến điểm M lần lượt là $MA = 6$, $MB = 7$, $MC = 12$, $MD = 24$.

5.5 Ôn tập chương

5.5.1 Đề 1

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$. B. $\vec{n}_2 = (2; 3; -1)$. C. $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$. D. $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$.

Câu 2. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz) ?

- A. $y = 0$. B. $x = 0$. C. $y - z = 0$. D. $z = 0$.

Câu 3. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$?

- A. $x - 2y + 3z - 12 = 0$. B. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.
C. $x - 2y + 3z + 12 = 0$. D. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

Câu 4. Cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Khoảng cách từ A đến (P) bằng

- A. $\frac{5}{\sqrt{29}}$. B. $\frac{5}{29}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{5}{9}$.

Câu 5. Cho ba mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$, $(\beta): x + y - z + 2 = 0$ và $(\gamma): x - y + 5 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $(\alpha) \perp (\beta)$. B. $(\gamma) \perp (\beta)$. C. $(\alpha) \parallel (\beta)$. D. $(\alpha) \perp (\gamma)$.

Câu 6. Cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- A. $\vec{u}_1 = (2; 1; -3)$. B. $\vec{u}_2 = (-2; -1; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (-1; 2; -1)$.

Câu 7. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t' \\ z = 7 + 8t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. d_1 và d_2 cắt nhau. B. $d_1 \parallel d_2$. C. $d_1 \equiv d_2$. D. d_1 và d_2 chéo nhau.

Câu 8. Phương trình mặt cầu tâm $I(2; 1; -1)$, bán kính $R = 2$ là

- A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$. B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$.
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$. D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

Câu 9. Góc giữa đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y + 5z - 4 = 0$ bằng

- A. 30° . B. 120° . C. 60° . D. 150° .

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C ; trọng tâm của tam giác ABC là $G(-1; -3; 2)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $x + y - z - 5 = 0$. B. $2x - 3y - z - 1 = 0$.
C. $x + 3y - 2z + 1 = 0$. D. $6x + 2y - 3z + 18 = 0$.

Câu 11. Cho hai điểm $A(1; -2; -3)$, $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d ?

$$\text{A. } d': \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

$$\text{B. } d': \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

$$\text{C. } d': \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

$$\text{D. } d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;1;2)$, $B(3;0;1)$ và có tâm thuộc trục Ox . Phương trình mặt cầu (S) là

$$\text{A. } (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 5.$$

$$\text{B. } (x+1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{5}.$$

$$\text{C. } (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5.$$

$$\text{D. } (x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{5}.$$

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. D	Câu 2. B	Câu 3. C	Câu 4. A	Câu 5. C	Câu 6. C
Câu 7. C	Câu 8. D	Câu 9. C	Câu 10. D	Câu 11. C	Câu 12. C

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau là đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) (P) đi qua điểm $M(-3;1;4)$ và có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-4;1)$ là $2x - 4y + z + 6 = 0$.		
b) (P) đi qua điểm $N(2;-1;5)$ và có cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1;-3;2)$ và $\vec{u}_2 = (-3;4;1)$ là $11x + 7y + 5z + 40 = 0$.		
c) (P) đi qua điểm $I(4;0;-7)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x - y - z - 3 = 0$ là $2x + y - z - 15 = 0$.		
d) (P) đi qua điểm $K(-4;9;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-6}{5}$ là $2x + y + 5z - 11 = 0$.		

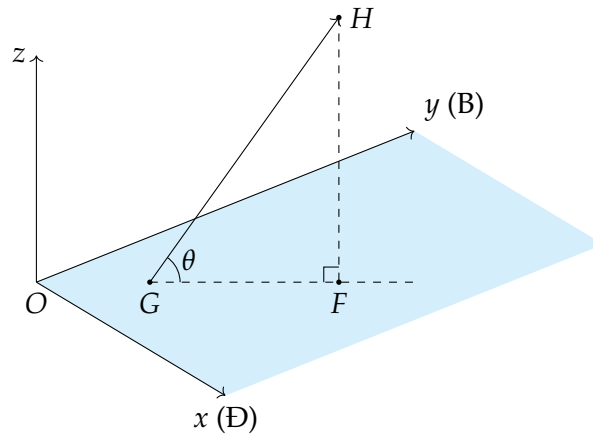
Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-1)$, $B(0;1;2)$, $C(-1;-2;3)$. Mỗi mệnh đề sau là đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $5x - y + 2z + 3 = 0$.		
b) Phương trình đường thẳng AC là $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$.		
c) Phương trình mặt cầu đường kính AC là $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 12$.		
d) Phương trình mặt cầu có tâm A và đi qua B là $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 11$.		

Câu 15. Mỗi mệnh đề sau là đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu (S) có tâm $I(4;-2;1)$ và bán kính $R = 9$ là $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 81$.		
b) Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$ và đi qua điểm $M(2;4;-1)$ là (S) là $(x+3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 6$.		
c) Mặt cầu (S) có đường kính là đoạn thẳng AB với $A(1;2;0)$ và $B(-1;0;4)$ là $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 32$.		
d) Mặt cầu (S) mặt cầu tâm $I(-1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$ có phương trình là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.		

Câu 16. Hình bên dưới minh họa đường bay của một chiếc trực thăng H cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O là chân tháp điều khiển của sân bay; trục Ox là hướng đông, trục Oy là hướng Bắc và trục Oz là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét. Trực thăng cất cánh từ điểm G . véc-tơ $\vec{r}$ chỉ vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh ($t \geq 0$) có tọa độ là $\vec{r} = (1+t; 0,5+2t; 2t)$.



Mỗi mệnh đề sau là đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Góc θ mà đường bay tạo với phương ngang làm tròn đến phút là 45° .		
b) Phương trình đường thẳng GF , trong đó F là hình chiếu của điểm H lên mặt phẳng (Oxy) là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0,5+2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$		
c) Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km. Tọa độ điểm mà máy bay trực thăng bắt đầu đi vào đám mây là $(2; 2,5; 2)$.		
d) Giả sử một đỉnh núi nằm ở điểm $M(5; 4; 5; 3)$. Khi HM vuông góc với đường bay GH thì khoảng cách từ máy bay trực thăng đến đỉnh núi tại thời điểm đó là 3km.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a Đ **b** S **c** S **d** Đ

Câu 14.

a S **b** Đ **c** S **d** Đ

Câu 15.

a Đ **b** S **c** S **d** Đ

Câu 16.

a S **b** Đ **c** Đ **d** S

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Cho 3 điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Khi A, B, M thẳng hàng thì $2x + y$ bằng?

