

# VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

## §1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

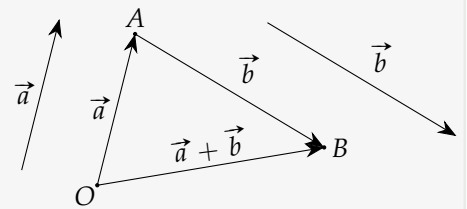
### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1. Tổng của hai véc tơ

##### Định nghĩa 1.1.

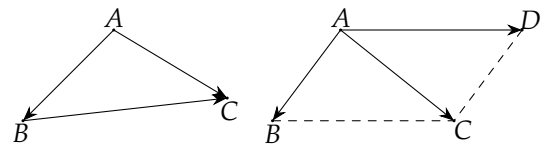
Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy ba điểm  $O, A, B$  sao cho  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}$ . Ta gọi  $\vec{OB}$  là tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ký hiệu  $\vec{a} + \vec{b}$ .

Phép lấy tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là phép cộng vectơ.



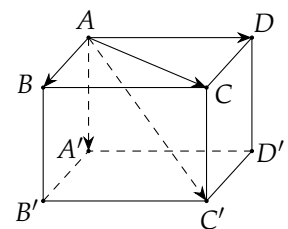
① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm  $A, B, C$ , ta có  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

② Quy tắc hình bình hành: Cho  $ABCD$  là hình bình hành, ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$



③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$

⚠ Hệ thức tương tự:  $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$ .



**Tính chất 1.1.** ① Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;

② Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;

③ Với mọi vectơ  $\vec{a}$ , ta luôn có:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .

④ Tổng của ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ :  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ .

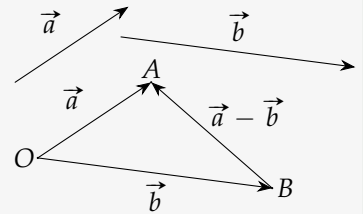
## 2. Hiệu của hai véc tơ

**Định nghĩa 1.2.** a) Vectơ đối:

- ① Vectơ đối của  $\vec{a}$  kí hiệu là  $-\vec{a}$ .
- ② Vectơ đối của  $\vec{AB}$  là  $\vec{BA}$ , nghĩa là  $-\vec{AB} = \vec{BA}$  (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).
- ③ Vectơ  $\vec{0}$  được coi là vectơ đối của chính nó.

b) Định nghĩa hiệu của hai vectơ: Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Ta gọi  $\vec{a} + (-\vec{b})$  là hiệu của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.



- ① Với ba điểm  $A, B, C$  ta có  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ .
- ② Hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đối nhau thì  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .

## 3. Tích của một số với một véc-tơ

**Định nghĩa 1.3.** Cho số thực  $k \neq 0$  và vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của một số  $k$  với vectơ  $\vec{a}$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , được xác định như sau:

- ✔ Cùng hướng với vectơ  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$ .
- ✔ Có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .

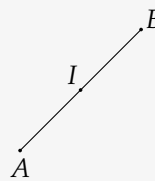
⚠  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  và  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

### Tính chất 1.2.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

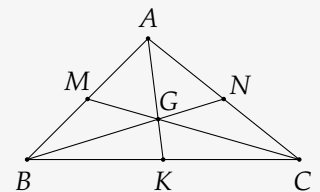
①  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì

- $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ ;
- $\vec{IA} = -\vec{IB}$ ;  $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ ;...



②  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì

- $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ;
- $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AK}$ ;  $\vec{GA} = -2\vec{GK}$ ;...



Nhận xét:

① Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bất kỳ, với mọi số  $h$  và  $k$ , ta luôn có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ ;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$ ;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ ;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{cases}$ .

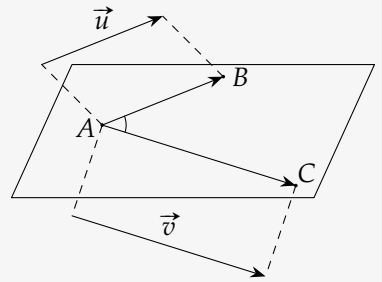
② Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

③ Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k \neq 0$  để  $\vec{AB} = k\vec{AC}$ .

#### 4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

##### Định nghĩa 1.4.

Trong không gian, cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là hai véc-tơ khác  $\vec{0}$ . Lấy một điểm  $A$  bất kỳ, gọi  $B$  và  $C$  là hai điểm sao cho  $\vec{AB} = \vec{u}$ ,  $\vec{AC} = \vec{v}$ . Khi đó, ta gọi  $\widehat{BAC}$  là góc giữa hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ , ký hiệu  $(\vec{u}, \vec{v})$ .



⚠  $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$ .

- ⚠ • Nếu  $\vec{u}$  cùng hướng với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$ ;
- Nếu  $\vec{u}$  ngược hướng với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$ ;
- Nếu  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ .

##### Định nghĩa 1.5.

Trong không gian, cho hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  khác  $\vec{0}$ .

Tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là một số, kí hiệu  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , được xác định bởi công thức  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

- ⚠ ① Trong trường hợp  $\vec{u} = \vec{0}$  hoặc  $\vec{v} = \vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- ②  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$ ;  $\vec{u}^2 \geq 0$ .  $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .
- ③ Với hai véc-tơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- ④ Với hai véc-tơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**Tính chất 1.3.** Với ba véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  và số thực  $k$ , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ .

### B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Dạng 1** Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc-tơ, độ dài véc-tơ

#### Ví dụ 1

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $AB'D'$ .

- a) Tìm vectơ:  $\vec{CC'} + \vec{BA}$ ;  $\vec{CC'} + \vec{BA} + \vec{D'A'}$ .      b) Chứng minh:  $\vec{BC} + \vec{DC} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$ .
- c) Chứng minh:  $\vec{B'B} + \vec{AD} + \vec{CD} = \vec{B'D}$ .      d) Chứng minh:  $\vec{BB'} - \vec{C'B'} - \vec{D'C'} = \vec{BD'}$ .
- e) Chứng minh:  $\vec{A'C} = 3\vec{A'G}$ .      f) Tính độ dài véc-tơ  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{AA'}$ .

👉 Lời giải.

### Ví dụ 2

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N, O$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $AC$ . Chứng minh rằng

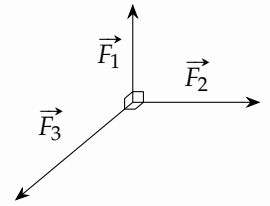
- $\vec{BN}$  và  $\vec{DM}$  đối nhau;
- $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ ;
- $\vec{SD} - \vec{BN} - \vec{CM} = \vec{SC}$ .

👉 Lời giải.

### Ví dụ 3

Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N.

- Tính độ lớn hợp lực của  $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ .
- Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



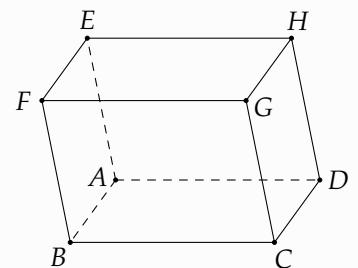
👉 Lời giải.

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

#### Câu 1

Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ  $\vec{AB}$  là các véc-tơ nào sau đây?

- |  |  |
|--|--|
| <input type="radio"/> A $\vec{CD}, \vec{HG}, \vec{EF}$ . | <input type="radio"/> B $\vec{DC}, \vec{HG}, \vec{EF}$ . |
| <input type="radio"/> C $\vec{DC}, \vec{HG}, \vec{FE}$ . | <input type="radio"/> D $\vec{DC}, \vec{GH}, \vec{EF}$ . |

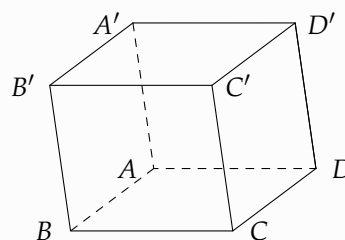


👉 Lời giải.

**Câu 2**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- (A)  $\vec{AB} + \vec{B'D'} = \vec{AD}$ .
- (B)  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$ .
- (C)  $\vec{AC'} + \vec{A'C} = 2\vec{AC}$ .
- (D)  $\vec{AC} - \vec{D'D} = \vec{0}$ .

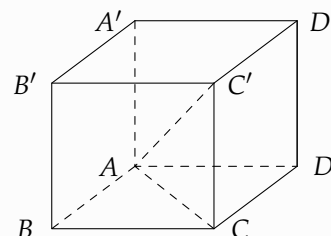


**Lời giải.**

**Câu 3**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- (A)  $|\vec{AC}| = a\sqrt{2}$ .
- (B)  $|\vec{AC'}| = a\sqrt{3}$ .
- (C)  $\vec{BD} + \vec{D'B'} = \vec{0}$ .
- (D)  $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BC'}$ .

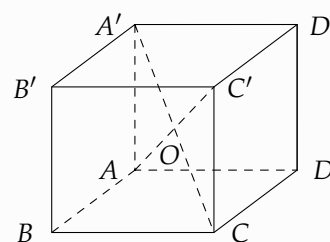


**Lời giải.**

**Câu 4**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $O$  là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A)  $\vec{AO} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$ .
- (B)  $\vec{AO} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$ .
- (C)  $\vec{AO} = \frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$ .
- (D)  $\vec{AO} = \frac{2}{3} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$ .



**Lời giải.**

## Câu 5

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$  theo  $a$ .

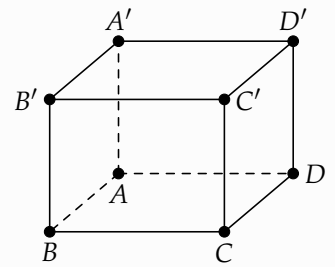
- (A)  $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$ .      (B)  $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$ .      (C)  $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$ .      (D)  $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 6

Hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$  theo  $a$ .

- (A)  $a\sqrt{2}$ .      (B)  $(1 + \sqrt{3})a$ .  
(C)  $a\sqrt{6}$ .      (D)  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

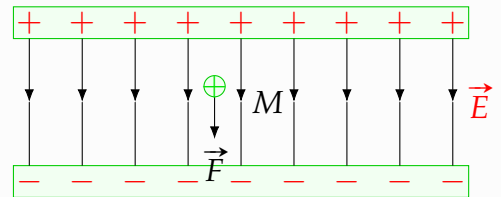


👉 Lời giải.

## Câu 7

Trong điện trường đều, lực tĩnh điện  $\vec{F}$  (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích  $q$  (đơn vị: C) được tính theo công thức  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ , trong đó  $\vec{E}$  là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi  $q = 10^{-9}$  C và độ lớn điện trường  $E = 10^5$  N/C.

- (A)  $10^{-3}$  N.      (B)  $10^4$  N.  
(C)  $10^{-14}$  N.      (D)  $10^{-4}$  N.

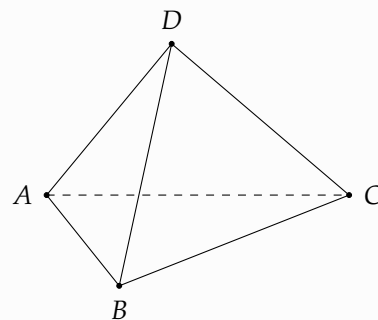


👉 Lời giải.

**Câu 8**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CD} + \vec{BC}$ .       B  $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BC}$ .  
 C  $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC}$ .       D  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{DB} - \vec{DC}$ .

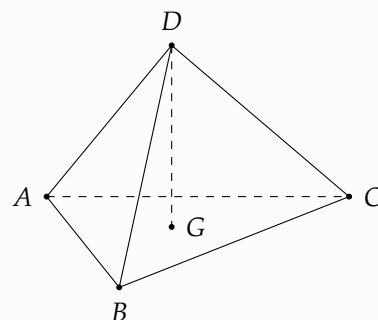


**Lời giải.**

**Câu 9**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tìm  $k$  thỏa đẳng thức vectơ  $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = k \cdot \vec{DG}$ .

- A  $k = 1$ .       B  $k = 3$ .  
 C  $k = 2$ .       D  $k = 3$ .

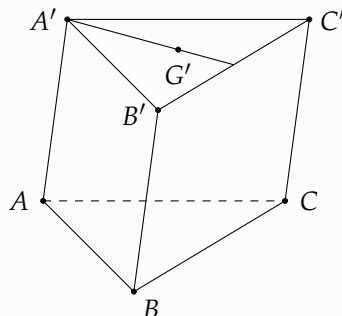


**Lời giải.**

**Câu 10**

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ . Đặt  $\vec{a} = \vec{AA'}$ ,  $\vec{b} = \vec{AB}$ ,  $\vec{c} = \vec{AC}$ . Vectơ  $\vec{AG'}$  bằng

- A  $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$ .       B  $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .  
 C  $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$ .       D  $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .

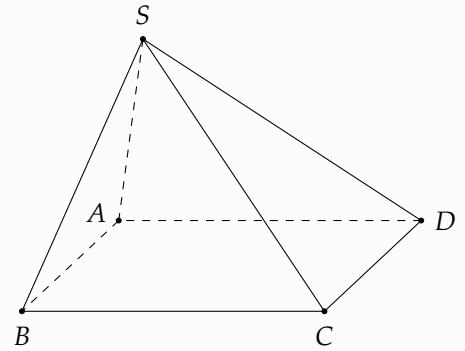


**Lời giải.**

### Câu 11

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Đặt  $\vec{SA} = \vec{a}$ ,  $\vec{SB} = \vec{b}$ ,  $\vec{SC} = \vec{c}$ ,  $\vec{SD} = \vec{d}$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ .       B  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .  
 C  $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ .       D  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ .

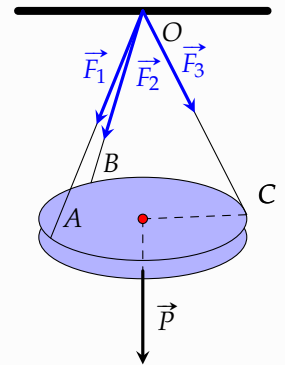


👉 Lời giải.

### Câu 12

Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$  (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

- A  $14\sqrt{3}$  (N).       B  $15\sqrt{3}$  (N).  
 C  $17\sqrt{3}$  (N).       D  $16\sqrt{3}$  (N).

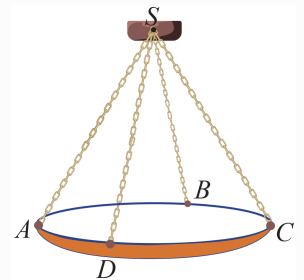


👉 Lời giải.

### Câu 13

Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  $m = 5$  kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 60^\circ$ . Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

- A  $\frac{15\sqrt{3}}{3}$  N.       B  $\frac{20\sqrt{3}}{3}$  N.       C  $\frac{25\sqrt{3}}{3}$  N.       D  $\frac{30\sqrt{3}}{3}$  N.



👉 Lời giải.

**Câu 14**

Cho tứ diện  $RYFS$ . Có bao nhiêu vectơ được tạo thành có điểm đầu là  $R$  và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

- (A) 4.                      (B) 3.                      (C) 2.                      (D) 1.

 **Lời giải.**

**Câu 15**

Cho hình lăng trụ  $HKY.H'K'Y'$ . Gọi  $L, L'$  là trung điểm của  $KY, K'Y'$  tương ứng. Các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lăng trụ và cùng phương với  $\overrightarrow{KL}$  là

- (A)  $\overrightarrow{K'Y'}, \overrightarrow{Y'K'}$ .                      (B)  $\overrightarrow{KY}, \overrightarrow{YK}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{KY}, \overrightarrow{YK}, \overrightarrow{K'Y'}, \overrightarrow{Y'K'}$ .                      (D)  $\overrightarrow{KYK'Y'}$ .

 **Lời giải.**

**Câu 16**

Cho hình lăng trụ  $PJI.P'J'I'$ . Gọi  $E, E'$  là trung điểm của  $JI, J'I'$  tương ứng. Các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lăng trụ và cùng hướng với  $\overrightarrow{JE}$  là

- (A)  $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{J'I'}$ .                      (B)  $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{I'J}$ .                      (C)  $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{I'J}, \overrightarrow{J'I'}, \overrightarrow{I'J'}$ .                      (D)  $\overrightarrow{I'J}, \overrightarrow{I'J'}$ .

 **Lời giải.**

**Câu 17**

Cho hình lăng trụ  $TSL.T'S'L'$ . Gọi  $P, P'$  là trung điểm của  $SL, S'L'$  tương ứng. Số vectơ đối của  $\overrightarrow{P'P}$  là

- (A) 2.                      (B) 1.                      (C) 4.                      (D) 3.

 **Lời giải.**

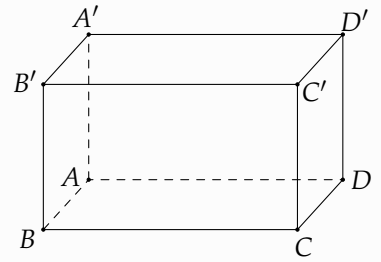
**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng**

hoặc sai.

### Câu 1

Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = a$ ;  $AD = a\sqrt{3}$ ;  $AA' = 2a$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $\vec{AB'} + \vec{CD'} = \vec{0}$ .
- $\vec{A'D} + \vec{CB'} = \vec{0}$ .
- $|\vec{AB} + \vec{AD}| = a\sqrt{5}$ .
- $|\vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{CC'}| = 2\sqrt{2}a$ .

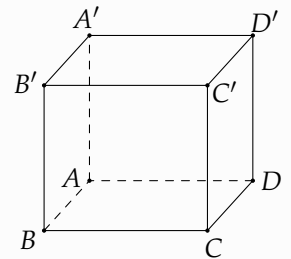


👉 Lời giải.

### Câu 2

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $\vec{B'B} - \vec{DB} = \vec{B'D}$ .
- $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD}$ .
- $|\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'}| = a\sqrt{2}$ .
- $|\vec{BC} - \vec{BA} + \vec{C'A}| = a$ .

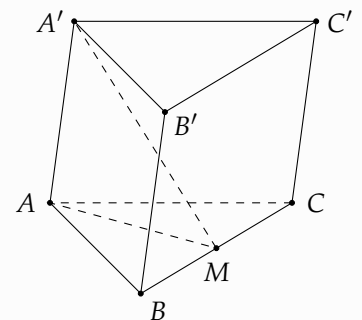


👉 Lời giải.

### Câu 3

Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\vec{AA'} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$  và  $\vec{AC} = \vec{c}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $\vec{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .
- $\vec{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .
- $\vec{AM} = \vec{b} + \vec{c}$ .
- $\vec{A'M} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .

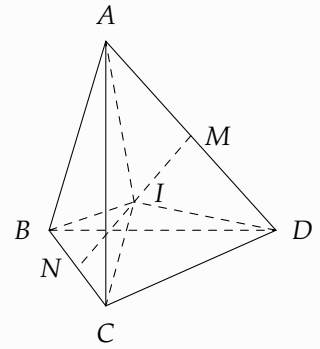


👉 Lời giải.

**Câu 4**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD$  và  $BC, I$  là trung điểm  $MN$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a)  $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$ .      b)  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ .  
 c)  $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{MN}$ .      d)  $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$ .

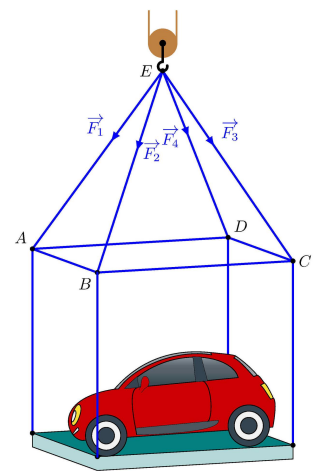


**Lời giải.**

**Câu 5**

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là  $4700\text{ N}$  và trọng lượng của khung sắt là  $3000\text{ N}$ .

- a)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ .  
 b)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ .  
 c)  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 8141\text{ N}$  (làm tròn đến hàng đơn vị).  
 d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là  $16282\text{ N}$  (làm tròn đến hàng đơn vị).



**Lời giải.**

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả**

**Câu 1**

Cho hình lăng trụ  $TAL.T'A'L'$  có đáy là tam giác  $TAL$  cân tại  $T$ , cạnh bên bằng  $3$  và góc ở đỉnh bằng  $30^\circ$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AL$ . Độ dài của  $\vec{TE}$  (làm tròn đến kết quả phần trăm) bằng

**Lời giải.**

## Dạng 2 Xác định góc và tích vô hướng của hai vectơ

### Ví dụ 1

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 5.

- Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau:  $\vec{AC}$  và  $\vec{AB}$ ;  $\vec{AC}$  và  $\vec{B'D'}$ ;  $\vec{AC}$  và  $\vec{CD}$ ;  $\vec{AD'}$  và  $\vec{BD}$ .
- Tính các tích vô hướng  $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ ;  $\vec{AC} \cdot \vec{B'D'}$ ;  $\vec{AD'} \cdot \vec{BD}$ ;
- Chứng minh  $\vec{AC'}$  vuông góc với  $\vec{BD}$ .

👉 Lời giải.

### Ví dụ 2

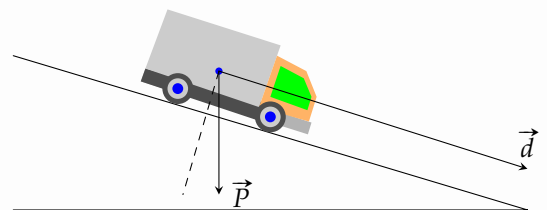
Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

- Tính các tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$ .
- Tính góc  $(\vec{AB}, \vec{CD})$ .

👉 Lời giải.

### Ví dụ 3

Cho biết công  $A$  (đơn vị:  $J$ ) sinh bởi lực  $\vec{F}$  tác dụng lên một vật được tính bằng công thức  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ , trong đó  $\vec{d}$  là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của  $|\vec{d}|$  là m) khi chịu tác dụng của lực  $\vec{F}$ .

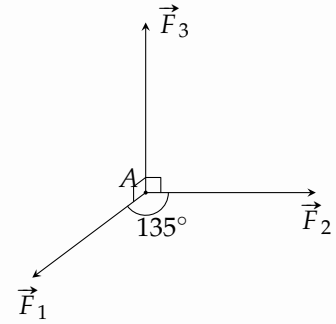


Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng  $5^\circ$  so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực  $\vec{P}$  khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực  $\vec{P}$  được xác định bởi công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$ , với  $m$  (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và  $\vec{g}$  là gia tốc rơi tự do có độ lớn  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

👉 Lời giải.

**Ví dụ 4**

Một chất điểm  $A$  nằm trên mặt phẳng nằm ngang  $(\alpha)$ , chịu tác động bởi ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có giá nằm trong  $(\alpha)$  và  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$ , còn lực  $\vec{F}_3$  có giá vuông góc với  $(\alpha)$  và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



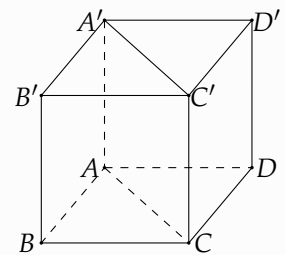
**Lời giải.**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 2**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A  $(\vec{A'C'}, \vec{AD}) = 45^\circ$ .
- B  $(\vec{A'C'}, \vec{B'B}) = 90^\circ$ .
- C  $(\vec{A'A}, \vec{CB'}) = 45^\circ$ .
- D  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$ .

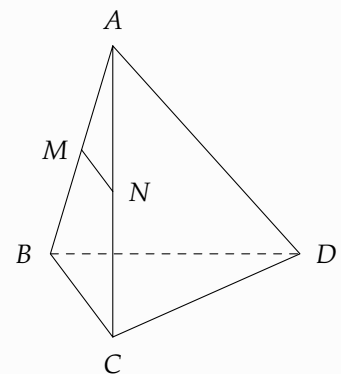


**Lời giải.**

**Câu 3**

Cho tứ diện đều  $ABCD$ , Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$ . Hãy tính góc giữa hai vectơ  $\vec{MN}$  và  $\vec{BD}$ .

- A  $(\vec{MN}, \vec{BD}) = 150^\circ$ .
- B  $(\vec{MN}, \vec{BD}) = 120^\circ$ .
- C  $(\vec{MN}, \vec{BD}) = 30^\circ$ .
- D  $(\vec{MN}, \vec{BD}) = 60^\circ$ .

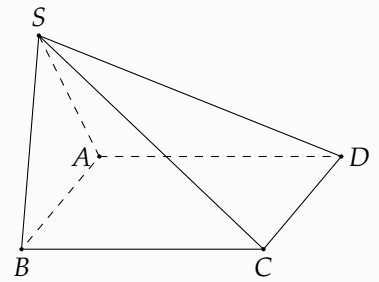


**Lời giải.**

### Câu 4

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và mặt bên  $SAB$  là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{BS}$ .

- (A)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ$ .      (B)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 60^\circ$ .  
 (C)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 90^\circ$ .      (D)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 150^\circ$ .

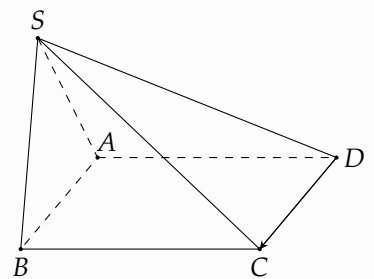


👉 Lời giải.

### Câu 5

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Mặt bên  $ASB$  là tam giác vuông cân tại  $S$  và có cạnh  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$ .

- (A)  $\frac{a^2}{4}$ .      (B)  $-\frac{a^2}{4}$ .  
 (C)  $-\frac{a^2}{2}$ .      (D)  $\frac{a^2}{2}$ .

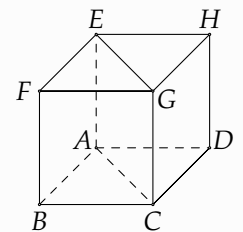


👉 Lời giải.

### Câu 6

Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$  có các cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ .

- (A)  $a^2\sqrt{2}$ .      (B)  $a^2$ .  
 (C)  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ .      (D)  $a^2\sqrt{3}$ .

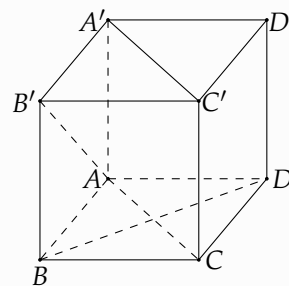


👉 Lời giải.

**Câu 7**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ .

- A  $\frac{a^2}{2}$ .
- B  $-a^2$ .
- C  $a^2$ .
- D  $-\frac{a^2}{2}$ .

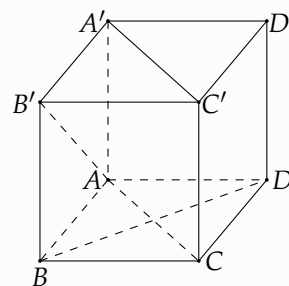


**Lời giải.**

**Câu 8**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

- A  $\frac{a^2}{2}$ .
- B  $-a^2$ .
- C  $a^2$ .
- D  $-\frac{a^2}{2}$ .

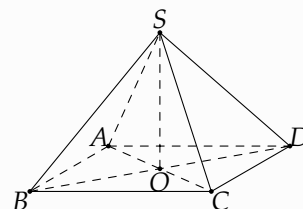


**Lời giải.**

**Câu 9**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có độ dài tất cả các cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A  $-\frac{a^2}{4}$ .
- B  $\frac{a^2}{2}$ .
- C  $-\frac{a^2}{2}$ .
- D  $\frac{a^2}{4}$ .

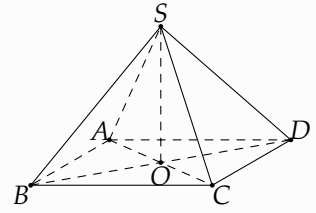


**Lời giải.**

### Câu 10

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có độ dài tất cả các cạnh bằng  $a$ .  
 Tính  $\vec{AS} \cdot \vec{AC}$ .

- (A)  $-a^2$ .                      (B)  $\frac{a^2}{2}$ .  
 (C)  $-\frac{a^2}{2}$ .                      (D)  $a^2$ .

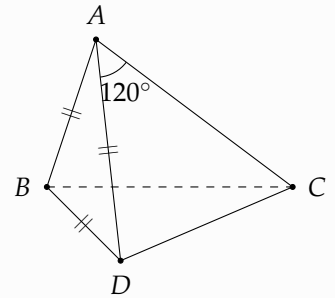


👉 Lời giải.

### Câu 11

Cho tứ diện  $\vec{ABCD}$  biết  $AB = AD = BD = a$ ,  $AC = 2a$  và  $\widehat{CAD} = 120^\circ$ . Tính  $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$ .

- (A)  $-\frac{3}{2}a^2$ .                      (B)  $\frac{3}{2}a^2$ .  
 (C)  $\frac{1}{2}a^2$ .                      (D)  $-\frac{1}{2}a^2$ .

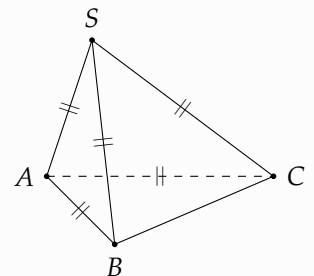


👉 Lời giải.

### Câu 12

Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa các vectơ  $\vec{SC}$  và  $\vec{AB}$ .

- (A)  $60^\circ$ .                      (B)  $90^\circ$ .  
 (C)  $120^\circ$ .                      (D)  $150^\circ$ .

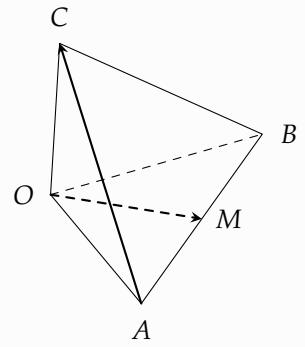


👉 Lời giải.

**Câu 13**

Cho tứ diện  $OABC$  có các cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = OB = OC = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{OM}$  và  $\vec{AC}$ .

- A  $90^\circ$ .
- B  $120^\circ$ .
- C  $60^\circ$ .
- D  $30^\circ$ .



**Lời giải.**

.....

.....

.....

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1**

Trong không gian, cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là  $45^\circ$ .

- a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- b)  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- c)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}$ .
- d)  $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0$ .

**Lời giải.**

.....

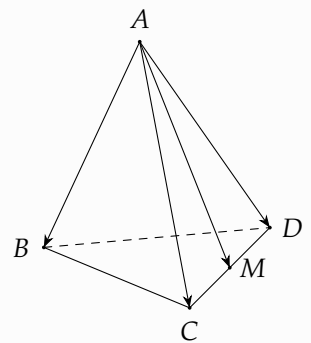
.....

.....

**Câu 2**

Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

- a)  $\vec{AM} \cdot \vec{CD} = 0$ .
- b)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$ .
- c)  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ .
- d)  $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = -\frac{a^2}{2}$ .



**Lời giải.**

.....

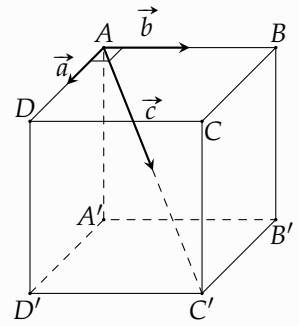
.....

.....

### Câu 3

Một chất điểm ở vị trí đỉnh  $A$  của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chất điểm chịu tác động bởi ba lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  lần lượt cùng hướng với  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC'}$  như hình vẽ. Độ lớn của các lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .
- $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$  (N).
- $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$ .
- $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,5$  (N) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



👉 Lời giải.

.....

.....

.....

## C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

### Câu 1

Cho tứ diện  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- |  |  |
|--|--|
| <input type="radio"/> A $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .              | <input type="radio"/> B $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ . |
| <input type="radio"/> C $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ . | <input type="radio"/> D $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ . |

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

### Câu 2

Cho tứ diện  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn  $BC$ . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- |   |   |
|---|---|
| <input type="radio"/> A $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$ . | <input type="radio"/> B $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$ . |
| <input type="radio"/> C $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$ . | <input type="radio"/> D $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$ . |

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 3**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$ .     
  B  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$ .  
 C  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$ .     
  D  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$ .

 Lời giải.

**Câu 4**

Cho tứ diện  $ABCD$  và điểm  $G$  thỏa mãn  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$  ( $G$  là trọng tâm của tứ diện). Gọi  $G_0$  là giao điểm của  $GA$  và mặt phẳng  $(BCD)$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A  $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$ .     
  B  $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$ .     
  C  $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$ .     
  D  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$ .

 Lời giải.

**Câu 5**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Đặt  $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ .     
  B  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .  
 C  $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ .     
  D  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ .

 Lời giải.

**Câu 6**

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ . Vectơ  $\overrightarrow{AG'}$  bằng?

- A  $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$ .     
  B  $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .     
  C  $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$ .     
  D  $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .

 Lời giải.

**Câu 7**

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BB'$ . Đặt  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**(A)**  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

**(B)**  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$ .

**(C)**  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .

**(D)**  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .

**👉 Lời giải.**

**Câu 8**

Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**(A)**  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ .

**(B)**  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .

**(C)**  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .

**(D)**  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ .

**👉 Lời giải.**

**Câu 9**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $O$  là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**(A)**  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$ .

**(B)**  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$ .

**(C)**  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$ .

**(D)**  $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$ .

**👉 Lời giải.**

**Câu 10**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ . Phân tích vecto  $\overrightarrow{AC'}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ?

**A**  $\vec{AC}' = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

**B**  $\vec{AC}' = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

**C**  $\vec{AC}' = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

**D**  $\vec{AC}' = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

**Lời giải.**

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1**

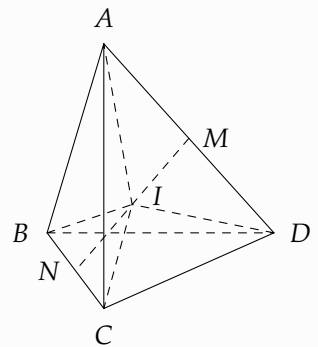
Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD$  và  $BC, I$  là trung điểm  $MN$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$ .

b)  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ .

c)  $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{MN}$ .

d)  $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$ .



**Lời giải.**

**Câu 2**

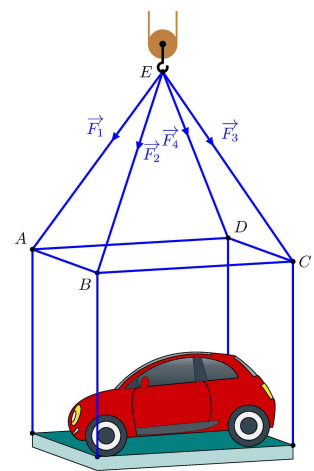
Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cân cầu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Chiếc cân cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

a)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ .

b)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ .

c)  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 8141 \text{ N}$  (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



**Lời giải.**

### Câu 3

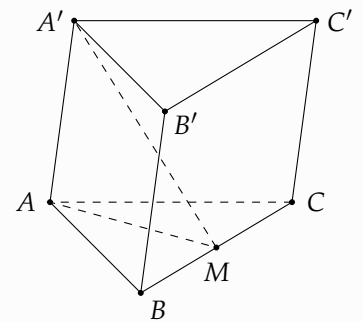
Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$  và  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

b)  $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

c)  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c}$ .

d)  $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .



