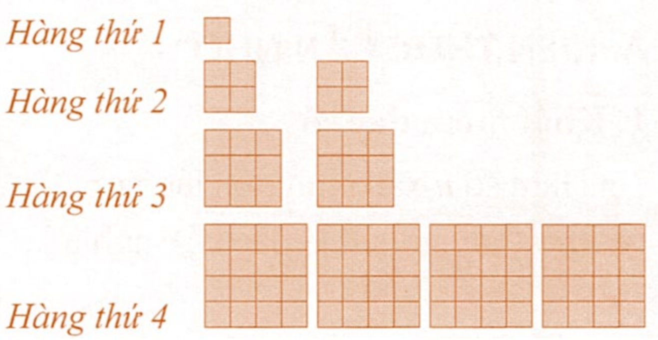
CHƯƠNG II

DÃY SỐ
CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN – DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Câu 1: Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).



a) Tính u_1,u_2,u_3,u_4.

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Giải

a) $u_1=1;u_2=8;u_3=27;u_4=64$.

b) Ta có: $u_1=1^3;u_2=2^3;u_3=3^3;u_4=4^3$. Do đó, dự đoán $u_n=n^3$.

Câu 2: Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao $950m$ so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,5m$. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?

Giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1=950$ và $d=1,5$.

Ta có $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11.1,5 = 966,5$.

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao 966,5 m so với mực nước biển.

Câu 3: Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau: Năm thứ nhất: 240 triệu;
Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương của bác Tư nhận được vào năm thứ n.

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng có $u_1 = 240$ và $d = 12$.

Ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 240 + 10 \cdot 12 = 360$.

Vậy vào năm thứ 11, số tiền lương một năm của bác Tư là 360 triệu đồng.

Câu 4: Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n.

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 20$ và $d = 1$.

Tổng số ghế có trong rạp hát là: $S_{20} = \dfrac{20 \cdot [2 \cdot 20 + (20-1) \cdot 1]}{2} = 590$ (ghế).

Tổng số tiền vé thu được là: $590.60000 = 35400000$ (đồng).

Câu 5: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.

Giải

Ta có: 2 giờ $= 120$ phút $= 6.20$ phút. Do đó, sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n-1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 200 \cdot 2^6 = 12800$.

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 6: Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8% / năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Lời giải

Khoảng 215892500 đồng.

Câu 7: Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài $100m$. Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

Lời giải

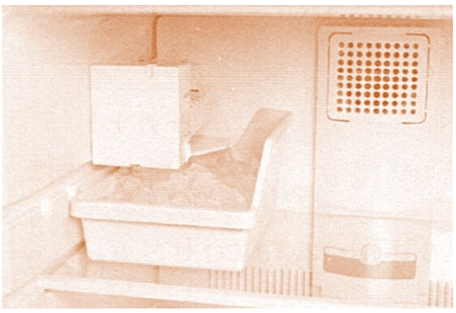
$$S_{10} = \frac{80\left(1-0,8^{10}\right)}{1-0,8} \approx 357,05(m).$$

Câu 8: Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là $6144m^2$. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.

Lời giải

$$u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 6144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12\left(m^2\right).$$

Câu 9: Một khay nước có nhiệt độ $20^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm đi 25%. Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.



Lời giải

$$u_5 = u_1 \cdot q^4 = 20 \cdot 0,75^4 \approx 6,33^\circ C.$$

Câu 10: Một vật chuyển động đều với vận tốc $20m/s$. Hãy viết các số chỉ quãng đường (đơn vị: mét) vật chuyển động được lần lượt trong thời gian 1 giây, 2 giây, 3 giây, 4 giây, 5 giây theo hàng ngang.

Lời giải

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 1 giây là: $20.1 = 20\ (m)$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 2 giây là: $20.2 = 40(m)$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 3 giây là: $20.3 = 60(m)$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 4 giây là: $20.4 = 80\ (m)$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 5 giây là: $20.5 = 100(m)$.

Vậy các số chỉ quãng đường (đơn vị: mét) vật chuyển động được lần lượt trong thời gian 1 giây, 2 giây, 3 giây, 4 giây, 5 giây theo hàng ngang là: $20, 40, 60, 80, 100$.

Câu 11: Năm 2020, số dân của một thành phố trực thuộc tỉnh là khoảng 500 nghìn người. Người ta ước tính rằng số dân của thành phố đó sẽ tăng trưởng với tốc độ khoảng 2% mỗi năm. Khi đó số dân P_n (nghìn người) của thành phố đó sau n năm, kể từ năm 2020, được tính bằng công thức $P_n = 500(1+0,02)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2030, số dân của thành phố đó là khoảng bao nhiêu nghìn người?

Lời giải

Ở đây ta có $n = 2030 - 2020 = 10$. Vậy số dân của thành phố đó vào năm 2030 sẽ là

$P_{10} = 500 \cdot (1,02)^{10} \approx 609$ (nghìn người)

Câu 12: Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng.
Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có: $s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25; n \geq 2$.

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Lời giải

a) Số hạng tổng quát của dãy số là: $s_n = 200 + 25(n-1) = 175 + 25n$

Lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty: $175 + 25.5 = 300$ (triệu đồng)

b) Ta có: $s_{n+1} = 175 + 25(n+1) = 200 + 25n > s_n$ suy ra (s_n) là dãy số tăng

Ý nghĩa: Tiền lương của anh Thành sẽ được tăng dần hàng năm

Câu 13: Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức $A_n = 100\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^n$.