KQ:

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -5)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các trục Ox, Oy, Oz . Mặt phẳng (MNP) có dạng phương trình $10x + by + cx + d = 0$. Khi đó $b + c + d$ bằng

KQ:

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(4; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): 3x + y - z - 1 = 0$. Hình chiếu vuông góc $H(a; b; c)$ của điểm M trên mặt phẳng (P) . Khi đó $a - b + c$ bằng

KQ:

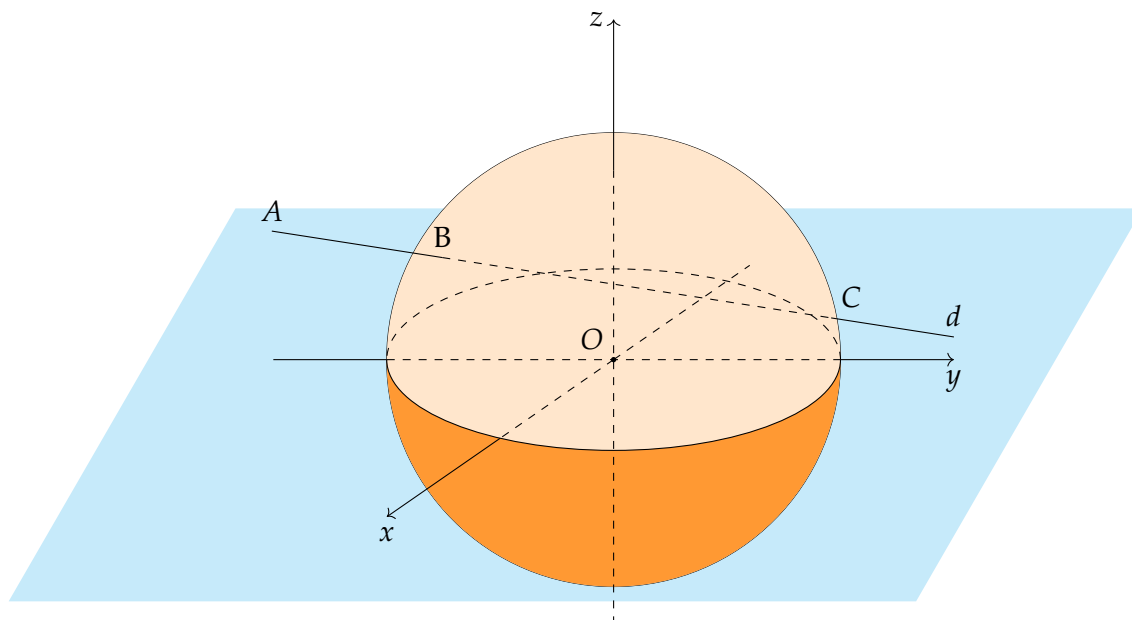
Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 1 có dạng $2x - y + 2z + m = 0$. Khi đó m bằng mấy?

KQ:

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;1)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-2}$. Đường thẳng d đi qua A , cắt d_1 và vuông góc với d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; a; b)$. khi đó $a - b$ bằng.

KQ:

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688; -185; 8)$, chuyển động theo đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (91; 75; 0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu.



Tọa độ của vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa là $M(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17. 1

Câu 18. -7

Câu 19. 3

Câu 20. 2

Câu 21. -3

Câu 22.
-458

5.5.2 Đề 2

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

- A. $(1; -2; 1)$. B. $(1; 2; 1)$. C. $(-1; -2; 1)$. D. $(-1; 2; 1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 3x - 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách từ A đến (P) .

- A. $\frac{21}{\sqrt{29}}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{5}{\sqrt{29}}$. D. $\frac{5}{9}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, tìm tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 3)^2 = 18$.

- A. $I(-1; -4; 3), R = \sqrt{18}$. B. $I(1; -4; -3), R = \sqrt{18}$.
C. $I(1; 4; 3), R = \sqrt{18}$. D. $I(1; -4; 3), R = \sqrt{18}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

- A. $A(-1; -2; -3)$. B. $A(1; 2; 3)$. C. $A(2; -4; 6)$. D. $A(1; -2; 3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): -6x + my - 2mz - m^2 = 0$ và $(Q): 2x + y - 2z + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) .

- A. $m = 12$. B. $m = \frac{12}{7}$. C. $m = \frac{5}{12}$. D. $m = \frac{12}{5}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-4; 5; -3)$, $\vec{b} = (2; -2; 1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

- A. $\vec{x} = (0; -1; 1)$. B. $\vec{x} = (-8; 9; 1)$. C. $\vec{x} = (2; 3; -2)$. D. $\vec{x} = (0; 1; -1)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 3; 5)$, $B(2; 0; 1)$ và $G(1; 4; 2)$ là trọng tâm. Tìm tọa độ điểm C .

- A. $C\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$. B. $C(0; 0; 9)$. C. $C(0; 9; 0)$. D. $C(0; -9; 0)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- A. $N(3; -1; 0)$. B. $M(3; 0; 0)$. C. $P(0; -1; 0)$. D. $Q(0; 0; 1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1; 2; -2)$, $B(2; -1; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x - 2y - z + 1 = 0$ có phương trình là

- A. $15x + 7y + z - 27 = 0$. B. $15x - 7y + z - 27 = 0$.
C. $15x - 7y + x + 27 = 0$. D. $15x + 7y - z + 27 = 0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-2}$ là

- A. $-11x + 5y + 7z + 11 = 0$. B. $-11x + 5y + 7z + 1 = 0$.
C. $11x - 5y - 7z + 1 = 0$. D. $-11x + 5y + 7z - 1 = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - m = 0$. Tìm tất cả m để (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính lớn nhất.

- A. $m = 7$. B. $m = 4$. C. $m = 0$. D. $m = -4$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$. B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.
C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$. D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. D	Câu 2. A	Câu 3. D	Câu 4. D	Câu 5. D	Câu 6. D
Câu 7. C	Câu 8. A	Câu 9. A	Câu 10. B	Câu 11. B	Câu 12. C

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$.

Phát biểu	Đ	S
a) Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; 1; -2)$.		
b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .		
c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 3.		
d) Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$.		

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z - 1 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 25$.

Phát biểu	Đ	S
a) Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; -1; 1)$.		
b) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$.		
c) Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là hình tròn.		
d) Bán kính của hình tròn giao tuyến tạo bởi (P) và (S) bằng 5.		

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-3}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Véc-tơ $\vec{u} = (2; 1; 3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .		
b) Điểm A không thuộc đường thẳng d .		
c) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d bằng 6.		
d) Phương trình đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng d là $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-3}$.		

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x + y - z + 1 = 0$.

Phát biểu	Đ	S
a) Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1; 3; 1)$.		
b) Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (3; 1; -1)$.		
c) Giá trị $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 12$.		
d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 45° .		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.**a** Đ **b** S **c** S **d** Đ**Câu 14.****a** Đ **b** Đ **c** Đ **d** S**Câu 15.****a** S **b** Đ **c** S **d** Đ**Câu 16.****a** Đ **b** Đ **c** S **d** S**PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn****Câu 17.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

KQ:

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = (m-1)t \\ y = (2m+1)t \\ z = 1 + (2m^2+1)t \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng Oyz ?

KQ:

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + (m+1)y - 2z + m = 0$ và $(Q): 2x - y + 3 = 0$ với m là tham số thực. Tìm m để (P) vuông góc với (Q) .