### 📌 Lời giải.

### Câu 4

Trong không gian cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  tâm  $O$ .

a)  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA'} = \vec{0}$ .

c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$ .

d)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$ .

### 📌 Lời giải.

### Câu 5

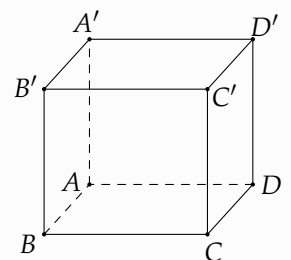
Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$ .

b)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$ .

c)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = a\sqrt{2}$ .

d)  $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = a$ .



### 📌 Lời giải.

**Câu 6**

Trong không gian, cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $I$  là tâm hình vuông  $ABCD$ , gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $AB'C$  (tham khảo hình vẽ).

- a)  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$ .
- b)  $\vec{GA} + \vec{GB'} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$ .
- c)  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{A'C'}$ .
- d)  $\vec{BD'} = 2\vec{BG}$ .

**Lời giải.**

**Câu 7**

Trong không gian, cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD, BC$ .

- a)  $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.
- b)  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{MN}$  không đồng phẳng.
- c)  $\vec{AN}, \vec{CM}, \vec{MN}$  đồng phẳng.
- d)  $\vec{BD}, \vec{AC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.

**Lời giải.**

**Câu 8**

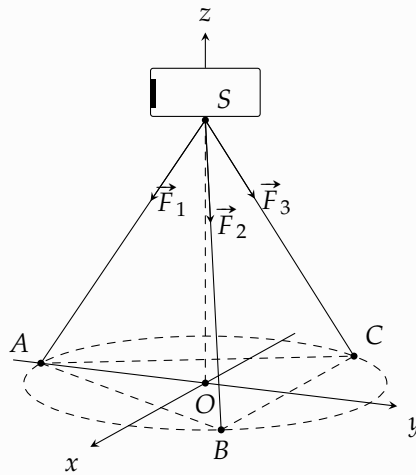
Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = a; AD = a\sqrt{3}; AA' = 2a$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a)  $\vec{AB'} + \vec{CD'} = \vec{0}$ .
- b)  $\vec{A'D} + \vec{CB'} = \vec{0}$ .
- c)  $|\vec{AB} + \vec{AD}| = a\sqrt{5}$ .
- d)  $|\vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{CC'}| = 2\sqrt{2}a$ .

**Lời giải.**

**Câu 9**

Một chiếc điện thoại được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt  $S(0;0;20)$  và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là  $A(0; -6; 0), B(3\sqrt{3}; 3; 0), C(-3\sqrt{3}; 3; 0)$  (đơn vị cm). Cho biết điện thoại có trọng lượng là 2 N và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có độ lớn bằng nhau và đo bằng đơn vị N.

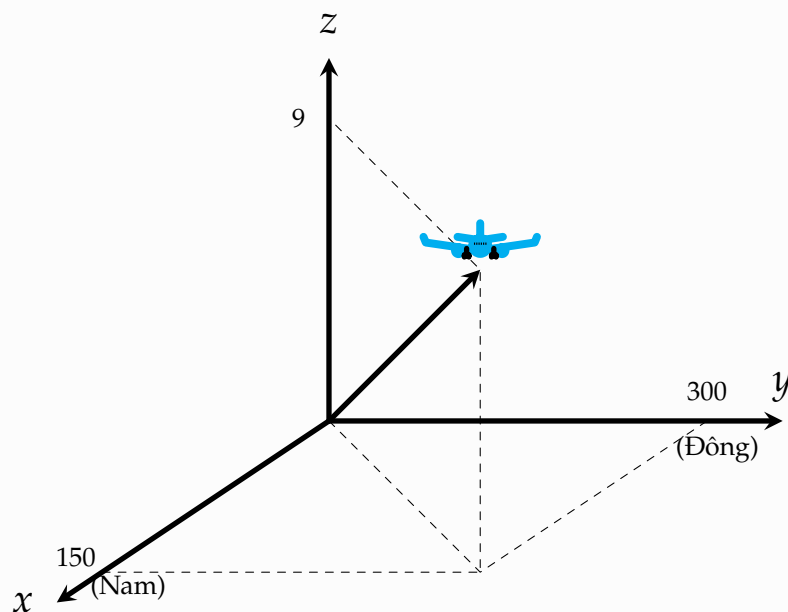


- a)  $\vec{SA} = (0; -6; -20)$ .  
 b)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}(0; 0; 2)$ .  
 c)  $|\vec{F}_1| = \frac{1}{20} |\vec{SA}|$ .  
 d) Biết tọa độ của lực  $\vec{F}_1 = (a; b; c)$ , khi đó  $T = 2a + 5b + 6c = -5$ .

📌 Lời giải.

### Câu 10

Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km.



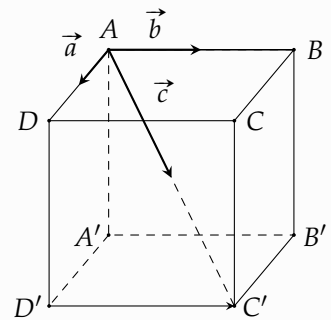
- a) Máy bay đang ở độ cao 9 km.  
 b) Tọa độ của máy bay lúc này là  $(300; 150; 9)$ .

- c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động với vận tốc theo hướng đông là 750 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10 m/s. Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì lúc 10h30 phút máy bay ở tọa độ là (150; 1086; 9).
- d) Sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại (hướng tây) với vận tốc 800 km/h với độ cao không đổi, biết lúc đó trời lặng gió thì lúc 11h máy bay ở tọa độ (686; 150; 9).

👉 Lời giải.

**Câu 11**

Một chất điểm ở vị trí A của hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC'}$  như hình vẽ bên. Độ lớn của lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  tương ứng là 10 N, 10 N và  $10\sqrt{3}$  N.



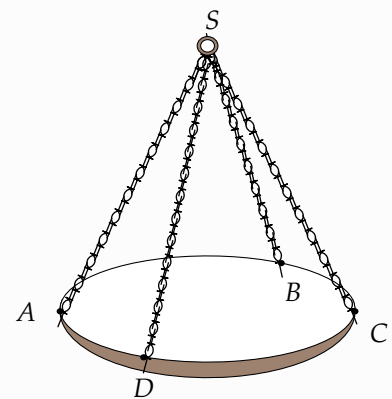
- a)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .
- b)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$  (N).
- c)  $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$ .
- d)  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 30$  (N).

👉 Lời giải.

**Câu 12**

Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  $m = 5$  kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho S.ABCD là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 60^\circ$  (tham khảo hình vẽ bên).

Biết  $\vec{P} = m\vec{g}$  trong đó  $\vec{g}$  là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn  $10 \text{ m/s}^2$ ,  $\vec{P}$  là trọng lực tác động lên vật có đơn vị là N,  $m$  là khối lượng của vật có đơn vị kg. Khi đó:



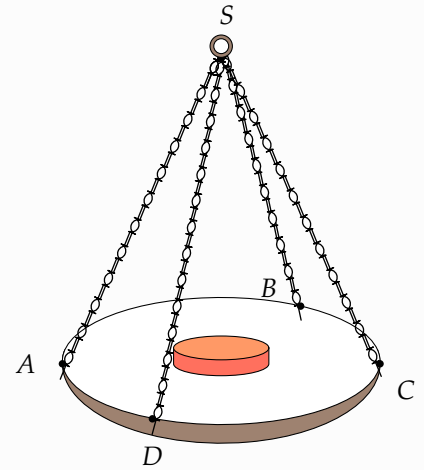
- a)  $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$  và  $\vec{SD}$  là bốn vectơ đồng phẳng.
- b)  $|\vec{SA}| = |\vec{SB}| = |\vec{SC}| = |\vec{SD}|$ .
- c) Độ lớn của trọng lực  $\vec{P}$  tác động lên chiếc đèn chùm bằng 50 N.
- d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng  $\frac{25\sqrt{3}}{6}$  N.

👉 Lời giải.

### Câu 13

Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  $m = 5 \text{ kg}$  được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và  $\widehat{ASC} = 60^\circ$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

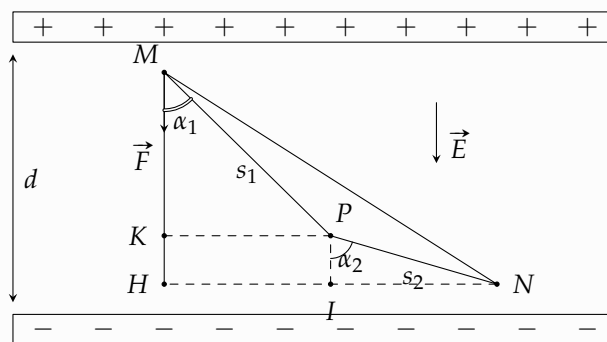
- Hợp lực của 4 sợi xích là  $\vec{F} = \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}$ .
- Độ lớn trọng lực tác động lên chùm đèn là  $50 \text{ N}$ .
- Độ lớn hợp lực của các sợi xích tác dụng lên chiếc đèn đó là  $50 \text{ N}$ .
- Góc giữa mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(ABCD)$  bằng.



### Lời giải.

### Câu 14

Một lực tĩnh điện  $\vec{F}$  tác động lên điện tích điểm  $M$  trong điện trường đều làm cho  $M$  dịch chuyển theo đường gấp khúc  $MPN$ . Biết  $q = 2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$ , véc-tơ điện trường có độ lớn  $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ N/C}$  và  $d = MH = 5 \text{ mm}$ . Cho biết công thức tính lực tĩnh điện là  $\vec{F} = q\vec{E}$  và công của lực điện  $\vec{F}$  là  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ .



Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- Nếu điện tích dịch chuyển từ  $M$  tới  $N$ , sau đó quay lại  $M$  thì công của lực điện bằng không.
- Công của lực điện dịch chuyển điện tích từ  $N$  tới  $P$  là công phát động (công có giá trị dương).
- Lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích có độ lớn bằng  $3,6 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ .
- Công của lực điện dịch chuyển điện tích theo đường gấp khúc  $MPN$  có giá trị bằng  $a \cdot 10^{-b}$ , trong đó  $a, b$  là số tự nhiên có hai chữ số, khi đó phương trình  $x^2 + ax + b = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt.

**Lời giải.**

**Câu 15**

Cho biết công  $A$  (đơn vị J) sinh bởi lực  $\vec{F}$  tác động lên một vật được tính bằng công thức  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ , trong đó  $\vec{d}$  là véc-tơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của  $|\vec{d}|$  là m) khi chịu tác dụng của lực  $\vec{F}$ .

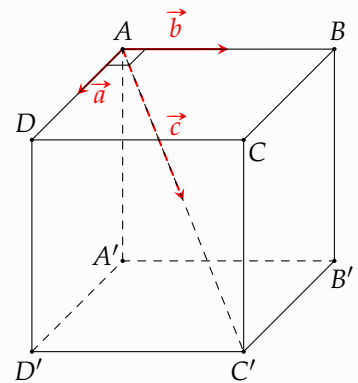
Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng  $5^\circ$  so với phương ngang. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Véc-tơ  $\vec{d}$  có giá song song với đường xe chạy.
- b) Véc-tơ trọng lực của xe  $\vec{P}$  có giá vuông góc với mặt đường nghiêng.
- c) Khi xe xuống hết dốc và chạy trên đường thẳng thì công sinh ra bởi trọng lực của xe có giá trị dương.
- d) Công sinh ra bởi trọng lực của xe khi đi một đoạn dốc dài 30 m là  $A \approx 38\,436$  J (làm tròn tới hàng đơn vị).

**Lời giải.**

**Câu 16**

Một chất điểm ở vị trí đỉnh  $A$  của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chất điểm chịu tác dụng của ba lực  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{AD}, \vec{AB}$  và  $\vec{AC'}$ . Cường độ của các lực  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N. Các khẳng định sau là đúng hay sai?



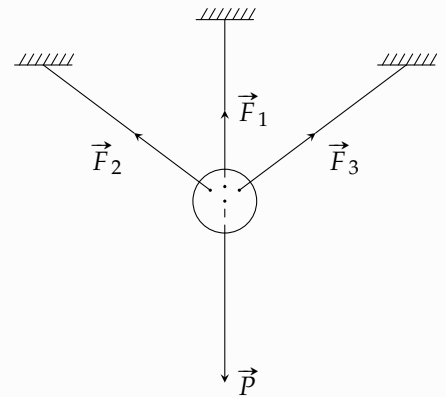
- a) Nếu vật không chịu tác dụng của lực  $\vec{c}$  thì chất điểm sẽ chuyển động theo hướng  $\vec{AC}$ .
- b) Hướng của véc-tơ tổng hợp ba lực  $\vec{a}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$  sẽ cùng hướng với  $\vec{AM}$ , với  $M$  là trung điểm  $BB'$ .
- c) Cường độ hợp lực tại điểm  $A$  gần bằng 32,6 N (làm tròn tới chữ số thập phân thứ nhất).
- d) Nếu vật chịu thêm tác động của lực  $\vec{d}$  có hướng trùng với  $\vec{A'A}$  và cường độ bằng  $10\sqrt{2}$  N thì vật sẽ đứng yên.

**Lời giải.**

### Câu 17

Một vật được treo cân bằng bởi ba sợi dây có trọng lượng không đáng kể, một đầu được cố định như hình vẽ.

Gọi lực căng của ba sợi dây lần lượt là  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  và  $\vec{F}_3$ , trọng lực tác động lên vật là  $\vec{P}$ . Biết  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 5\sqrt{3}$  N và góc hợp thành giữa các sợi dây đều là  $90^\circ$ . Các mệnh đề sau là đúng hay sai?



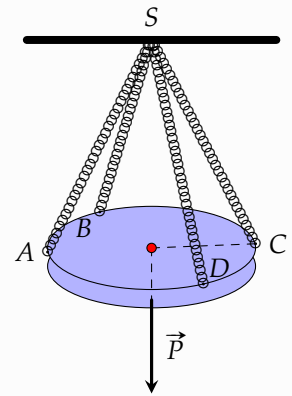
- a)  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3$ .  
 b)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{P} = \vec{0}$ .  
 c)  $|\vec{P}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3|$ .  
 d)  $|\vec{P}| = 5\sqrt{3}$  (N).

👉 Lời giải.

### Câu 18

Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng 9 kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho S.ABCD là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 45^\circ$  (tham khảo hình vẽ bên). Trọng lực  $\vec{P}$  tác động lên đèn chùm xác định bởi công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$  trong đó  $\vec{g}$  là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn  $10 \text{ m/s}^2$ .

- a) Độ lớn của trọng lực  $\vec{P}$  tác động lên chiếc đèn chùm bằng 88 N.  
 b) Các vectơ  $\vec{AB}, \vec{DC}$  không bằng nhau.  
 c) Lực tổng hợp của các lực căng dây cho mỗi sợi xích có độ lớn là 90 N.  
 d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng 24,4 N (kết quả làm tròn ở hàng phân mười).



👉 Lời giải.

### Câu 19

Một tàu thăm dò đang khảo sát các vệ tinh trong không gian. Trên radar gắn một hệ tọa độ Oxyz cho thấy bốn vệ tinh ở điểm lần lượt là  $A(0; 4; 5)$ ,  $B(0; 5; 4)$ ,  $C(1; 3; 3)$ ,  $D(1; -1; 3)$ . Tàu thăm dò đang có vị trí  $M(a; b; c)$  trong không gian, biết khoảng cách từ các vệ tinh đến tàu lần lượt là  $AM = 5$ ,  $BM = 5$ ,  $CM = 3$ ,  $DM = 3$ .

- a) Điểm M thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

- b) Phương trình mặt cầu tâm  $C$  bán kính  $MC$  có phương trình là  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 3$ .
- c) Điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán có  $b = c$ .
- d) Gọi đoạn thẳng  $OM$  nối gốc tọa độ với vị trí tàu là đường chéo của một hình lập phương, khi đó hình lập phương có diện tích toàn phần là 4.

**Lời giải.**

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả**

**Câu 1**

Trong không gian, cho hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có cùng độ dài bằng 2. Biết rằng góc giữa hai vec-tơ đó là  $30^\circ$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

**Lời giải.**

**Câu 2**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai vec-tơ  $\vec{AC}$  và  $\vec{B'C'}$  bằng bao nhiêu độ?

**Lời giải.**

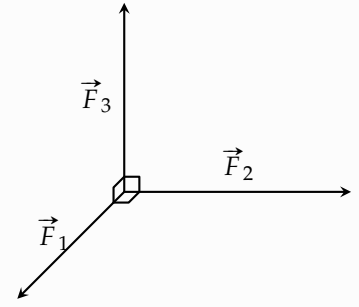
**Câu 3**

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AB'$  và  $A'B$ ,  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Biết  $\vec{CC'} = k\vec{OM}$ . Giá trị  $k$  bằng

**Lời giải.**

**Câu 4**

Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N. Hợp lực của ba lực đã cho có độ lớn bao nhiêu Niu-ton (*kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân*)?



📌 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 5**

Trong không gian, cho hai vec-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và góc giữa hai vec-tơ đó bằng  $60^\circ$ . Tính  $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$ .

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 6**

Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng 6 và  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$ .

📌 Lời giải.

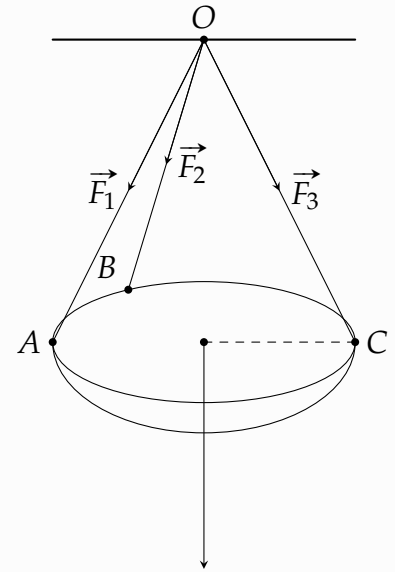
.....

.....

.....

**Câu 7**

Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau. và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15(\text{N})$  (Hình 14). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó (làm tròn đến hàng đơn vị).

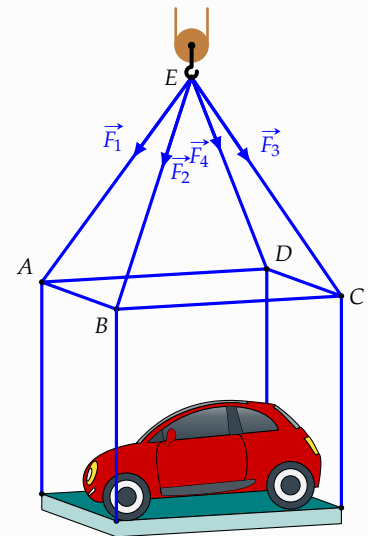


Hình 14

📌 **Lời giải.**

**Câu 8**

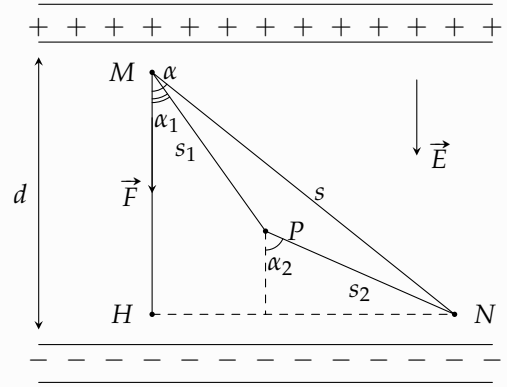
Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$  (Hình). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có độ lớn là  $4\,700\text{ N}$  và trọng lượng của khung sắt là  $3\,000\text{ N}$ .



📌 **Lời giải.**

### Câu 9

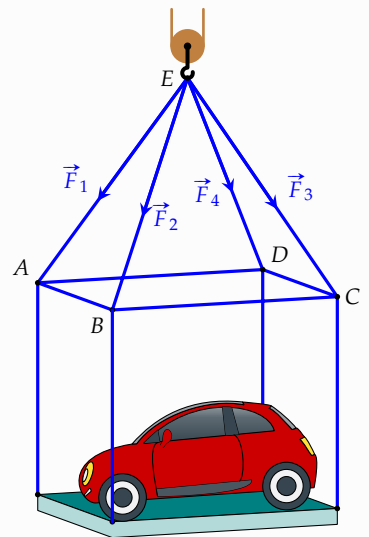
Một lực tĩnh điện  $\vec{F}$  tác động lên điện tích điểm  $M$  trong điện trường đều làm cho  $M$  dịch chuyển theo đường gấp khúc  $MNP$  (Hình). Biết  $q = 2 \cdot 10^{-12}$ , vectơ điện trường có độ lớn  $E = 1,8 \cdot 10^5$  N/C và  $d = MH = 5$  mm. Biết công sinh bởi lực tĩnh điện  $\vec{F}$  bằng  $a \cdot 10^{-9}$  J. Tính  $a$ .



👉 Lời giải.

### Câu 10

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng ( $ABCD$ ) song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được đặt vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng ( $ABCD$ ) một góc  $\alpha$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4800 N, trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là  $7200\sqrt{6}$  N. Tính  $\sin \alpha$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



👉 Lời giải.

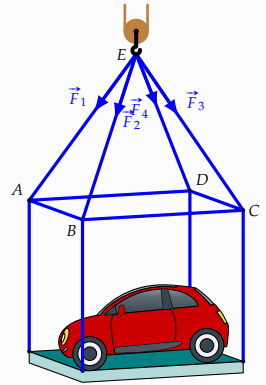
### Câu 11

Có ba lực cùng tác động vào một chất điểm. Hai trong ba lực này tạo với nhau một góc  $80^\circ$  và có độ lớn đều bằng  $60$  N, lực còn lại cùng tạo với hai lực kia một góc  $60^\circ$  và có độ lớn bằng  $50$  N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (làm tròn đến hàng đơn vị).

👉 Lời giải.

**Câu 12**

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $45^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết trọng lượng chiếc xe ô tô là  $4000\text{ N}$  và trọng lượng khung sắt là  $2000\text{ N}$ ; cường độ các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  là bằng nhau. Cường độ lực căng  $\vec{F}_1$  là  $m\text{ N}$ , tính  $m$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



**Lời giải.**

**Câu 13**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $SA = 4, AB = 1, AD = 2$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính  $\cos(\vec{SC}, \vec{DM})$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Lời giải.**

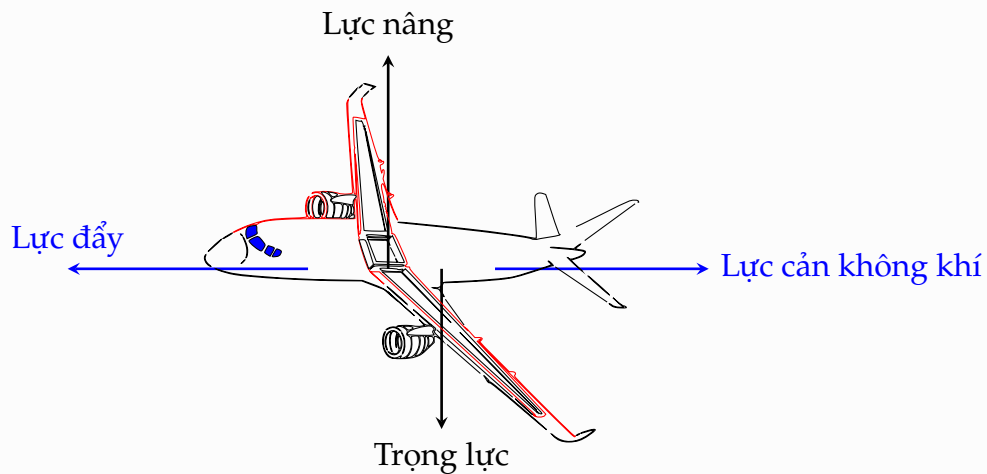
**Câu 14**

Cho hình chóp  $S.ABC$  với  $SA = 3, SB = 4, SC = 5$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  thay đổi luôn đi qua trọng tâm của  $S.ABC$  cắt các cạnh  $SA, SB, SC$  tại các điểm  $A_1, B_1, C_1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2}$ .

**Lời giải.**

**Câu 15**

Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính là lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học.

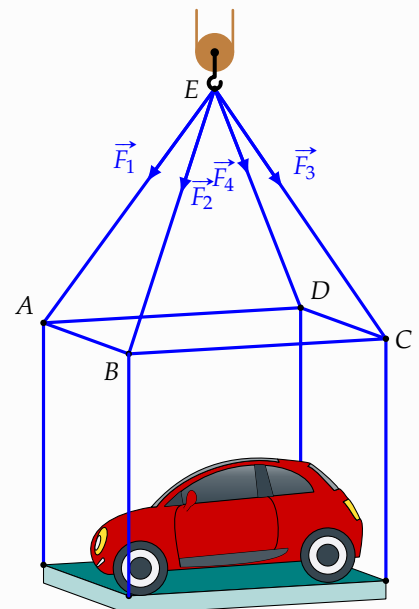


Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  với  $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$  ( $k \in \mathbb{R}; k > 0$ ). Tính giá trị của  $k$  (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

📌 Lời giải.

### Câu 16

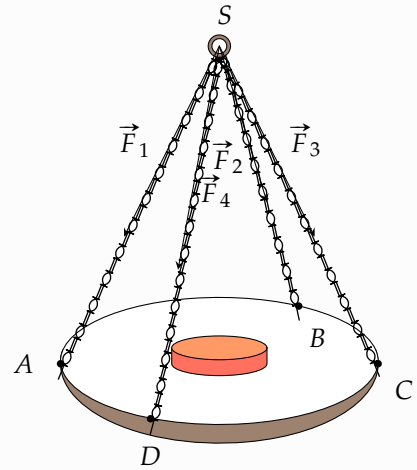
Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC$  và  $ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$  (hình minh họa). Chiếc cần cẩu đang kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4,7 kN và trọng lượng của khung sắt là 3 kN. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng phần chục)?



📌 Lời giải.

**Câu 17**

Một vật nặng có trọng lượng là 400 N được đặt trên một khung sắt hình tròn như hình bên. Biết  $ABCD$  là hình chữ nhật, mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt được móc vào điểm  $S$  sao cho các đoạn dây cáp  $SA, SB, SC, SD$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $45^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết trọng lượng của khung sắt là 200 N; cường độ các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  là bằng nhau. Tính cường độ của lực căng  $\vec{F}_1$  (làm tròn đến hàng đơn vị).



**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 18**

Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

trong đó  $\vec{a}$  là vectơ gia tốc  $m/s^2$ ,  $\vec{F}$  là vectơ lực (N).

Hình 20 tác dụng lên vật,  $m$  (kg) là khối lượng của vật.

Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc  $50 m/s^2$  thì cần một lực đã có độ lớn là bao nhiêu?

**Lời giải.**

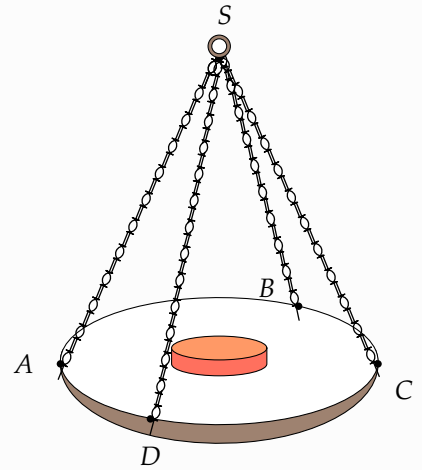
.....

.....

.....

### Câu 19

Một chiếc cân đang cân một vật và được giữ cố định bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho đĩa cân song song với mặt phẳng nằm ngang. Các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  lần lượt trên mỗi dây  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $SABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 90^\circ$ . Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích đều bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$  (N). Đĩa cân và vật trên đĩa có tổng khối lượng là  $m = 3$  kg. Trọng lượng của vật tính theo công thức  $P = mg$  (N); trong đó  $m$  là khối lượng của vật (đơn vị kg),  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , khi đó giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?



👉 Lời giải.

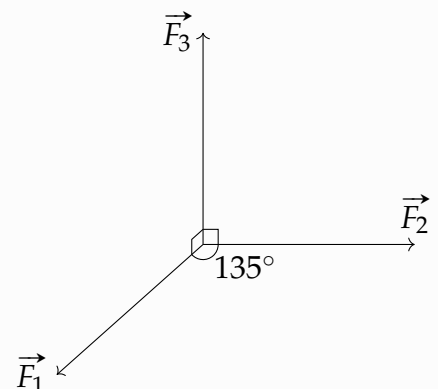
### Câu 20

Cho biết công  $A$  (đơn vị: J) sinh bởi lực  $\vec{F}$  tác dụng lên một vật được tính bằng công thức  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ , trong đó  $\vec{d}$  là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của  $|\vec{d}|$  là m) khi chịu tác dụng của lực  $\vec{F}$ . Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng  $5^\circ$  so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực  $\vec{P}$  (tính theo đơn vị KJ) khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực  $\vec{P}$  được xác định bởi công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$ , với  $m$  (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và  $\vec{g}$  là gia tốc rơi tự do có độ lớn  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

👉 Lời giải.

### Câu 21

Một chất điểm  $A$  nằm trên mặt phẳng nằm ngang ( $\alpha$ ), chịu tác động bởi ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có giá nằm trong ( $\alpha$ ) và  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$ , còn lực  $\vec{F}_3$  có giá vuông góc với ( $\alpha$ ) và hướng lên trên. Xác định tổng hợp lực của các lực trên, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N. (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



📌 Lời giải.

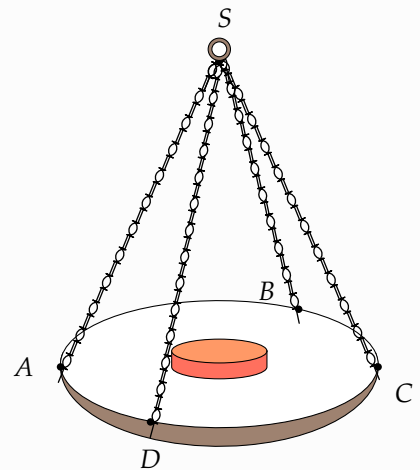
**Câu 22**

Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $100^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 25N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn là 4 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực trên. (Kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

📌 Lời giải.

**Câu 23**

Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  $m = 5$  kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 60^\circ$ . (Cho biết  $\vec{P} = m\vec{g}$  trong đó  $\vec{g}$  là véc-tơ gia tốc rơi tự do có độ lớn  $10$   $m/s^2$ ). Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng  $\frac{a\sqrt{3}}{b}$  với  $a, b$  là các số nguyên dương  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Khi đó  $3a + b^2$  bằng



📌 Lời giải.

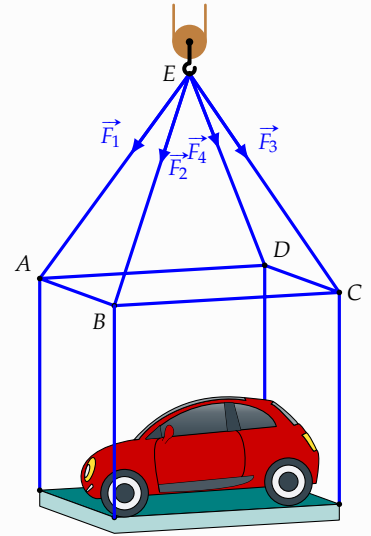
**Câu 24**

Ta đã biết trọng tâm của tứ diện  $ABCD$  là một điểm  $I$  thỏa mãn  $\vec{AI} = 3\vec{IG}$ , ở đó  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (hình bên).

📌 Lời giải.

## Câu 25

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính độ lớn của các lực căng trên mỗi sợi dây cáp. Cho biết khối lượng xe là  $1900 \text{ kg}$ , gia tốc là  $10 \text{ m/s}^2$ , khung nâng có khối lượng  $100 \text{ kg}$ ,  $AB = 8 \text{ m}$ ,  $BC = 12 \text{ m}$ ,  $EC = 12 \text{ m}$ . Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của Newton.



👉 Lời giải.

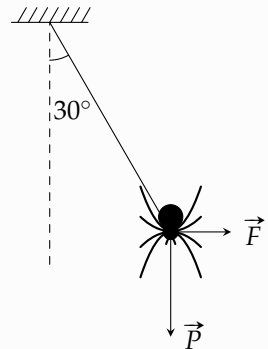
## Câu 26

Một chất điểm ở vị trí đỉnh  $A$  của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chất điểm chịu tác dụng của ba lực  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{AD}, \vec{AB}$  và  $\vec{AC'}$ . Cường độ của các lực  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tương ứng là  $10 \text{ N}, 10 \text{ N}$  và  $20 \text{ N}$ . Tính cường độ hợp lực của  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (làm tròn kết quả tới hàng phần mười).

👉 Lời giải.

## Câu 27

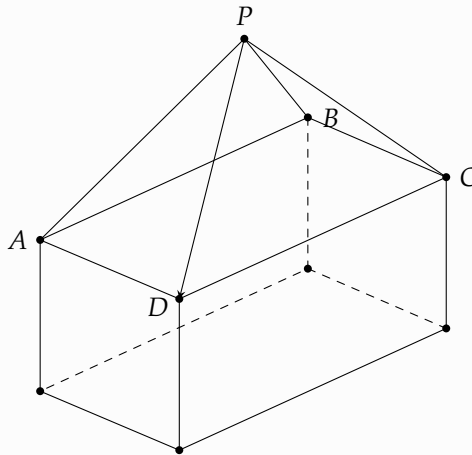
Một con nhện đang treo mình dưới một sợi tơ theo phương thẳng đứng thì bị một cơn gió thổi theo phương ngang làm dây treo lệch đi so với phương thẳng đứng một góc  $30^\circ$ . Biết trọng lượng của con nhện là  $P = 0,1 \text{ N}$ . Xác định độ lớn của lực mà gió tác dụng lên con nhện ở vị trí cân bằng. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



👉 Lời giải.