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Lời giải

a) Số tiền ông An nhận được sau 1 tháng: $A_1 = 100\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^1 = 100.5$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được sau 2 tháng: $A_2 = 100\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^2 = 101.0025$ (triệu đồng)

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm: $A_{12} = 100\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12} = 106.1678$ (triệu đồng)

Câu 14: Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.
Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n).

Lời giải

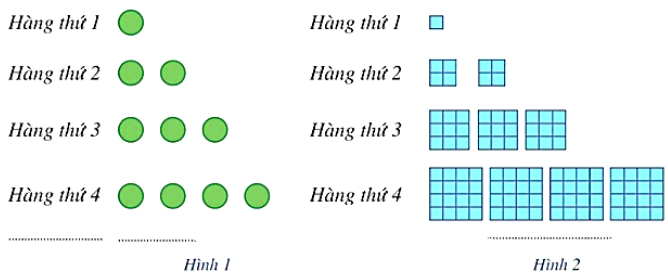
a) Ta có: $A_0 = 100$

$A_1 = 100 + 100 \times 0.008 - 2 = 98.8$
$A_2 = 98.8 + 98.8 \times 0.008 - 2 = 97.59$
$A_3 = 97.59 + 97.59 \times 0.008 - 2 = 96.37$
$A_4 = 96.37 + 96.37 \times 0.008 - 2 = 95.14$
$A_5 = 95.14 + 95.14 \times 0.008 - 2 = 93.90$
$A_6 = 93.90 + 93.90 \times 0.008 - 2 = 92.65$

Vậy sau 6 tháng số tiền chị Hương còn nợ là 92.65 triệu đồng

b) Hệ thức truy hồi: $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} \times 0.008 - 2 = 1.008A_{n-1} - 2$ (triệu đồng)

Câu 15: a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ trong Hình 1. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n).



b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong Hình 2 (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n).

Lời giải

a) Số chấm ở hàng thứ nhất là: $u_1 = 1$;

Số chấm ở hàng thứ hai là: $u_2 = 2$;

Số chấm ở hàng thứ ba là: $u_3 = 3$;

Số chấm ở hàng thứ tư là: $u_4 = 4$;

Vậy số chấm ở hàng thứ n là: $u_n = n$.

b) Diện tích của các ô màu ở hàng thứ nhất là: $v_1 = 1 = 1^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ hai là: $v_2 = 8 = 2^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ ba là: $v_3 = 27 = 3^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ tư là: $v_4 = 64 = 4^3$;

Vậy diện tích của các ô màu ở hàng thứ n là: $v_n = n^3$.

Câu 16: Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là $0,5\%$ một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n.

Lời giải

a) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là:

$P_1 = 100 + 100.0,5\% + 6 = 100,5 + 6$ (triệu đồng)

b) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$P_2 = 100,5 + 6 + (100,5 + 6)\cdot 0,5\% + 6 = (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 = 100,5(1 + 0,5\%) + 6\cdot(1 + 0,5\%) + 6$ (triệu đồng)

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$$P_3 = (100,5+6)(1+0,5\%)+6+[(100,5+6)(1+0,5\%)+6]\cdot 0,5\%+6$$
$$= 100,5\cdot(1+0,5\%)^2+6(1+0,5\%)^2+6.(1+0,5\%)+6$$

c) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 4 tháng là:

$$P_4 = (100,5+6)(1+0,5\%)^2+6\cdot(1+0,5\%)+6+\left[(100,5+6)(1+0,5\%)^2+6\cdot(1+0,5\%)+6\right]0,5\%+6$$
$$= 100,5\cdot(1+0,5\%)^3+6\cdot(1+0,5\%)^3+6(1+0,5\%)^2+6\cdot(1+0,5\%)+6$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng là:

$$P_n = 100,5\cdot(1+0,5\%)^{n-1}+6(1+0,5\%)^{n-1}+6(1+0,5\%)^{n-2}+6\cdot(1+0,5\%)^{n-3}+\ldots+6;\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Câu 17: Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 1). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:

Hình 1

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n.

b) Viết hệ thức truy hồi.

Lời giải

a) $u_n = 13+n$

b) $\begin{cases} u_1 = 14 \\ u_n = u_{n-1}+1 \end{cases}$

Câu 18: Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 2).

Hình 2

a) Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

b) Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

Lời giải

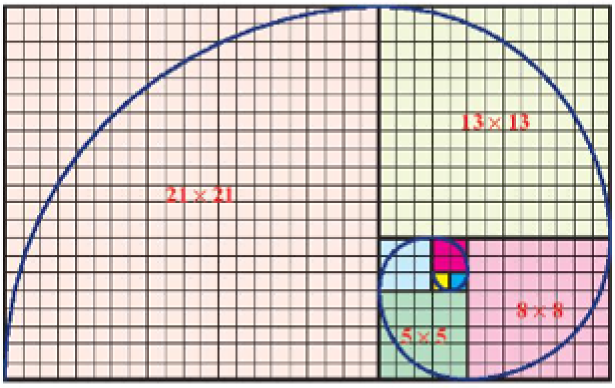
a) Ta có: $u_n = 26 - n > u_{n+1} = 26 - n - 1 = 25 - n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm

b) Ta có: $v_n = 13 + n < v_{n+1} = 13 + n + 1 = 14 + n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng

Câu 19: Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Hình 3

Lời giải

$u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = 2; u_4 = 3; u_5 = 5; u_6 = 8; u_7 = 13; u_8 = 21$

Ta có dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$

Câu 20: Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.
a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3. Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n.