KQ:

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 2)$, $B(1; 1; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng

KQ:

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - z + 10 = 0$ và điểm $A(1; 0; 0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với (P) , cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ và cắt các tia Oy , Oz lần lượt tại các điểm B , C không trùng O . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

Câu 22. Một nguồn âm phát ra sóng âm là sóng cầu. Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Cường độ âm chuẩn tại điểm $I(3; 4; 5)$ là tâm của nguồn phát âm với bán kính 10 m. Để kiểm tra một điểm ở vị trí $M(7; 10; 17)$ có nhận được cường độ âm phát ra tại I hay không người ta sẽ tính khoảng cách giữa hai vị trí I và M . Hỏi khoảng cách giữa hai vị trí I và M là bao nhiêu mét?

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN**Câu 17.** 0,4**Câu 18.** 1**Câu 19.** 1**Câu 20.** 10**Câu 21.** 0,33**Câu 22.** 14

Chương 6

Xác suất có điều kiện

6.1 Xác suất có điều kiện

6.1.1 Định nghĩa xác suất có điều kiện

Định nghĩa 6.1. Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B , kí hiệu là $P(A|B)$.

Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Nhận xét 6.1.

- Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.
- Người ta chứng minh được rằng $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$. Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất.

✧ BÀI TẬP TỰ LUẬN ✧

Bài tập 1. Cho hai biến cố A, B có $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6$; $P(A \cap B) = 0,2$. Tính các xác suất sau $P(A|B)$; $P(B|A)$.

Bài tập 2. Trong kì kiểm tra môn Toán của một trường trung học phổ thông có 200 học sinh tham gia, trong đó có 95 học sinh nam và 105 học sinh nữ. Khi công bố kết quả của kì kiểm tra đó, có 50 học sinh đạt điểm giỏi, trong đó có 24 học sinh nam và 26 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong số 200 học sinh đó. Tính xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Nhận xét 6.2. Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ (*).

Bài tập 3. Ở một sân bay, người ta sử dụng một loại máy soi tự động phát hiện hàng cấm trong hành lí kí gửi. Máy phát chuông cảnh báo với 95% các kiện hành lí có chứa hàng cấm và 2% các kiện hành lí không chứa hàng cấm. Tỷ lệ các kiện hành lí có chứa hàng cấm là 1%. Chọn ngẫu nhiên một kiện hành lí để soi bằng máy trên. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

M: “Kiện hành lí có chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo”;

N: “Kiện hành lí không chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo”.

Bài tập 4. Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố: A : “Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu xanh và viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ”; B : “Hai viên bi lấy ra có cùng màu”.

Bài tập 5. Một trường đại học tiến hành khảo sát tình trạng việc làm sau khi tốt nghiệp của sinh viên. Kết quả khảo sát cho thấy tỷ lệ người tìm được việc làm đúng chuyên ngành là 85% đối với sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và 70% đối với sinh viên tốt nghiệp loại khác. Tỷ lệ sinh viên tốt nghiệp loại giỏi là 30%. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên đã tốt nghiệp của trường. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố: C : “Sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành”; D : “Sinh viên không tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành”.

Bài tập 6. Một hộp có 6 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng trong hộp, lấy không hoàn lại. Tìm xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ, biết rằng lần thứ nhất đã lấy được quả bóng màu xanh.

Bài tập 7. Trong 10 000 áo sơ mi xuất khẩu của một doanh nghiệp dệt may có 1 000 áo sơ mi trắng. Các áo sơ mi trắng đó gồm ba cỡ: 40, 41, 42, trong đó có 200 áo cỡ 40. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc áo trong 10 000 áo sơ mi xuất khẩu. Giả sử chiếc áo sơ mi được chọn ra là áo sơ mi trắng. Tính xác suất để chiếc áo sơ mi đó có cỡ 40.

Bài tập 8. Trong hộp đựng 500 chiếc thẻ cùng loại có 200 chiếc thẻ màu vàng. Trên mỗi chiếc thẻ màu vàng có ghi một trong năm số: 1, 2, 3, 4, 5. Có 40 chiếc thẻ màu vàng ghi số 5. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp đựng thẻ. Giả sử chiếc thẻ được chọn ra có màu vàng. Tính xác suất để chiếc thẻ đó ghi số 5.

Bài tập 9. Một công ty được phẩm giới thiệu một dụng cụ kiểm tra sớm bệnh sốt xuất huyết. Về kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử là 9 000, trong số đó có 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và có 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Khi thử bằng dụng cụ của công ty, trong 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 76% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Mặt khác, trong 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 7% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính khi kiểm tra.

- a) Chọn số thích hợp cho ? trong bên dưới (đơn vị: người). So sánh số người có kết quả dương tính khi thử nghiệm với số người bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết.

Tình trạng bệnh	Kết quả thử nghiệm	
	Dương tính	Âm tính
Nhiễm bệnh	?	?
Không nhiễm bệnh	?	?

- b) Chọn ngẫu nhiên một người trong số những người thử nghiệm. Tính xác suất để người được chọn ra bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm dương tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- c) Nhà sản xuất khẳng định dụng cụ cho kết quả đúng với hơn 90% số trường hợp có kết quả dương tính. Khẳng định đó có đúng không?

Tính chất 6.1. Người ta chứng minh được tính chất sau chỉ ra mối liên hệ giữa xác suất có điều kiện và biến cố độc lập.

Cho A và B là hai biến cố với $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

$$P(A) = P(A|B) = P(A | \bar{B}) \text{ và } P(B) = P(B|A) = P(B | \bar{A}).$$

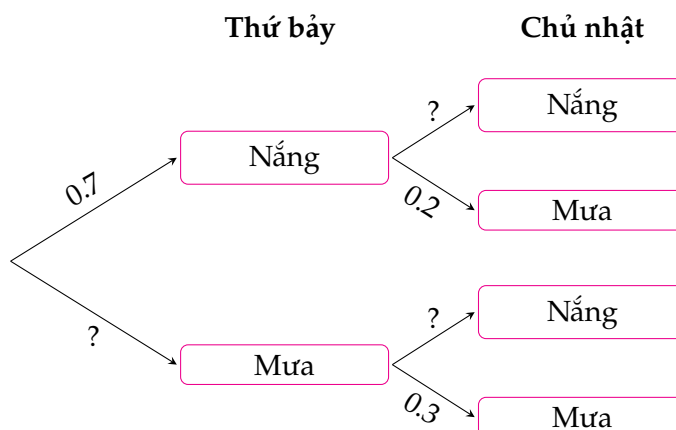
Nhận xét 6.3. Tính chất trên giải thích vì sao hai biến cố độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố kia.

Bài tập 10. Một công ty được phẩm giới thiệu một dụng cụ kiểm tra sớm bệnh sốt xuất huyết. Về kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử là 9 000, trong số đó có 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và có 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Khi thử bằng dụng cụ của công ty, trong 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 76% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Mặt khác, trong 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 7% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính khi kiểm tra. Chọn ngẫu nhiên một người trong số những người thử nghiệm. Tính xác suất để người được chọn ra bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm âm tính (làm tròn đến hàng phần mười).