**Câu 28**

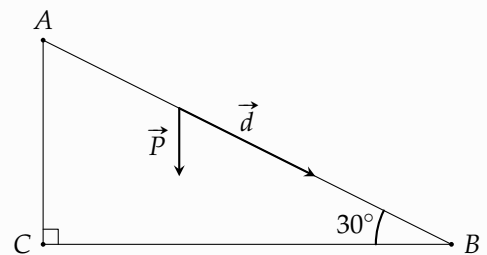
Một thùng hàng container được móc cầu bởi 4 sợi dây cáp được móc vào 4 đầu của thùng hàng (như hình vẽ minh họa). Các sợi dây cáp đó được buộc vào móc  $P$  của chiếc cần cầu sao cho các đoạn dây cáp  $PA, PB, PC, PD$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $45^\circ$ . Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của thùng hàng container (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng của các sợi dây cáp đều có cường độ là 1 200 N.



**Lời giải.**

**Câu 29**

Một em nhỏ cân nặng  $m = 25$  kg trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là  $30^\circ$ . Độ lớn của trọng lực  $\vec{P} = m\vec{g}$  tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do  $\vec{g}$  có độ lớn là  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Công  $A$  (J) sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ dịch chuyển  $\vec{d}$  được tính bởi công thức  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ . Hãy tính công sinh bởi trọng lực  $\vec{P}$  khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt. (Làm tròn đến hàng đơn vị)

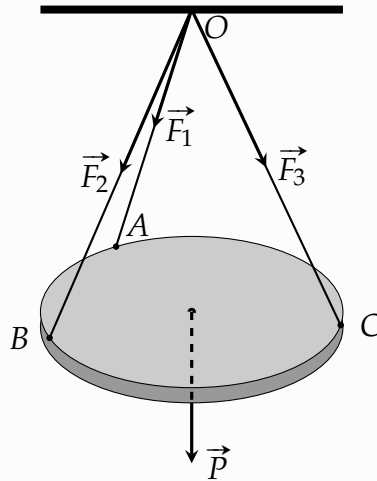


**Lời giải.**

**Câu 30**

Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 25(\text{N})$  (xem hình vẽ). Tính trọng lượng  $P$  của tấm gỗ tròn đó (tính chính xác đến hàng phần mười).



👉 Lời giải.

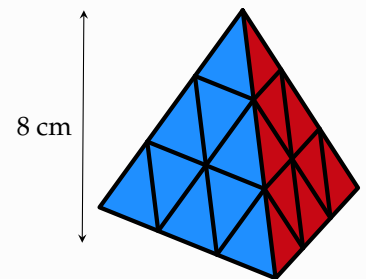
### Câu 31

Ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $120^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn (đơn vị: N) của hợp lực của ba lực trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

👉 Lời giải.

### Câu 32

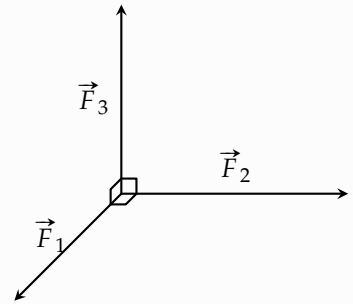
Ta đã biết trọng tâm của tứ diện  $ABCD$  là một điểm  $I$  thỏa mãn  $\vec{AI} = 3\vec{IG}$ , ở đó  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó (đơn vị: cm), biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm.



👉 Lời giải.

**Câu 33**

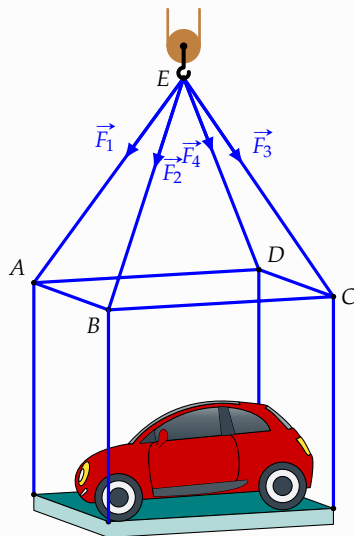
Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N. Hợp lực của ba lực đã cho có độ lớn bao nhiêu Niu-ton (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân)?



**Lời giải.**

**Câu 34**

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $ABCD$  góc  $45^\circ$  (minh họa như hình dưới). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết trọng lượng của ô tô là 9 510 N, trọng lượng của khung sắt là 2 490 N và cường độ các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  là bằng nhau. Tính cường độ lực căng  $\vec{F}_1$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



**Lời giải.**

**Câu 35**

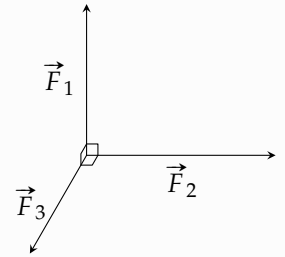
Có ba lực cùng tác động vào một chất điểm. Hai trong ba lực này tạo với nhau một góc  $80^\circ$  và có độ lớn đều bằng 60 N, lực còn lại cùng tạo với hai lực kia một góc  $60^\circ$  và có độ lớn bằng 50 N.

Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (làm tròn đến hàng đơn vị).

👉 Lời giải.

### Câu 36

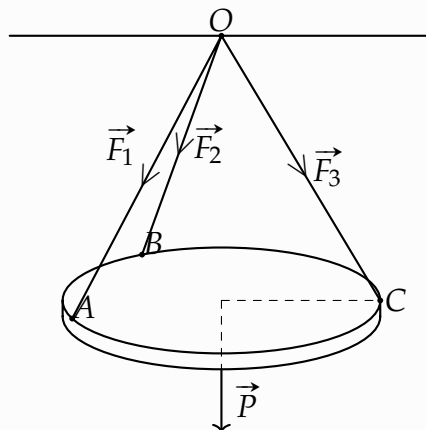
Ba lực  $\vec{F}_1$ ;  $\vec{F}_2$ ;  $\vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N như hình vẽ. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



👉 Lời giải.

### Câu 37

Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trên tấm sắt tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$ . Biết trọng lượng  $P$  của tấm sắt tròn đó bằng  $2025\sqrt{3}$  (N). Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.



👉 Lời giải.

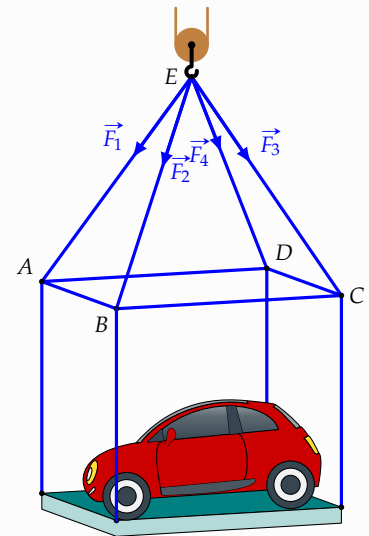
**Câu 38**

Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $120^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 20 N và 15 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 10 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải.**

**Câu 39**

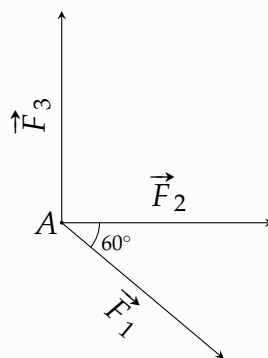
Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N. Giá trị của  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3|$  là bao nhiêu N?



**Lời giải.**

**Câu 40**

Một chất điểm  $A$  nằm trên mặt phẳng nằm ngang  $(\alpha)$ , chịu tác động bởi ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có giá nằm trong  $(\alpha)$  và  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 60^\circ$ , còn lực  $\vec{F}_3$  có giá vuông góc với  $(\alpha)$  và hướng lên trên (tham khảo hình vẽ).



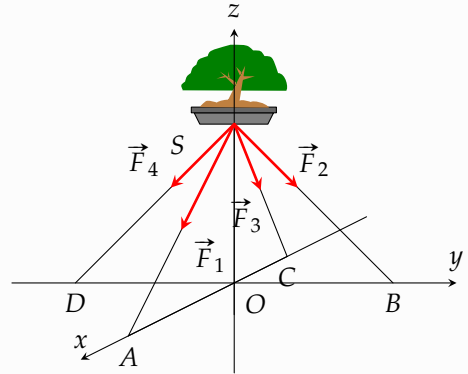
Biết rằng độ lớn các lực đó lần lượt là 10 N, 15 N, 20 N. Xác định hợp lực tác động lên chất điểm  $A$  của các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần

chục).

👉 Lời giải.

### Câu 41

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0;0;20)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(20;0;0)$ ,  $B(0;20;0)$ ,  $C(-20;0;0)$ ,  $D(0;-20;0)$  (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40 N và được phân bố thành bốn lực có độ lớn bằng nhau như hình vẽ. Độ lớn của lực  $\vec{F} = \vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 + 3\vec{F}_3 + 4\vec{F}_4$  bằng bao nhiêu N (làm tròn đến hàng đơn vị)? (Mỗi 1 cm biểu diễn lực có độ lớn 1N)



👉 Lời giải.

### Câu 42

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $A'D$  và  $C'D'$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vec-tơ  $\vec{MN}$  và  $\vec{A'B}$ . Số đo của góc  $\varphi$  bằng bao nhiêu độ.

👉 Lời giải.

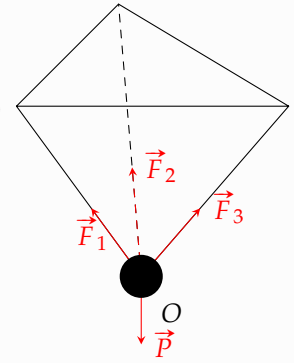
### Câu 43

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $A'D'$  và  $C'D'$ . Tích vô hướng  $\vec{MN} \cdot \vec{C'B} = na^2$  ( $n$  là số thập phân). Giá trị của  $n$  bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

**Câu 44**

Treo một vật nặng có trọng lượng 30 N bởi ba sợi dây giống hệt nhau, các sợi dây đôi một tạo với nhau một góc  $90^\circ$  như hình bên. Gọi  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt là các lực căng của ba sợi dây nói trên. Độ lớn của lực  $\vec{F}_1$  bằng bao nhiêu Niutơn? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.)



**Lời giải.**

.....

.....

.....

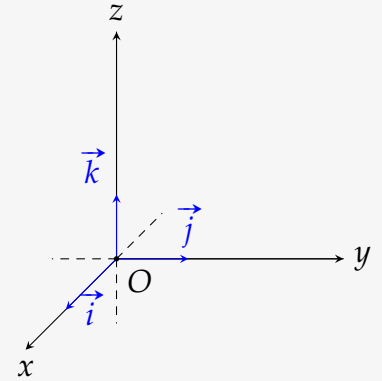
## §2. TỌA ĐỘ CỦA VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1. Hệ tọa độ trong không gian

**Định nghĩa 2.1.** Trong không gian, ba trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  đôi một vuông góc với nhau tại gốc  $O$  của mỗi trục. Gọi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

- ☑ Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc  $Oxyz$ , hay đơn giản là hệ tọa độ  $Oxyz$ . Điểm  $O$  được gọi là gốc tọa độ.
- ☑ Các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$  đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- ☑  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$  và  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$



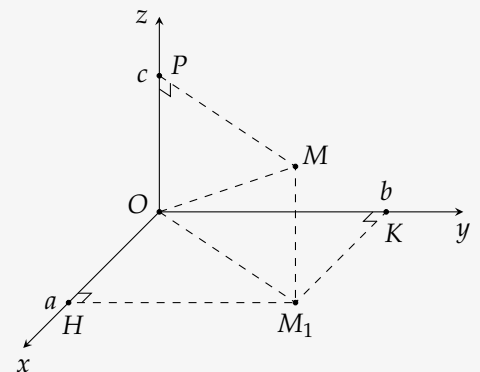
Không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  còn được gọi là không gian  $Oxyz$ .

#### 2. Tọa độ của điểm

**Phương pháp 2.1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M$ . Tọa độ điểm  $M$  được xác định như sau:

- ☑ Xác định hình chiếu  $M_1$  của điểm  $M$  trên mặt phẳng  $Oxy$ . Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm hoành độ  $a$ , tung độ  $b$  của điểm  $M_1$ .
- ☑ Xác định hình chiếu  $P$  của điểm  $M$  trên trục cao  $Oz$ , điểm  $P$  ứng với số  $c$  trên trục  $Oz$ . Số  $c$  là cao độ của điểm  $M$ .

Bộ số  $(a; b; c)$  là tọa độ của điểm  $M$  trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , kí hiệu là  $M(a; b; c)$ .



#### 3. Tọa độ của vectơ

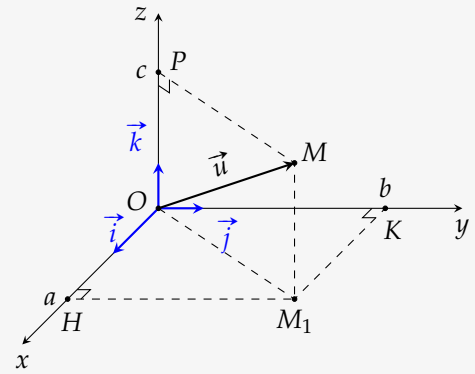
**Phương pháp 2.2.** Trong không gian  $Oxyz$

- ☑ Toạ độ của điểm  $M$  cũng là toạ độ của vectơ  $\overrightarrow{OM}$ .
- ☑ Cho  $\vec{u}$ . Dựng điểm  $M(a; b; c)$  thỏa  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  thì toạ độ của điểm  $M$  là toạ độ của  $\vec{u}$ . Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



⚠ Toạ độ các véc tơ đơn vị lần lượt là:  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ ,  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**

**Dạng 1** Toạ độ điểm, toạ độ véc tơ

Khi xác định toạ độ điểm, toạ độ véc tơ ta chú ý các kết quả sau:

- ①  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c)$ .
- ②  $\vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$
- ③  $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$  thì  $M(a; b; c)$ .
- ④  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ .
- ⑤ Chiếu điểm  $M(a; b; c)$  lên mặt phẳng toạ độ (hoặc trục toạ độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn:  $M(1; 2; 3)$  chiếu lên  $(Oxy)$  thì  $z = 0$ . Suy ra hình chiếu là  $M_1(1; 2; 0)$ .
- ⑥ Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

**Ví dụ 1**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(3; -2; -1)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các mặt phẳng toạ độ  $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ . Tìm toạ độ của các điểm  $A_1, A_2, A_3$ .

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Ví dụ 2**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-2; 3; 4)$ . Gọi  $H, K, P$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Tìm toạ độ của các điểm  $H, K, P$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Ví dụ 3**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1; 1; -2)$ ,  $B(4; 3; 1)$  và  $C(-1; -2; 2)$ .

- a) Tìm tọa độ của véctơ  $\overrightarrow{AB}$ .
- b) Tìm tọa độ của điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Ví dụ 4**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $A(4; 6; -5)$ ,  $B(5; 7; -4)$ ,  $C(5; 6; -4)$ ,  $D'(2; 0; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ . Tọa độ của véctơ  $\vec{a}$  là

- Ⓐ  $(2; -3; -5)$ .      Ⓑ  $(2; 3; -5)$ .      Ⓒ  $(-2; 3; 5)$ .      Ⓓ  $(2; 3; 5)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 2**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho véctơ  $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$ . Tọa độ của véctơ  $\vec{u}$  là

- Ⓐ  $(3; -1; 4)$ .      Ⓑ  $(3; 4; -1)$ .      Ⓒ  $(4; -1; 3)$ .      Ⓓ  $(4; 3; -1)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 3**

Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây thuộc trục  $Oz$ ?

- A  $M(1;0;0)$ .     
  B  $M(1;0;2)$ .     
  C  $M(1;2;0)$ .     
  D  $M(0;0;-2)$ .

📌 **Lời giải.**

**Câu 4**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$ . Tọa độ điểm  $M$  là

- A  $M(0;2;1)$ .     
  B  $M(1;2;0)$ .     
  C  $M(2;0;1)$ .     
  D  $M(2;1;0)$ .

📌 **Lời giải.**

**Câu 5**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tọa độ điểm  $A$  là

- A  $(1;0;-2)$ .     
  B  $(0;1;-2)$ .     
  C  $(0;-1;2)$ .     
  D  $(1;-2;0)$ .

📌 **Lời giải.**

**Câu 6**

Trong không gian  $Oxyz$ , xác định tọa độ của điểm  $A$  biết  $A$  nằm trên tia  $Ox$  và  $OA = 2$ .

- A  $A(0;0;2)$ .     
  B  $A(2;2;0)$ .     
  C  $A(0;2;0)$ .     
  D  $A(2;0;0)$ .

📌 **Lời giải.**

**Câu 7**

Trong không gian  $Oxyz$ , xác định tọa độ của điểm  $A$  biết  $A$  nằm trên tia đối của tia  $Oy$  và  $OA = 3$ .

- A  $A(0;3;0)$ .     
  B  $A(0;-3;0)$ .     
  C  $A(0;-9;0)$ .     
  D  $A(3;-3;0)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

### Câu 8

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$  và  $B(2; 1; -4)$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(-1; -2; 6)$ .      Ⓑ  $(3; 0; -2)$ .      Ⓒ  $(1; 0; -6)$ .      Ⓓ  $(1; 2; -6)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

### Câu 9

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; -2)$ ,  $B(3; -2; 4)$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(2; 5; 6)$ .      Ⓑ  $(4; 1; 2)$ .      Ⓒ  $(2; -5; 6)$ .      Ⓓ  $(-2; 5; 6)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

### Câu 10

Cho hai điểm  $A, B$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$  và  $\overrightarrow{OB} = (5; 2; -1)$ . Tìm tọa độ véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ .

- Ⓐ  $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$ .      Ⓑ  $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -4)$ .      Ⓒ  $\overrightarrow{AB} = (7; 1; 2)$ .      Ⓓ  $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 4)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

### Câu 11

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M$  và  $N$  biết  $M(2; 1; -1)$  và  $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; -3)$ . Tọa độ  $N$  là

- Ⓐ  $N(1; -3; -4)$ .      Ⓑ  $N(1; 3; -4)$ .      Ⓒ  $N(-1; 3; -4)$ .      Ⓓ  $N(1; 3; 4)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 12**

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; -4; 5)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  là điểm

- A  $M(3; 0; 0)$ .     
  B  $M(0; -4; 5)$ .     
  C  $M(0; 0; 5)$ .     
  D  $M(3; 0; 5)$ .

**Lời giải.**

**Câu 13**

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(1; 2; 3)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  là điểm

- A  $M(0; 0; 3)$ .     
  B  $N(1; 2; 0)$ .     
  C  $Q(0; 2; 0)$ .     
  D  $P(1; 0; 0)$ .

**Lời giải.**

**Câu 14**

Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 1; -3)$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là

- A  $(2; 0; 0)$ .     
  B  $(2; 1; 0)$ .     
  C  $(0; 1; -3)$ .     
  D  $(2; 0; -3)$ .

**Lời giải.**

**Câu 15**

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 2; 1)$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là

- A  $(0; 2; 1)$ .     
  B  $(0; 2; 0)$ .     
  C  $(3; 0; 0)$ .     
  D  $(0; 0; 1)$ .

**Lời giải.**

**Câu 16**

Hình chiếu của điểm  $M(2; 3; -2)$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là

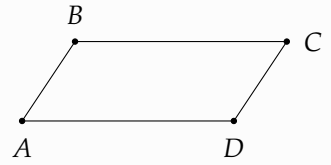
- A  $(2; 0; 0)$ .     
  B  $(0; 3; 0)$ .     
  C  $(0; 0; -2)$ .     
  D  $(2; 0; -2)$ .

**Lời giải.**

## Câu 17

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  với  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(3; 0; -1)$ ,  $C(6; 5; 0)$ . Tọa độ đỉnh  $D$  là

- A  $D(11; 2; 2)$ .                       B  $D(1; 8; 2)$ .  
 C  $D(11; 2; -2)$ .                       D  $D(1; 8; -2)$ .

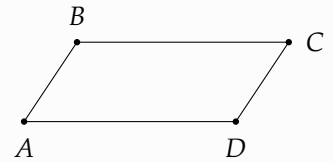


👉 Lời giải.

## Câu 18

Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(-3; 1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

- A  $D(4; 2; 9)$ .                       B  $D(-2; 4; -5)$ .  
 C  $D(6; 2; -3)$ .                       D  $(-4; -2; 9)$ .

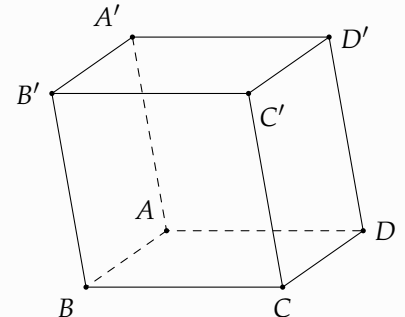


👉 Lời giải.

## Câu 19

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ ,  $C'(4; 5; -5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$  của hình hộp.

- A  $C(2; 0; 2)$ .                       B  $C(2; 0; 2)$ .  
 C  $C(2; 0; 2)$ .                       D  $C(2; 0; 2)$ .



👉 Lời giải.

**Câu 20**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1;0;1)$ ,  $B(2;1;2)$ ,  $D(1;-1;1)$ ,  $C'(4;5;-5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A'$  của hình hộp.

- A  $A'(-1;-5;8)$ .    
  B  $A'(-1;-5;8)$ .    
  C  $A'(-1;-5;8)$ .    
  D  $A'(-1;-5;8)$ .

**Lời giải.**

**Câu 21**

Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $B(-4, 1, -2)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{OB}$ .

- A  $(-4, 1, -2)$ .    
  B  $(4, -1, 2)$ .    
  C  $(-4, 1, 0)$ .    
  D  $(-4, 0, -2)$ .

**Lời giải.**

**Câu 22**

Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho véc-tơ  $\vec{c} = (4, 3, -1)$  và điểm  $B$ . Biết  $\vec{OB} = \vec{c}$ . Tìm tọa độ của điểm  $B$ .

- A  $(0, 3, -1)$ .    
  B  $(4, 3, -1)$ .    
  C  $(-4, -3, 1)$ .    
  D  $(4, 0, -1)$ .

**Lời giải.**

**Câu 23**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ . Tọa độ của véc-tơ  $\vec{u}$  là bao nhiêu?

- A  $(2, -3, -1)$ .    
  B  $(-1, -3, -1)$ .    
  C  $(-1, 2, -3)$ .    
  D  $(-3, 2, -1)$ .

**Lời giải.**

**Câu 24**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $A = (3, -3, 3)$  và  $B = (4, -1, -1)$ . Tọa độ của véc-tơ  $\vec{AB}$ .

- Ⓐ  $(-7, 2, -4)$ .      Ⓑ  $(10, -5, 2)$ .      Ⓒ  $(-1, -2, 4)$ .      Ⓓ  $(1, 2, -4)$ .

👉 Lời giải.

### Câu 25

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A = (-3, -4, -4)$ ,  $B = (2, 2, 0)$  và điểm  $C = (3, 4, -1)$ . Tọa độ điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình bình hành.

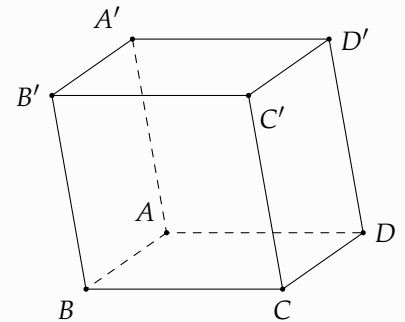
- Ⓐ  $(-8, -10, -3)$ .      Ⓑ  $(2, 2, -5)$ .      Ⓒ  $(4, 6, 3)$ .      Ⓓ  $(-2, -2, -5)$ .

👉 Lời giải.

### Câu 26

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1;0;1)$ ,  $B(2;1;2)$ ,  $D(1;-1;1)$ ,  $C'(4;5;-5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $D'$  của hình hộp.

- Ⓐ  $D'(-1; -6; 8)$ .      Ⓑ  $D'(-1; -6; 8)$ .  
 Ⓒ  $D'(-1; -6; 8)$ .      Ⓓ  $D'(-1; -6; 8)$ .



👉 Lời giải.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

### Câu 27

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$  và  $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$ , với  $m, n$  là tham số.

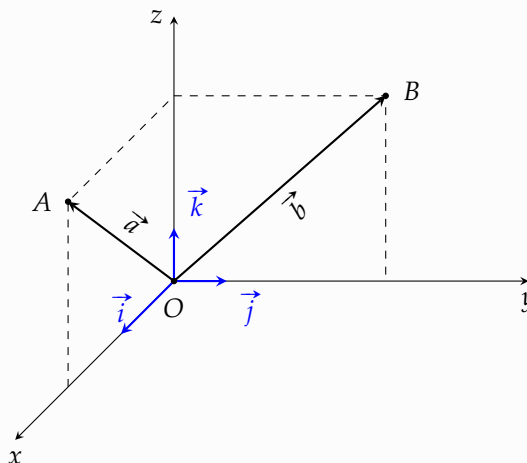
- a) Tọa độ  $\vec{a} = (1; 3; -4)$ .  
 b) Dựng điểm  $A$  thỏa  $\vec{OA} = \vec{a}$  thì  $A(1; -4; 3)$ .  
 c) Tồn tại giá trị của  $m$  và  $n$  để  $\vec{b} = \vec{0}$ .  
 d) Nếu  $\vec{a} = \vec{b}$  thì  $m + n = 9$ .

👉 Lời giải.

**Câu 28**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 2; 0)$ ,  $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ . Dụng  $\vec{OA} = \vec{a}$  và  $\vec{OB} = \vec{b}$ .

- a)  $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ .
- b) Tọa độ  $\vec{b} = (0; 2; 2)$ .
- c) Tọa độ  $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$ .
- d) Góc  $\widehat{AOB} = 45^\circ$ .

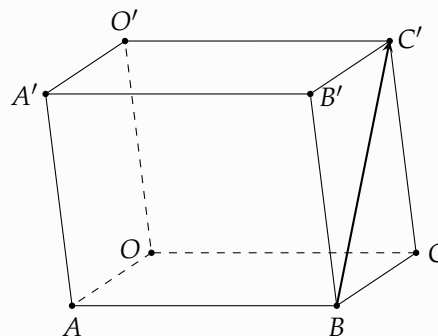


**Lời giải.**

**Câu 29**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $OABC.O'A'B'C'$  có  $A(1; 1; -1)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $OA'O'$  và  $CB'C'$ .

- a) Tọa độ điểm  $C'$  là  $(2; -3; 6)$ .
- b) Tọa độ điểm  $O'$  là  $(3; -5; 5)$ .
- c) Tọa độ véc tơ  $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$ .
- d) Tọa độ véc tơ  $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$ .



**Lời giải.**

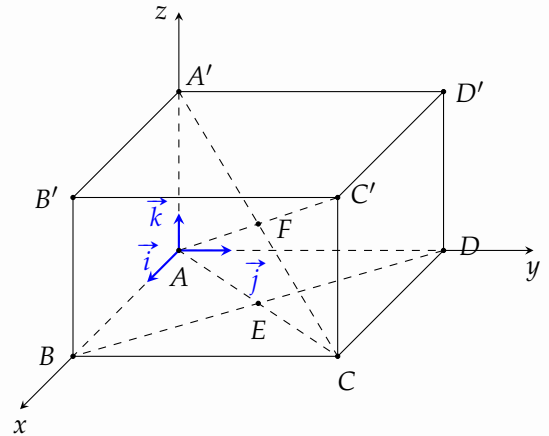
**Dạng 2 Tọa độ hóa một số hình không gian**

- ① Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.
- ② Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.
- ② Tọa độ các điểm đặc biệt:

- $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0).$
- $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0).$
- $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z).$
- $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0).$
- $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z).$
- $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z).$

### Ví dụ 1

Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = AA' = 2, AD = 4$ . Gọi  $E$  là tâm của hình chữ nhật  $ABCD, F$  là trung điểm  $AC'$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với  $A$ ), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm  $E, F$ .



📌 Lời giải.

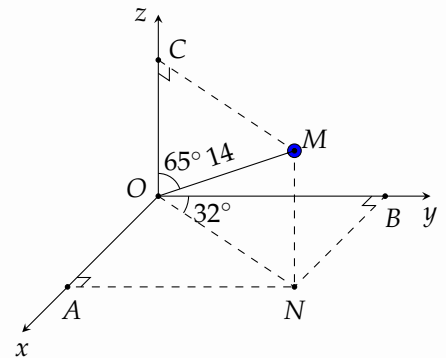
.....

.....

.....

### Ví dụ 2

Một máy bay  $M$  đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như Hình bên, cho biết  $M$  là vị trí của máy bay với  $OM = 14, \widehat{NOB} = 32^\circ, \widehat{MOC} = 65^\circ$ . Tính tọa độ điểm  $M$ .



📌 Lời giải.

.....

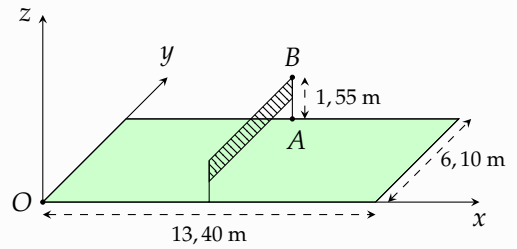
.....

.....

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 30**

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của  $B$ .

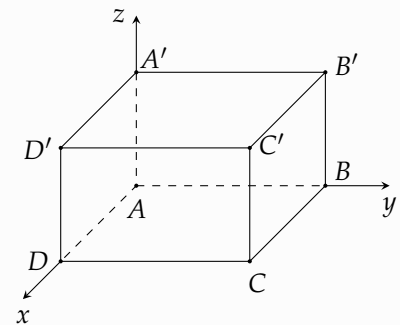


- A  $(6,1; 6,7; 1,55)$ .       B  $(6,7; 6,1; 1,55)$ .  
 C  $(6,1; 0; 1,55)$ .       D  $(0; 6,7; 1,55)$ .

**Lời giải.**

**Câu 31**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ ), tọa độ điểm  $B'$  là

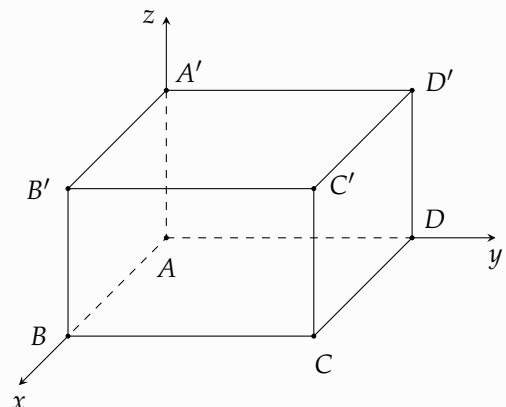


- A  $B(0; 2; 0)$ .       B  $B(2; 2; 2)$ .  
 C  $B(2; 2; 0)$ .       D  $B(2; 0; 2)$ .

**Lời giải.**

**Câu 32**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ ), tọa độ điểm  $C'$  là



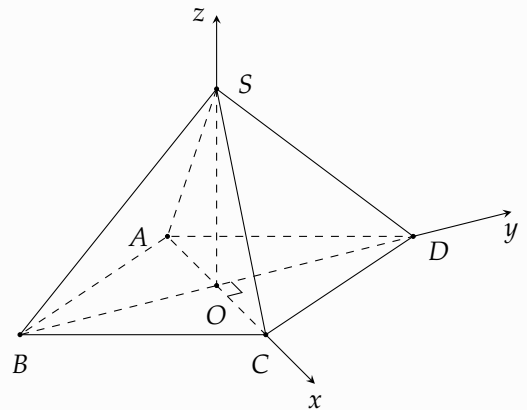
- A  $C'(2; 2; 0)$ .       B  $C'(2; 2; 2)$ .  
 C  $C'(2; 2; 0)$ .       D  $C'(2; 0; 2)$ .

**Lời giải.**

### Câu 33

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a\sqrt{2}$ , cạnh bên bằng  $a\sqrt{5}$ . Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$ ), tọa độ  $\vec{SC}$  là

- A  $\vec{SC} = (2a; 0; -2a)$ .       B  $\vec{SC} = (2a; -a; -2a)$ .  
 C  $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$ .       D  $\vec{SC} = (a; 0; 2a)$ .

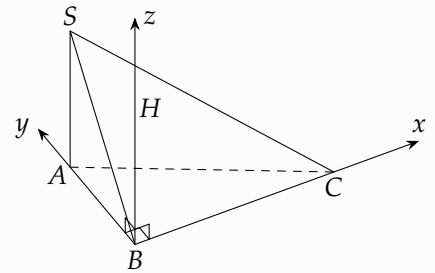


👉 Lời giải.

### Câu 34

Cho tứ diện  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $BC = 3$ ,  $BA = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và có độ dài bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $B$ ), tìm khẳng định **sai**.

- A  $A(0; 2; 0)$ .       B  $B(0; 0; 0)$ .  
 C  $C(0; 0; 3)$ .       D  $S(-2; 2; 2)$ .

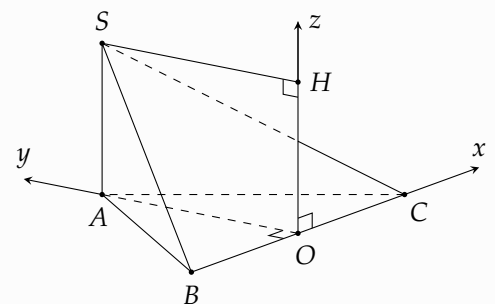


👉 Lời giải.

### Câu 35

Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 1$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với trung điểm của đoạn  $BC$ ), hãy tìm tọa độ điểm  $S$ .

- A  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .       B  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .  
 C  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .       D  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .

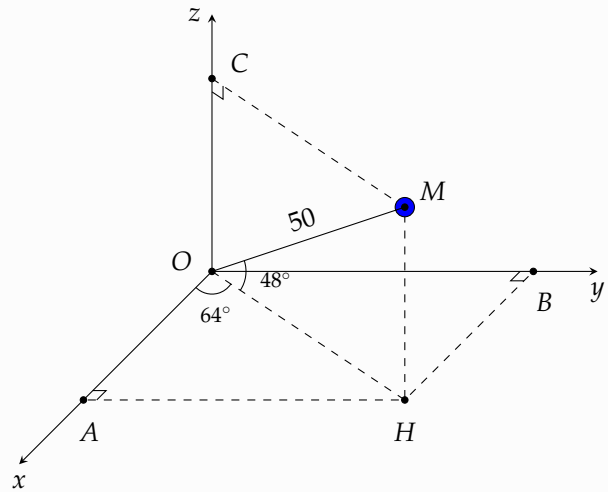


👉 Lời giải.

**Câu 36**

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  như hình bên. Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$ . Tìm tọa độ của điểm  $M$ .