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Lời giải

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$A_1 = A_0(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_0 - 120000$ (đồng)

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$A_2 = A_1(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_1 - 120000$ (đồng)

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$A_3 = A_2(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_2 - 120000$ (đồng)

Tương tự, vào cuối năm thứ $n(n \geq 1)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$A_n = A_{n-1}(1+3\%) - 120000 = 1,03A_{n-1} - 120000$ (đồng)

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4:

$A_1 = 10180000;\quad A_2 = 10365400;$
$A_3 = 10556362;\quad A_4 = 10753053.$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10753053 đồng.

Câu 21: Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Lời giải

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là

$T_1 = 50 \cdot 75\% = 37,5$ (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là

$T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125$ (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là

$T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938$ (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là

$T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203$ (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là

$T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652$ (triệu đồng).

Chú ý. Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là

$T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1}$ (triệu đồng).

Câu 22: Nếu tỉ lệ lạm phát là $3,5\%$ mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n$ (tỉ đồng)

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Lời giải

Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$A_5 = 2,5 \cdot (1,035)^5 = 2,9692$ (tỉ đồng).

Câu 23: Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$A_n = 200\left(1+\frac{0,03}{4}\right)^n, n = 0,1,2,\ldots$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Lời giải

a) Ba số hạng đầu của dãy số là $A_1 = 201,5; A_2 = 203,0113; A_3 = 204,5338$.

b) Chú ý rằng 2 năm bằng 8 quý, tức là $n = 8$. Do đó, sau 2 năm số tiền bác An nhận được là $A_8 = 212,3198$ triệu đồng.

Câu 24: Vi khuẩn E.Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E.Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E.Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể?

Lời giải

Giả sử ban đầu có 1 vi khuẩn E.Coli.

Sau 20 phút lần một, số vi khuẩn là $1 \cdot 2 = 2$.

Sau 20 phút lần hai, số vi khuẩn là $2 \cdot 2 = 2^2$.

Sau 20 phút lần ba, số vi khuẩn là $2^2 \cdot 2 = 2^3$.

Sau 20 phút lần bốn, số vi khuẩn là $2^3 \cdot 2 = 2^4$.

Tương tự như vậy sau 12 giờ (bằng $3 \cdot 12$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$2^{3\cdot 12} = 2^{36} \approx 6,87 \cdot 10^{10} (con)$.

Sau 48 giờ (bằng $3 \cdot 48 = 144$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$2^{144} \approx 2,23 \cdot 10^{43} (con)$.

Câu 25: Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.
a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Lời giải

a) Gọi $u_0 = 1,0 \cdot 10^9$ là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và u_n là số vi khuẩn trước lần dùng thuốc thứ n.

Do mỗi liều thuốc được sử dụng sau bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \cdot 10^8$ vi khuẩn và giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25% nên ta có

$u_{n+1} = \left(u_n - 4,0\cdot 10^8\right) + 25\%.u_n = 1,25u_n - 4,0\cdot 10^8.$

b) Ta tính u_5 như sau:

$u_1 = 1,0\cdot 10^9;$
$u_2 = 1,25u_1 - 4,0\cdot 10^8 = 8,5\cdot 10^8$
$u_3 = 1,25u_2 - 4,0\cdot 10^8 = 6,625\cdot 10^8;$
$u_4 = 1,25u_3 - 4,0\cdot 10^8 = 4,28125\cdot 10^8;$
$u_5 = 1,25u_4 - 4,0\cdot 10^8 = 1,3515625\cdot 10^8.$

Vậy số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm là 135156250 con.

Câu 26: Một con chó con nặng $0,4kg$ khi mới sinh và sau mỗi tuần tuổi khối lượng của nó tăng thêm 24%. Giả sử $u_n(kg)$ là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n.

a) Viết lần lượt các công thức tính u_2, u_3. Từ đó dự đoán công thức của u_n.

b) Con chó nặng bao nhiêu kilôgam khi được sáu tuần tuổi?

Lời giải

a) Giả sử $u_n(kg)$ là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n.

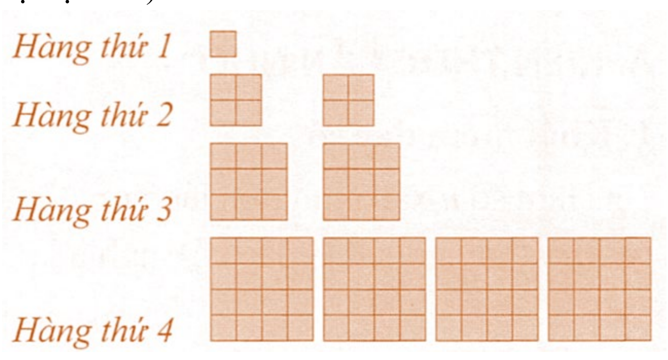
Ta có $u_1 = 0,4; u_2 = u_1 + u_1 24\% = u_1(1+24\%); u_3 = u_2 + u_2 24\% = u_1(1+24\%)^2$.

Tương tự, ta có $u_n = u_1(1+24\%)^{n-1}\forall n \ge 1$.

b) Sau sáu tuần tuổi thì con chó nặng là

$u_6 = 0,4\cdot(1+24\%)^5 = 1,17(kg).$

Câu 27: Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).



a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4.

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

a) $u_1 = 1; u_2 = 8; u_3 = 27; u_4 = 64$.

b) Ta có: $u_1 = 1^3; u_2 = 2^3; u_3 = 3^3; u_4 = 4^3$. Do đó, dự đoán $u_n = n^3$.