6.1.2 Sử dụng sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện

Ví dụ mở đầu 3. Bạn Việt chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày

tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0.7. Hãy tìm các giá trị thích hợp thay vào ? ở sơ đồ hình cây sau:



Bài tập 11. Một hộp có 8 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Có 5 viên bi trong hộp được đánh số, trong đó có 3 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để viên bi được lấy ra có màu đỏ, biết rằng viên bi đó được đánh số.

Bài tập 12. Một túi có 10 hộp sữa chua dâu và 10 hộp sữa chua nha đam; các hộp sữa chua có kích thước và khối lượng như nhau. Có 12 hộp sữa chua trong túi là sữa chua không đường, trong đó có 6 hộp sữa chua dâu và 6 hộp sữa chua nha đam. Lấy ngẫu nhiên một hộp sữa chua trong túi. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất hộp sữa chua được lấy ra là hộp sữa chua dâu, biết rằng hộp sữa chua đó là hộp sữa chua không đường.

Bài tập 13. Cho hai biến cố A, B có $P(A) = 0,6; P(B) = 0,8; P(A \cap B) = 0,4$. Tính các xác suất sau:

a) $P(B | A); P(\bar{B} | A)$.

b) $P(A \cap \bar{B})$.

Bài tập 14. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,4; P(B) = 0,8$ và $P(A|B) = 0,5$. Tính $P(A\bar{B})$ và $P(A|B)$.

Bài tập 15. Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy bóng ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét các biến cố:

a) “Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất”;

b) “Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai”.

Chứng minh rằng A, B là hai biến cố độc lập.

Bài tập 16. Cho hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gieo lần lượt từng xúc xắc trong hai xúc xắc đó. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 6, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

Bài tập 17. Một lô sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

Bài tập 18. Một doanh nghiệp trước khi xuất khẩu áo sơ mi phải qua hai lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tính xác suất để một chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu.

Bài tập 19. Trên giá sách có 10 quyển sách Khoa học và 15 quyển sách Nghệ thuật. Có 9 quyển sách viết bằng tiếng Anh, trong đó 3 quyển sách Khoa học có 6 quyển sách Nghệ thuật, các quyển sách còn lại viết bằng tiếng Việt. Lấy ngẫu nhiên một quyển sách. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để quyển sách được lấy ra là sách viết bằng tiếng Việt, biết rằng quyển sách đó là sách Khoa học.

Bài tập 20. Một thư viện có 35% tổng số sách là sách khoa học, 14% tổng số sách là sách khoa học

tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên một quyển sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách khoa học tự nhiên, biết rằng đó là quyển sách về khoa học.

Bài tập 21. Mỗi bạn học sinh trong lớp của Minh lựa chọn một trong hai ngoại ngữ là tiếng Anh hoặc tiếng Nhật. Xác suất chọn tiếng Anh của mỗi bạn học sinh nữ là 0.6 và của mỗi bạn học sinh nam là 0.7. Lớp của Minh có 25 bạn nữ và 20 bạn nam. Chọn ra ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố A: “Bạn được chọn là nam và học tiếng Nhật”.
B: “Bạn được chọn là nữ và học tiếng Anh”.

Bài tập 22. Máy tính và thiết bị lưu điện (UPS) được kết nối như hình 5. Khi xảy ra sự cố điện, UPS bị hỏng với xác suất 0.02. Nếu UPS bị hỏng khi xảy ra sự cố điện, máy tính sẽ bị hỏng với xác suất 0.1; ngược lại, nếu UPS không bị hỏng, máy tính sẽ không bị hỏng.



Hình 5

- Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều không bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.
- Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.

6.2 Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes

6.2.1 Công thức xác suất toàn phần

Công thức 6.1. Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | \bar{B}).$$

6.2.2 Công thức tính Bayes

Công thức 6.2. Với hai biến cố A, B mà $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có $P(B | A) = \frac{P(B) \cdot P(A | B)}{P(A)}$.

Nhận xét 6.4. Cho hai biến cố A, B với $P(A) > 0, 0 < P(B) < 1$. Do

$$P(A) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | \bar{B})$$

nên công thức Bayes còn có dạng: $P(B | A) = \frac{P(B) \cdot P(A | B)}{P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | \bar{B})}$.

✎ BÀI TẬP TỰ LUẬN ✎

Bài tập 1. Theo một số liệu thống kê, năm 2004 ở Canada có 65% nam giới là thừa cân và 53,4% nữ giới là thừa cân. Nam giới và nữ giới ở Canada đều chiếm 50% dân số cả nước (Nguồn: F. M. Dekking et al., *A modern introduction to probability and statistics - Understanding why and how*, Springer, 2005). Hỏi rằng, trong năm 2004, xác suất để một người Canada được chọn ngẫu nhiên là người thừa cân bằng bao nhiêu?

Bài tập 2. Một hộp có 60 viên bi màu xanh và 40 viên bi màu đỏ; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi thống kê, người ta thấy: có 50% số viên bi màu xanh có dán nhãn và 75% số viên bi màu đỏ có dán nhãn; những viên bi còn lại không dán nhãn.

- Chọn số thích hợp cho ? trong bảng dưới đây (đơn vị: viên bi).

Màu bi \ Dán nhãn	Dán nhãn	
	Có dán nhãn	Không dán nhãn
Đỏ	?	?
Xanh	?	?

- b) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Sử dụng công thức xác suất toàn phần, tính xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn.

Bài tập 3. Trong trò chơi hái hoa có thưởng của lớp 12A, cô giáo treo 10 bông hoa trên cành cây, trong đó có 5 bông hoa chứa phiếu có thưởng. Bạn Bình hái bông hoa đầu tiên, sau đó bạn An hái bông hoa thứ hai.

- a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

- b) Từ đó, tính xác suất bạn An hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng.

Bài tập 4. Cho hai biến cố A, B sao cho $P(A) = 0,6; P(B) = 0,4; P(A | B) = 0,3$. Tính $P(B | A)$.

Bài tập 5. Giả sử có một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính).

- a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

- b) Khi một người xét nghiệm có phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Bài tập 6. Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen, hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II.

- a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra màu trắng.

- b) Giả sử viên bi lấy ra là viên bi màu trắng. Tính xác suất để viên bi màu trắng đó thuộc hộp I.

Bài tập 7. Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là 4%; 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó.

- a) Tính xác suất để linh kiện lấy ra là linh kiện tốt.

- b) Giả sử linh kiện lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao nhất.

Bài tập 8. Một chiếc hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, trong đó có 2 chiếc thẻ màu xanh và 18 chiếc thẻ màu trắng. Bạn Châu rút thẻ hai lần một cách ngẫu nhiên, mỗi lần rút một thẻ và thẻ được rút ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất để cả hai lần bạn Châu đều rút được thẻ màu xanh.