- Ⓐ  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ . Ⓑ  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .  
 Ⓒ  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ . Ⓓ  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .



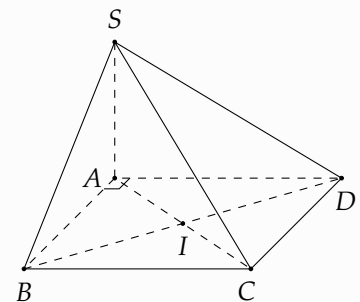
**Lời giải.**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 37**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt đáy và  $SA = 3$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như sau: Gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ , các véc tơ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AS}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  và  $\vec{k}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Tọa độ  $D(0; 2; 0)$ .                      b) Tọa độ  $C(1; 2; 3)$ .  
 c) Tọa độ  $S(2; 0; 0)$ .                      d) Tọa độ  $I(1; 1; 0)$ .

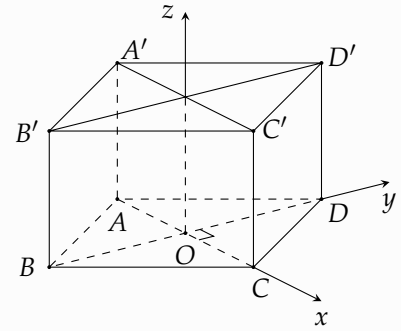


**Lời giải.**

### Câu 38

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$ ), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ  $A(-1; 0; 0)$ .      b)  $\vec{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$ .  
 c) Tọa độ  $D'(0; \sqrt{2}; 2)$ .      d)  $\vec{BD'} = (0; 0; 2)$ .

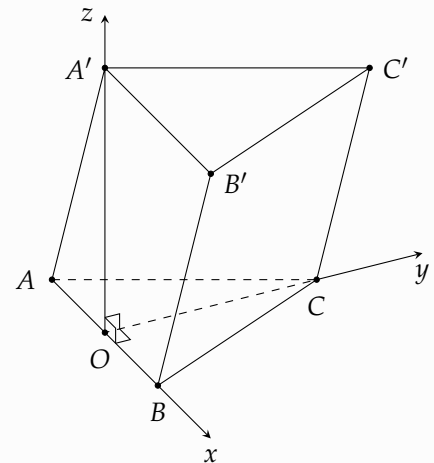


👉 Lời giải.

### Câu 39

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của  $A'$  lên  $(ABC)$  trùng với trung điểm cạnh  $AB$ , góc  $\widehat{A'AO} = 60^\circ$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với trung điểm của đoạn  $BC$ ), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ điểm  $A(-1; 0; 0)$ .  
 b) Tọa độ điểm  $C(0; \sqrt{3}; 0)$ .  
 c) Tọa độ điểm  $A'(0; -1; \sqrt{3})$ .  
 d) Tọa độ điểm  $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$ .



👉 Lời giải.

## PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

### Câu 1

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(-1; 1; 2)$ ,  $C(3; 1; 4)$ . Biết  $D(a; b; c)$  thỏa mãn  $ABCD$  là hình bình hành. Tính  $a^2 + b^2 + c^2$ .

👉 Lời giải.

**Câu 2**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $A(1;0;2)$ ,  $B(3;2;5)$ ,  $C'(11;-3;8)$ . Điểm  $D'(a;b;c)$  sao cho  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp. Tính  $a + b + c$ .

**Lời giải.**

**Câu 3**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;2;2)$ ,  $C(4;-1;2)$ ;  $AB = \frac{15}{4}$ ,  $AC = 5$ . Tìm cao độ của điểm  $D$  là chân đường phân giác trong vẽ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải.**

**Câu 4**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1;0;0)$ ,  $B(2;3;-1)$ ,  $C(0;6;7)$  và gọi  $M$  là điểm di động trên trục  $Oy$ . Tìm tung độ của điểm  $M$  để  $P = |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

**Câu 5**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0;-2;-3)$ ,  $B(-4;-4;1)$ ,  $C(2;-3;3)$ . Giả sử điểm  $M(a;0;c)$  trong mặt phẳng  $Oxz$  thỏa mãn  $P = MA^2 + MB^2 + 2MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $a^2 - c^2$ .

**Lời giải.**

**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

## Câu 1

Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $A(1;2;5)$  lên trục  $Ox$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(0;2;0)$ .      Ⓑ  $(0;0;5)$ .      Ⓒ  $(1;0;0)$ .      Ⓓ  $(0;2;5)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 2

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , tọa độ hình chiếu của điểm  $A(-2; -1; 3)$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là

- Ⓐ  $(0; -1; 0)$ .      Ⓑ  $(-2; 0; 0)$ .      Ⓒ  $(0; -1; 3)$ .      Ⓓ  $(-2; -1; 0)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 3

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1;2;3)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Tọa độ của  $H$  là

- Ⓐ  $H(-1; -2; 3)$ .      Ⓑ  $H(0; 0; 3)$ .      Ⓒ  $H(1; 2; 0)$ .      Ⓓ  $H(1; 2; 0)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 4

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 3; 2)$  và  $\vec{b} = (1; 1; 1)$ . Vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(3; 4; 1)$ .      Ⓑ  $(-1; -2; 3)$ .      Ⓒ  $(3; 5; 1)$ .      Ⓓ  $(1; 2; 3)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 5

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 1; 1)$ . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$ .

- Ⓐ  $(1; 0; 1)$ .      Ⓑ  $(0; 1; 0)$ .      Ⓒ  $(1; 1; 0)$ .      Ⓓ  $(0; 1; 1)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 6**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ . Tọa độ của  $\vec{a}$  là

- Ⓐ  $(-2; -1; -3)$ .      Ⓑ  $(-3; 2; -1)$ .      Ⓒ  $(2; -3; -1)$ .      Ⓓ  $(-1; 2; -3)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 7**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho hai vector  $\vec{a} = (1; 1; -2)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 4)$ . Tìm tọa độ của vector  $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$ .

- Ⓐ  $(5; -1; -10)$ .      Ⓑ  $(0; 3; 0)$ .      Ⓒ  $(-3; 3; 6)$ .      Ⓓ  $(5; -1; 10)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 8**

Cho điểm  $A(1; 3; -1)$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm

- Ⓐ  $M(3; 0; 0)$ .      Ⓑ  $N(0; 3; -1)$ .      Ⓒ  $P(0; 1; 0)$ .      Ⓓ  $Q(0; 0; -1)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 9**

Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $A(1; 2; 5)$  lên mặt  $(Oxz)$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(1; 2; 0)$ .      Ⓑ  $(0; 2; 5)$ .      Ⓒ  $(1; 0; 5)$ .      Ⓓ  $(0; 1; 5)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 10

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$  và  $B(2; 1; -4)$ . Vectơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ

- Ⓐ  $(3; 0; -2)$ .      Ⓑ  $(1; 2; -6)$ .      Ⓒ  $(1; 0; -6)$ .      Ⓓ  $(-1; -2; 6)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 11

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; -2; 3)$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(1; 0; 3)$ .      Ⓑ  $(1; 0; 0)$ .      Ⓒ  $(1; -2; 0)$ .      Ⓓ  $(0; -2; 3)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 12

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ là  $\vec{u} = (2; 1; -1)$  và  $\vec{v} = (1; 3; 1)$ . Tọa độ của vectơ  $(\vec{u} + 2\vec{v})$  tương ứng là

- Ⓐ  $(3; 4; 0)$ .      Ⓑ  $(1; -2; -2)$ .      Ⓒ  $(4; 7; 1)$ .      Ⓓ  $(5; 5; -1)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 13

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; -1; 0)$  và điểm  $B(3; 1; 1)$ . Tọa độ điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$  là

- Ⓐ  $(1; -2; -4)$ .      Ⓑ  $(0; 3; -1)$ .      Ⓒ  $(4; 3; 2)$ .      Ⓓ  $(0; 1; 3)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 14

Trong không gian  $Oxyz$ , cho biểu diễn của vectơ  $\vec{a}$  qua các vectơ đơn vị là  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a}$  là

- A (2; -3; 1).     
  B (1; -3; 2).     
  C (2; 1; -3).     
  D (1; 2; -3).

 Lời giải.

**Câu 15**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$ . Tọa độ điểm  $M$  là

- A  $M(0; 2; 1)$ .     
  B  $M(1; 2; 0)$ .     
  C  $M(2; 1; 0)$ .     
  D  $M(2; 0; 1)$ .

 Lời giải.

**Câu 16**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hình bình hành  $ABCD$  và các đỉnh có tọa độ lần lượt là  $A(3; 1; 2)$ ,  $B(1; 0; 1)$ ,  $C(2; 3; 0)$ . Tọa độ đỉnh  $D$  là

- A  $D(4; 4; 1)$ .     
  B  $D(0; 2; -1)$ .     
  C  $D(1; 3; -1)$ .     
  D  $D(0; 2; 1)$ .

 Lời giải.

**Câu 17**

Trong không gian với hệ tọa độ  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$ . Tính tọa độ vectơ  $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ .

- A  $\vec{u} = (-1; -2; 3)$ .     
  B  $\vec{u} = (-1; 2; 7)$ .     
  C  $\vec{u} = (-1; -2; 3)$ .     
  D  $\vec{u} = (1; 2; 7)$ .

 Lời giải.

**Câu 18**

Trong không gian với hệ tọa độ  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$ . Tính tọa độ vectơ  $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ .

- A  $\vec{u} = (-1; -2; 3)$ .     
  B  $\vec{u} = (-1; 2; 7)$ .     
  C  $\vec{u} = (-1; -6; 3)$ .     
  D  $\vec{u} = (1; 2; 7)$ .

 Lời giải.

## Câu 19

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2;0;0)$ ,  $N(0;-3;0)$ ,  $P(0;0;4)$ . Nếu  $MNPQ$  là hình bình hành thì tọa độ điểm  $Q$  là

- Ⓐ  $(-2;-3;4)$ .      Ⓑ  $(-2;-3;-4)$ .      Ⓒ  $(2;3;4)$ .      Ⓓ  $(3;4;2)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 20

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-4;1;-5)$ ,  $B(2;3;-7)$ ,  $C(3;-2;9)$ . Tọa độ điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình bình hành là

- Ⓐ  $(2;3;-3)$ .      Ⓑ  $(-3;-3;-3)$ .      Ⓒ  $(-3;3;3)$ .      Ⓓ  $(-6;5;-12)$ .

👉 Lời giải.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

## Câu 1

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(0;3;1)$ ,  $C(-3;6;4)$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Véc-tơ đơn vị của trục  $Oy$  là  $\vec{j} = (0;-1;0)$ .  
 b)  $\vec{BC} = (3;-3;-3)$ .  
 c) Hình chiếu của  $C$  trên  $(Oxy)$  có tọa độ là  $(-3;6;0)$ .  
 d) Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Tọa độ của  $M$  là  $(-1;4;2)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 2

Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{OA} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Tọa độ điểm  $A$  là  $(2;5;3)$ .  
 b) Hình chiếu vuông góc của  $A$  lên trục  $Ox$  là  $A'(0;5;0)$ .  
 c) Hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  là  $H(2;0;0)$ .

d) Điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua gốc tọa độ  $O$ . Tọa độ của  $A'$  là  $(-2; -5; -3)$ .

👉 Lời giải.

.....

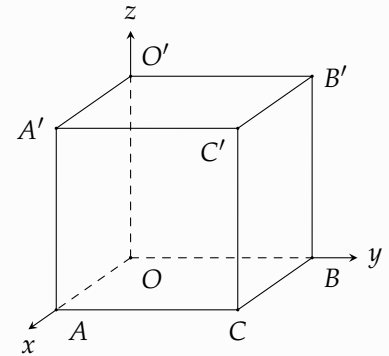
.....

.....

**Câu 3**

Cho hình hộp chữ nhật  $OACB.O'A'C'B'$  có  $OA = 2; OB = 3; OC = 4$  được đặt trong không gian  $Oxyz$  như hình vẽ. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Tọa độ điểm  $A$  là  $(2; 0; 0)$ .
- b) Tọa độ điểm  $C$  là  $(2; 3; 0)$ .
- c) Tọa độ của  $C'$  là  $(2; 3; 4)$ .
- d) Gọi  $I$  là tâm của hình hộp chữ nhật đã cho. Tọa độ  $I$  là  $I(1; 2; 2)$ .



Hình 2.37

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 4**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-2; 1; -3)$ ,  $\vec{b} = (-1; -3; 2)$  và điểm  $A(4; 6; -3)$ .

- a) Tọa độ vectơ  $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$ .
- b) Tọa độ điểm  $B(2; 7; -6)$  thì  $\vec{a} = \vec{AB}$ .
- c) Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương hướng.
- d) Góc giữa vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $120^\circ$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 5**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

- a) Độ dài vectơ  $\vec{a}$  bằng  $\sqrt{2}$ .
- b) Vectơ  $\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{a}$ .
- c) Vectơ  $\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{c}$ .
- d) Tọa độ vectơ  $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$  bằng  $(-2; 4; -1)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

### Câu 6

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  biết rằng các điểm có tọa độ  $A(2; 1; 0)$ ,  $C(0; 3; 0)$ ,  $C'(-1; 2; 1)$ ,  $D'(0; -2; 0)$ .

- Tọa độ các điểm  $A', B'$  là  $A'(1; 0; 1)$ ,  $B'(0; 4; 2)$ .
- Tọa độ các điểm  $B, D$  là  $B(1; 5; 1)$ ,  $D(1; -1; -1)$ .
- Tọa độ vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ .
- Tọa độ vectơ  $\overrightarrow{B'D'}$  là  $\overrightarrow{B'D'} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ .

👉 Lời giải.

### Câu 7

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$  và  $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$ , với  $m, n$  là tham số.

- Tọa độ  $\vec{a} = (1; 3; -4)$ .
- Dựng điểm  $A$  thỏa  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  thì  $A(1; -4; 3)$ .
- Tồn tại giá trị của  $m$  và  $n$  để  $\vec{b} = \vec{0}$ .
- Nếu  $\vec{a} = \vec{b}$  thì  $m + n = 9$ .

👉 Lời giải.

### Câu 8

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $OABC.O'A'B'C'$  có  $A(1; 1; -1)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $\overrightarrow{BC'} = (2; -6; 6)$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $OA'O'$  và  $CB'C'$ .

- Tọa độ điểm  $C'$  là  $(2; -3; 6)$ .
- Tọa độ điểm  $O'$  là  $(3; -5; 5)$ .
- Tọa độ vectơ  $\overrightarrow{AB'}$  là  $(-2; -3; -6)$ .
- Tọa độ vectơ  $\overrightarrow{HK} = (-1; 2; -1)$ .

👉 Lời giải.

### Câu 9

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho các vectơ  $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = (m; 2; m + 1)$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ ?

📌 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

**Câu 1**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3; 1; -2)$ ,  $B(2; -3; 5)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ , tọa độ điểm  $M$  là  $(a; b; c)$ . Khi đó  $a + b + c$  bằng?

📌 Lời giải.

**Câu 2**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(-2; -1; 4)$ . Tìm được tọa độ điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$ . Khi đó  $a + b + c$ ?

📌 Lời giải.

**Câu 3**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m - 1; 2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

📌 Lời giải.

**Câu 4**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 2; 1)$ ,  $B(1; -1; 2)$ ,  $C(1; 2; -1)$ . Điểm  $M(x; y; z)$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ . Tính tổng  $x + y + z$ .

📌 Lời giải.

## Câu 5

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(1; 2; -3)$  và  $C(7; 4; -2)$ . Nếu điểm  $E(x; y; z)$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ . Tính tổng  $P = x + y + z$ .

👉 Lời giải.

## Câu 6

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{a} = (1; -2; 0)$ ,  $\vec{b} = (-1; 1; 2)$ ,  $\vec{c} = (4; 0; 6)$  và  $\vec{u} = \left(-2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . Giả sử  $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ . Tính tổng  $A = m + n + p$ .

👉 Lời giải.

## Câu 7

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(0; -2; -1)$  và  $B(1; -1; 2)$ . Giả sử  $M(a; b; c)$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  và thỏa  $MA = 2MB$ . Khi đó giá trị  $c$  bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

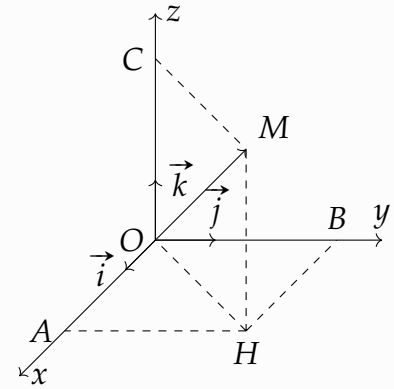
## Câu 8

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $\sqrt{2}$  và chiều cao bằng 3. Giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  trùng với gốc  $O$ . Các véc-tơ  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OS}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Giả sử  $\overrightarrow{AS} = (a; b; c)$ . Tính tổng  $a + b + c$ .

👉 Lời giải.

**Câu 9**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình vẽ bên. Gọi  $H$  là hình chiếu của  $M$  lên  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 6$ ,  $(\vec{i}, \vec{OH}) = 60^\circ$ ,  $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 30^\circ$ . Giả sử  $\vec{OM} = (a; b; c)$ . Tìm  $c$ .



**Lời giải.**

**Câu 10**

Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc  $\vec{a} = (300; 200; 400)$  (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A. Tính tốc độ của máy bay B (làm tròn đến phần nguyên).

**Lời giải.**

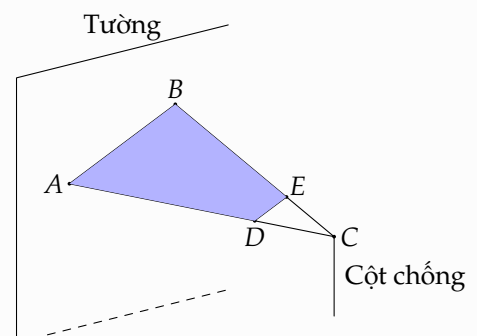
**Câu 11**

Một thiết bị thăm dò đáy biển như hình vẽ được đẩy bởi một lực  $\vec{f} = (5; 4; -2)$  (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời  $\vec{a} = (70; 20; -40)$  (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực  $\vec{f}$ .

**Lời giải.**

**Câu 12**

Sân thượng của một toà nhà nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$  của không gian  $Oxyz$ , mỗi đơn vị trên hệ trục tọa độ tương ứng 0,25 m. Người ta gắn một mái che khung hình tam giác  $ABC$ , hai đỉnh  $A(10; 20; 10)$  và  $B(10; 28; 14)$  trên tường nhà, tại  $C$  dựng một cột đỡ vuông góc với sân thượng. Trên khung  $ABC$  người ta gắn tấm poli chắn nước hình thang  $ABED$  với  $D(7; 17; \frac{15}{2})$  và  $E(7; 19; \frac{17}{2})$ .

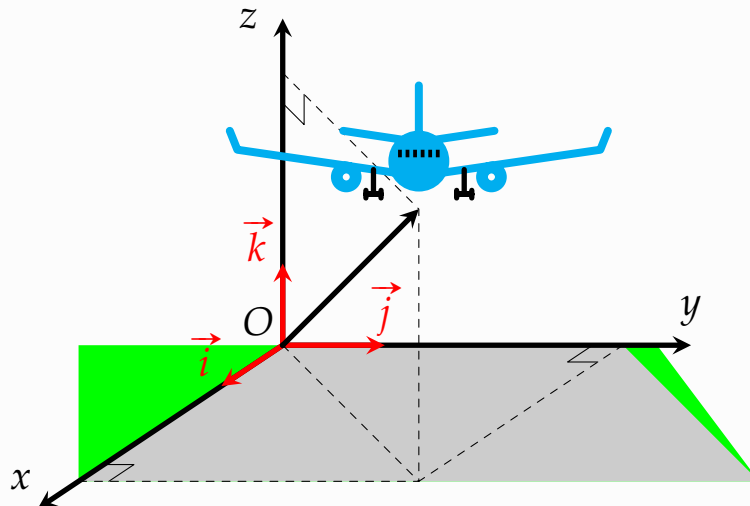


- a) Độ cao của khung tại  $B$  so với mặt sàn sân thượng là 3,5 m.  
 b)  $\vec{AB} = (8; 8; 4)$ .  
 c)  $\vec{AB} = 4\vec{DE}$ .  
 d) Cột đỡ có chiều dài bằng 2,25 m.

👉 Lời giải.

### Câu 13

Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  được gắn như hình vẽ, trong đó gốc  $O$  là vị trí của trạm kiểm soát không lưu và  $M(x; y; z)$  biểu thị vị trí máy bay trên không trung. Tại thời điểm 8 h, máy bay đang ở vị trí  $(50; 120; 4)$  và chuyển động với vận tốc  $\vec{v} = (300; 400; 3)$  (km/h).

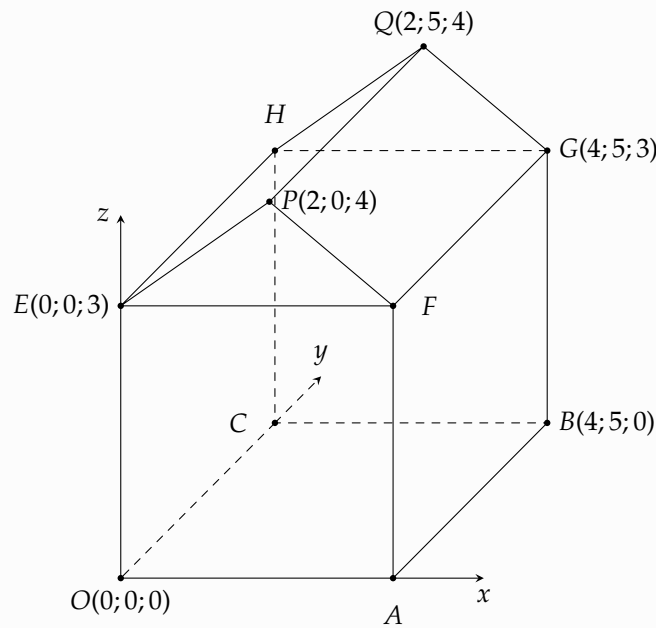


- a) Tại thời điểm 8 h, khoảng cách giữa máy bay và trạm kiểm soát không lưu nói trên xấp xỉ 130 km (sai số không quá 1 km).  
 b) Tại thời điểm 9 h độ cao của máy bay so với mặt đất là 8 km.  
 c) Tại thời điểm 10 h, khoảng cách giữa máy bay và một tháp truyền hình  $F$  có tọa độ  $(1\ 250; 1\ 020; 0)$  xấp xỉ 700 km (sai số không quá 10 km).  
 d) Khi đạt độ cao 10 km, máy bay đổi vận tốc mới là  $\vec{v}_2 = (400; 300; -5)$  để hướng đến sân bay B. Tọa độ của máy bay khi vừa đáp xuống sân bay B là  $(1\ 450; 1\ 520; 0)$ .

👉 Lời giải.

### Câu 14

Hình dưới đây minh họa sơ đồ ngôi nhà trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ . Trong đó, nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



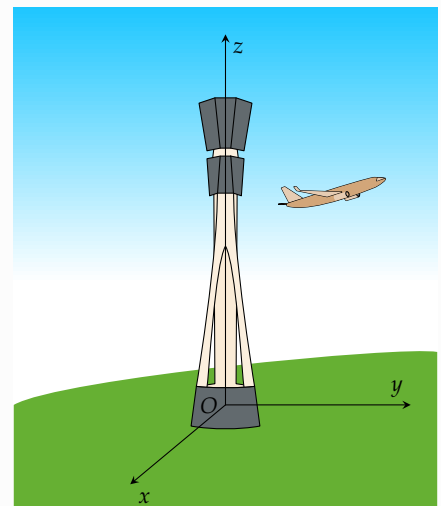
- a) Tọa độ điểm  $F(4;0;3)$ .
- b) Tọa độ vectơ  $\vec{AH} = (4;5;3)$ .
- c)  $\vec{AH} \cdot \vec{AF} = 3$ .
- d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  bằng  $26,6^\circ$  (làm tròn đến hàng phần mười của đơn vị độ).

**Lời giải.**

**Câu 15**

Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất sao cho trục  $Ox$  hướng về phía Tây, trục  $Oy$  hướng về phía Nam, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên phía trên (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí  $A$  cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía Tây và 200 km về phía Nam so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu

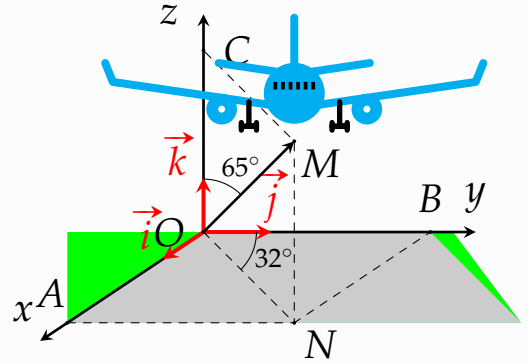
- a) Radar ở vị trí có tọa độ  $(0;0;0)$ .
- b) Vị trí  $A$  có tọa độ  $(300;200;10)$ .
- c) Khoảng cách từ máy bay đến radar là khoảng 360,67 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- d) Radar của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí  $A$ .



**Lời giải.**

### Câu 16

Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ bên, trong đó gốc tọa độ  $O$  là vị trí của trạm kiểm soát không lưu; điểm  $M(x; y; z)$  biểu thị vị trí máy bay trên không trung: độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 km. Tại thời điểm 8 h, máy bay đang ở vị trí  $(50; 120; 4)$  và chuyển động với vận tốc  $\vec{v} = (300; 400; 3)$  (km/h).

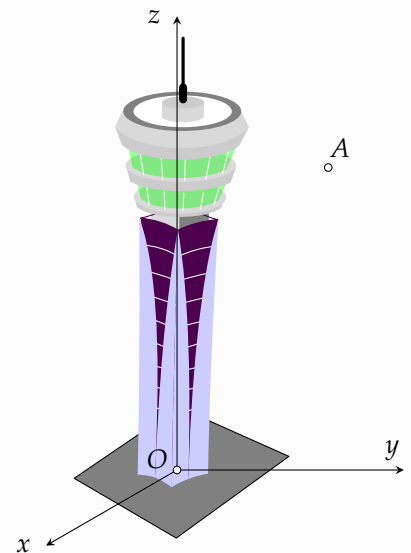


- Tại thời điểm 8h, khoảng cách giữa máy bay và trạm kiểm soát không lưu nói trên xấp xỉ 130 km (sai số không quá 1 km).
- Tại thời điểm 9 h, độ cao của máy bay so với mặt đất là 8 km.
- Tại thời điểm 10 h, khoảng cách giữa máy bay và một tháp truyền hình  $F$  có tọa độ  $(1250; 1020; 0)$  xấp xỉ 700 km (sai số không quá 10 km).
- Khi đạt độ cao 10 km, máy bay đổi vận tốc mới là  $\vec{v}_2 = (400; 300; -5)$  (km/h) để hướng đến sân bay  $B$ . Tọa độ của máy bay khi vừa đáp xuống sân bay  $B$  là  $(1450; 1520; 0)$ .

👉 Lời giải.

### Câu 17

Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 90m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc trùng với chân tháp, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất sao cho trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên phía trên như hình bên (đơn vị mỗi trục tính theo kilomet). Một máy bay tại vị trí  $A$  cách mặt đất 2km, cách 450km về phía tây và cách 150km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.



- Radar ở vị trí có tọa độ  $(0; 0; 90)$ .
- Vị trí  $A$  có tọa độ  $(-450; 150; 20)$ .
- Khoảng cách từ máy bay đến radar là 479,5km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Radar của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí  $A$ .

👉 Lời giải.

**Câu 18**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , có bốn vệ tinh được đặt ở các vị trí  $A(0;4;5)$ ,  $B(0;5;4)$ ,  $C(1;3;3)$ ,  $D(1;-1;3)$ . Điểm  $M(a;b;c)$  trong không gian, biết khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm  $M$  lần lượt là  $AM = 5$ ,  $BM = 5$ ,  $CM = 3$ ,  $DM = 3$ .

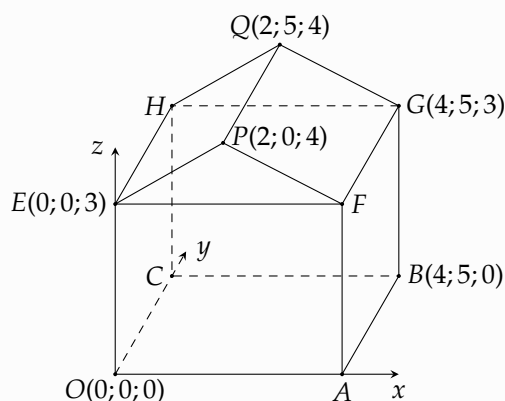
- a)  $a^2 + (b - 4)^2 + (c - 5)^2 = a^2 + (b - 5)^2 + (c - 4)^2 = 25$ .
- b)  $(a - 1)^2 + (b - 3)^2 + (c - 3)^2 = (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + (c - 3)^2 = 9$ .
- c)  $b = c$ .
- d)  $M(1;1;1)$ .

📌 Lời giải.

**Câu 19**

Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

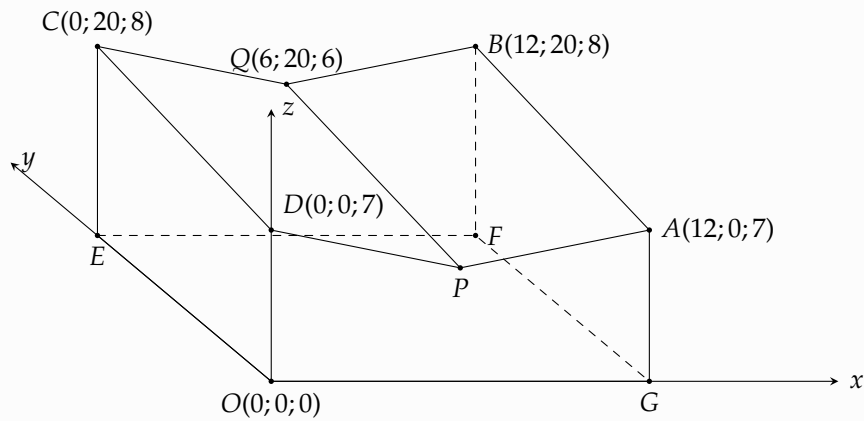
- a) Tọa độ điểm  $F(4;0;3)$ .
- b) Tọa độ vectơ  $\vec{AH} = (4;5;3)$ .
- c)  $\vec{AH} \cdot \vec{AF} = 3$ .
- d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  bằng  $26,6^\circ$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



📌 Lời giải.

**Câu 20**

Hình bên dưới minh họa hình ảnh mái nhà để xe của một trường học trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết các cột của nhà để xe đều được dựng vuông góc với mặt sàn, mặt sàn nhà để xe  $OGFE$  là hình chữ nhật,  $PQ$ ,  $AB$ ,  $CD$  đôi một song song với nhau.

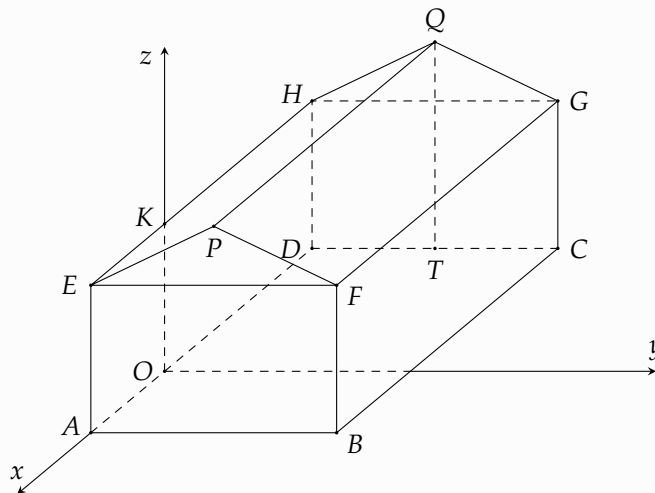


- Điểm  $F$  có tọa độ là  $F(12; 20; 0)$ .
- Diện tích nhà để xe là  $S = 300 \text{ (m}^2\text{)}$ .
- Phần mái chứa 3 điểm  $A, B, Q$  nằm trong mặt phẳng có phương trình  $20x + 3y - 60z + 180 = 0$ .
- Vị trí điểm  $P$  cách mặt sàn nhà xe là 5 m.

**Lời giải.**

### Câu 21

Một kho chứa hàng có dạng hình hộp chữ nhật  $ABCD.EFGH$  và mái che có dạng lăng trụ đứng  $EFP.HGQ$  với đáy  $\triangle EFP$  là tam giác cân đỉnh  $P$  và các điểm  $A; B; E; F; P$  cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi  $T$  là trung điểm của  $DC$ . Các kích thước của kho chứa lần lượt là  $AB = 6 \text{ m}$ ;  $AE = 5 \text{ m}$ ;  $AD = 8 \text{ m}$ ;  $QT = 7 \text{ m}$ . Người ta mô hình hoá nhà kho bằng cách chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm  $O$  thuộc đoạn  $AD$  sao cho  $OA = 2 \text{ m}$  và các trục tọa độ tương ứng như hình vẽ dưới đây. Khi đó:



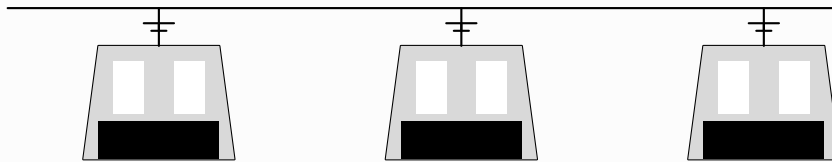
- $\vec{BE} = (-6; 6; 0)$ .
- Tọa độ điểm  $Q$  là  $(-6; 3; 5)$ .

- c) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của  $FG$  và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí  $O$ . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ  $O$  đến  $K$  sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng  $5 + 2\sqrt{10}$  m.
- d) Mái nhà được lợp bằng tôn Hoa Sen, giá tiền mỗi mét vuông tôn là 150 000 đồng. Số tiền cần bỏ ra để mua tôn lợp mái nhà là 8 650 000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các miếng tôn, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

👉 Lời giải.

**Câu 22**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(-20; 12; 0)$ , chuyển động thẳng đều theo đường cáp và cùng chiều với véc-tơ  $\vec{u} = (2; -2; 1)$  với tốc độ là 6 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét); giả sử sau  $t$  (s) kể từ lúc xuất phát ( $t \geq 0$ ), cabin đến điểm  $M$ .