Câu 28: Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là $0,5\%$ một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n.

Lời giải

a) Số tiền cả gốc và lãi chị Mai có được sau 1 tháng (khi chưa gửi thêm 6 triệu đồng) là: $100+100\cdot\dfrac{0,5}{100}=100\cdot 1,005=100,5$ (triệu đồng).

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là: 100,5 + 6 = 106,5 (triệu đồng).

b) Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$106{,}5\ 1,005+6=113,0325$ (triệu đồng). Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$113{,}0325\ 1,005+6=119,5976625$ (triệu đồng).

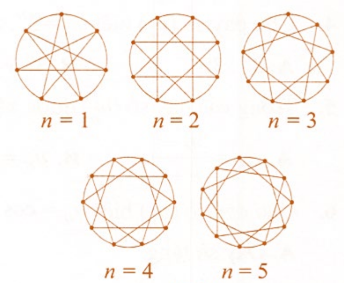
c) Ta có: $P_1=100\cdot 1,005+6$;

$$\begin{aligned}
P_2=P_1\cdot 1,005+6 &= (100\cdot 1,005+6)\cdot 1,005+6=100\cdot 1,005^2+6\cdot 1,005+6\\
P_3=P_2\cdot 1,005+6 &= \left(100\cdot 1,005^2+6\cdot 1,005+6\right)\cdot 1,005+6\\
&= 100\cdot 1,005^3+6\cdot 1,005^2+6\cdot 1,005+6;\ldots
\end{aligned}$$

Cứ như thế, ta dự đoán được công thức của P_n:

$$\begin{aligned}
P_n &= 100\cdot 1,005^n+6\cdot 1,005^{n-1}+6\cdot 1,005^{n-2}+\ldots+6\\
&= 100\cdot 1,005^n+6\cdot\left(1,005^{n-1}+1,005^{n-2}+\ldots..+1\right).
\end{aligned}$$

Câu 29: Với mỗi số nguyên dương n, lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình 1. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n).



Hình 1

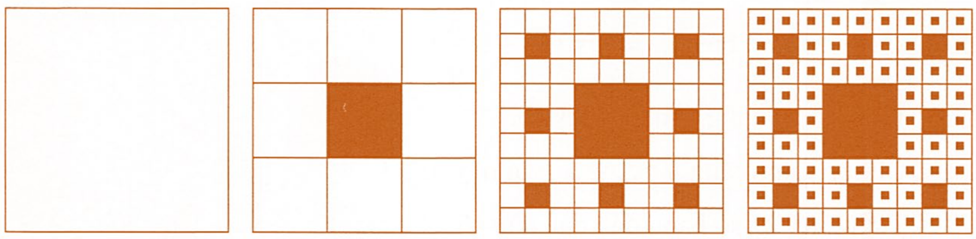
Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

Lời giải

Ta thấy đường tròn được chia thành $n+6$ cung bằng nhau và mỗi cung có số đo bằng $\left(\frac{360}{n+6}\right)^\circ$.

Do mỗi điểm được nối với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn nên góc ở đỉnh của mỗi ngôi sao là góc nội tiếp chắn $n+6-2.3=n$ cung bằng nhau đó. Suy ra số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao là $u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{360}{n+6}\cdot n=\frac{180n}{n+6}$.

Câu 30: Một hình vuông có diện tích bằng 1 đơn vị diện tích. Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại.



Hình thứ nhất *Hình thứ hai* *Hình thứ ba*

a) Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba.

b) Dự đoán công thức tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n.

Lời giải

a) Diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, hình thứ hai, hình thứ ba lần lượt là: $1-\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{1}{9};1-\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{17}{81};1-\left(\frac{8}{9}\right)^3=\frac{217}{729}$.

b) Gọi S_n là diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n. Ta có: $S_n=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

Câu 31: Khán đài A của một sân bóng có 16 hàng ghế. Biết hàng ghế đầu tiên có 8 ghế, mỗi hàng sau nhiều hơn hàng trước 2 ghế. Hỏi khán đài A của sân bóng chứa được bao nhiêu người biết rằng mỗi người chỉ ngồi 1 ghế.

Lời giải

Từ giả thiết ta có cấp số cộng có $u_1=8,d=2,n=16$.

Số ghế của khán đài A của sân bóng đó là $S_{16}=\frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]=\frac{16}{2}.(16+15.2)=368$ ghế.

Câu 32: Ông Sơn trồng cây trên một mảnh đất hình tam giác theo quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây…, ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng ông đã trồng hết 11325 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n.

Ta có: $u_1=1$, $u_2=2$, $u_3=3$, … và $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n=11325$.

Nhận xét dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Khi đó $S = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} = 11325$.

Suy ra

$\dfrac{n\left[2.1 + (n-1)1\right]}{2} = 11325 \Leftrightarrow n(n+1) = 22650 \Leftrightarrow n^2 + n - 22650 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 150 \\ n = -151 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 150$ (vì $n \in \mathbb{N}^*$).

Vậy số hàng cây được trồng là 150.

Câu 33: Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế. Các dãy sau, mỗi dãy nhiều hơn dãy ngay trước nó 4 ghế. Hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Theo đề ta có bài toán tìm tổng của 30 số đầu tiên của cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 4$.

Nên $S_n = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} \Leftrightarrow S_{30} = \dfrac{30\left[2.15 + (30-1).4\right]}{2} = 2190$.