Bài tập 9. Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bò bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây gọi là xét nghiệm A, cho kết quả như sau: Khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 70%, còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 10%. Biết tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1000000 con (Nguồn: F.M Dekking et al, *A modern introduction to probability and statistics-Understanding why and how*, Springer, 2005). Hỏi khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm A thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là bao nhiêu?

6.2.3 Luyện tập

➡ TRẮC NGHIỆM 4 ĐÁP ÁN ⬅

Câu 1. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,8; P(B) = 0,5$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

- A. 0,4. B. 0,5. C. 0,25. D. 0,625.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,8; P(B) = 0,5$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất biến cố B không xảy ra với điều kiện biến cố A xảy ra là

A. 0,6.

B. 0,5.

C. 0,75.

D. 0,25.

Câu 3. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,5$ và $P(AB) = 0,2$. Giá trị của biểu thức $\frac{P(A|B)}{P(A)} - \frac{P(B|A)}{P(B)}$ là

A. -0,5.

B. 0.

C. 0,5.

D. 1.

Câu 4. Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Khảo sát công nhân	Kết quả khảo sát	
	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố “Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I”. Xác suất của biến cố A là

A. $\frac{37}{140}$.B. $\frac{37}{50}$.C. $\frac{5}{14}$.D. $\frac{1}{2}$.

Câu 5. Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Khảo sát công nhân	Kết quả khảo sát	
	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố “Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I” và B là biến cố “Công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng”. Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

A. 0,37.

B. 0,5.

C. $\frac{37}{50}$.D. $\frac{5}{14}$.

Câu 6. Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Khảo sát công nhân	Kết quả khảo sát	
	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố “Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I” và B là biến cố “Công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng”. Xác suất của biến cố B với điều kiện A không xảy ra là

A. $\frac{2}{7}$.

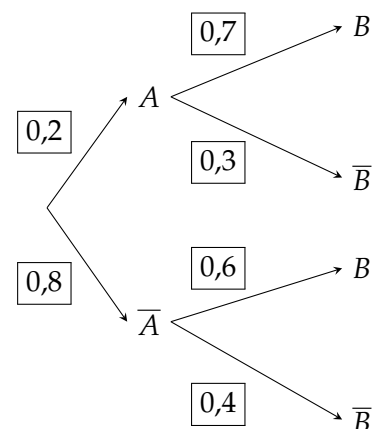
B. 0,9.

C. 0,7.

D. $\frac{9}{20}$.

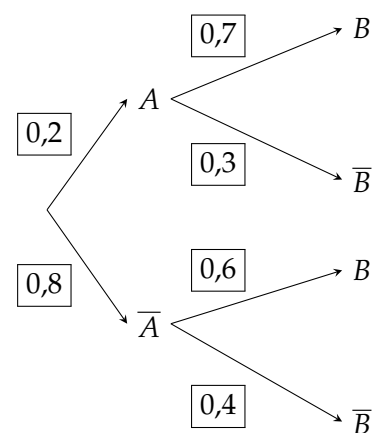
Câu 7. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất của biến cố cả A và B đều không xảy ra là

- A. 0,32. B. 0,4. C. 0,8. D. 0,92.



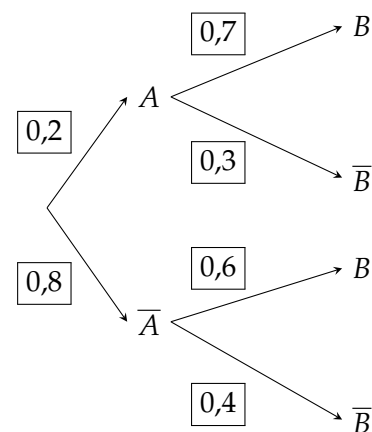
Câu 8. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất của biến cố B là

- A. 0,42. B. 0,62. C. 0,28. D. 0,48.



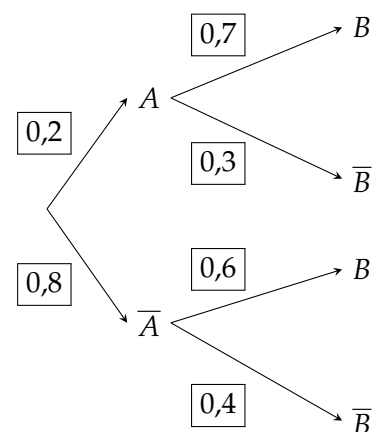
Câu 9. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất điều kiện $P(A | B)$ là

- A. $\frac{7}{31}$. B. 0,7. C. $\frac{7}{50}$. D. 0,48.



Câu 10. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Giá trị của biểu thức $\frac{P(B)P(\bar{A} | B)}{P(\bar{A})}$ là

- A. 0,48. B. 0,3. C. 0,5. D. 0,6.



Câu 11. Cho hai biến cố xung khắc A, B với $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,4$. Khi đó $P(A|B)$ bằng?

A. 0,5.

B. 0,2.

C. 0,4.

D. 0.

✧ BÀI TẬP TỰ LUẬN ✧

Bài tập 10. Một cửa hàng kinh doanh tổ chức rút thăm trúng thưởng cho hai loại sản phẩm. Tỷ lệ trúng thưởng của các loại sản phẩm I, II lần lượt là 6% và 4%. Trong một hộp kín gồm các thăm cùng loại, người ta để lẫn lộn 200 chiếc thăm cho sản phẩm loại I và 300 chiếc thăm cho sản phẩm loại II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên 1 chiếc thăm từ hộp đó.

- Tính xác suất để chiếc thăm được lấy ra là trúng thưởng.
- Giả sử chiếc thăm được lấy ra là trúng thưởng. Xác suất chiếc thăm đó thuộc loại sản phẩm nào là cao nhất?

Bài tập 11. Một xạ thủ bắn vào bia số 1 và bia số 2. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng bia số 1 và bia số 2 lần lượt là 0,8; 0,9. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng cả hai bia là 0,8. Xét hai biến cố sau:

A: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 1 "

B: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 2 "

- Hai biến cố A và B có độc lập hay không?
- Biết xạ thủ đó bắn trúng bia số 1, tính xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2.
- Biết xạ thủ đó không bắn trúng bia số 1, tính xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2.

Bài tập 12. Một chiếc hộp có 40 viên bi, trong đó có 12 viên bi màu đỏ và 28 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân lấy ngẫu nhiên viên bi từ chiếc hộp đó hai lần, mỗi lần lấy ra một viên bi và viên bi được lấy ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất để cả hai lần bạn Ngân đều lấy ra được viên bi màu vàng.

Bài tập 13. Giả sử trong một nhóm người có 2 người nhiễm bệnh, 58 người còn lại là không nhiễm bệnh. Để phát hiện ra người nhiễm bệnh, người ta tiến hành xét nghiệm tất cả mọi người của nhóm đó. Biết rằng đối với người nhiễm bệnh, xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 85%, nhưng đối với người không nhiễm bệnh thì xác suất để bị xét nghiệm có phản ứng dương tính là 7%.

- Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.
- Giả sử X là một người trong nhóm bị xét nghiệm có kết quả dương tính. Tính xác suất để X là người nhiễm bệnh.

Bài tập 14. Một khu dân cư có 85% các hộ gia đình sử dụng điện để đun nấu. Hơn nữa, có 21% các hộ gia đình sử dụng bếp từ để đun nấu. Chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình, tính xác suất hộ đó sử dụng bếp từ để đun nấu, biết hộ đó sử dụng điện để đun nấu.

Bài tập 15. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B . Biết rằng $P(A | B) = 2P(B | A)$ và $P(AB) \neq 0$. Tính tỉ số $\frac{P(A)}{P(B)}$.

Bài tập 16. Phòng công nghệ của một công ty có 4 kỹ sư và 6 kỹ thuật viên. Chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 3 người từ phòng. Tính xác suất để cả 3 người được chọn đều là kỹ sư, biết rằng trong 3 người được chọn có ít nhất 2 kỹ sư.

Bài tập 17. Có hai cái hộp giống nhau, hộp thứ nhất chứa 5 quả bóng bàn màu trắng và 3 quả bóng bàn màu vàng, hộp thứ hai chứa 4 quả bóng bàn màu trắng và 6 quả bóng bàn màu vàng. Minh lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp thứ nhất. Nếu quả bóng đó là bóng vàng thì Minh lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 quả bóng từ hộp thứ hai, còn nếu quả bóng đó màu trắng thì Minh lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 quả bóng từ hộp thứ hai.

- Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất để có đúng 1 quả bóng màu vàng trong các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai.
- Biết rằng các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai đều có màu trắng. Tính xác suất để quả bóng lấy ra từ hộp thứ nhất có màu vàng.

Bài tập 18. Hộp thứ nhất có 1 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ hai.

- Tính xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ.
- Biết rằng 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ. Tính xác suất để 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ.

Bài tập 19. Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỷ lệ nhân viên nữ và tỷ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Gặp ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp.

- Tính xác suất nhân viên đó có mua bảo hiểm nhân thọ.
- Biết rằng nhân viên đó có mua bảo hiểm nhân thọ. Tính xác suất nhân viên đó là nam.

6.3 Ôn tập chương

6.3.1 Đề 1

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Cho A, B là các biến cố của một phép thử T . Biết rằng $P(B) > 0$, xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được tính theo công thức nào sau đây?

- | | |
|--|--|
| <p>A. $P(A B) = \frac{P(A)}{P(B)}$.</p> <p>C. $P(A B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.</p> | <p>B. $P(A B) = \frac{P(A)}{P(AB)}$.</p> <p>D. $P(A B) = \frac{P(AB)}{P(A) \cdot P(B)}$.</p> |
|--|--|

Câu 2. Cho hai biến cố độc lập A, B với $P(A) = 0,3; P(B) = 0,4$. Khi đó, $P(A | B)$ bằng

- A. 0,7. B. 0,12. C. 0,4. D. 0,3.

Câu 3. Cho hai biến cố xung khắc A, B với $P(A) = 0,2; P(B) = 0,4$. Khi đó, $P(A | B)$ bằng

- A. 0,5. B. 0,2. C. 0,4. D. 0.

Câu 4. Cho $P(A) = \frac{2}{5}; P(B | A) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P(AB)$ là

- A. $\frac{2}{15}$. B. $\frac{3}{16}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{4}{15}$.

Câu 5. Cho $P(A) = \frac{2}{5}; P(B | \bar{A}) = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P(B\bar{A})$ là

- A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{4}{19}$. C. $\frac{4}{21}$. D. $\frac{3}{20}$.

Câu 6. Cho $P(A) = \frac{2}{5}; P(B | A) = \frac{1}{3}; P(B | \bar{A}) = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P(B)$ là

- A. $\frac{19}{60}$. B. $\frac{17}{60}$. C. $\frac{9}{20}$. D. $\frac{7}{30}$.

Câu 7. An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô-cô-la đen là

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{3}{7}$.

Câu 8. Người ta nhập hai lô hàng vào kho. Lô thứ nhất chứa 10 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm. Lô thứ hai có 4 phế phẩm và 8 sản phẩm tốt. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm. Xác suất chọn được một sản phẩm tốt là

A. $\frac{15}{22}$.

B. $\frac{7}{15}$.

C. $\frac{7}{22}$.

D. $\frac{83}{242}$.

Câu 9. Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,35$; $P(A) = 0,25$; $P(B) = 0,6$. Giá trị của $P(A | B)$ bằng

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 10. Một bệnh viện có hai phòng khám là phòng A và phòng B với khả năng lựa chọn của bệnh nhân là như nhau. Tỷ lệ bệnh nhân nam có ở phòng A và phòng B lần lượt là 60% và 40%. Một người bệnh được chọn ngẫu nhiên từ hai phòng khám và biết người này là nam, xác suất để người bệnh được chọn đến từ phòng A là

A. 0,6.

B. 0,5.

C. 0,4.

D. 0,3.

Câu 11. Ở một địa phương X, xác suất để một người lớn trên 40 tuổi mắc bệnh ung thư là 0,05. Xác suất bác sĩ chẩn đoán đúng một người mắc bệnh ung thư là 0,78 và chẩn đoán sai (không bị ung thư nhưng được chẩn đoán mắc bệnh) là 0,06. Xác suất để một người thật sự mắc bệnh ung thư khi nhận được kết quả chẩn đoán bị ung thư bằng

A. 0,40625.

B. 0,096.

C. 0,904.

D. 0,59375.

Câu 12. Một loại vaccine được tiêm ở địa phương X. Người có bệnh nền thì với xác suất 0,35 có phản ứng phụ sau tiêm, người không có bệnh nền thì chỉ có phản ứng phụ sau tiêm với xác suất 0,16. Chọn ngẫu nhiên một người được tiêm vaccine và người này có phản ứng phụ. Tính xác suất để người này có bệnh nền, biết rằng tỷ lệ người có bệnh nền ở địa phương X là 18%.

A. $\frac{315}{971}$.

B. $\frac{31}{971}$.

C. 0,16.

D. 0,063.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. C	Câu 2. D	Câu 3. D	Câu 4. A	Câu 5. D	Câu 6. B
Câu 7. A	Câu 8. A	Câu 9. B	Câu 10. A	Câu 11. A	Câu 12. A

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh, 16 học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 12 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Toán. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố sau

A: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh";

B: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Toán".

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

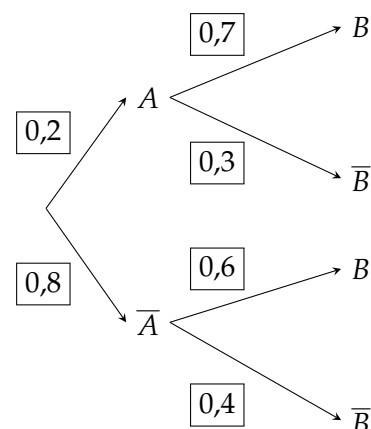
Phát biểu	Đ	S
a) $P(A) = 0,4$.		
b) $P(B) = 0,625$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $P(A B) = 0,75$.		
d) $P(B A) = 0,48$.		