- a) Độ dài đoạn  $AM$  là  $AM = 6t$  (m).
- b) Véc-tơ  $\vec{AM} = (2t; -2t; t)$ .
- c) Tọa độ điểm  $M$  sau  $t$  giây là  $M(-20 + 2t; 12 - 2t; t)$ .
- d) Một người đứng tại điểm  $O$  quan sát cabin chạy trên cáp treo, sau thời gian 3,56 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) thì khoảng cách giữa người quan sát và cabin là gần nhất.

👉 Lời giải.

**Câu 23**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  biết  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(1; 1; 3)$ . Điểm  $H(x_0; y_0; z_0)$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  xuống  $BC$ . Tính giá trị  $T = x_0 + y_0 + z_0$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

👉 Lời giải.

**Câu 24**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-3;0;0)$ ,  $B(0;-4;0)$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác  $OAB$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $IJ$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 25**

Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$ ,  $CC' = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $AC'$  là  $n^\circ$ . Tìm  $n$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 26**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$  và  $C(0;0;1)$ . Lấy điểm  $M$  bất kì trong không gian, xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 27**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1, 3, 4)$ ,  $B(-4; 8; 6)$ . Điểm  $M(a; b; 0)$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  thỏa mãn  $AM + MB$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $2024a + 2025b$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 28**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(-1; 2; 3)$ ,  $B(3; 0; -1)$ ,  $C(1; 4; 7)$ . Giả sử điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  nhỏ nhất. Tính  $MI^2$  với  $I(0; 3; 4)$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 29**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 3\sqrt{17}$ ,  $BC = 3\sqrt{51}$ ,  $SA = 3\sqrt{17}$  và  $SA$  vuông góc với đáy  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SBD$ . Tính độ dài của  $CG$ .

📌 Lời giải.

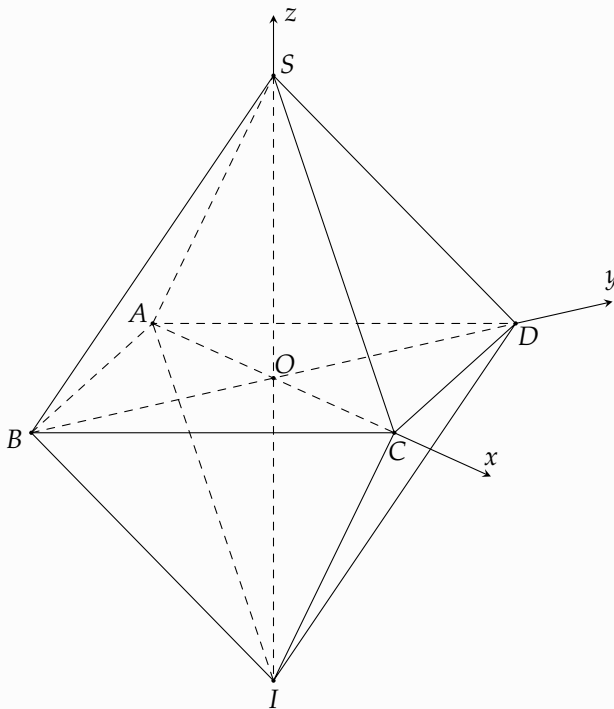
**Câu 30**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình vuông  $ABCD$  với  $B(3; 0; 8)$ ,  $D(-5; -4; 0)$ . Tính bình phương độ dài của vectơ  $\vec{v} = \vec{CA} + \vec{CB}$ .

📌 Lời giải.

**Câu 31**

Một chi tiết trong bộ trang sức được gắn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ sau:



Các hình chóp  $S.ABCD$  và  $I.ABCD$  là các hình chóp đều cạnh 1 cm. Tính số đo góc nhị diện  $[S, CD, I]$  theo đơn vị độ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

👉 Lời giải.

### Câu 32

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (1; 1; -2)$ ,  $\vec{v} = (1; 0; m)$ . Giá trị của  $m$  (làm tròn đến hàng phần mười) để góc giữa  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  bằng  $45^\circ$  là bao nhiêu?

👉 Lời giải.

### Câu 33

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh là  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $B'C'D'$ ,  $I$  là trung điểm của  $AB'$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{IG})$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

👉 Lời giải.

### Câu 34

Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x + y + z - 5 = 0$  và đường thẳng  $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Biết rằng trong mặt phẳng  $(P)$  có hai đường thẳng  $d_1, d_2$  cùng đi qua điểm  $A(3; -1; 0)$  và cùng cách đường thẳng  $d$  một khoảng bằng 3. Tính  $\sin \alpha$  với  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng  $d_1, d_2$  (làm tròn tới hàng phần trăm).

👉 Lời giải.

### Câu 35

Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$  và mặt phẳng  $(Q): 4x - 4y + 3z - 2 = 0$ . Đường thẳng  $\Delta$  song song với mặt phẳng  $(P)$ , có một vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (m; n; 1)$ . Xác định giá trị sin của góc tạo bởi đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(Q)$  khi  $\Delta$  tạo với  $(Q)$  một góc lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

👉 Lời giải.

**Câu 36**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho hình thang  $ABCD$  với các đỉnh  $A(1;2;1)$ ,  $B(2;0;-1)$ ,  $C(6;1;0)$  và  $D\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}\right)$ . Tính diện tích hình thang  $ABCD$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải.**

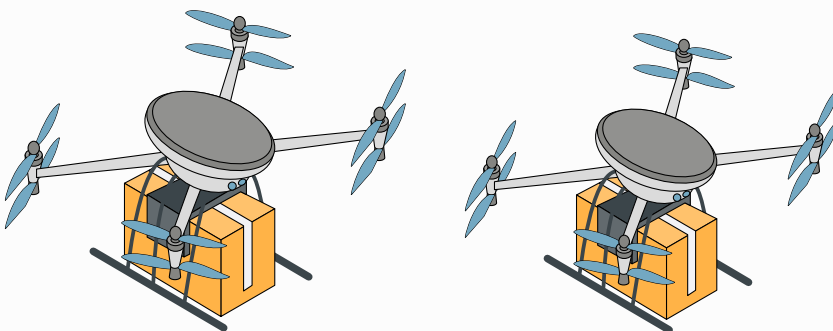
**Câu 37**

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho các điểm  $A(2;0;2)$ ,  $B(0;2;0)$ ,  $C(1;0;3)$ . Gọi  $M$  là điểm trong không gian thỏa mãn  $MA^2 + MC^2 = MB^2$ . Tính  $MP$  với  $P(3;-2;5)$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

**Lời giải.**

**Câu 38**

Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc 20(km) và về phía Tây 10(km), đồng thời cách mặt đất 0,7(km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông 30(km) và về phía Nam 25(km), đồng thời cách mặt đất 1(km). Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



**Lời giải.**

### Câu 39

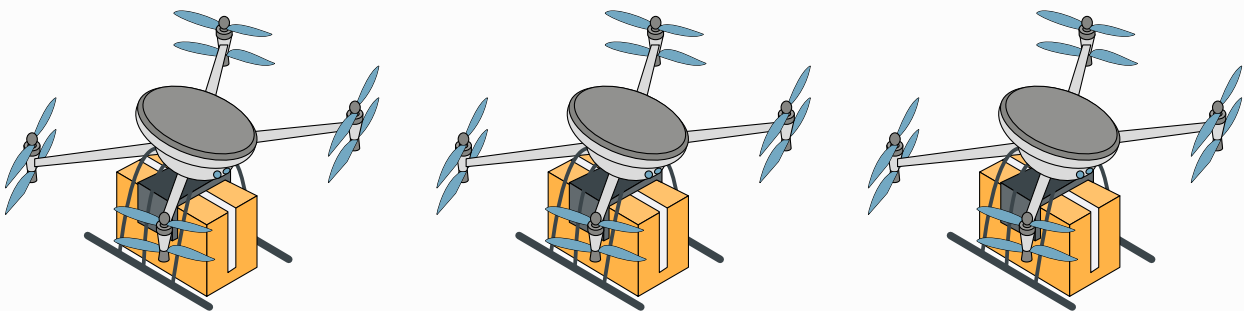
Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông 100(km) và về phía Nam 80(km), đồng thời cách mặt đất 1(km). Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc 70(km) và về phía Tây 60(km), đồng thời cách mặt đất 0,8(km). Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



**Lời giải.**

### Câu 40

Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông 60(km) và về phía Nam 40(km), đồng thời cách mặt đất 2(km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc 80(km) và về phía Tây 50(km), đồng thời cách mặt đất 4(km). Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó. (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)

**Lời giải.**

### Câu 41

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh là 3. Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $B'C'D'$ ,  $I$  là trung điểm của  $AB'$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{IG})$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải.**

**Câu 42**

Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $A(820; 500; 7)$  đến điểm  $B(900; 540; 9)$  trong 8 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 16 phút tiếp theo là  $C(x; y; z)$ . Tính  $x + y + z$ .

👉 Lời giải.

**Câu 43**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 1; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(x; y; -1)$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ . Khi đó tổng  $x + y$  bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

**Câu 44**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; 1; 1)$  và  $B(2; -3; 3)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên trục  $Oz$  và  $M$  cách đều  $A, B$ . Khi đó cao độ của điểm  $M$  bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

**Câu 45**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 2; -2)$  và  $B(-3; -3; 3)$ . Xét điểm  $M$  thay đổi sao cho  $3MA - 2MB = 0$ . Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng  $OM$  (kết quả làm tròn đến hàng phần chục) bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

**Câu 46**

Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, xét các đường thẳng đi qua hai nút lưới (mỗi nút lưới là đỉnh của hình lập phương), người ta đưa ra một cách kiểm tra độ lệch về

phương của hai đường thẳng bằng cách gắn hệ tọa độ  $Oxyz$  vào khung lưới ô vuông và tìm véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó. Giả sử, đường thẳng  $a$  đi qua hai nút lưới  $M(1;1;2)$  và  $N(0;3;0)$ , đường thẳng  $b$  đi qua hai nút lưới  $P(1;0;3)$  và  $Q(3;3;9)$ . Sau khi làm tròn đến hàng đơn vị của độ thì góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  bằng  $n^\circ$  ( $n$  là số tự nhiên). Giá trị của  $n$  bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

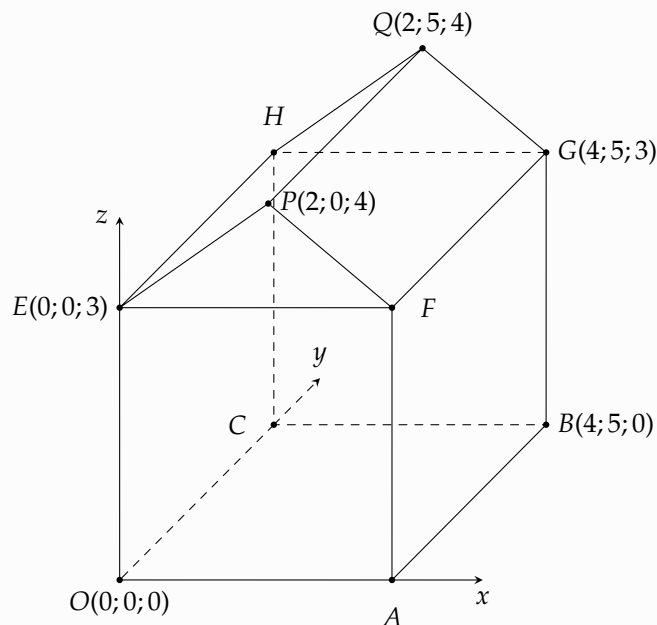
### Câu 47

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;3)$  và  $B(0;0;3)$ . Gọi  $M$  là điểm bất kỳ sao cho góc giữa  $BM$  và trục  $Oz$  bằng  $30^\circ$ . Tính giá trị nhỏ nhất của đoạn  $AM^2$ .

👉 Lời giải.

### Câu 48

Hình 37 minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

👉 Lời giải.

**Câu 49**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{a} = (1; 1; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; 3)$ ,  $\vec{c} = (x; y; z)$  có độ dài bằng 3, vuông góc với hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và tạo với tia  $Oz$  một góc tù. Tính  $x + y + z$ .

**Lời giải.**

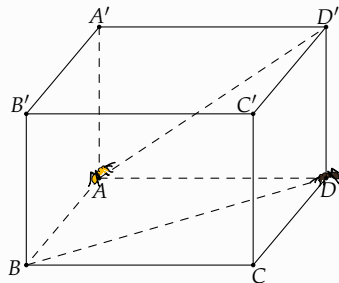
**Câu 50**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  biết  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$  và  $C(1; 1; 3)$ . Gọi  $H(x_H; y_H; z_H)$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  xuống đường thẳng  $BC$ . Tính  $x_H + y_H + z_H$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải.**

**Câu 51**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 20 cm.



Hai chú kiến vàng và đen xuất phát cùng một lúc tại các vị trí  $A$  và  $D$ , kiến vàng đi từ  $A$  đến  $D'$  với vận tốc 2 cm/s và kiến đen đi từ  $D$  đến  $B$  với vận tốc 3 cm/s. Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa hai chú kiến là bao nhiêu cm? (Viết kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**Lời giải.**

**Câu 52**

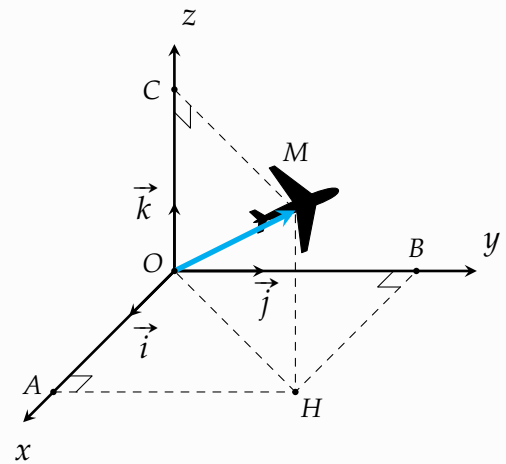
Trong không gian  $Oxyz$  (đơn vị đo là km), bốn chiếc máy bay ở bốn hướng khác nhau khi vừa bay vào vùng phủ sóng của một chiếc radar thì trên radar cùng một lúc báo tín hiệu phát hiện ra mục tiêu. Tại thời điểm radar phát hiện mục tiêu thì 4 chiếc máy bay ở vị trí có tọa độ lần

lượt là  $A(30; 25; 33)$ ,  $B(14; 1; 49)$ ,  $C(40; -29; 1)$ ,  $D(0; 31; 41)$ . Hỏi bán kính vùng phủ sóng của radar là bao nhiêu km?

📌 Lời giải.

### Câu 53

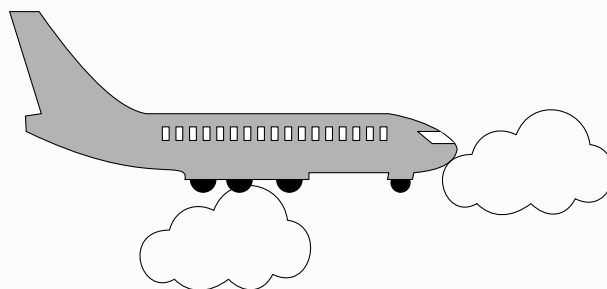
Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  (như hình vẽ). Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M(a; b; c)$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức  $S = a + b + c$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

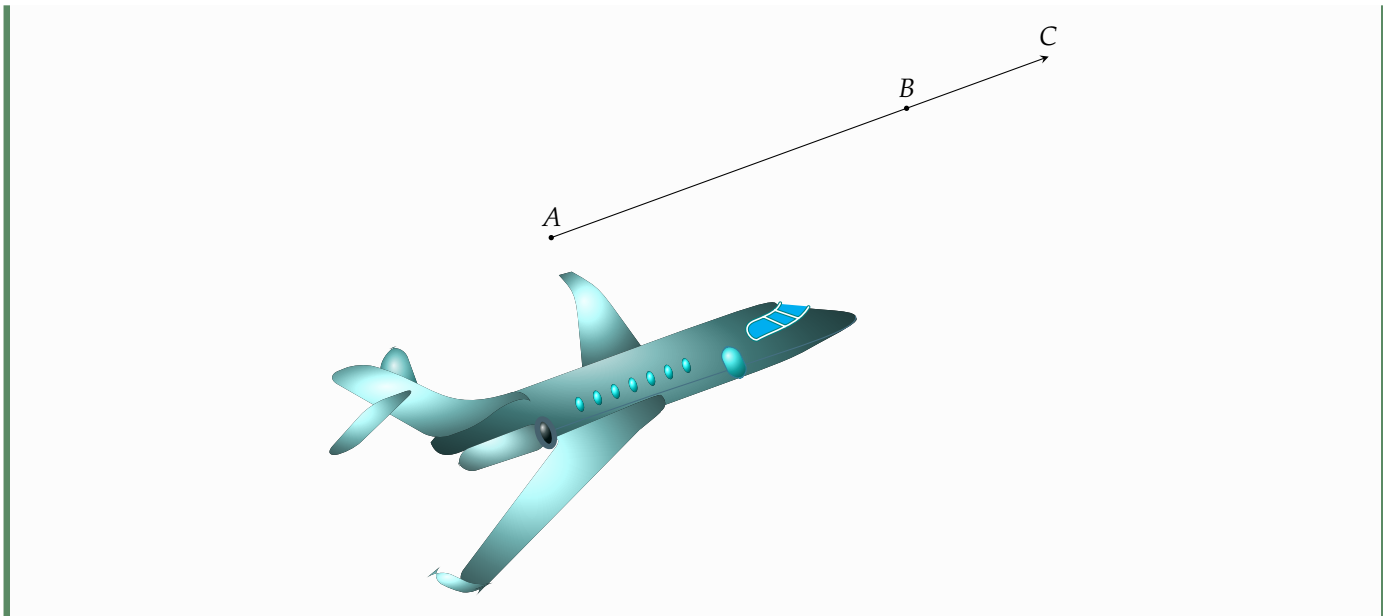


📌 Lời giải.

### Câu 54

Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $A(800; 500; 7)$  đến điểm  $B(940; 550; 8)$  trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ điểm  $C(a; b; c)$  của máy bay sau 10 phút tiếp (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B). Khi đó  $T = a + b + c$  bằng





📌 Lời giải.

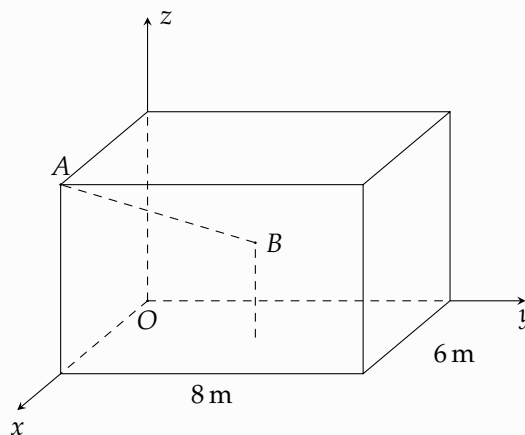
.....

.....

.....

**Câu 55**

Trong một phòng học dạng hình hộp chữ nhật, với chiều dài 8 m, chiều rộng 6 m và chiều cao 3 m. Hai bạn An và Bình làm nhiệm vụ trực nhật, mạng nhện cần quét ở góc ngoài cùng trên trần nhà, An bảo không nên đứng ngay vị trí đó ở nền nhà quét vì bụi sẽ rơi xuống người mình. An lại đố Bình “nếu mình đứng ở giữa nhà quét thì chổi quét nhà dài mấy mét để quét được vị trí mạng nhện, biết đầu cán chổi (vị trí B trên hình vẽ minh họa) cao 1,5 m so với sàn nhà”. Bình trả lời đứng vị trí đó chổi cần dài 5 m cũng không tới. Hỏi Bình đã tính được chổi cần dài bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



📌 Lời giải.

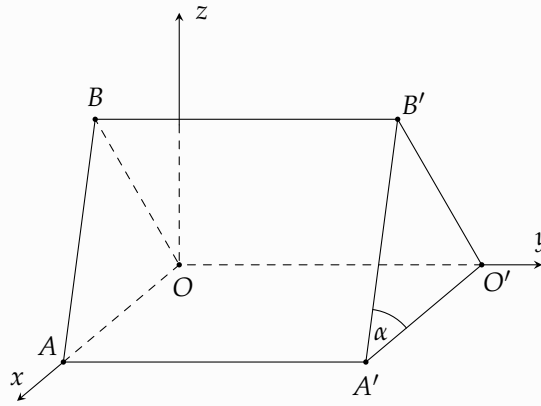
.....

.....

.....

**Câu 56**

Một căn nhà được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác  $OAB.O'A'B'$ . Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  thể hiện như hình bên dưới (đơn vị cm), hai điểm  $A'$  và  $B'$  có tọa độ lần lượt là  $A'(240; 420; 0)$  và  $B'(120; 420; 300)$ .

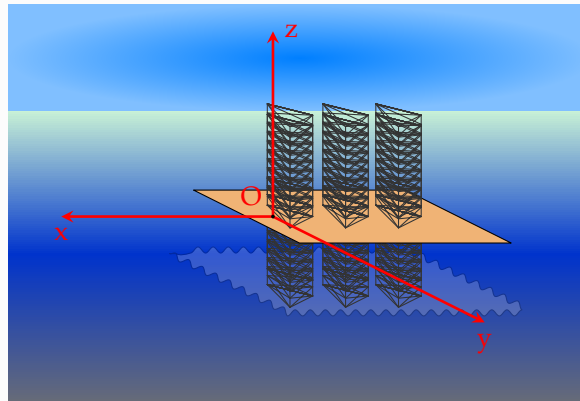


Hãy tính độ lớn của góc  $\alpha$  (đơn vị radian, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

👉 Lời giải.

### Câu 57

Trong không gian, xét hệ tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian  $Oxyz$  lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan và một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là  $(30; 25; -15)$  (tham khảo hình vẽ).

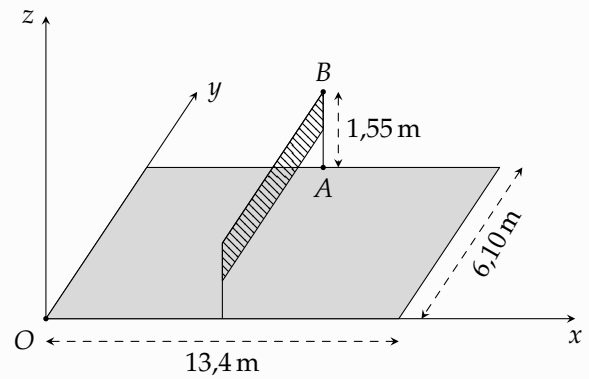


Tính khoảng cách theo đơn vị kilômét từ chiếc ra đa đến chiếc tàu thám hiểm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

👉 Lời giải.

**Câu 58**

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới, gọi  $B(a; b; c)$  là tọa độ điểm  $B$ . Tính  $a - b + c$ .



**Lời giải.**

**Câu 59**

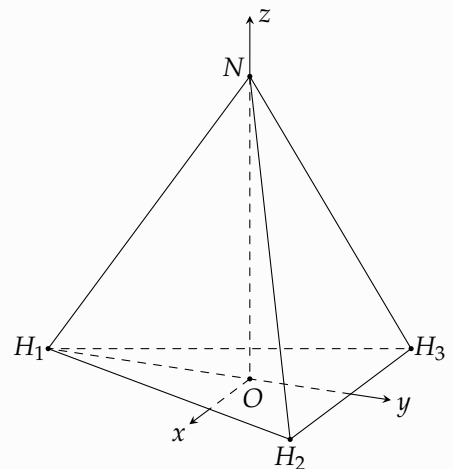
Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2,5 km về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1,5 km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là  $a$  km theo hướng nam và  $b$  km theo hướng tây. Tính tổng  $2a + 3b$ .

**Lời giải.**

**Câu 60**

Trong Hoá học, cấu tạo của phân tử ammoniac ( $NH_3$ ) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen ( $N$ ) và đáy là tam giác  $H_1H_2H_3$  với  $H_1, H_2, H_3$  là vị trí của ba nguyên tử hydrogen ( $H$ ). Góc tạo bởi liên kết  $H - N - H$ , có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối  $N$  với hai trong ba điểm  $H_1, H_2, H_3$  (chẳng hạn  $\widehat{H_1NH_2}$ ), gọi là góc liên kết của phân tử  $NH_3$ . Góc này xấp xỉ  $107^\circ$ .

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho một phân tử  $NH_3$  được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều  $N.H_1H_2H_3$  với  $O$  là tâm của đáy.



Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm  $N$  thuộc trục  $Oz$ , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí  $H_1, H_2, H_3$  trong đó  $H_1(0; -2; 0)$  và  $H_2H_3$  song song với trục  $Ox$  (xem hình bên). Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

📌 Lời giải.

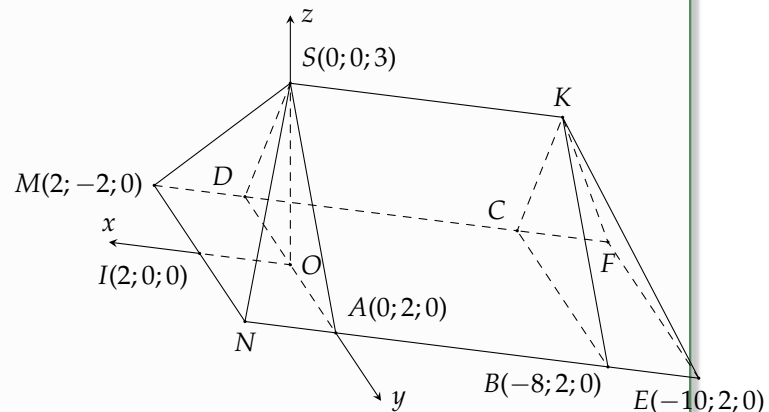
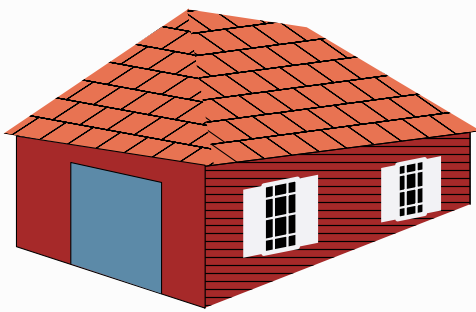
**Câu 61**

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 1,8 km về phía nam và 1,2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,6 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,9 km. Khoảng cách giữa hai khinh khí cầu là bao nhiêu kilômét (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

📌 Lời giải.

**Câu 62**

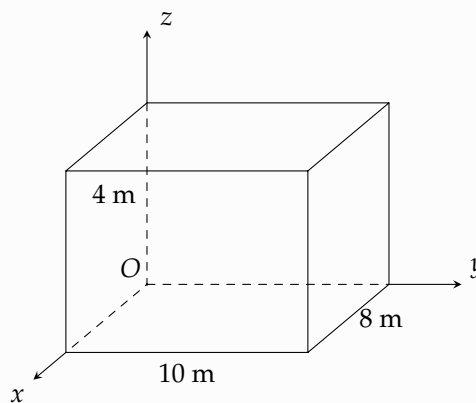
Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện tách thành khối chóp có đáy là hình chữ nhật  $S.ADMN$ ,  $K.BCFE$  và khối lăng trụ đứng tam giác  $SAD.KBC$  được mô tả và gắn trên hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ. Tính thể tích khối đa diện của mái nhà.



📌 Lời giải.

**Câu 63**

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 8 m và chiều cao là 4 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (hình vẽ). Tính khoảng cách từ điểm treo bóng đèn đến góc phòng học (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

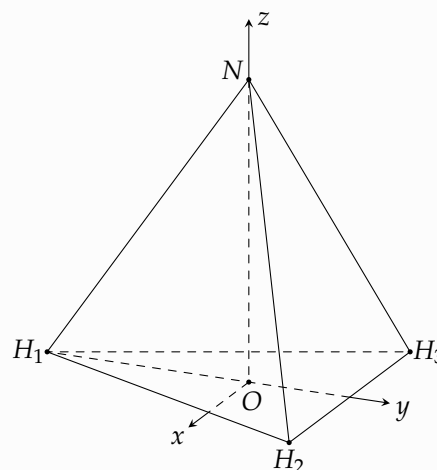


**Lời giải.**

**Câu 64**

Trong hóa học cấu tạo của phân tử ammoniac ( $NH_3$ ) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen ( $N$ ) và đáy là tam giác  $H_1H_2H_3$  với  $H_1, H_2, H_3$  là vị trí của ba nguyên tử hydrogen ( $H$ ). Góc tạo bởi liên kết  $H - N - H$ , có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối  $N$  với hai trong ba điểm  $H_1, H_2, H_3$  (chẳng hạn như  $\widehat{H_1NH_2}$ ), được gọi là góc liên kết của phân tử  $NH_3$ . Góc này xấp xỉ  $107^\circ$ .

Trong không gian  $Oxyz$ , cho một phân tử  $NH_3$  được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều  $N.H_1H_2H_3$  với  $O$  là tâm của đáy.

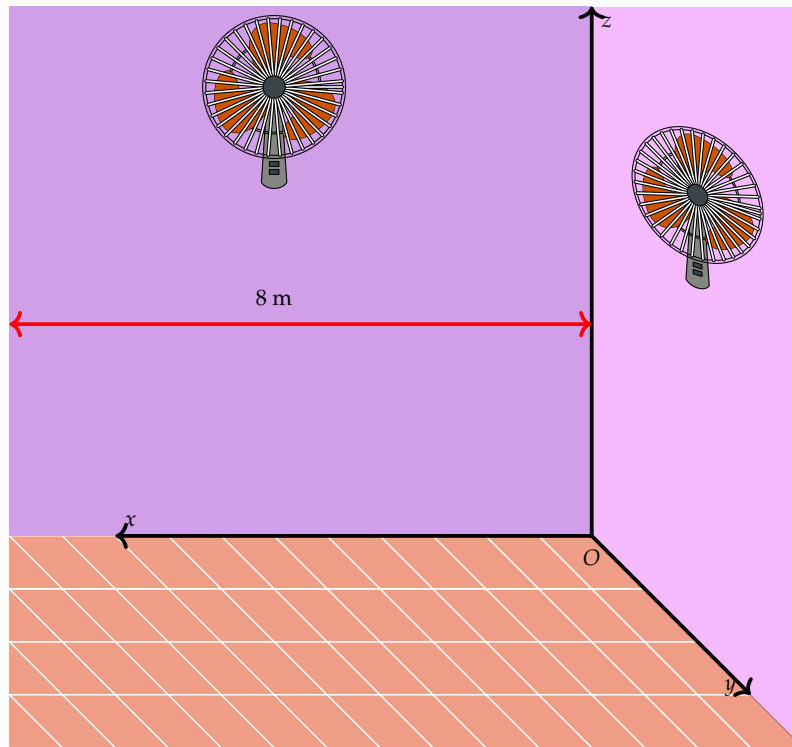


Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm  $N$  thuộc trục  $Oz$ , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí  $H_1, H_2, H_3$  trong đó  $H_1 (0; -\sqrt{3}; 0)$  và  $H_1H_2$  song song với trục  $Ox$ . Tính khoảng cách giữa nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải.**

**Câu 65**

Trong một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 8 m, rộng 6 m và cao 4 m có cây quạt treo tường. Cây quạt  $A$  treo chính giữa bức tường 8 m và cách trần 1 m, cây quạt  $B$  treo chính giữa bức tường 6 m và cách trần 1,5 m. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ bên dưới (đơn vị: mét). Hãy tính độ dài vectơ  $\vec{AB}$  (làm tròn đến hàng đơn vị).



📌 Lời giải.

### Câu 66

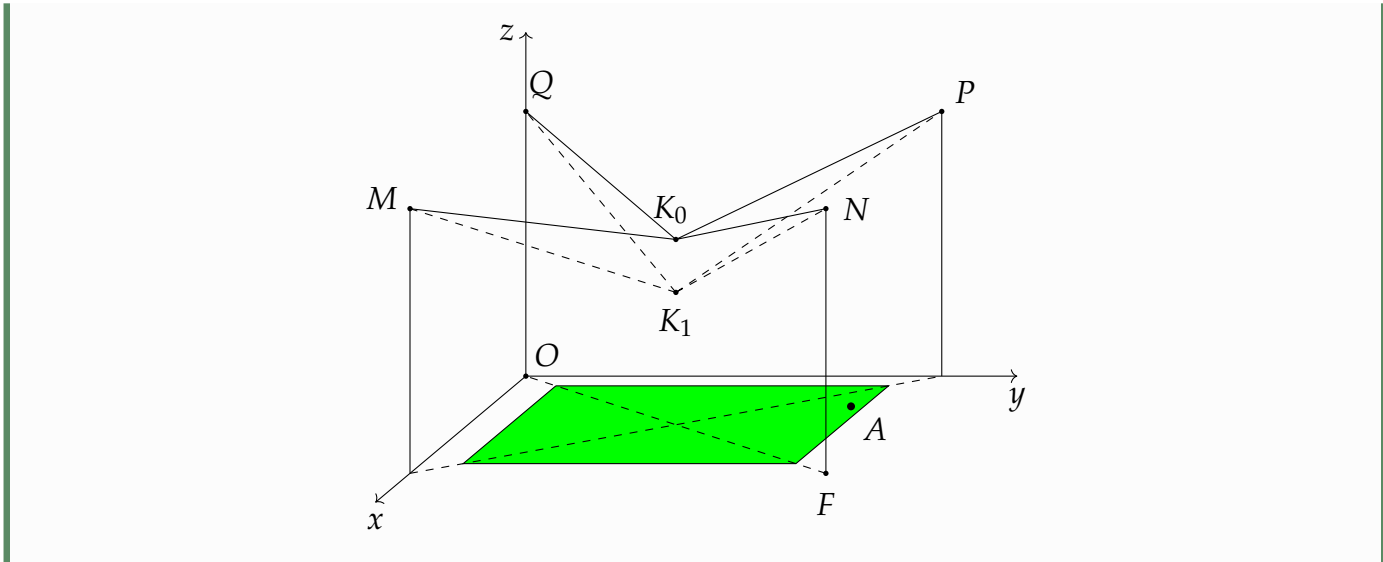
Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau:

Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm  $M(90; 0; 30)$ ,  $N(90; 120; 30)$ ,  $P(0; 120; 30)$ ,  $Q(0; 0; 30)$ .

Giả sử  $K_0$  là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và  $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ . Để theo dõi quả bóng đến vị trí  $A$ , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm  $K_1$  cao độ bằng 19.

Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{K_0K_1} = (a; b; c)$  với  $a, b, c$  là các số thực. Tính  $P = a + b - c$ .



📌 Lời giải.