Câu 34: Lan đang tiết kiệm để mua laptop. Trong tuần đầu tiên, cô ta để dành 200 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, cô ta đã thêm 16 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Chiếc laptop Lan cần mua có giá 1000 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì cô ấy có đủ tiền để mua chiếc laptop đó?

Lời giải

Gọi n là số tuần cô ta đã thêm 16 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình

Số tiền cô ta tiết kiệm được sau n tuần đó là $T = 200 + 16n.$

Theo đề bài, ta có $T = 200 + 16n = 1000 \Leftrightarrow n = 50.$

Vậy kể cả tuần đầu thì tuần thứ 51 cô ta có đủ tiền để mua chiếc laptop đó.

Câu 35: Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20.000 đồng, mỗi lần sau đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thắng 9 lần liên tiếp và thua ở lần thứ $10.$ Hỏi vị khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

Lời giải

Số tiền du khách đặt cược là một cấp số nhân có $u_1 = 20.000; q = 2.$

Số tiền người đó thắng 9 lần liên tiếp là $S_9 = u_1 + u_2 + ... + u_9 = u_1 . \dfrac{q^9 - 1}{q - 1} = 20000 . \dfrac{2^9 - 1}{2 - 1} = 20000.\left(2^9 - 1\right)$

Người đó thua ở lần thứ $10 \Rightarrow u_{10} = u_1 . q^9 = 20000.2^9$.

Vậy $S_9 - u_{10} = -20000$ đồng.

Câu 36: Một khách hàng có 100 triệu đồng đem gửi Ngân hàng với lãi suất 0,4 % /3 tháng, tỷ lệ lãi suất trên được tính dồn cả gốc và lãi cho mỗi Quý nếu khách hàng không rút tiền ra. Hỏi Vị khách hàng này sau hai năm thu được số tiền lãi là bao nhiêu?

Lời giải

Theo thể thức của ngân hàng, ta lập bảng sau

A. Thời điểm		**B. Tiền gốc + lãi**	**C. Lãi cộng dồn**
Đầu Năm 2018		100 000 000	
Năm thứ nhất	Cuối quý 1	104 000 000	4 000 000
	Cuối quý 2	108 160 000	8 160 000
	Cuối quý 3	112 486 400	12 486 400
	Cuối quý 4	**116 985 856**	16 985 856
Năm thứ hai	Cuối quý 1	121 665 290	21 665 290
	Cuối quý 2	126 531 902	26 531 902
	Cuối quý 3	131 593 178	31 593 178
	Cuối quý 4	**136 856 905**	36 856 905

Như vậy, sau 2 năm (8 quý) vị khách hàng trên mới có số tiền lãi 36 856 905 đồng.

Câu 37: Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Tính tổng số ghế của nhà hát đó.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$S_{25} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{25} = \frac{25}{2}\left[2u_1 + (25-1)d\right] = \frac{25}{2}[2\cdot 16 + 24\cdot 2] = 1000.$$

Vậy nhà hát đó có tổng cộng 1000 ghế.

Câu 38: Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

Lời giải

Số tiền lương trong 10 năm của anh Nam lập thành một cấp số cộng, gồm 10 số hạng, với số hạng đầu là $u_1 = 100$ và công sai $d = 20$. Tổng các số hạng này là:

$$S_{10} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{10} = \frac{10}{2}\left[2u_1 + (10-1)20\right] = \frac{10}{2}(2\times 100 + 9\times 20) = 1900 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy tổng số tiền lương anh Nam nhận sau 10 năm là 1900 triệu đồng

Câu 39: Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá của chiếc xe sau n năm là: $u_n = 680 - 55(n-1)$

Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là: $u_5 = 680 - 55(5-1) = 460$ (triệu đồng)

Câu 40: Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu cua cấp số cộng cần lấy tổng, ta có:

$$870 = S_n = \frac{n}{2}[2\times 15 + (n-1)\times 3] = \frac{n}{2}(27+3n)$$

Do đó $27n + 3n^2 - 1740 = 0$, suy ra $n = 20, n = -29$ (loại)

Vậy cần phải thiết kế 20 hàng ghế

Câu 41: Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Lời giải

Dân số mỗi năm của thành phố lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1200$, công sai $d = 30$

Dân số mỗi năm có dạng tổng quát là: $u_n = 1200 + 30(n-1)$

Dân số của năm 2030 tức $n = 11; u_{11} = 1200 + 30(11-1) = 1500$ (nghìn người)

Câu 42: Ruộng bậc thang là một hình thức canh tác có nhiều ở khu vực Tây Bắc và Đông Bắc Việt Nam. Hình ảnh ruộng bậc thang thể hiện nét đẹp văn hoá, là công trình nghệ thuật độc đáo của đồng bào vùng cao phía Bắc. Ruộng bậc thang ở một số nơi đã trở thành những địa chỉ tham quan du lịch đầy hấp dẫn của du khách trong nước và quốc tế.

Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất nằm ở độ cao $1250m$ so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,2m$.

Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 10 có độ cao là bao nhiêu so với mục nước biển?

Lời giải

Ta có thửa ruộng thấp nhất có độ cao $u_1 = 1250\ m$ so với mực nước biển.

Thửa ruộng ở bậc thứ hai cao hơn so với mực nước biển là: $u_2 = 1250 + \ 1,2\ (m)$.

Thửa ruộng ở bậc thứ ba cao hơn so với mực nước biển là: $u_3 = 1250 + 1,2 + 1,2 = 1250 + 2.1,2\ (m)$.