Câu 14.

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

Phát biểu	Đ	S
a) $P(AB) = 0,48$.		
b) $P(A B) = 0,5$.		
c) $P(\bar{A} B) = 0,3$.		
d) $\frac{P(B)P(\bar{A} B)}{P(\bar{A})} = 0,6$.		



Câu 15. Trong một hộp có 18 quả bóng bàn loại I và 2 quả bóng bàn loại II, các quả bóng bàn có hình dạng và kích thước như nhau. Một học sinh lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng bàn (lấy không hoàn lại) trong hộp.

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II là $\frac{9}{10}$.		
b) Xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng bàn loại II, biết lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II, là $\frac{1}{19}$.		
c) Xác suất để cả hai lần đều lấy được quả bóng bàn loại II là $\frac{9}{190}$.		
d) Xác suất để ít nhất 1 lần lấy được quả bóng bàn loại I là $\frac{189}{190}$.		

Câu 16. Một xưởng máy sử dụng một loại linh kiện được sản xuất từ hai cơ sở I và II. Số linh kiện do cơ sở I sản xuất chiếm 61%, số linh kiện do cơ sở II sản xuất chiếm 39%. Tỷ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của cơ sở I, cơ sở II lần lượt là 93%, 82%. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 linh kiện ở xưởng máy. Xét các biến cố

A_1 : “Linh kiện được kiểm tra do cơ sở I sản xuất”;

A_2 : “Linh kiện được kiểm tra do cơ sở II sản xuất”;

B : “Linh kiện được kiểm tra đạt tiêu chuẩn”.

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

Phát biểu	Đ	S
a) $P(A_1) = 0,39$.		
b) $P(B A_2) = 0,82$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $P(B) = 0,89$.		
d) $P(A_1 B) = 0,55$.		

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 13.

a S b S c Đ d Đ

Câu 14.

a S b S c S d Đ

Câu 15.

a S b Đ c S d Đ

Câu 16.

a S b Đ c S d Đ

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Có hai hộp đựng các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp thứ hai chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 18. Trong số 40 học sinh lớp 12A, có 22 em đăng kí thi ngành Kinh tế, 25 em đăng kí thi ngành Luật, 3 em không đăng kí thi cả hai ngành này. Chọn ngẫu nhiên một học sinh, biết rằng em đó đăng kí thi ngành luật. Tính xác suất để em đó đăng kí thi ngành kinh tế.

KQ:

Câu 19. Trong một tuần, Sơn chọn ngẫu nhiên ba ngày chạy bộ buổi sáng. Nếu chạy bộ thì xác suất Sơn ăn thêm một quả trứng vào bữa sáng hôm đó là 0,7. Nếu không chạy bộ thì xác suất Sơn ăn thêm một quả trứng vào bữa sáng hôm đó là 0,25. Chọn ngẫu nhiên một ngày trong tuần của Sơn. Tính xác suất để hôm đó Sơn chạy bộ nếu biết rằng bữa sáng hôm đó Sơn có ăn thêm một quả trứng (làm tròn đến hàng phần trăm).

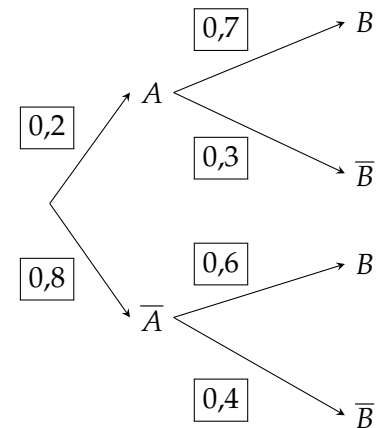
KQ:

Câu 20. Giả sử có khoảng 40% thư điện tử (email) gửi đến một địa chỉ là thư rác. Người ta sử dụng một thuật toán để phân loại thư rác, biết rằng thuật toán này có thể phân loại đến 99% thư rác và tỉ lệ sai sót khi phân loại thư bình thường thành thư rác là 5%. Tính xác suất một thư điện tử là thư bình thường nếu thư này đã được phân loại đúng (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 21.

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Tính giá trị của biểu thức $\frac{P(B)P(\bar{A} | B)}{P(\bar{A})}$.



KQ:

Câu 22. Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm A cho kết quả như sau: khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 70% còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1 000 000 con (Nguồn: F. M. Dekking et al., *A modern introduction to probability and statistics Understanding why and how*, Springer, 2005). Khi con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm A thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là P , tính $1000P$ (lấy gần đúng đến hàng phần trăm).

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 17. 0,59

Câu 18. 0,4

Câu 19. 0,68

Câu 20. 0,59

Câu 21. 0,6

Câu 22. 0,09

6.3.2 Đề 2

PHẦN 1. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố B , tính trong điều kiện biết rằng biến cố A đã xảy ra, được gọi là xác suất của B với điều kiện A kí hiệu là

- A. $P(A | B)$. B. $P(B | A)$. C. $P(AB)$. D. $P(B)$.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B . Biết rằng xác suất của biến cố A bằng 0,6; xác suất của biến cố B trong điều kiện biến cố A đã xảy ra bằng 0,2. Tính xác suất của A và B đều xảy ra.

- A. $\frac{3}{25}$. B. $\frac{3}{10}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 3. Gieo hai con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm trên hai con xúc xắc bằng bằng 8 nếu biết rằng ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm.

- A. $\frac{5}{11}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{11}{5}$. D. $\frac{2}{11}$.

Câu 4. Cho A và B là hai biến cố. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Với $P(B) > 0$. Khi đó $P(A | B) = P(B) \cdot P(AB)$.
B. Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(B) = P(B | A)$.
C. Với $P(B) > 0$. Khi đó $P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$.
D. Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(A | B) = P(A | \bar{B})$.

Câu 5. Cho A và B là hai biến cố. Công thức nào dưới đây là công thức tính xác suất toàn phần?

- A. $P(A) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | B)$. B. $P(A) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(\bar{A} | \bar{B})$.
C. $P(A) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(\bar{A} | B)$. D. $P(A) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | \bar{B})$.

Câu 6. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$ và $P(B | A) = 0,4$. Tính $P(A | B)$.

- A. 0,6. B. 0,24. C. 0,15. D. 0,5.

Câu 7. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$. Tính xác suất biến cố B với điều kiện A .

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{4}{7}$. C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{7}{10}$.