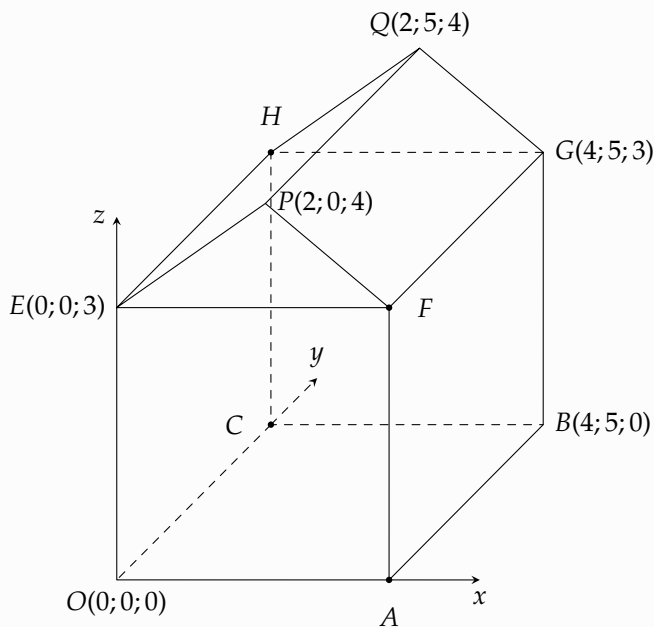
.....

.....

.....

**Câu 67**

Hình minh họa sơ đồ ngôi nhà trong không gian  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết tọa độ của vectơ  $\vec{AH} = (a; b; c)$ . Tìm  $a + b + c$ .



📌 Lời giải.

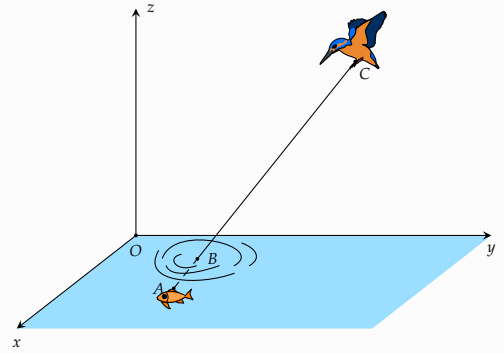
.....

.....

.....

### Câu 68

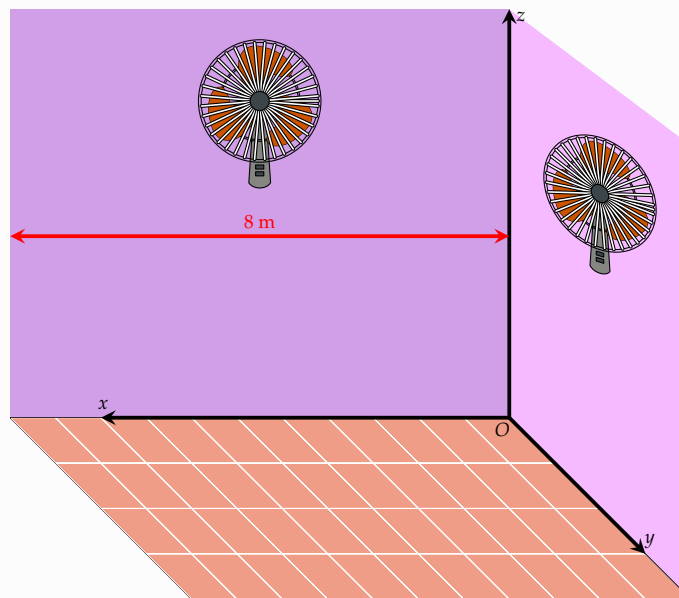
Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  nằm trên mặt nước, mặt phẳng  $(Oxy)$  là mặt nước, trục  $Oz$  hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí  $C$  cách mặt nước 2 m, cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là 3 m và 1 m phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá cách mặt nước 50 cm, cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là 1 m và 1,5 m. Gọi  $B(a; b; 0)$  là điểm lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước. Tính  $T = a + b$ .



### 📌 Lời giải.

### Câu 69

Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 8 m, rộng 6 m và cao 4 m có hai chiếc quạt treo tường. Chiếc quạt  $A$  treo chính giữa bức tường 8 m và cách trần 1 m, chiếc quạt  $B$  treo chính giữa bức tường 6 m và cách trần 1,5 m. (Tham khảo hình vẽ minh họa).



Hỏi khoảng cách giữa hai chiếc quạt  $A$ ,  $B$  cách nhau bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần trăm).

### 📌 Lời giải.

**Câu 70**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(0; 1; -1)$ ,  $B(1; 1; 2)$ ,  $C(1; -1; 0)$ ,  $D(0; 0; 1)$ . Biết rằng có một vectơ  $\vec{v} = (a; b; 2)$  vuông góc với cả hai vectơ  $\vec{BC}$  và  $\vec{BD}$ . Tính  $3a + b$ .

**Lời giải.**

**Câu 71**

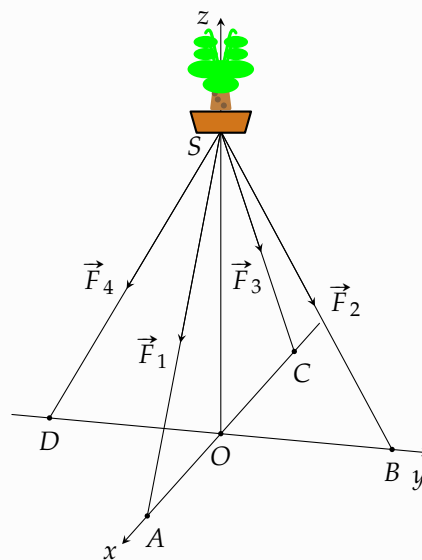
Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $A(800; 500; 7)$  đến điểm  $B(940; 550; 9)$  trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là  $C(x; y; z)$ . Tính  $x + y + z$ .

**Lời giải.**

**Câu 72**

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0; 0; 40)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(40; 0; 0)$ ,  $B(0; 40; 0)$ ,  $C(-40; 0; 0)$ ,  $D(0; -40; 0)$  (đơn vị là cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 60 N và được phân bố thành bốn lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau như hình vẽ.

Tính  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + 3\vec{F}_4|$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



**Lời giải.**

**Câu 73**

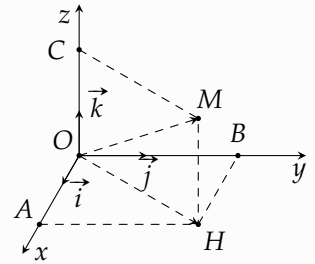
Trong trò chơi mô phỏng bắn súng 3D trong không gian  $Oxyz$ , một xạ thủ đang ngắm với tọa độ khe ngắm và đầu ruồi lần lượt là  $M(3; 3; 1,5)$  và  $N(3; 4; 2,5)$ . Đường ngắm bắn của xạ thủ

xem như đường thẳng  $MN$ . Một quả bóng đặt tại vị trí  $P$  có tọa độ  $(m; 5; n)$  đã bị xạ thủ ngắm trúng. Tính  $m + 2n$ .

👉 Lời giải.

### Câu 74

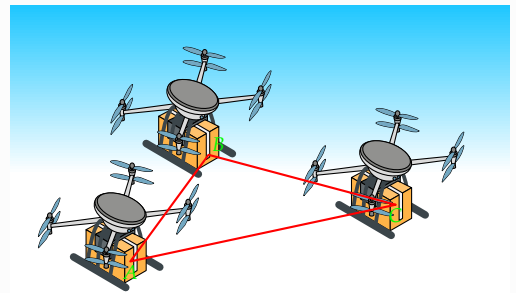
Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  (như hình vẽ). Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M(a; b; c)$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$ . Tìm  $S = a + b + c$  (kết quả làm tròn đến 1 chữ số sau dấu phẩy).



👉 Lời giải.

### Câu 75

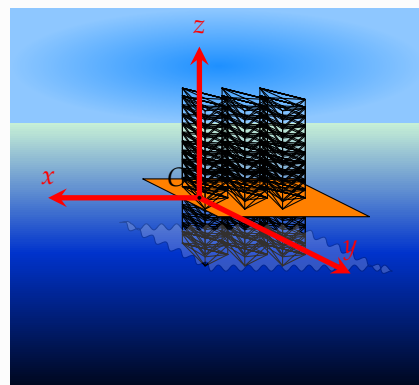
Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian  $Oxyz$ , một đội gồm ba drone giao hàng  $A, B, C$  đang có tọa độ là  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(5; 7; 9)$ ,  $C(9, 11, 4)$ . Tính góc  $\widehat{BAC}$ . (Kết quả tính theo độ và làm tròn đến hàng đơn vị)



👉 Lời giải.

**Câu 76**

Trong không gian, xét hệ tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian  $Oxyz$  lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan và một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là  $(25; 15; -10)$ . Tính khoảng cách theo đơn vị kilômét từ chiếc ra đa và một chiếc tàu thám hiểm. (Kết quả làm tròn lấy một chữ số thập phân)



**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 77**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $CD, SC$ . Tính cô-sin góc tạo bởi  $SB$  và  $MN$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 78**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng 9. Trên  $BD, AD'$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $MD = AN = x$  ( $0 < x < 9\sqrt{2}$ ). Xác định  $x$  để độ dài đoạn  $MN$  nhỏ nhất.

**Lời giải.**

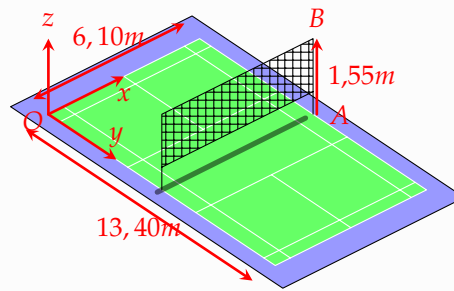
.....

.....

.....

**Câu 79**

Hình vẽ dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục  $Oxyz$  cho sân đó như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới. Gọi  $(x; y; z)$  là tọa độ của vectơ  $\vec{AB}$ . Tính  $x + y + z$ .



🔑 Lời giải.

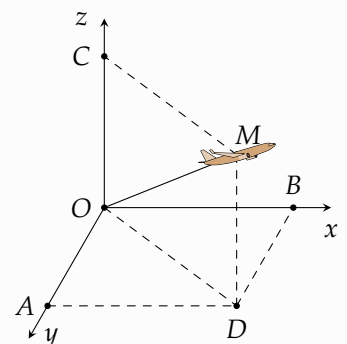
### Câu 80

Giả sử không gian ngoài vũ trụ được xét theo hệ tọa độ  $Oxyz$ , một phi thuyền ở ngoài không gian đang ở vị trí gốc tọa độ. Có 3 vệ tinh nhân tạo lần lượt ở 3 vị trí  $A(2\ 500; 4\ 700; -3\ 600)$ ,  $B(3\ 700; 1\ 100; 2\ 900)$ ,  $C(-5\ 000; -4\ 000; -7\ 100)$ , phi thuyền cần đến vị trí trọng tâm của 3 vệ tinh  $A, B, C$  để nhận và truyền tín hiệu đến các vệ tinh. Quãng đường mà phi thuyền cần di chuyển để đến được trọng tâm của 3 vệ tinh là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)?

🔑 Lời giải.

### Câu 81

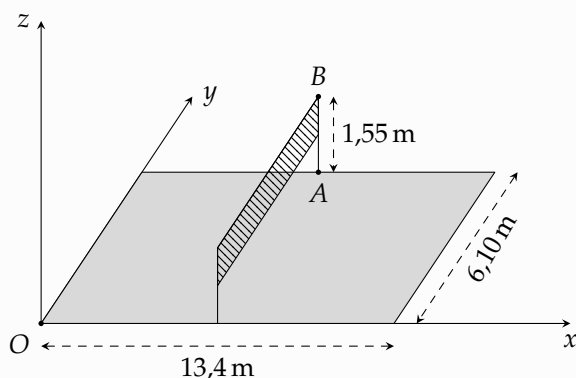
Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên, cho biết  $M$  là vị trí của máy bay,  $N$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $OM = 14$ ,  $\widehat{NOB} = 32^\circ$ ,  $\widehat{MOC} = 65^\circ$ . Tọa độ điểm  $M(a; b; c)$  với  $a, b, c$  được làm tròn đến hàng phần chục. Tính  $a + b + c$ .



🔑 Lời giải.

**Câu 82**

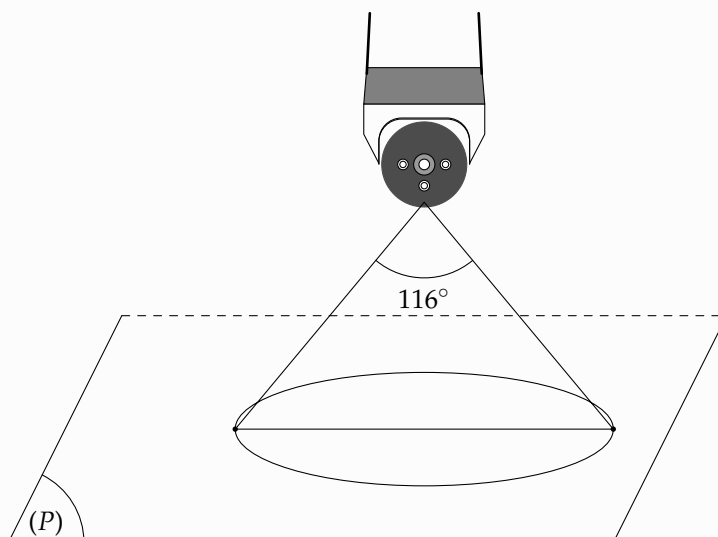
Hình vẽ mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục  $Oxyz$  cho sân như hình (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới. Biết tọa độ của vectơ  $\vec{AB} = (a; b; c)$ . Khi đó  $S = a - b + 2c$  bằng bao nhiêu?



**Lời giải.**

**Câu 83**

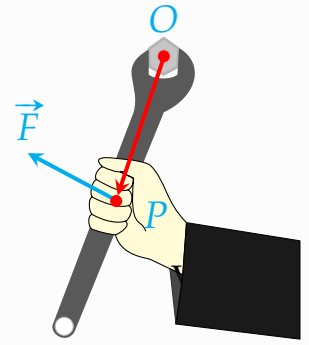
Biết góc quan sát ngang của một camera là  $116^\circ$ . Trong không gian  $Oxyz$ , camera được đặt tại điểm  $A(2; 1; 5)$  và chiếu thẳng về phía mặt phẳng  $(P): 2x - y - 2z + 13 = 0$ . Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng  $(P)$  của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



**Lời giải.**

## Câu 84

Trong không gian  $Oxyz$ , với đơn vị đo là mét, ta tác động vào cán mở lết tại vị trí  $P(1; 2; 3)$  một lực  $\vec{F} = (1; 1; -1)$  như hình vẽ. Moment lực  $\vec{M}$  khi tác động lực  $\vec{F}$  vào mở lết tại vị trí  $P$  là  $(a; b; c)$ . Xác định  $a + b + c$ .



👉 Lời giải.

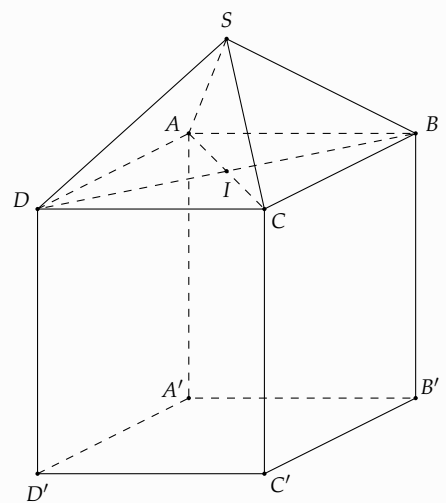
## Câu 85

Trong không gian với hệ tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy là kilômét, rada phát hiện một máy bay chiến đấu X đi chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $A(1\ 200; 500; 13)$  đến điểm  $B$  trong 30 phút. Nếu máy bay giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo là  $C(1\ 900; 800; 17)$ . Tọa độ vị trí điểm  $B(a; b; c)$ , tính  $a + b + c$ .

👉 Lời giải.

## Câu 86

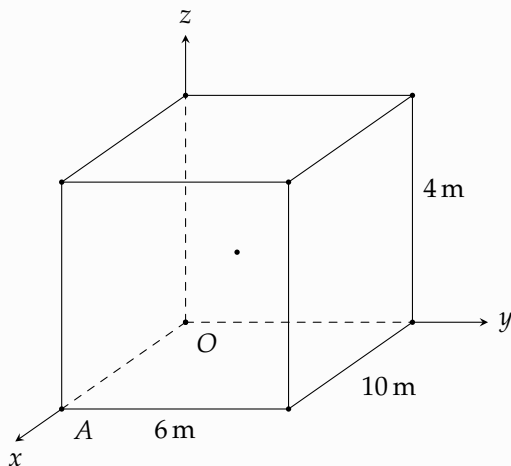
Để chuẩn bị cho một buổi triển lãm quốc tế, các trang sức có giá trị lớn được đặt bảo mật trong các khối chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  và đặt lên phía trên một trụ hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông (như hình vẽ bên). Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục là mét) sao cho  $A'(0; 0; 0)$ ,  $A(0; 0; 1)$ ,  $B\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ . Biết rằng, ban tổ chức sự kiện dự định dùng các tấm kính cường lực hình tam giác cân có cạnh bên là 60 cm để lắp ráp lại thành khối chóp nói trên. Khi đó, tọa độ điểm  $S$  là  $(a; b; c)$ . Tính giá trị của  $a + b + c$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



👉 Lời giải.

**Câu 87**

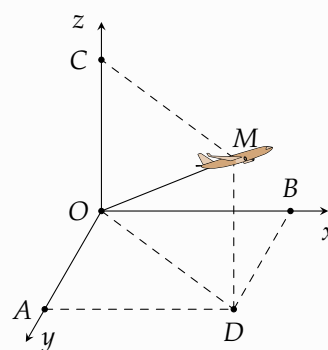
Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 4 m. Một chiếc quạt được treo trên trần nhà sao cho là điểm chính giữa của phòng học. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O \equiv A$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Gọi  $I(a; b; c)$  là tọa độ của điểm treo quạt. Tính giá trị  $a + b + c$ .



**Lời giải.**

**Câu 88**

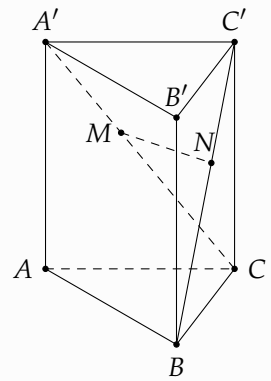
Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  như hình vẽ. Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$ . Điểm  $M$  có tọa độ  $(a; b; c)$ . Tính  $a + b + c$  (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



**Lời giải.**

## Câu 89

Một kiến trúc sư muốn xây dựng 1 tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 300 mét (tham khảo hình vẽ). Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu  $MN$  bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh  $A'C$ , điểm cuối thuộc cạnh  $B'C$ ) và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 5 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho  $MN$  ngắn nhất. Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tỷ đồng?



👉 Lời giải.

.....

.....

.....

## Câu 90

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 1,8 km về phía nam và 1,2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,6 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,9 km. Khoảng cách giữa hai khinh khí cầu là bao nhiêu kilômét (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

## Câu 91

Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông 60 km và về phía Nam 40 km, đồng thời cách mặt đất 2 km. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc 80 km và về phía Tây 50 km, đồng thời cách mặt đất 4 km. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó (làm tròn một chữ số sau dấu phẩy).

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

## Câu 92

Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 160 m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180 m về phía bắc và 240 m

về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60 m.

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  là vị trí người điều khiển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  có hướng trùng với hướng nam, trục  $Oy$  có hướng trùng với hướng đông, trục  $Oz$  vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Lời giải.**

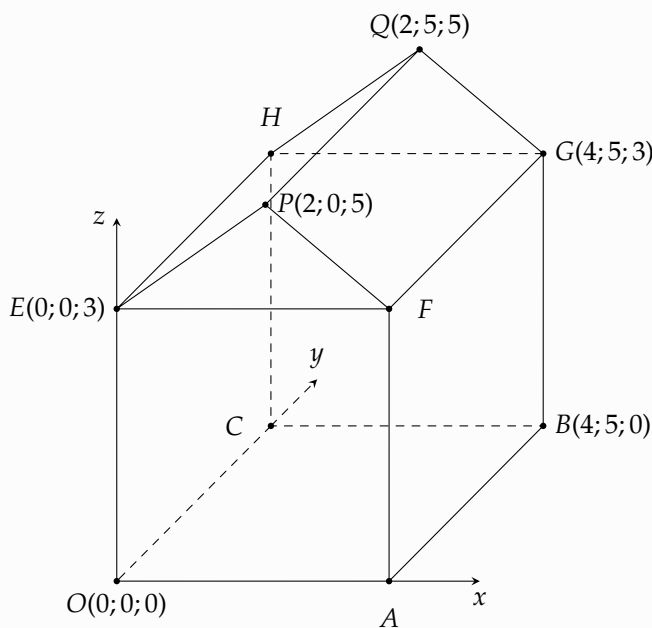
.....

.....

.....

**Câu 93**

Hình minh họa sơ đồ ngôi nhà trong không gian  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết tọa độ của vectơ  $\vec{AH} = (a; b; c)$ . Tìm  $a + b + c$ .



**Lời giải.**

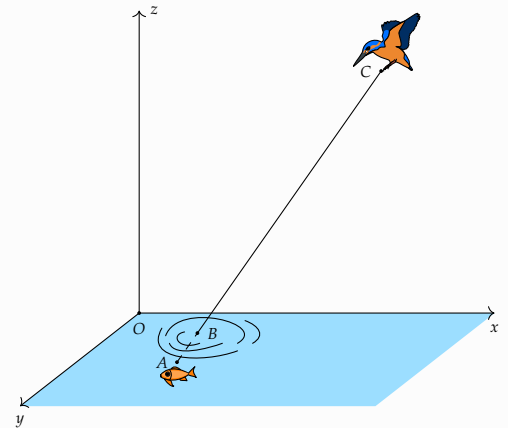
.....

.....

.....

### Câu 94

Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  nằm trên mặt nước, mặt phẳng  $(Oxy)$  là mặt nước, trục  $Oz$  hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước 2 m, cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là 3 m và 1 m phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá cách mặt nước 50 cm, cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là 1 m và 1,5 m. Biết tọa độ điểm  $B$  lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là  $B(a; b; c)$ . Tính  $a - b + c$ .



### 👉 Lời giải.

### Câu 95

Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vectơ vận tốc của thiết bị khi biển đứng yên là  $\vec{v} = (11; 7; -4)$  (đơn vị: km/h). Cho biết vectơ vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là  $\vec{w} = (4; 2; 0)$  (đơn vị km/h). Tính tốc độ của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu, các yếu tố khác không đáng kể (đơn vị km/h, làm tròn đến hàng phần chục).

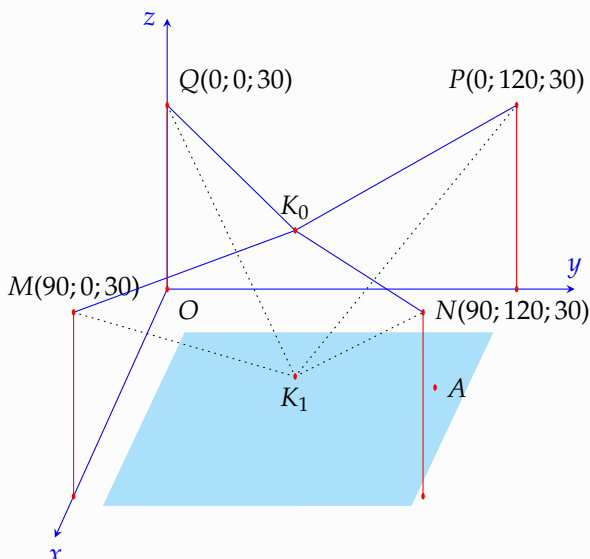
### 👉 Lời giải.

### Câu 96

Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m) các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm  $M(90; 0; 30)$ ,  $N(90; 120; 30)$ ,  $P(0; 120; 30)$ ,  $Q(0; 0; 30)$  (Hình dưới).

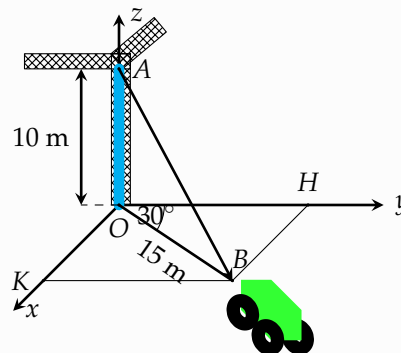
Giả sử  $K_0$  là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và  $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ . Để theo dõi quả bóng đến vị trí  $A$  camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm  $K_1$  cao độ bằng 19. Cao độ của vectơ  $K_0K_1$  là



**Lời giải.**

**Câu 97**

Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ  $Oxyz$  như hình bên với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng 1 (m). Biết  $\vec{AB} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ . Tính  $a + b + c$  (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



**Lời giải.**

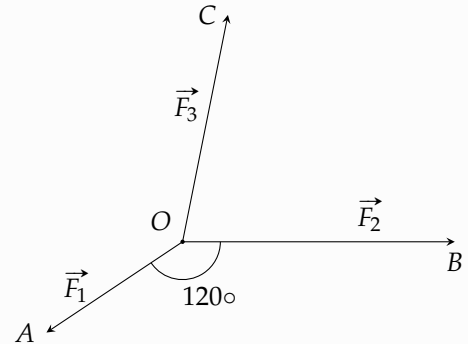
**Câu 98**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 2; 6)$  và  $B(1; 5; 3)$ . Giả sử mặt phẳng toạ độ  $Oxy$  là gương phản chiếu và một tia sáng đi từ điểm  $A$  đến gương tại điểm  $M$  rồi đến điểm  $B$ . Đường pháp tuyến là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $Oxy$  tại điểm  $M$ , góc tới  $i$  là góc hợp bởi tia tới  $AM$  và đường pháp tuyến, góc phản xạ  $i'$  là góc hợp bởi tia phản xạ  $MB$  và đường pháp tuyến. Theo định luật phản xạ ánh sáng thì đường đi của tia sáng là đường đi ngắn nhất từ điểm  $A$  đến gương rồi đến điểm  $B$  và  $i = i'$ . Giả sử  $i = i' = a^\circ$ , hỏi  $a$  có giá trị bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

**Lời giải.**

### Câu 99

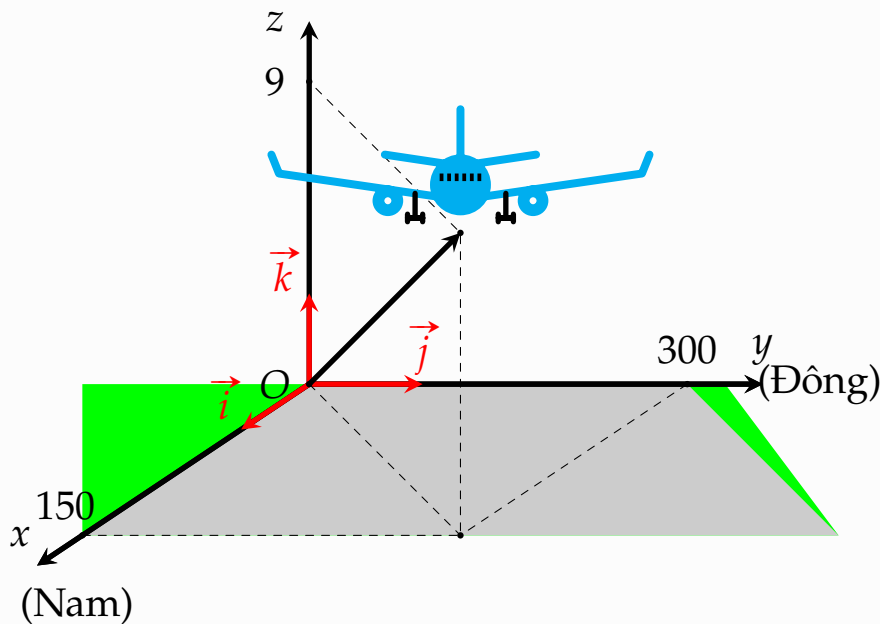
Có ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật và đôi một tạo với nhau một góc  $120^\circ$ . Hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có độ lớn lần lượt là 15 N và 7 N. Hỏi độ lớn lực  $\vec{F}_3$  nhỏ nhất là bao nhiêu thì độ lớn của hợp lực tác động vào vật bằng 7 N?



👉 Lời giải.

### Câu 100

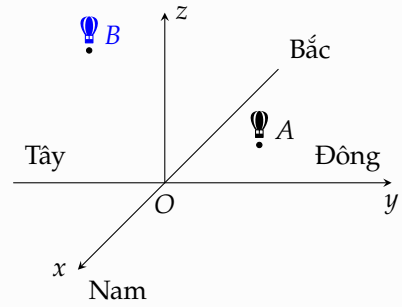
Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 8 giờ. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km. Mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất,  $O$  trùng với vị trí trung tâm điều khiển. Phi công để máy bay ở chế độ tự động bay thẳng theo hướng đông với vận tốc là 650 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10 m/s. Giả sử vận tốc và hướng gió không thay đổi thì tại thời điểm 9 giờ máy bay ở tọa độ  $(a; b; c)$ . Tính  $S = a + b - c$ .



👉 Lời giải.

**Câu 101**

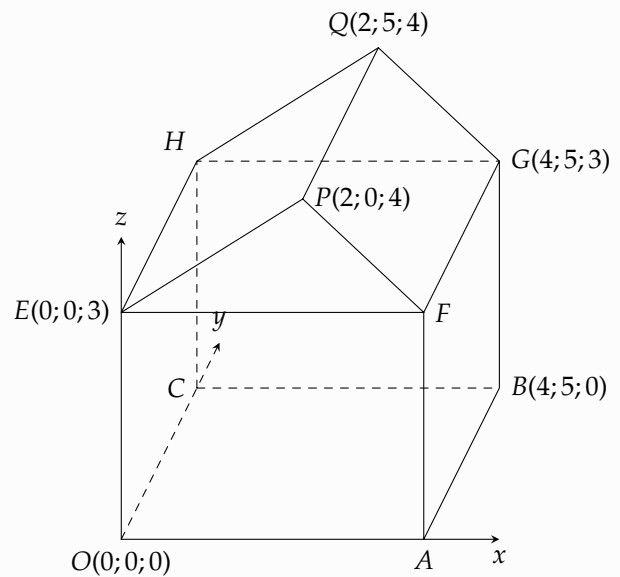
Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3 km về phía nam và 1,5 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 1,2 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 1,1 km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là  $a$  km theo hướng nam và  $b$  km theo hướng tây. Khi đó  $a + 5b$  bằng (kết quả làm tròn ở hàng phần mười).



**Lời giải.**

**Câu 102**

Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Góc dốc của mái nhà và mặt nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)?

**Lời giải.**

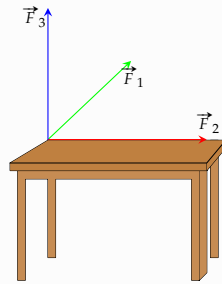
**Câu 103**

Cho khối chóp cụt tứ giác đều  $ABCD.A'B'C'D'$  có chiều cao bằng 3 cm, diện tích hai đáy lần lượt là  $72 \text{ cm}^2$  và  $18 \text{ cm}^2$ . Số đo góc (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) giữa hai mặt bên của khối chóp cụt đều đã cho là  $a^\circ$ . Tính giá trị của  $a$ .

📌 Lời giải.

**Câu 104**

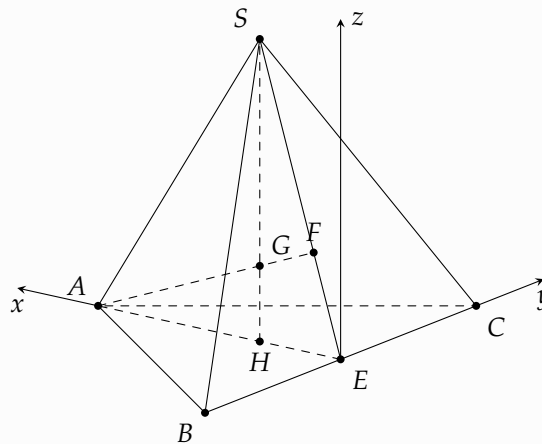
Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  tạo với nhau một góc  $110^\circ$  và có độ lớn lần lượt là  $9N$  và  $4N$ , lực  $\vec{F}_3$  vuông góc hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  và có độ lớn  $7N$ . Độ lớn hợp lực của ba lực trên là  $a$  (N), tìm giá trị của  $a$ .



📌 Lời giải.

**Câu 105**

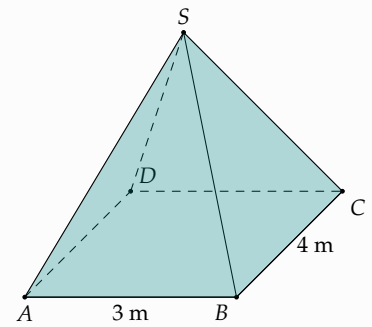
Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan  $CH_4$  được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết  $H - C - H$  là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



📌 Lời giải.

**Câu 106**

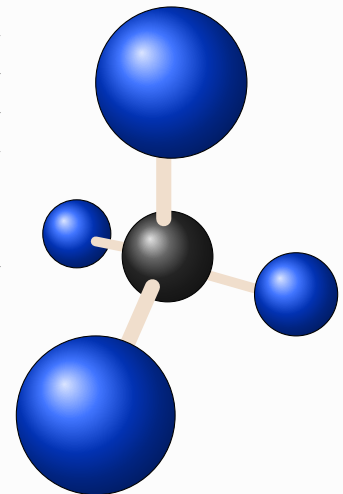
Ông An thiết kế một mái che giếng trời hình chóp di động để có thể tùy thích lấy ánh sáng cho ngôi nhà của mình. Biết rằng đáy của hình chóp là hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh đáy là 3 m và 4 m và độ cao của giếng trời là 2 m (hình vẽ minh họa). Hỏi hai mặt bên kề nhau tạo với nhau góc bao nhiêu độ (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



**Lời giải.**

**Câu 107**

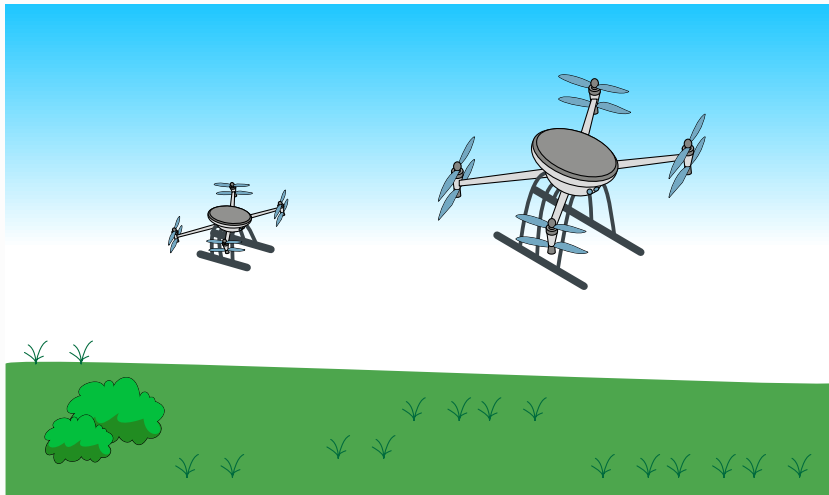
Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan  $CH_4$  được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết  $H - C - H$  là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này (đơn vị đo là độ, làm tròn đến hàng đơn vị).