Thửa ruộng ở bậc thứ 10 cao hơn so với mực nước biển là: $u_{10} = 1250 + 9.1,2 = 1260,8(m)$

Câu 43: Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế,. Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70800000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 20$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng.

Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là: $S_{20} = \dfrac{[2 \cdot 20 + (20-1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 590$.

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên số vé bán ra là 590.

Vậy giá tiền của một vé là: $70800000 : 590 = 120000$ (đồng).

Câu 44: Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức: $x_n = 75 + 5(n-1)$.
(Nguồn: https://bibabo.vn)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) Chiều cao 3 năm tuổi của một đứa bé phát triển bình thường là: $x_3 = 75 + 5(3-1) = 85(cm)$

b) Ta có: $x_{n+1} = 75 + 5(n+1-1) = 75 + 5n$

Xét hiệu $x_{n+1} - x_n = 75 + 5n - [75 + 5(n-1)] = 5$

Do đó (x_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $x_1 = 75$ và công sai $d = 5$

Câu 45: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:
Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

+) Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm. Dãy số (u_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n-1) \cdot 18$.

+) Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý. Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n-1) \cdot 1,8$.

a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3-1) \cdot 18 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là:

$$S_3 = \frac{3.(120+156)}{2} = 414 \text{ (triệu đồng).}$$

+) Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12-1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24+43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10-1) \cdot 18 = 282$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là:

$$S_{10} = \frac{10.(120+282)}{2} = 2010 \text{ (triệu đồng).}$$

+) Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40-1) \cdot 1,8 = 94,2$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là:

$$S_{12} = \frac{40.(24+94,2)}{2} = 2364 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

Câu 46: Một rạp hát có 20 hàng ghế. Tính từ sân khấu, số lượng ghế của các hàng tăng dần như trong hình minh hoạ dưới đây.

Bạn hãy đếm và nêu nhận xét vé só ghế của năm hàng đâu tiên.

Làm thế nào để biết được số ghế của một hàng bất kì và tính được tổng số ghế có trong rạp hát đó?

Lời giải

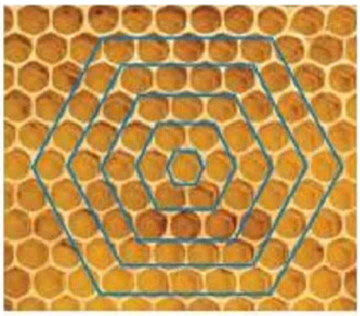
Số ghế của 5 hàng đầu tiên là: $u_1 = 14; u_2 = 17; u_3 = 20; u_4 = 23; u_5 = 26$

Số ghế hàng sau hơn số ghế hàng liền trước là 3 ghế

Số ghế của một hàng bất kì là: $u_n = 14 + 3n$

Tổng số ghế trong rạp là: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

Câu 47: Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục (Hình 2). Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có, tìm công sai của cấp số cộng này.



Hình 2

Lời giải

Số ô trên các vòng là: $u_1 = 6; u_2 = 12; u_3 = 18$

Ta thấy $u_{n+1} = u_n + 6$

Vậy các ô trên vòng tạo thành cấp số cộng có công sai là 6

Câu 48: Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế,. cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình 4).

Hình 4

a) Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.

b) Tính tổng số ghế có trong rạp.

Lời giải

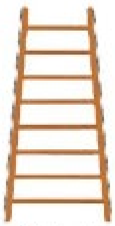
Ta có: $u_1 = 17; u_2 = 20; u_3 = 23$

Suy ra $d = 3$ và $u_n = 17 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 14$

a) $u_{20} = 3.20 + 14 = 74$

b) $S_{20} = \dfrac{20(17+74)}{2} = 910$

Câu 49: Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là $45cm, 43cm$, $41cm, \ldots, 31cm$.



Hình 5

a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?

b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Lời giải

a) Chiều dài các thanh ngang là dãy cấp số cộng có số hạng đầu là 45, công sai là -2

$u_n = 45 - 2\left(n-1\right) = 47 - 2n$

Khi $u_n = 31 \Leftrightarrow n = 8$

Vậy cái thang có 8 bậc

b) $S_8 = \dfrac{8\cdot(45+31)}{2} = 304$

Vậy chiều dài thanh gỗ là 304 cm

Câu 50: Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: $16;48;80;112;144;\ldots$ (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

a) Tính công sai của cấp số cộng trên.

b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Công sai của cấp số cộng trên là: $d = 32$

b) $S_{10} = \dfrac{10\cdot[2.16+(10-1)\cdot 32]}{2} = 1600$

Vậy tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là 1600 feet

Câu 51: Ở một loài thực vật lưỡng bội, tình trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm $5cm$. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao $100cm$. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?

Lời giải

Cây với kiểu gene AABB có chiều cao là: $100+5.4=120(cm)$

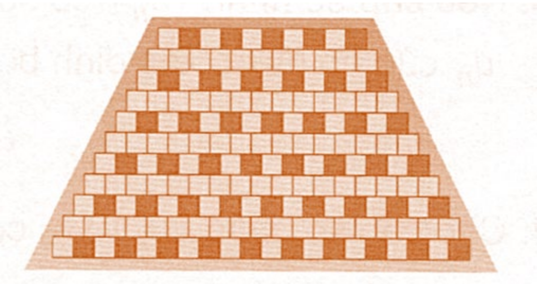
Câu 52: Một hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy. Có tất cả 27 hàng ghế. Hỏi hội trường đó có bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n. Vì hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba,. nên dãy số (u_n) lập thành cấp số cộng có $u_1 = 35$ và công sai $d = 2$. Suy ra tổng số ghế của hội trường với 27 hàng ghế là

$S_{27} = \dfrac{(2u_1 + 26d)\cdot 27}{2} = 1647\,(\text{ghế})$

Câu 53: Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng $2,4m$ ở đáy và rộng $1,2m$ ở đỉnh (hình vẽ bên).