Câu 8. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$ và $P(AB) = 0,3$. Xác suất biến cố A không xảy ra với điều kiện B là

- A. $\frac{7}{10}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

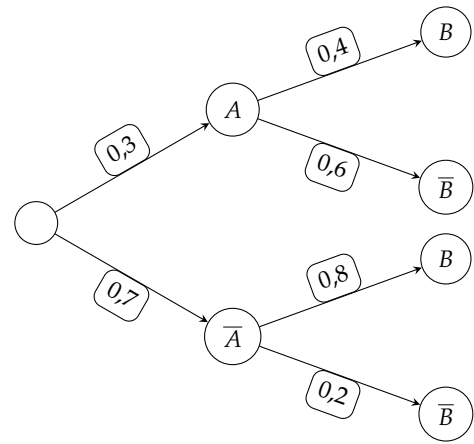
Câu 9. Trong hộp có 7 viên bi màu xanh, 5 viên bi màu đỏ, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. An lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp không trả lại, sau đó Bình lấy một viên bi trong các bi còn lại. Tính xác suất để An lấy được bi màu xanh và Bình lấy được bi màu đỏ.

- A. $\frac{35}{132}$. B. $\frac{35}{144}$. C. $\frac{1}{11}$. D. $\frac{3}{132}$.

Câu 10.

Cho sơ đồ cây như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $P(A) = 0,3$.
 B. $P(B) = 0,54$.
 C. $P(A | B) = 0,6$.
 D. $P(\bar{B} | \bar{A}) = 0,2$.



Câu 11. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B . Biết rằng $P(A | B) = \frac{2}{3}P(B | A)$ và $P(AB) \neq 0$. Tính tỉ số $\frac{P(A)}{P(B)}$.

- A. $\frac{3}{2}$.
 B. $\frac{2}{3}$.
 C. $\frac{1}{3}$.
 D. $\frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B . Biết rằng $P(A) = \frac{3}{5}$; $P(B | A) = \frac{1}{4}$ và $P(B | \bar{A}) = \frac{1}{3}$. Tính $P(B\bar{A})$.

- A. $\frac{43}{180}$.
 B. $\frac{2}{15}$.
 C. $\frac{3}{15}$.
 D. $\frac{17}{180}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1. B	Câu 2. A	Câu 3. D	Câu 4. A	Câu 5. D	Câu 6. B
Câu 7. C	Câu 8. D	Câu 9. A	Câu 10. C	Câu 11. B	Câu 12. B

PHẦN 2. Trắc nghiệm chọn đúng sai

Câu 13. Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Khảo sát công nhân	Kết quả khảo sát	
	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân xưởng I	23	12
Số công nhân xưởng II	25	15

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố “Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I” và B là biến cố “Công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng”. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau.

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất của biến cố A là $\frac{7}{15}$.		
b) Xác suất của biến cố B là 0,65.		
c) Xác suất gặp được công nhân không hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng biết công nhân đó thuộc xưởng I là $\frac{12}{35}$.		
d) Xác suất gặp được công nhân thuộc xưởng II biết công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng là 0,52.		

Câu 14. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,35$; $P(B | A) = 0,6$ và $P(B | \bar{A}) = 0,2$. Mỗi phát biểu dưới đây đúng hay sai?

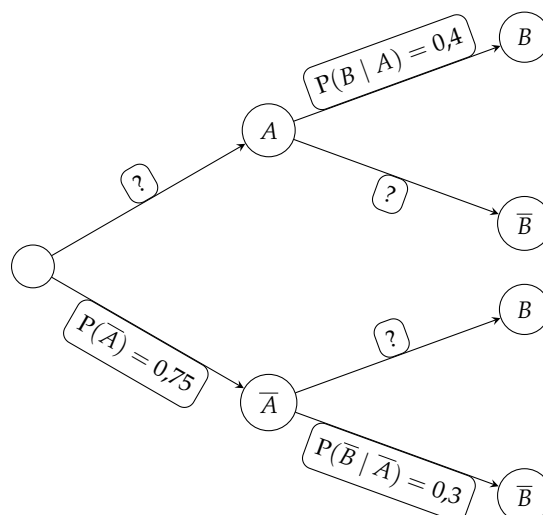
Phát biểu	Đ	S
a) $P(\bar{A}) = 0,65$.		
b) $P(AB) = 0,2$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $P(\bar{B} A) = 0,4$.		
d) $P(B) = 0,34$.		

Câu 15.

Cho sơ đồ cây như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau.

Phát biểu	Đ	S
a) $P(A) = 0,25$.		
b) $P(A\bar{B}) = \frac{1}{8}$.		
c) $P(B) = 0,65$.		
d) $P(A B) = 0,16$.		



Câu 16. Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 55%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ tiếng anh lần lượt là 20% và 15%. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Gọi A là biến cố “Học sinh đó là nữ” và B là biến cố “Học sinh đó tham gia câu lạc bộ tiếng Anh”. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau.

Phát biểu	Đ	S
a) $P(\bar{A}) = 0,45$.		
b) $P(B \bar{A}) = 0,15$ và $P(\bar{B} A) = 0,2$.		
c) Xác suất để học sinh đó có tham gia câu lạc bộ tiếng Anh là 0,1675.		
d) Biết rằng học sinh có tham gia câu lạc bộ tiếng Anh. Xác suất học sinh đó là nam bằng $\frac{27}{71}$.		

BẢNG ĐÁP ÁN**Câu 13.**

a Đ b S c Đ d S

Câu 14.

a Đ b S c Đ d Đ

Câu 15.

a Đ b S c S d Đ

Câu 16.

a Đ b S c S d Đ

PHẦN 3. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 22 bạn nữ và 18 bạn nam. Có 3 tên Hiền gồm hai bạn nam và một bạn nữ. Thầy giáo chọn ngẫu nhiên một bạn lên bảng làm bài tập. Tính xác suất để chọn đúng bạn tên Hiền là bạn nam (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 18. Một hộp đựng 30 viên bi kích thước, chất liệu như nhau, trong đó có 20 viên bi xanh và 10 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên ra một viên bi không bỏ lại trong hộp, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được một viên bi trắng ở lần thứ nhất và một viên bi xanh ở lần thứ hai (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 19. Khảo sát tỉ lệ người dân trong một xã nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của xã đó thì khả năng mà người đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?

KQ:

Câu 20. Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các loại xạ thủ loại I là 0,9 và loại II là 0,7. Chọn ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.

KQ:

Câu 21. Khảo sát sự yêu thích môn Toán của hai lớp 12 của một trường. Lớp 12A1 có 40 học sinh và có 80% học sinh thích môn Toán, lớp 12A2 có 32 học sinh và có 75% học sinh thích môn Toán. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Biết rằng bạn đó yêu thích môn Toán, tính xác suất bạn đó học lớp 12A1 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 22. Hộp thứ nhất có 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh, hộp thứ hai có 4 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh, các viên bi có cùng khối lượng và kích thước. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai. Sau đó từ hộp thứ hai lấy ngẫu nhiên ra một viên bi. Biết rằng viên bi lấy ra từ hộp hai là viên bi màu đỏ. Tính xác suất viên bi bỏ từ hộp thứ nhất sang hộp thứ hai là màu xanh (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN**Câu 17.** 0,25**Câu 18.** 0,23**Câu 19.** 26**Câu 20.** 0,74**Câu 21.** 0,57**Câu 22.** 0,35