**Lời giải.**

**Câu 108**

Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc 20 (km) và về phía Tây 10 (km), đồng thời cách mặt đất 0,7 (km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông 30 (km) và về phía Nam 25 (km), đồng thời cách mặt đất 1 (km). Hỏi hai chiếc máy bay cách nhau bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



📌 Lời giải.

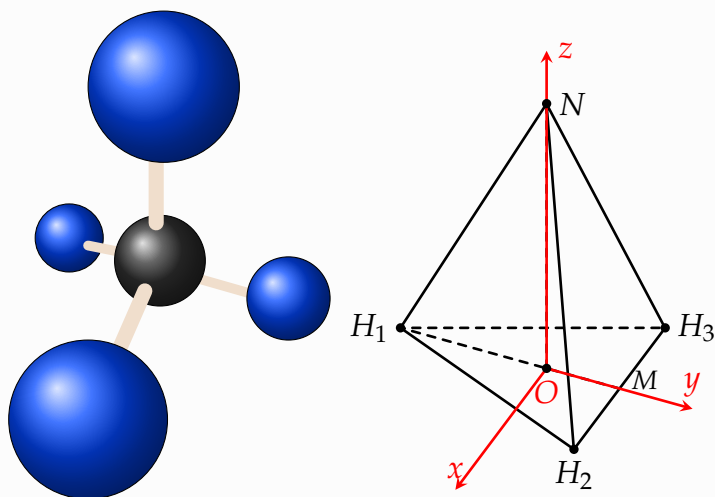
### Câu 109

Trong không gian  $Oxyz$  (đơn vị đo lấy theo kilomet), radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi, từ điểm  $A(800; 500; 7)$  đến điểm  $B(940; 550; 8)$  trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 5 phút tiếp theo, khoảng cách từ máy bay đến gốc tọa độ  $O$  bằng bao nhiêu kilomet? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

📌 Lời giải.

### Câu 110

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac ( $\text{NH}_3$ ) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác  $H_1H_2H_3$  với  $H_1, H_2, H_3$  là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết  $\text{H} - \text{N} - \text{H}$ , có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm  $H_1, H_2, H_3$  (chẳng hạn  $\widehat{H_1NH_2}$ ), gọi là góc liên kết của phân tử  $\text{NH}_3$ . Góc này xấp xỉ  $107^\circ$ .



Trong không gian  $Oxyz$ , cho một phân tử  $NH_3$  được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều  $N.H_1H_2H_3$  với  $O$  là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm  $N$  thuộc trục  $Oz$ , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí  $H_1, H_2, H_3$  trong đó  $H_1(0; -2; 0)$  và  $H_2H_3$  song song với trục  $Ox$ . Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen (làm tròn các kết quả tính toán đến hàng phần trăm).

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 111**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ  $O(0;0;0)$ , mỗi đơn vị trên một trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí  $A(-688; -185; 8)$ , chuyển động theo đường thẳng  $d$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (91; 75; 0)$  và theo hướng về đài không lưu.  $E(a; b; c)$  là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình. Tính  $T = a + b + c$ .

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 112**

Biết góc quan sát ngang của một camera là  $146^\circ$ . Trong không gian  $Oxyz$ , camera được đặt tại điểm  $A(1; 3; 8)$  và chiếu thẳng về phía mặt phẳng  $(P): -x - 3y + 4z - 5 = 0$ . Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng  $(P)$  của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần mười)?

**Lời giải.**

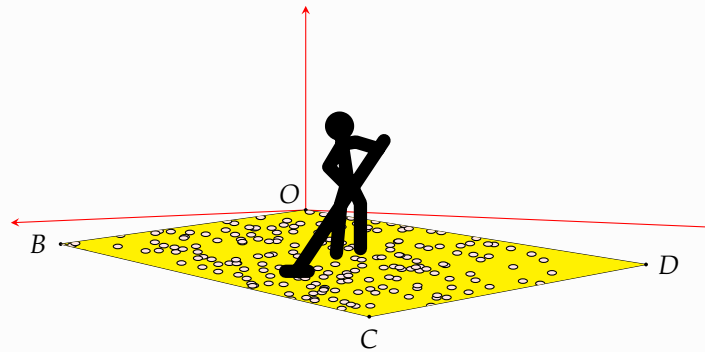
.....

.....

.....

## Câu 113

Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thổi nôi,...



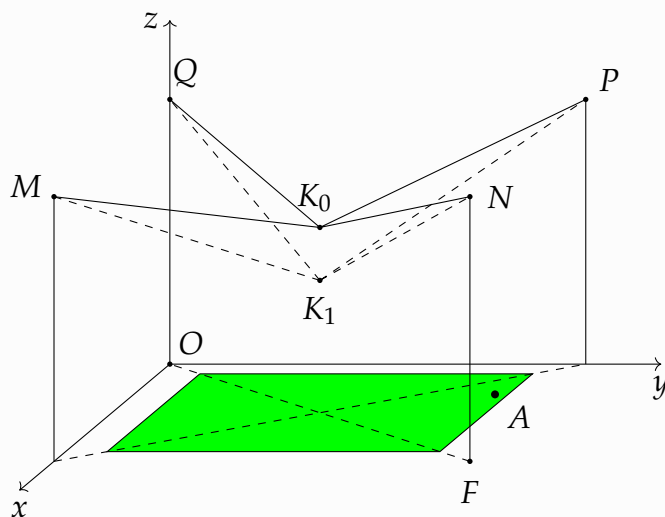
Bác An tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật  $ABCD$  có độ dài các cạnh lần lượt là  $AB = 5$  m và  $AD = 12$  m. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác An xây vị trí  $B$  thấp hơn vị trí  $A$  là 5 cm, vị trí  $D$  thấp hơn vị trí  $A$  là 8 cm. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ để xác định xem vị trí  $C$  thấp hơn vị trí  $A$  bao nhiêu cm? (làm tròn đến hàng đơn vị).

👉 Lời giải.

## Câu 114

Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau:

Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm  $M(90; 0; 30)$ ,  $N(90; 120; 30)$ ,  $P(0; 120; 30)$ ,  $Q(0; 0; 30)$ . Giả sử  $K_0$  là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và  $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ . Để theo dõi quả bóng đến vị trí  $A$ , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm  $K_1$  có cao độ bằng 19 (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).



Biết rằng véc-tơ  $\overrightarrow{K_0K_1}$  có tọa độ là  $(a, b, c)$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 115**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;3;5)$ ,  $B(1;1;3)$ ,  $C(4;-2;3)$ . Số đo của góc  $\widehat{ABC}$  bằng bao nhiêu độ?

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 116**

Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150 m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180 m về phía bắc và 240 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60 m.

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  có hướng trùng với hướng nam, trục  $Oy$  có hướng trùng với hướng đông, trục  $Oz$  vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

## Câu 117

Khi gắn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí  $A(3; 2; -3)$  sẽ hạ cánh tới vị trí  $B(8; 8; 0)$ . Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng  $AB$ ) và sân bay (một phần của mặt phẳng  $(Oxy)$ ) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

🔑 Lời giải.

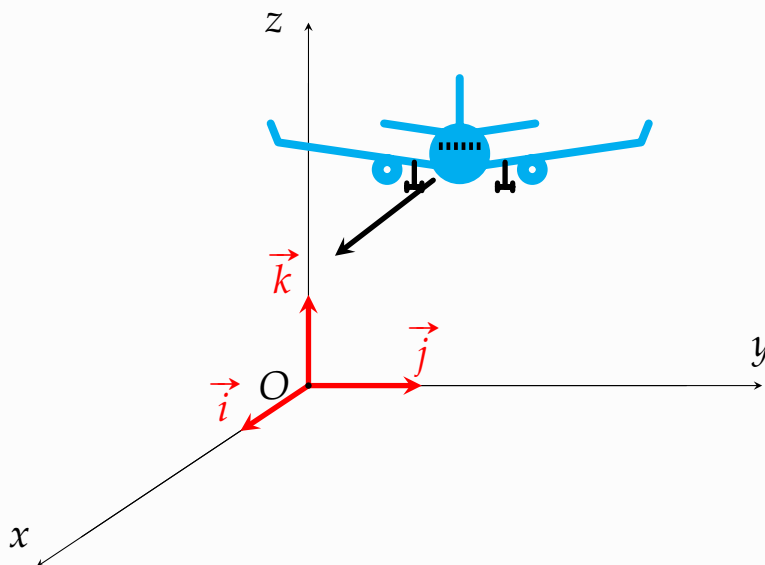
## Câu 118

Khi gắn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí  $A(5; 0; 5)$  đến vị trí  $B(10; 10; 3)$  và hạ cánh tại vị trí  $C(a; b; 0)$ . Giá trị của  $a + b$  bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?

🔑 Lời giải.

## Câu 119

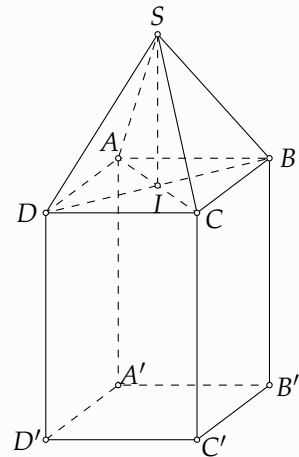
Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), một chiếc máy bay đang di chuyển với hướng bay không đổi từ điểm  $(-50; 30; 10)$  đến vị trí hạ cánh là  $(2; 3; 0)$ . Hỏi đường bay của máy bay hợp với mặt đất một góc bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



🔑 Lời giải.

**Câu 120**

Để chuẩn bị cho một buổi triển lãm quốc tế, các trang sức có giá trị lớn được đặt bảo mật trong các khối chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  và đặt lên phía trên một trụ hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông (như hình vẽ bên). Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục là mét) sao cho  $A'(0;0;0)$ ,  $A(0;0;1)$ ,  $B(0;0,5;1)$ . Biết rằng, ban tổ chức sự kiện dự định dùng các tấm kính cường lực hình tam giác cân có cạnh bên là 60 cm để ráp lại thành khối chóp nói trên. Khi đó, tọa độ điểm  $S$  là  $(a;b;c)$ . Tính giá trị của  $a + b + c$ . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



**Lời giải.**

**Câu 121**

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3 km về phía Đông và 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,3 km. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải.**

## §3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1. Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

**Định nghĩa 3.1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và số  $k$ . Khi đó

- ①  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ ;
- ②  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$ ;
- ③  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ .

**⚠** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực  $k$  sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

#### 2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

**Định nghĩa 3.2.** Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

- ⚠**
- ①  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ ;
  - ②  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ;  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .
  - ③  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$  (với  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ).

#### 3. Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

**Định nghĩa 3.3.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  không cùng phương. Khi đó véc-tơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- ⚠**
- ① Véc-tơ  $\vec{w}$  xác định như trên còn gọi là tích có hướng của hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$ .
  - ② Quy ước  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$  thì
 
$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$
  - ③  $\vec{a}$  không cùng phương với  $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$ .

#### 4. Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

##### Định nghĩa 3.4.

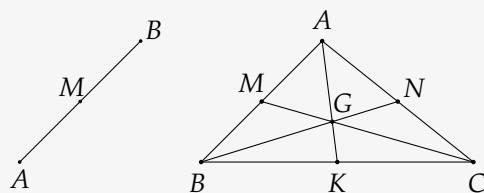
Trong không gian  $Oxyz$ , tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

- ① Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- ② Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$



### B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

#### Dạng 1 Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

##### Ví dụ 1

Cho  $\vec{a} = (-2; 3; 2)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{c} = (1; 2; 3)$ . Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

a)  $3\vec{a}$ ;

b)  $2\vec{a} - \vec{b}$ ;

c)  $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$ .

**Lời giải.**

##### Ví dụ 2

Trong không gian  $Oxyz$ , cho các véc-tơ  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ ,  $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$ .

a) Chứng minh  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

b) Tìm giá trị của  $m$  và  $n$  để véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{w}$  cùng phương.

**Lời giải.**

**Ví dụ 3**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(4; -2; 1)$ .

- Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ điểm  $D$  biết  $ABCD$  là hình bình hành.
- Tìm tọa độ giao điểm  $E$  của đường thẳng  $BC$  với mặt phẳng tọa độ  $(Oxz)$ .

**Lời giải.**

**Ví dụ 4**

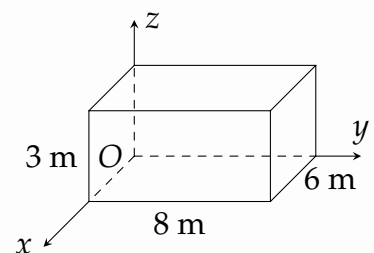
Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(5; -3; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(4; 1; 2)$ .

- Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$ .
- Tìm tọa độ điểm  $N$  sao cho  $2\vec{NA} = -\vec{NB}$ .

**Lời giải.**

**Ví dụ 5**

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



**Lời giải.**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.** Các câu hỏi sau đều xét trong không gian  $Oxyz$ .

**Câu 1**

Cho  $\vec{a} = (1; 2; -3)$ ,  $\vec{b} = (-2; -4; 6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A**  $\vec{a} = 2\vec{b}$ .      **B**  $\vec{b} = 2\vec{a}$ .      **C**  $\vec{b} = -2\vec{a}$ .      **D**  $\vec{a} = -2\vec{b}$ .

📌 Lời giải.

**Câu 2**

Cho hai véc-tơ  $\vec{x} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{y} = (1; 0; -1)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$ .

- Ⓐ  $\vec{a}(4; 1; -5)$ .      Ⓑ  $\vec{a}(4; 1; -1)$ .      Ⓒ  $\vec{a}(3; 1; -4)$ .      Ⓓ  $\vec{a}(0; 1; -1)$ .

📌 Lời giải.

**Câu 3**

Cho  $\vec{a} = (1; -1; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; 0; -1)$ . Tìm tọa độ véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

- Ⓐ  $\vec{u} = (-4; -2; 9)$ .      Ⓑ  $\vec{u} = (4; 2; -9)$ .      Ⓒ  $\vec{u} = (-4; -5; 9)$ .      Ⓓ  $\vec{u} = (1; 3; -11)$ .

📌 Lời giải.

**Câu 4**

Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 0)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{b}$  thỏa mãn biểu thức  $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$ .

- Ⓐ  $\vec{b} = (-2; 1; -1)$ .      Ⓑ  $\vec{b} = (-1; 2; -1)$ .      Ⓒ  $\vec{b} = (5; 2; 1)$ .      Ⓓ  $\vec{b} = (1; -2; 1)$ .

📌 Lời giải.

**Câu 5**

Cho vectơ  $\vec{a} = (1; -3; 4)$ . Vectơ nào sau đây cùng phương với  $\vec{a}$ ?

- Ⓐ  $\vec{b} = (-2; -6; 8)$ .      Ⓑ  $\vec{c} = (-2; 6; -8)$ .      Ⓒ  $\vec{d} = (-2; 6; 8)$ .      Ⓓ  $\vec{m} = (2; -6; -8)$ .

📌 Lời giải.

## Câu 6

Hai véc-tơ  $\vec{a} = (m; 2; 3)$  và  $\vec{b} = (1; n; 2)$  cùng phương khi

**(A)**  $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$

**(B)**  $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$

**(C)**  $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$

**(D)**  $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$

👉 Lời giải.

## Câu 7

Cho hai điểm  $A(2; 3; 1)$  và  $B(3; 1; 5)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

**(A)**  $AB = \sqrt{21}$ .

**(B)**  $AB = 2\sqrt{3}$ .

**(C)**  $AB = 2\sqrt{5}$ .

**(D)**  $AB = \sqrt{13}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 8

Cho hai điểm  $M(3; -2; 1)$  và  $N(0; 1; -1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

**(A)**  $MN = \sqrt{17}$ .

**(B)**  $MN = 22$ .

**(C)**  $MN = \sqrt{22}$ .

**(D)**  $MN = \sqrt{19}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 9

Cho hai điểm  $A(-1; 1; 2)$  và  $B(3; -5; 0)$ . Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

**(A)**  $(1; -2; 1)$ .

**(B)**  $(4; -6; 2)$ .

**(C)**  $(2; -3; -1)$ .

**(D)**  $(2; -4; 2)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 10

Cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(3; -1; 2)$ . Tọa độ điểm  $C$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn  $AC$  là

**(A)**  $C(5; -3; 4)$ .

**(B)**  $C(4; -3; 5)$ .

**(C)**  $C(-1; 3; -2)$ .

**(D)**  $C(2; 0; 1)$ .

**Lời giải.**

**Câu 11**

Cho tam giác  $ABC$  với  $A(0; -1; 3)$ ,  $B(2; 1; 1)$ ,  $C(1; 0; -1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- A**  $(1; 0; 1)$ .      **B**  $(-1; 0; 1)$ .      **C**  $(0; 1; 1)$ .      **D**  $(1; 1; 0)$ .

**Lời giải.**

**Câu 12**

Cho  $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ , điểm  $B(3; -4; 1)$  và  $C(2; 0; -1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- A**  $(1; -2; 3)$ .      **B**  $(-1; 2; -3)$ .      **C**  $(2; -2; 1)$ .      **D**  $(-2; 2; -1)$ .

**Lời giải.**

**Câu 13**

Cho tam giác  $ABC$  trọng tâm  $G$ . Biết  $A(0; 2; 1)$ ,  $B(1; -1; 2)$ ,  $G(1; 1; 1)$ . Khi đó điểm  $C$  có tọa độ là

- A**  $(2; 2; 4)$ .      **B**  $(-2; 0; 2)$ .      **C**  $(-2; -3; -2)$ .      **D**  $(2; 2; 0)$ .

**Lời giải.**

**Câu 14**

Cho bốn điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; -1; 1)$ ,  $C(-1; 3; -4)$ ,  $D(2; 6; 0)$  tạo thành một hình tứ diện. Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB$ ,  $CD$ . Tìm tọa độ trung điểm  $G$  của đoạn  $MN$ .

- A**  $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$ .      **B**  $G(2; 4; 0)$ .      **C**  $G(1; 2; 0)$ .      **D**  $G(4; 8; 0)$ .

**Lời giải.**

## Câu 15

Cho hai điểm  $B(1; 2; -3)$ ,  $C(7; 4; -2)$ . Nếu  $E$  là điểm thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là

- Ⓐ  $(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3})$ .      Ⓑ  $(1; 2; \frac{1}{3})$ .      Ⓒ  $(3; 3; -\frac{8}{3})$ .      Ⓓ  $(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3})$ .

👉 Lời giải.

## Câu 16

Cho các điểm  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(2; 1; 3)$  và  $M$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Khi đó điểm  $M$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(3; 2; 3)$ .      Ⓑ  $(3; -2; -3)$ .      Ⓒ  $(3; -2; 3)$ .      Ⓓ  $(3; 2; -3)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 17

Cho tọa độ các điểm  $A(-1; 3)$ ,  $B(2; -2)$  và  $C(m; 1)$ . Tìm  $m$  để 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

- Ⓐ  $m = \frac{2}{5}$ .      Ⓑ  $m = \frac{1}{5}$ .      Ⓒ  $m = -\frac{1}{3}$ .      Ⓓ  $m = -\frac{1}{5}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 18

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành, biết  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

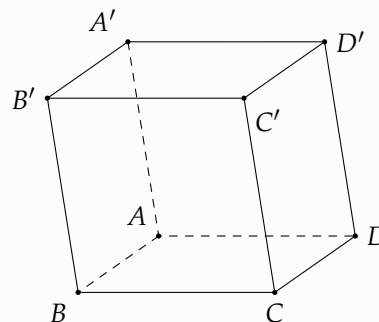
- Ⓐ  $(0; -2; 0)$ .      Ⓑ  $(2; 2; 2)$ .      Ⓒ  $(2; 0; 2)$ .      Ⓓ  $(2; -2; 2)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 19**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0;0;0)$ ,  $B(a;0;0)$ ,  $D(0;2a;0)$ ,  $A'(0;0;2a)$ ,  $a \neq 0$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AC'$ .

- Ⓐ  $|a|$ .
- Ⓑ  $2|a|$ .
- Ⓒ  $3|a|$ .
- Ⓓ  $\frac{3|a|}{2}$ .

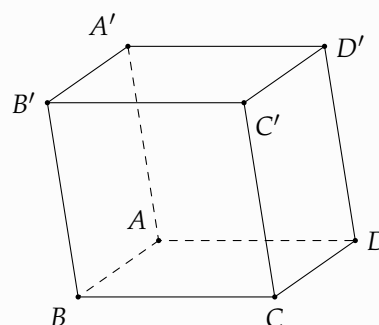


👉 Lời giải.

**Câu 20**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0;0;1)$ ,  $B'(1;0;0)$ ,  $C'(1;1;0)$ . Tìm tọa độ của điểm  $D$ .

- Ⓐ  $D(0; -1; 1)$ .
- Ⓑ  $D(0; 1; 1)$ .
- Ⓒ  $D(0; 1; 0)$ .
- Ⓓ  $D(1; 1; 1)$ .



👉 Lời giải.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 21**

Cho các điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$ ,  $C(3; -1; 2)$ .

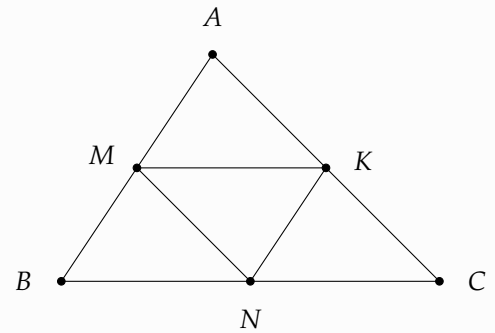
- a)  $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$ .
- b)  $\vec{AC} = (-2; -1; 1)$ .
- c)  $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ .
- d) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

👉 Lời giải.

### Câu 22

Cho ba điểm  $A(3;3;-6)$ ,  $B(1;3;2)$  và  $C(-1;-3;1)$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$ ,  $BC$  và  $CA$ .

- Tọa độ  $M(2;3;2)$ .
- Với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì  $GC = 2\sqrt{5}$ .
- Trọng tâm tam giác  $MNK$  là  $E(1;1;-1)$ .
- Với  $D(-3;-3;9)$  thì tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành.

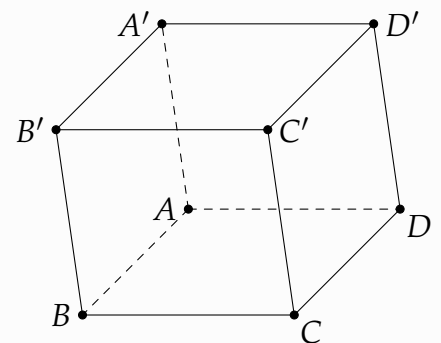


👉 Lời giải.

### Câu 23

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết điểm  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(1;2;0)$ ,  $D'(-1;3;5)$ . Gọi  $M$ ,  $N$  là tâm của các hình bình hành  $ABB'A'$ ,  $ADD'A'$ .

- Tọa độ  $D(0;2;0)$ .
- Tọa độ  $A'(-1;1;5)$ .
- Tọa độ  $\overrightarrow{MN} = (-1;1;0)$ .
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$ .

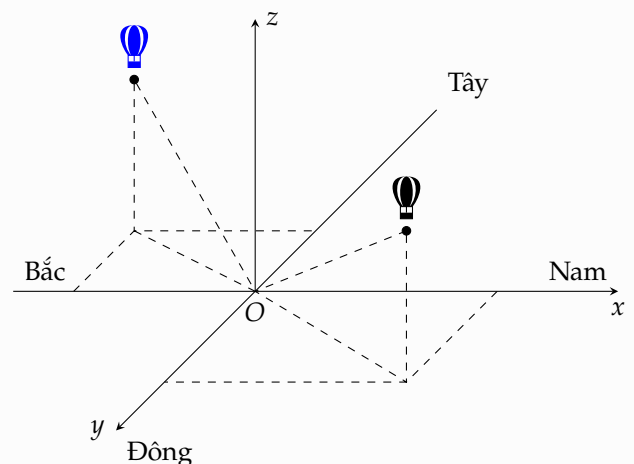


👉 Lời giải.

### Câu 24

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía nam, trục  $Oy$  hướng về phía đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



- a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ kinh khí cầu thứ nhất là  $(2; 1; 0,5)$ .
- b) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ kinh khí cầu thứ hai là  $(-1,5; -1; 0,8)$ .
- c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến kinh khí cầu thứ nhất bằng  $\sqrt{21}$  km.
- d) Khoảng cách hai chiếc kinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Dạng 2 Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng**

**Ví dụ 1**

Cho ba vec-tơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; -2)$ ,  $\vec{c} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{d} = (1; 7; -3)$ .

- a) Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ .
- b) Tính  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .
- c) Chứng minh  $\vec{d} \perp \vec{a}$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Ví dụ 2**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (-4; 3; m)$ .

- a) Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- b) Tìm  $m$  để vectơ  $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{c}$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Ví dụ 3**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho 3 điểm  $A(0; 1; -2)$ ;  $B(3; 0; 0)$  và điểm  $C$  thuộc trục  $Oz$ . Biết  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Ví dụ 4**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$ ,  $P(1; m - 1; 2)$ . Với những giá trị nào của  $m$  thì tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ ?

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

**Ví dụ 5**

Cho hai điểm  $A(2, -1, 1)$ ;  $B(3, -2, -1)$ . Tìm điểm  $N$  trên trục  $Ox$  cách đều  $A$  và  $B$ .

📌 Lời giải.

.....

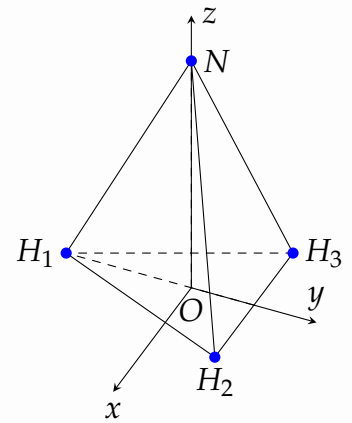
.....

.....

**Ví dụ 6**

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac ( $\text{NH}_3$ ) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác  $H_1H_2H_3$  với  $H_1, H_2, H_3$  là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H – N – H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm  $H_1, H_2, H_3$  (chẳng hạn  $\widehat{H_1NH_2}$ ), gọi là góc liên kết của phân tử  $\text{NH}_3$ . Góc này xấp xỉ  $107^\circ$ .

Trong không gian  $Oxyz$ , cho một phân tử  $\text{NH}_3$  được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều  $N.H_1H_2H_3$  với  $O$  là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm  $N$  thuộc trục  $Oz$ , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí  $H_1, H_2, H_3$  trong đó  $H_1(0; -2; 0)$  và  $H_2H_3$  song song với trục  $Ox$  (Hình bên).



- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.
- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

📌 Lời giải.

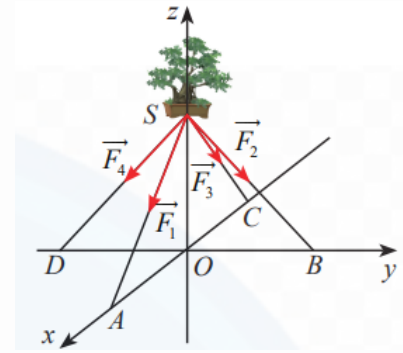
.....

.....

.....

**Ví dụ 7**

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0;0;20)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(20;0;0)$ ,  $B(0;20;0)$ ,  $C(-20;0;0)$ ,  $D(0;-20;0)$  (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn  $40(N)$  và được phân bố thành bốn lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



**Lời giải.**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1**

Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = (3;0;1)$  và  $\vec{v} = (2;1;0)$  là

- A 0.                       B 6.                       C 8.                       D -6.

**Lời giải.**

**Câu 2**

Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  và  $\vec{v} = (0;1;-2)$  bằng

- A -4.                       B 0.                       C 4.                       D -2.

**Lời giải.**

**Câu 3**

Cho các véc-tơ  $\vec{a} = (1;2;1)$  và  $\vec{b} = (2;2;1)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ .

- A -1.                       B -2.                       C 2.                       D 1.

**Lời giải.**

## Câu 4

Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực  $\vec{f} = (5; 4; -2)$  (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời  $\vec{a} = (70; 20; -40)$  (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực  $\vec{f}$ .

- (A) 480 (J).                      (B) 530 (J).                      (C) 510 (J).                      (D) 500 (J).

👉 Lời giải.

## Câu 5

Góc giữa hai véc-tơ  $\vec{i}$  và  $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$  bằng

- (A)  $60^\circ$ .                      (B)  $120^\circ$ .                      (C)  $150^\circ$ .                      (D)  $30^\circ$ .

👉 Lời giải.

## Câu 6

Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (-1; 1; 0)$  và  $\vec{v} = (0; -1; 0)$ . Góc hợp bởi hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng

- (A)  $60^\circ$ .                      (B)  $45^\circ$ .                      (C)  $135^\circ$ .                      (D)  $120^\circ$ .

👉 Lời giải.

## Câu 7

Cho hai véc-tơ  $\vec{a}(-2; -3; 1)$  và  $\vec{b}(1; 0; 1)$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

- (A)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ .                      (B)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$ .  
 (C)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$ .                      (D)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$ .

👉 Lời giải.

**Câu 8**

Cho  $\vec{a} = (3; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-2; 2; -4)$ . Giá trị của  $|\vec{a} - \vec{b}|$  bằng

- A  $5\sqrt{2}$ .     
  B 50.     
  C  $2\sqrt{5}$ .     
  D 3.

 Lời giải.

**Câu 9**

Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (-1; 0; 2)$  và  $\vec{v} = (x; -2; 1)$ . Biết rằng  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ . Khi đó  $|\vec{v}|$  bằng

- A  $\sqrt{21}$ .     
  B 2.     
  C 3.     
  D 5.

 Lời giải.

**Câu 10**

Tìm số thực  $a$  để véc-tơ  $\vec{u} = (a; 0; 1)$  vuông góc với véc-tơ  $\vec{v} = (2; -1; 4)$ .

- A  $a = -2$ .     
  B  $a = -4$ .     
  C  $a = 4$ .     
  D  $a = 2$ .

 Lời giải.

**Câu 11**

Tìm  $x$  để hai véc-tơ  $\vec{a} = (x; x - 2; 2)$  và  $\vec{b} = (x; 1; -2)$  vuông góc với nhau.

- A  $x = 3$ .     
  B  $x = 1$ .     
  C  $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ .     
  D  $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ .

 Lời giải.

**Câu 12**

Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (1; -2; 1)$  và  $\vec{v} = (2; 1; -1)$ . Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ ?

- A  $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$ .     
  B  $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$ .     
  C  $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$ .     
  D  $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$ .

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 13**

Tích có hướng của hai véc-tơ  $\vec{a} = (-1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (0; 4; -3)$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(-6; 3; -4)$ .      Ⓑ  $(6; -3; 4)$ .      Ⓒ  $(6; 3; 4)$ .      Ⓓ  $(-6; -3; -4)$ .

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 14**

Cho  $A(2; 1; 4)$ ,  $B(-2; 2; -6)$ ,  $C(6; 0; -1)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

- Ⓐ  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 67$ .      Ⓑ  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -67$ .      Ⓒ  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33$ .      Ⓓ  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 65$ .

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 15**

Cho  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(2; -4; 1)$ ,  $C(2; 0; 2)$ , khi đó tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  bằng

- Ⓐ 4.      Ⓑ -1.      Ⓒ 7.      Ⓓ -5.

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 16**

Cho tam giác  $ABC$  với  $A(8; 9; 2)$ ,  $B(3; 5; 1)$ ,  $C(11; 10; 4)$ . Số đo góc  $A$  của tam giác  $ABC$  là

- Ⓐ  $60^\circ$ .      Ⓑ  $150^\circ$ .      Ⓒ  $30^\circ$ .      Ⓓ  $120^\circ$ .

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 17**

Cho điểm  $A(3; -1; 5)$ ,  $B(m; 2; 7)$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để độ dài đoạn  $AB = 7$ .

- A  $m = 3$  hoặc  $m = -3$ .                       B  $m = 9$  hoặc  $m = -3$ .  
 C  $m = -3$  hoặc  $m = -9$ .                       D  $m = 9$  hoặc  $m = 3$ .

**Lời giải.**

**Câu 18**

Cho ba điểm  $A(3; 2; 8)$ ,  $B(0; 1; 3)$  và  $C(2; m; 4)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

- A  $m = 4$ .                       B  $m = -10$ .                       C  $m = 25$ .                       D  $m = -1$ .

**Lời giải.**

**Câu 19**

Cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m - 1; 2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

- A  $m = 0$ .                       B  $m = -4$ .                       C  $m = 2$ .                       D  $m = -6$ .

**Lời giải.**

**Câu 20**

Cho tam giác  $ABC$  có  $A(7; 3; 3)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(2; 3; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .

- A  $H(3; 4; 6)$ .                       B  $H(-3; 4; 7)$ .                       C  $H(2; 4; 1)$ .                       D  $H(2; -4; 3)$ .

**Lời giải.**

**Câu 21**

Cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; -1; 2)$ . Gọi  $M(0; 0; z)$  là điểm thuộc trục  $Oz$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ  $z \in (0; 1]$ .

Ⓑ  $z \in (1; 2]$ .

Ⓒ  $z \in (-1; 0]$ .

Ⓓ  $z \in (-2; -1]$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 22**

Cho ba vec-tơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

a)  $|\vec{a}| = 2$ .      b)  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .      c)  $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .      d)  $\vec{b} \perp \vec{c}$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 23**

Cho hai véctơ  $\vec{u} = (0; 2; 3)$  và  $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$ .

a)  $|\vec{u}| = \sqrt{13}$ .      b)  $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$ .

c)  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$ .      d)  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ .

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

**Câu 24**

Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(2; 1; 0)$ .

- a) Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- b) Chu vi tam giác là  $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .
- c) Diện tích tam giác  $ABC$  là  $\sqrt{6}$ .
- d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .

👉 Lời giải.

.....

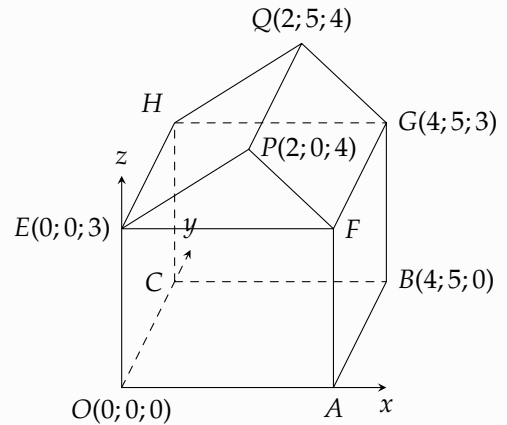
.....

.....

**Câu 25**

Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

- a) Tọa độ của các điểm  $A(5; 0; 0)$ .
- b) Tọa độ của các điểm  $H(0; 5; 3)$ .
- c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng  $26,6^\circ$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).
- d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.



**Lời giải.**

.....

.....

.....

**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ là  $\vec{u} = (2; 1; -1)$  và  $\vec{v} = (1; 3; 1)$ . Tọa độ của véc-tơ  $\vec{u} + 2\vec{v}$  tương ứng là

- (A)**  $(3; 4; 0)$ .
- (B)**  $(1; -2; -2)$ .
- (C)**  $(4; 7; 1)$ .
- (D)**  $(5; 5; -1)$ .

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 2**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A$  thỏa mãn  $\vec{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$ , với  $\vec{i}, \vec{j}$  là hai véc-tơ đơn vị trên hai trục tọa độ  $Ox, Oy$ . Tọa độ điểm  $A$  là

- (A)**  $A(2; 1; 0)$ .
- (B)**  $A(0; 2; 1)$ .
- (C)**  $A(0; 1; 1)$ .
- (D)**  $A(1; 1; 1)$ .

**Lời giải.**

.....

.....

.....

## Câu 3

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $I(2; 3; -4)$ . Khoảng cách từ  $I$  đến trục  $Ox$  bằng

- (A) 2.                      (B) 5.                      (C)  $\sqrt{13}$ .                      (D)  $2\sqrt{5}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 4

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (1; 0; -1)$ ,  $\vec{v} = (2; 1; -2)$ . Tích vô hướng  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng

- (A) 0.                      (B) 1.                      (C) 4.                      (D) 2.

👉 Lời giải.

## Câu 5

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; -1; 0)$  và điểm  $B(3; 1; 1)$ . Tọa độ điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$  là

- (A)  $(1; -2; -4)$ .                      (B)  $(0; 3; -1)$ .                      (C)  $(4; 3; 2)$ .                      (D)  $(0; -1; 3)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 6

Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(-3; 0; 3)$ ,  $C(2; 4; -1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

- (A)  $D(6; -6; 3)$ .                      (B)  $D(6; 6; 3)$ .                      (C)  $D(6; -6; -3)$ .                      (D)  $D(6; 6; -3)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 7

Cho tam giác  $ABC$  biết  $A(2; -1; 3)$  và trọng tâm của tam giác có tọa độ là  $G(2; 1; 0)$ . Khi đó  $\vec{AB} + \vec{AC}$  có tọa độ là

- (A)  $(0; -9; 9)$ .                      (B)  $(0; 6; 9)$ .                      (C)  $(0; 9; -9)$ .                      (D)  $(0; 6; -9)$ .



👉 Lời giải.

### Câu 12

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0;0;-1)$ ,  $B(-1;1;0)$ ,  $C(1;0;1)$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- Ⓐ  $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$ .    Ⓑ  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$ .    Ⓒ  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$ .    Ⓓ  $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$ .

👉 Lời giải.

### Câu 13

Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Phát biểu nào sau đây là sai?

- Ⓐ  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .    Ⓑ  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ .  
 Ⓒ  $\vec{GD} - \vec{GA} = \vec{AD}$ .    Ⓓ  $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DG}$ .

👉 Lời giải.

### Câu 14

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ . Toạ độ của điểm  $M$  là

- Ⓐ  $(-4; 3; 2)$ .    Ⓑ  $(2; 3; -4)$ .    Ⓒ  $(3; -4; 2)$ .    Ⓓ  $(-2; -3; 4)$ .

👉 Lời giải.

### Câu 15

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (3; 2; -1)$ ,  $\vec{v} = (5; -4; 2)$ . Toạ độ của vectơ  $\vec{u} - \vec{v}$  là

- Ⓐ  $(-2; 6; -3)$ .    Ⓑ  $(2; -6; 3)$ .    Ⓒ  $(-2; -2; -3)$ .    Ⓓ  $(2; 2; 1)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 16**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (1; -2; 3)$ . Tọa độ của vectơ  $-3\vec{u}$  là

- (A)  $(3; -6; 9)$ .     
  (B)  $(-3; -6; -9)$ .     
  (C)  $(3; 6; 9)$ .     
  (D)  $(-3; 6; -9)$ .

**Lời giải.**

**Câu 17**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $MNP$  có  $M(2; -3; 4)$ ,  $N(1; 2; 3)$  và  $P(3; -2; 2)$ . Trọng tâm của tam giác  $MNP$  có tọa độ là

- (A)  $(2; -1; 3)$ .     
  (B)  $(6; -3; 9)$ .     
  (C)  $(-2; 1; -3)$ .     
  (D)  $(-6; 3; -9)$ .

**Lời giải.**

**Câu 18**

Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = (2; 3; -3)$  và  $\vec{v} = (-3; -2; 4)$  bằng

- (A)  $\sqrt{22} - \sqrt{29}$ .     
  (B)  $-\sqrt{22} \cdot \sqrt{29}$ .     
  (C)  $24$ .     
  (D)  $-24$ .

**Lời giải.**

**Câu 19**

Trong không gian  $Oxyz$ , khoảng cách giữa hai điểm  $I(3; 5; -7)$  và  $K(-5; 5; -1)$  bằng:

- (A)  $100$ .     
  (B)  $20$ .     
  (C)  $10$ .     
  (D)  $17$ .

**Lời giải.**

**Câu 20**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (3; 1; -2)$  và  $\vec{v} = (-2; 1; 5)$ . Tọa độ của vectơ  $[\vec{u}, \vec{v}]$  là

- (A)  $(5; 7; -11)$ .     
  (B)  $(-7; 11; -5)$ .     
  (C)  $(7; -11; 5)$ .     
  (D)  $(-5; -7; 11)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 21**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Tính độ dài của  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$ .

- A  $\sqrt{74}$ .     
  B  $\frac{3\sqrt{6}}{6}$ .     
  C  $\sqrt{52}$ .     
  D  $\sqrt{42}$ .

👉 Lời giải.

**Câu 22**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; -1; 5)$ ,  $B(5; 5; 7)$ ,  $M(x; y; 1)$ . Khi  $A, B, M$  thẳng hàng thì giá trị của  $x, y, z$  là

- A  $x = 7; y = 7$ .     
  B  $x = 4; y = 7$ .     
  C  $x = 7; y = 2$ .     
  D  $x = 7; y = -4$ .

👉 Lời giải.

**Câu 23**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(1; 4; -2)$ ,  $B(2; 1; -3)$ ,  $C(3; 0; 2)$  và  $D(2; 5; -1)$ . Điểm  $G$  thỏa mãn  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$  có tọa độ là:

- A  $G(2; -1; -1)$ .     
  B  $G(2; -2; -1)$ .     
  C  $G(1; 1; -1)$ .     
  D  $G(6; 3; -2)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 24**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; -1; -2)$  và trọng tâm  $G(2; 1; -3)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$  là

- A  $(3; 6; 3)$ .     
  B  $(3; 6; -3)$ .     
  C  $(-3; 6; -3)$ .     
  D  $(3; 2; 1)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 25**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(2; 1; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$ .

- A  $\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$ .     
  B  $\left(\frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3}\right)$ .     
  C  $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .     
  D  $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; 3\right)$ .

**Lời giải.**

**Câu 26**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $E(1; 3; 2)$ ,  $F(0; -1; 5)$ ,  $K(2; 4; -1)$  và tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CK} = \vec{0}$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là:

- A  $G(1; 2; 2)$ .     
  B  $G(-1; -4; 3)$ .     
  C  $G(2; 2; 1)$ .     
  D  $G(1; -3; -1)$ .

**Lời giải.**

**Câu 27**

Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{PQ} = (0; 1; -2)$ ,  $\vec{PR} = (-2; -1; 0)$  và điểm  $M(1; -2; 2)$  trung điểm của đoạn  $QR$ . Tọa độ điểm  $Q$  là

- A  $(-1; 1; -2)$ .     
  B  $(-2; 2; -3)$ .     
  C  $(0; 1; 3)$ .     
  D  $(2; -1; 1)$ .

**Lời giải.**

**Câu 28**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$  và  $D(2; 2; 2)$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$  là:

- A  $I(1; 1; 0)$ .     
  B  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ .     
  C  $I(1; 1; 1)$ .     
  D  $I(1; 1; 2)$ .

**Lời giải.**

## Câu 29

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-2; 3; 3)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ , khi đó  $P = a^2 + b^2 - c^2$  có giá trị bằng:

- (A) 42.                      (B) -50.                      (C) -48.                      (D) 44.

👉 Lời giải.

## Câu 30

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 1; 3)$  và điểm  $B(4; -3; 1)$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  là:

- (A)  $(6; -2; 4)$ .                      (B)  $(3; -1; 2)$ .                      (C)  $(1; -2; -1)$ .                      (D)  $(2; -4; -2)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 31

Trong không gian hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (3; 4; 2)$ ,  $\vec{b} = (-5; 0; 3)$ ,  $\vec{c} = (1; 2; -4)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ .

- (A)  $\vec{u} = (2; 10; 16)$ .                      (B)  $\vec{u} = (1; 5; 8)$ .                      (C)  $\vec{u} = (-2; 10; 16)$ .                      (D)  $\vec{u} = (2; -10; 16)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 32

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (-3; 5; 2)$ ,  $\vec{b} = (0; -1; 3)$ ,  $\vec{c} = (1; -1; 1)$ . Tìm tọa độ của  $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ .

- (A)  $\vec{v} = (-9; 2; 10)$ .                      (B)  $\vec{v} = (-9; -9; 10)$ .                      (C)  $\vec{v} = (9; -9; 10)$ .                      (D)  $\vec{v} = (9; 2; 10)$ .

👉 Lời giải.

**Câu 33**

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(0; -2; 1)$  và  $B(1; -1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $M = 2\vec{MB}$ .

- A  $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$ .    
  B  $M\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$ .    
  C  $M(2; 0; 5)$ .    
  D  $M(1; -3; -4)$ .

**Lời giải.**

**Câu 34**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 1; 1)$ ,  $B(-1; -2; 1)$ . Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là?

- A  $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ .    
  B  $I(-3; 1; 0)$ .    
  C  $I\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$ .    
  D  $I\left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

**Lời giải.**

**Câu 35**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; -4; 9)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ . Độ dài đoạn thẳng  $OM$  là:

- A 5.    
  B 3.    
  C  $\sqrt{54}$ .    
  D  $\sqrt{17}$ .

**Lời giải.**

**Câu 36**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 3; 2)$ ,  $C(3; -1; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho bốn điểm  $A, B, C, D$  lập thành một hình chữ nhật.

- A  $D(4; 3; 4)$ .    
  B  $D(4; -1; 4)$ .    
  C  $D(2; -3; 2)$ .    
  D  $D(4; 1; 4)$ .

**Lời giải.**

## Câu 37

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-4; 1; 5)$ ,  $B(1; 5; -3)$ . Gọi  $C$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- Ⓐ  $\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ .      Ⓑ  $\vec{AB} = 5\vec{BC}$ .      Ⓒ  $\vec{AC} = 4\vec{BC}$ .      Ⓓ  $\vec{AC} = -4\vec{BC}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 38

Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (1; 1; -3)$ ,  $\vec{b} = (2; 2; -2)$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$  và  $\vec{d} = (1; 1; -1)$ . Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

- Ⓐ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .      Ⓑ  $\vec{a}$  và  $\vec{d}$ .      Ⓒ  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$ .      Ⓓ  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 39

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 1; -1)$ ,  $B(1; 2; 0)$ ,  $C(m; n; 0)$ . Tìm  $m, n$  sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

- Ⓐ  $m = 1; n = 1$ .      Ⓑ  $m = 1; n = 2$ .      Ⓒ  $m = 2; n = 1$ .      Ⓓ  $m = 2; n = 2$ .

👉 Lời giải.

## Câu 40

Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 vectơ  $\vec{a} = (-1; 2x - 1; 1 - 3z)$  và  $\vec{b} = (2 + 3y; -1; -2)$ . Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tổng  $T = x + 2y^2 + 3z^3$  bằng:

- Ⓐ 2.      Ⓑ 5.      Ⓒ 1.      Ⓓ 4.

👉 Lời giải.

**Câu 41**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là:

- (A)  $(-2; 1; 1)$ .     
  (B)  $(\frac{-2}{11}; \frac{3}{11}; 1)$ .     
  (C)  $(\frac{-2}{11}; \frac{3}{11}; 1)$ .     
  (D)  $(\frac{11}{3}; -2; 1)$ .

**Lời giải.**

**Câu 42**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(6; -3; 4)$ ,  $B(a; b; c)$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ ,  $(Oxz)$  và  $(Oyz)$ . Biết rằng  $M, N, P$  nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = MN = NP = PB$ . Giá trị của tổng  $a + b + c$  là

- (A) 17.     
  (B) -17.     
  (C) -11.     
  (D) 11.

**Lời giải.**

**Câu 43**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; -2; 1)$  và  $\vec{b} = (2; -4; -2)$ . Khi đó  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  bằng

- (A) 8.     
  (B) -8.     
  (C) 12.     
  (D) -12.

**Lời giải.**

**Câu 44**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\vec{b} = (x_1, y_1, z_1)$ . Tọa độ  $[\vec{a}, \vec{b}]$  là

- (A)  $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 + x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$ .     
  (B)  $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 - x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$ .  
 (C)  $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 + x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$ .     
  (D)  $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 - x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$ .

**Lời giải.**

## Câu 45

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (1; 2; 3)$ ,  $\vec{v} = (0; -1; 1)$ . Tìm tọa độ của vectơ tích có hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

- Ⓐ  $(5; 1; -1)$ .      Ⓑ  $(5; -1; -1)$ .      Ⓒ  $(-1; -1; -1)$ .      Ⓓ  $(1; -1; 5)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 46

Trong không gian  $Oxyz$ , cosin của góc tạo bởi hai vectơ  $\vec{a} = (-1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (0; -2; 1)$  là

- Ⓐ  $\frac{4}{5}$ .      Ⓑ  $-\frac{4}{5}$ .      Ⓒ  $\frac{4}{25}$ .      Ⓓ  $-\frac{4}{25}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 47

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{m} = (4; 3; 1)$  và  $\vec{n} = (0; 0; 1)$ . Gọi  $\vec{p}$  là vectơ cùng hướng với  $[\vec{m}, \vec{n}]$  và  $|\vec{p}| = 15$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{p}$  là

- Ⓐ  $(0; 9; 12)$ .      Ⓑ  $(-9; 12; 0)$ .      Ⓒ  $(0; -9; 12)$ .      Ⓓ  $(9; -12; 0)$ .

👉 Lời giải.

## Câu 48

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (-3; -1; 1)$ ,  $\vec{b} = (4; 1; 2)$ ,  $\vec{c} = (1; 0; m + 2)$ . Tìm  $m$  để ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  đồng phẳng.

- Ⓐ  $m = -5$ .      Ⓑ  $m = 5$ .      Ⓒ  $m = -1$ .      Ⓓ  $m = 1$ .

👉 Lời giải.

**Câu 49**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho  $A(1; -2; 0)$ ;  $B(1; 0; -1)$ ;  $C(0; -1; 2)$  và  $D(0; 3; m)$ . Giá trị của  $m$  thuộc khoảng nào sau đây để bốn điểm trên đồng phẳng?

- (A) (1; 2).                      (B) (-2; -1).                      (C) (-1; 1).                      (D) (5; 7).

**Lời giải.**

**Câu 50**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-1; 3; 2)$ ,  $\vec{b} = (-3; -1; 2)$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

- (A) 10.                      (B) 2.                      (C) 4.                      (D) 3.

**Lời giải.**

**Câu 51**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-3; 1; -1)$  và  $\vec{v} = (1; 0; 5)$ . Tích vô hướng của hai vectơ này bằng

- (A) -8.                      (B) 8.                      (C) 3.                      (D) -3.

**Lời giải.**

**Câu 52**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (1; 2; 3)$ ,  $\vec{v} = (0; -1; 1)$ . Tìm tọa độ của vectơ tích có hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

- (A) (5; 1; -1).                      (B) (5; -1; -1).                      (C) (-1; -1; -1).                      (D) (1; -1; 5).

**Lời giải.**

**Câu 53**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(1; 0; 4)$  và  $C(2; 3; 2)$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ .

Ⓐ  $S = \sqrt{2}$ .

Ⓑ  $S = 2\sqrt{2}$ .

Ⓒ  $S = 4\sqrt{2}$ .

Ⓓ  $S = 3\sqrt{2}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 54

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 3); B(3; 4; 5)$ . Diện tích tam giác  $OAB$  bằng

Ⓐ  $\sqrt{87}$ .

Ⓑ  $\frac{\sqrt{21}}{2}$ .

Ⓒ  $\sqrt{6}$ .

Ⓓ  $2\sqrt{6}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 55

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (3; -2; m), \vec{b} = (2; m; -1)$  với  $m$  là tham số nhận giá trị thực. Tìm giá trị của  $m$  để hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau.

Ⓐ  $m = 1$ .

Ⓑ  $m = 2$ .

Ⓒ  $m = -1$ .

Ⓓ  $m = -2$ .

👉 Lời giải.

## Câu 56

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-4; 6; 2)$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên các trục  $Ox, Oy$  và  $Oz$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $MNP$ .

Ⓐ  $S = 14$ .

Ⓑ  $S = 28$ .

Ⓒ  $S = 7$ .

Ⓓ  $S = \frac{49}{2}$ .

👉 Lời giải.

## Câu 57

Trong mặt phẳng  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (3; -1; 2), \vec{b} = (4; 2; -6)$ . Giá trị của  $|\vec{a} + \vec{b}|$  bằng

Ⓐ 66.

Ⓑ  $\sqrt{66}$ .

Ⓒ  $3\sqrt{14}$ .

Ⓓ 2.

**Lời giải.**

**Câu 58**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , điểm thuộc  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A(4; 2; -1)$  và  $B(2; 1; 0)$  là

- A  $M(-4; 0; 0)$ .     
  B  $M(5; 0; 0)$ .     
  C  $M(4; 0; 0)$ .     
  D  $M(-5; 0; 0)$ .

**Lời giải.**

**Câu 59**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; -1; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên trục  $Oy$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

- A  $(0; 1; \frac{1}{2})$ .     
  B  $(0; 2; 0)$ .     
  C  $(0; \frac{1}{2}; 0)$ .     
  D  $(0; \frac{1}{2}; 0)$ .

**Lời giải.**

**Câu 60**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(1; 1; 1)$ ,  $C(2; -1; 3)$ . Hỏi cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng  $AB$  và  $BC$  bằng bao nhiêu?

- A  $\frac{1}{3}$ .     
  B  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .     
  C  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .     
  D 1.

**Lời giải.**

**Câu 61**

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau một góc  $60^\circ$  và  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ . Khi đó  $|\vec{a} + \vec{b}|$  bằng

- A  $2\sqrt{5}$ .     
  B  $2\sqrt{7}$ .     
  C 2.     
  D  $\sqrt{5\sqrt{3} + 20}$ .

**Lời giải.**

**Câu 62**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $\vec{AB} = (-3; 0; 4)$ ,  $\vec{AC} = (5; -2; 4)$ . Độ dài đường trung tuyến  $\vec{AM}$  là

- (A)  $\sqrt{5}$ .                      (B)  $5\sqrt{2}$ .                      (C)  $3\sqrt{2}$ .                      (D) 5.

**Lời giải.**

**Câu 63**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ . Điểm  $M$  trên trục  $Ox$  có hoành độ dương và thỏa mãn  $MA^2 + MB^2 = 23$ . Khi đó tọa độ điểm  $M$  là

- (A)  $M(4; 0; 0)$ .                      (B)  $M(3; 0; 0)$ .                      (C)  $M(2; 0; 0)$ .                      (D)  $M(1; 0; 0)$ .

**Lời giải.**

**Câu 64**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (-2; 1; 5)$  và  $\vec{v} = (m - 2; 3; m + 1)$ ,  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .

- (A)  $m = -4$ .                      (B)  $m = 4$ .                      (C)  $m = -3$ .                      (D)  $m = 3$ .

**Lời giải.**

**Câu 65**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  thỏa mãn  $|\vec{u}| = 3$ ,  $|\vec{v}| = 4$ ,  $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{u} + 2\vec{v}$ .

- (A)  $\sqrt{97}$ .                      (B) 8.                      (C) 7.                      (D)  $4\sqrt{6}$ .

**Lời giải.**

**Câu 66**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 4; -5)$ ,  $B(2; 3; -6)$  và  $C(4; 4; -5)$ . Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

- A  $H\left(\frac{5}{7}; 4; -5\right)$ .     
  B  $H(1; 4; -5)$ .     
  C  $H(2; 3; -6)$ .     
  D  $H\left(\frac{7}{3}; \frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$ .

**Lời giải.**

**Câu 67**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(1; 1; 4)$ ,  $B(5; -1; 3)$ ,  $C(3; 1; 5)$  và  $D(2; 2; m)$  (với  $m$  là tham số). Xác định  $m$  để bốn điểm  $A, B, C, D$  tạo thành bốn đỉnh của một tứ diện.

- A  $m \neq 6$ .     
  B  $m \neq 4$ .     
  C  $m \in \mathbb{R}$ .     
  D  $m < 0$ .

**Lời giải.**

**Câu 68**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{OA} = (2; -1; 5)$  và điểm  $B(5; -5; 7)$ .

- Tọa độ của điểm  $A$  là  $(2; -1; 5)$ .
- Gọi  $C(a; b; c)$  thỏa mãn  $\triangle ABC$  nhận  $G(1; 1; 1)$  làm trọng tâm. Khi đó  $a + b + c = -4$ .
- Nếu  $A, B, M(x; y; 1)$  thẳng hàng thì tổng  $x + y = 3$ .
- Cho  $N \in (Oxy)$  để  $\triangle ABN$  vuông cân tại  $A$ . Tổng hoành độ và tung độ của điểm  $N$  bằng 3.

**Lời giải.**

**Câu 69**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; 4)$  và  $B(2; 3; -1)$ .

- Trọng tâm của tam giác  $OAB$  là  $G(1; 2; 1)$ .
- Khoảng cách giữa hai điểm  $A$  và  $B$  là  $\sqrt{29}$ .
- Biết  $C(a; b; c)$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $OABC$ . Khi đó giá trị  $a + b + c = -4$ .
- Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để  $D(m; m + 2; 1)$  thỏa mãn góc giữa hai véc-tơ  $\vec{OA}$  và  $\vec{BD}$  là  $45^\circ$ . Khi đó tổng các phần tử của  $S$  là  $\frac{51}{5}$ .

**Lời giải.**

### Câu 70

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; 4; 4)$  và  $C(4; 0; 5)$ .

- Tọa độ véc-tơ  $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 1)$ .
- Trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $BC$  có tọa độ là  $(1; 2; 4)$ .
- Điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC}$  có tọa độ là  $(-11; 10; 4)$ .
- Cho  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Biết điểm  $M$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $GM$  ngắn nhất. Khi đó độ dài đoạn thẳng  $GM = 4$ .

👉 Lời giải.

### Câu 71

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$ .

- Hình chiếu của điểm  $M$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là  $(-2; 3; 1)$ .
- Gọi  $E$  là điểm đối xứng của điểm  $M$  qua  $N$ . Tọa độ của điểm  $E$  là  $(-4; -1; 3)$ .
- Cho  $P(1; m - 1; 3)$ . Tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$  khi và chỉ khi  $m = 1$ .
- Điểm  $I(a; b; c)$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$  thỏa mãn  $T = |3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $2a + b + c = 9$ .

👉 Lời giải.

### Câu 72

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(-2; 2; 2)$ . Gọi  $I(a, b, c)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OAB$ . Tính  $T = a^2 + b^2 + c^2$ .

- A  $T = \frac{13}{2}$ .     
  B  $T = 6$ .     
  C  $T = 2$ .     
  D  $T = \frac{29}{4}$ .

👉 Lời giải.

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -2; 3), B(-2; 1; 2), C(3; -1; 2)$ .

- a)  $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$ .
- b)  $\vec{AC} = (-2; -1; 1)$ .
- c)  $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ .
- d) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

**Lời giải.**

**Câu 2**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(2; -1; -2), B(3; 1; 2), C(1; -1; 1)$  và  $D(x_D; y_D; z_D)$

- a)  $\vec{AB} = (1; 2; 4)$ .
- b)  $\vec{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$ .
- c)  $\vec{DC} = \vec{AB}$ .
- d) Tọa độ điểm  $D$  là  $(0; 3; 3)$ .

**Lời giải.**

**Câu 3**

Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, sao cho trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên phía trên (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí  $A$  cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.

- a) Radar ở vị trí có tọa độ  $(0; 0; 0)$ .
- b) Vị trí  $A$  có tọa độ  $(300; 200; 10)$ .
- c) Khoảng cách từ máy bay đến radar là khoảng 360,69 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- d) Radar của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí  $A$ .

**Lời giải.**

**Câu 4**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(4; 2; 1), B(2; 1; 3), C(-1; 3; -2)$ .

- a) Tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$  bằng  $(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ .

- b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng  $AB$  bằng  $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$ .
- c) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì tọa độ điểm  $D = (1; 4; -4)$ .
- d) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

👉 Lời giải.

### Câu 5

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 5; -1)$ ,  $B(7; x; 1)$ ,  $C(9; 2; y)$ .

- a) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng thì  $x + y = 5$ .
- b) Điểm  $\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; \frac{3}{3}\right)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì  $x = 1, y = 3$ .
- c) Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  khi và chỉ khi  $x = 13, y = -1$ .
- d) Tích vô hướng của  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3x + 2y + 41$ .

👉 Lời giải.

### Câu 6

Cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Xét tính đúng sai

- a)  $|\vec{a}| = 2$ .      b)  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .      c)  $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .      d)  $\vec{b} \perp \vec{c}$ .

👉 Lời giải.

### Câu 7

Cho hai vectơ  $\vec{u} = (0; 2; 3)$  và  $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$ .

- a)  $|\vec{u}| = \sqrt{13}$ .      b)  $|\vec{v}| = |\vec{u}| \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}$ .
- c)  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$ .      d)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{9}{4}$ .

👉 Lời giải.

**Câu 8**

Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(2; 1; 0)$ .

- a) Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- b) Chu vi tam giác là  $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ .
- c) Diện tích tam giác  $ABC$  là  $\sqrt{6}$ .
- d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ .

**Lời giải.**

**Câu 9**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$ ,  $C(3; -1; 2)$ .

- a)  $\vec{AB} = (-3; 3; 1)$ .
- b)  $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ .
- c) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.
- d) Tọa độ chân đường cao vẽ từ  $A$  của tam giác  $ABC$  là  $\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}; 2\right)$ .

**Lời giải.**

**Câu 10**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; 3; 5)$ ,  $B(1; 1; 3)$ ,  $C(4; -2; 3)$ .

- a) Tọa độ trung điểm của  $BC$  là  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)$ .
- b) Độ dài đoạn thẳng  $BC$  là  $3\sqrt{2}$ .
- c) Côsin  $\widehat{BAC}$  bằng  $\frac{7\sqrt{19}}{38}$ .
- d) Gọi  $D$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCD$ . Tọa độ hình chiếu của trọng tâm tam giác  $ABD$  lên mặt phẳng  $Oyz$  là  $(2; 0; 0)$ .

**Lời giải.**

**Câu 11**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{OA} = 3\vec{i} - \vec{k}$ , với  $\vec{i}, \vec{k}$  là hai vectơ đơn vị trên hai trục tọa độ  $Ox, Oz$ , hai điểm  $B(-1; 2; 3)$ ,  $C(1; 4; 1)$ .

- a)  $A(3;0;-1)$ .  
 b) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.  
 c) Điểm  $D(a;b;c)$  là điểm đối xứng của  $A$  với  $B$ . Khi đó  $a + b + c = 6$ .  
 d) Điểm  $M(m;n;p)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $2m - n + 2024p = 0$ .

👉 Lời giải.

### Câu 12

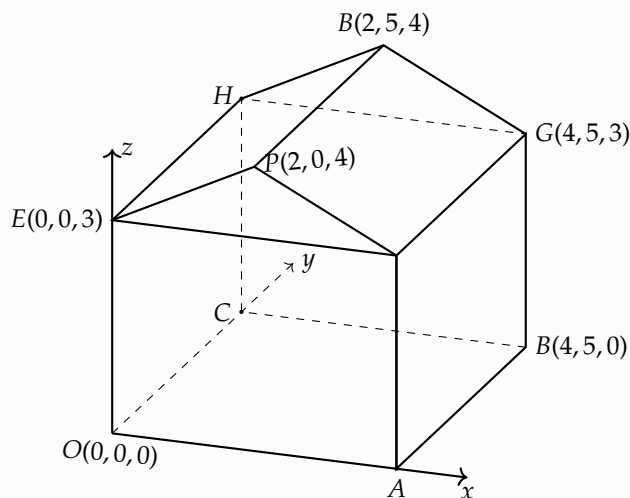
Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;2;3)$ ,  $B(2;1;5)$ ,  $C(2;4;2)$ .

- a) Tọa độ trung điểm của  $AB$  là  $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right)$ .  
 b)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = (5;7;10)$ .  
 c) Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $AC$  bằng  $30^\circ$ .  
 d) Điểm  $I(a;b;c)$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxz)$  thỏa mãn  $T = |3\vec{IB} - \vec{IC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a - 2b + 2c = 15$ .

👉 Lời giải.

### Câu 13

Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tọa độ điểm  $A$  là  $(4;0;0)$ .  
 b) Tọa độ  $\vec{AH} = (4;5;3)$ .  
 c)  $\vec{AH} \cdot \vec{AF} = 3$ .

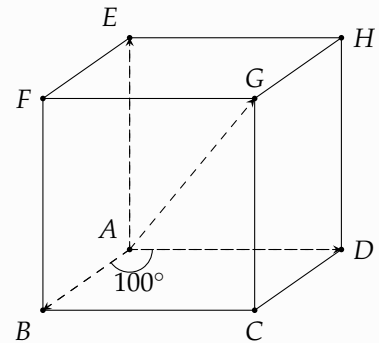
d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  bằng  $26,6^\circ$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

👉 Lời giải.

**Câu 14**

Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $100^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn là 4 N.

Giả sử hai véc-tơ hợp với nhau một góc  $100^\circ$  là  $\vec{AB}$  và  $\vec{AD}$ , véc-tơ thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho là  $\vec{AE}$ . Dựng hình hộp  $ABCD.EFGH$  (như hình vẽ). Khi đó, tổng hợp lực là



$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AG}.$$

- a)  $\widehat{ABC} = 80^\circ$ .
- b)  $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .
- c)  $AC \approx 28,9$  (Kết quả được làm tròn đến hàng mười).
- d) Độ lớn hợp lực của ba lực trên là 29,2 N (Kết quả được làm tròn đến hàng mười).

👉 Lời giải.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.**

**Câu 1**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $MNPQ.M'N'P'Q'$  với  $M(1;0;0)$ ,  $N(2;-1;1)$ ,  $Q(0;1;0)$ ,  $M'(1;2;1)$ . Biết tọa độ điểm  $P'(a;b;c)$ . Khi đó giá trị tổng  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

**Câu 2**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{u} = (1;1;-2)$ ,  $\vec{v} = (1;0;m)$ . Với  $m = m_0$  thì góc giữa hai  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  bằng  $45^\circ$ . Khi đó giá trị  $10m_0$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

👉 Lời giải.

**Câu 3**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 1; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(x; y; -1)$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ . Khi đó tổng  $x + y$  bằng bao nhiêu?

👉 Lời giải.

**Câu 4**

Trong không gian  $Oxyz$  cho các điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(3; 2; 4)$ ,  $C(0; 5; 4)$ . Xét điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $P = MA^2 + MB^2 + 2MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  đó.

👉 Lời giải.

**Câu 5**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{a} = (1; -1; 0)$  và hai điểm  $A(-4; 7; 3)$ ,  $B(4; 4; 5)$ . Hai điểm  $M, N$  thay đổi thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $\overrightarrow{MN}$  cùng hướng với  $\vec{a}$  và  $MN = 5\sqrt{2}$ . Giá trị lớn nhất của  $|AM - BN|$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

👉 Lời giải.

**Câu 6**

Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc 19 (km) và về phía Tây 11 (km), đồng thời cách mặt đất 0.8 (km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông 30 (km) và về phía Nam 8 (km), đồng thời cách mặt đất 1.2 (km). Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.

👉 Lời giải.

**Câu 7**

Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông 33 (km) và về phía Nam 57 (km), đồng thời cách mặt đất 4,9 (km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc 55 (km) và về phía Tây 46 (km), đồng thời cách mặt đất 4,9 (km). Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa hai chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời cách mặt đất trung bình giữa hai máy bay. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

**Lời giải.**

**Câu 8**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{u} = (5; -4; 2)$  và  $\vec{v} = (3; 4; 4)$ . Tính độ dài  $|\vec{u} + 2\vec{v}|$  (làm tròn đến hàng phần mười).

**Lời giải.**

**Câu 9**

Cho ba điểm  $A(-1; 1; 2)$ ,  $B(0; 1; -1)$ ,  $C(x + 2; y; -2)$  thẳng hàng. Tổng  $x + y + \frac{2}{3}$  bằng

**Lời giải.**

**Câu 10**

Một người điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí  $A$  cách vị trí điều khiển 150 m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 m. Flycam II ở vị trí  $B$  cách vị trí điều khiển 180 m về phía bắc và 240 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60 m. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  là vị trí người điều khiển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  có hướng trùng với hướng nam, trục  $Oy$  có hướng trùng với hướng đông, trục  $Oz$  vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Lời giải.**