Các viên gạch hình vuông có kích thước $10cm \times 10cm$ phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?

Lời giải

Đổi $2,4m = 240cm; 1,2m = 120cm$.

Số viên gạch ở hàng đầu tiên (ứng với đáy lớn) là $u_1 = 240:10 = 24$.

Số viên gạch ở hàng trên cùng (ứng với đáy nhỏ) là

$u_n = 120:10 = 12.$

Vì mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó nên ta thu được cấp số cộng có công sai $d = -1$.

Như vậy $u_n = 12 = u_1 + (n-1)(-1) \Rightarrow n = 13$.

Vậy số viên gạch hình vuông cần thiết để ốp hết bức tường đó là

$S_{13} = \dfrac{(u_1 + u_{13})13}{2} = 234$ (viên gạch).

Câu 54: Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?

b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Lời giải

Công thức của cấp số cộng biểu thị số viên gạch cho mỗi bậc cầu thang như sau:

$u_1 = 100, u_{n+1} = u_n + (-2), \forall n \geq 2.$

a) Ta tính $u_{30} = u_1 + (30-1)(-2) = 42$.

b) Ta tính $S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30} = \dfrac{30}{2}[2 \cdot 100 + (30-1)(-2)] = 2130$.

Như vậy, ta cần 2130 viên gạch để xây cầu thang.

Câu 55: Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chố ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với $S_n = 2040$, $u_1 = 10, d = 4$ để tìm n, ta được $2040 = S_n = \dfrac{n}{2}[2 \cdot 10 + (n-1)4]$.

Suy ra $n = 30$, tức là góc khán đài đó có 30 hàng ghế.

Câu 56: Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với

$S_n = 319200, u_1 = 35000, d = 1400,$

$319200 = S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 35000 + (n-1) \cdot 1400].$

Suy ra $n = 8$.

Vậy sau 8 năm làm việc thì tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la.

Câu 57: Bác Hưng quyết định tham gia một chương trình bơi lội để duy trì sức khoẻ. Bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó.

a) Tìm công thức truy hồi cho số phút T_n mà bác ấy bơi vào ngày thứ n của chương trình.

b) Tìm sáu số hạng đầu của dãy số T_n.

c) Tìm công thức tổng quát của dãy số (T_n).

d) Bác Hưng đạt được mục tiêu bơi it nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ bao nhiêu của chương trình?

e) Tính tổng thời gian bác Hưng bơi sau 30 ngày đầu của chương trình.

Lời giải

Gọi T_n là số phút mà bác Hưng bơi vào ngày thứ n của chương trình.

a) Do bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó nên ta có hệ thức truy hồi sau $T_1 = 10, T_{n+1} = T_n + 2 \forall n \geq 1$.

b) Sáu số hạng đầu của dãy số là

$T_1 = 10; T_2 = 12; T_3 = 14; T_4 = 16; T_5 = 18; T_6 = 20.$

c) Theo định nghĩa dãy số T_n là cấp số cộng có $T_1 = 10$ và công sai $d = 2$.

Suy ra, công thức tổng quát của dãy số là $T_n = T_1 + (n-1)d = 8 + 2n \quad \forall n \geq 1$.

d) Ta có $T_n \geq 60 \Leftrightarrow 8 + 2n \geq 60 \Leftrightarrow n \geq 26$.

Vậy bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ 26 của chương trình.

e) Tổng thời gian bác Hưng bơi trong 30 ngày đầu của chương trình là

$$S_{30} = \frac{[2T_1 + (30-1)d]30}{2} = 1170(\textit{phút}).$$

Câu 58: Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao $950m$ so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,5m$. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?

Lời giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 950$ và $d = 1,5$.

Ta có $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11.1,5 = 966,5$.

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao 966,5 m so với mực nước biển.

Câu 59: Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau: Năm thứ nhất: 240 triệu;
Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương của bác Tư nhận được vào năm thứ n.

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng có $u_1 = 240$ và $d = 12$.

Ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 240 + 10 \cdot 12 = 360$.

Vậy vào năm thứ 11, số tiền lương một năm của bác Tư là 360 triệu đồng.

Câu 60: Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n.

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 20$ và $d = 1$.

Tổng số ghế có trong rạp hát là: $S_{20} = \dfrac{20 \cdot [2 \cdot 20 + (20-1) \cdot 1]}{2} = 590$ (ghế).

Tổng số tiền vé thu được là: $590.60000 = 35400000$ (đồng).

Câu 61: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:
Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em nên chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

Ở phương án trả lương thứ nhất, số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có số hạng đầu $u_1 = 120$, công sai $d = 18$.

Ở phương án trả lương thứ hai, số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng $\left(v_n\right)$ có số hạng đầu $v_1 = 24$, công sai $d' = 1,8$.

a) Nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 1 là tổng 3 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S_3 = \frac{\left(2u_1 + 2d\right)\cdot 3}{2} = 3u_1 + 3d = 3\cdot 120 + 3.18 = 414 \text{ (triệu đồng).}$$

Do 1 năm có 4 quý nên tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 2 là tổng 12 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S'_{12} = \frac{\left(2v_1 + 11d'\right)\cdot 12}{2} = 12v_1 + 66d' = 12\cdot 24 + 66\cdot 1,8 = 406,8 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì em nên chọn phương án 1.

b) Nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 1 bằng:

$$S_{10} = \frac{\left(2u_1 + 9d\right)\cdot 10}{2} = 10u_1 + 45d = 10\cdot 120 + 45\cdot 18 = 2010 \text{ (triệu đồng).}$$

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 2 bằng:

$$S'_{40} = \frac{\left(2v_1 + 39d'\right)\cdot 40}{2} = 40v_1 + 780d' = 40.24 + 780\cdot 1,8 = 2364 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì em nên chọn phương án 2.

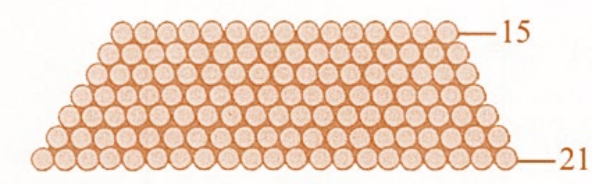
Câu 62: Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

Lời giải

Lúc 1 giờ đêm, toà tháp đánh 1 tiếng chuông; lúc 2 giờ đêm, toà tháp đánh 2 tiếng chuông;.; lúc $12h$ trưa, toà tháp đánh 12 tiếng chuông. Ngoài ra, mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông (có 11 lần như thế từ 1 giờ đến 12 giờ).

Vậy tổng số tiếng chuông là: $S=(1+2+3+\ldots+12)+1.11=89$

Câu 63: Các khúc gỗ được xếp như Hình 2. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc,., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.

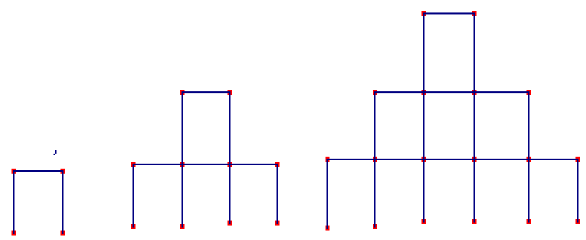


Hình 2

Lời giải

Tổng số khúc gỗ được xếp là: $15+16+\ldots+21=\dfrac{(21+15)\cdot 7}{2}=126$.

Câu 64: Bạn Gia Linh xếp que diêm thành hình tháp trên mặt sân như hình vẽ:



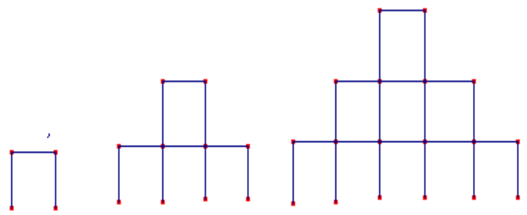
1 tầng 2 tầng 3 tầng

a) Hỏi nếu có 5 tầng thì cần bao nhiêu que diêm xếp tầng đế của tháp?

b) Hỏi nếu có 100 tầng thì cần bao nhiêu que diêm xếp tầng đế của tháp?

c) Để xếp được tháp có 10 tầng thì bạn An cần đúng bao nhiêu que diêm?

Lời giải



1 tầng 2 tầng 3 tầng

a) Xếp 1 tầng cần 3 que xếp đế tháp,

Xếp 2 tầng cần 7 que xếp đế tháp,

Xếp 3 tầng cần 11 que xếp đế tháp,

Xếp 4 tầng cần 15 que xếp đế tháp,

Xếp 5 tầng cần 19 que xếp đế tháp.

b) Giả sử để xếp n tầng thì cần u_n que xếp tầng đế, khi đó ta có:

Cách 1:

$u_1=3$

$u_2 = u_1 + 4$

$u_3 = u_2 + 4 = u_1 + 2.4$

$u_4 = u_3 + 4 = u_1 + 3.4$

$u_5 = u_4 + 4 = u_1 + 4.4$

......

$u_{100} = u_{99} + 4 = u_1 + 99.4 = 3 + 99.4 = 399$

Cách 2: Theo giả thiết số que diêm xếp tầng đế của tháp lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Do đó số que diêm xếp tầng đế của tháp nếu có 100 tầng là:

$u_{100} = u_1 + (100-1).d = 3 + 99.4 = 399$.

c) Số que ở 1 tầng là $u_1 = 3$.

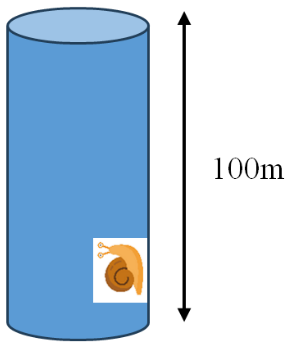
Tổng số que ở 2 tầng là $u_1 + u_2 = 3 + 7$.

Tổng số que ở 3 tầng là $u_1 + u_2 + u_3 = 3 + 7 + 11$.

Ta có cấp số cộng $u_1 = 3$, $d = 4$, tính S_{10} ?

Để cần có 10 tầng cần tổng $S_{10} = \dfrac{10}{2}(2.3 + 9.4) = 210$ que.

Câu 65: Một con ốc sên bị rơi vào 1 cái giếng sâu 100 mét. Ốc sên cố gắng thoát ra bằng cách mỗi ngày trèo lên thêm 1 đoạn 3m so với ngày trước đó theo chiều cao của miệng giếng. Biết rằng ngày đầu tiên con ốc sên trèo được 2m. Hỏi sau ngày thứ 30, con ốc sên có trèo ra khỏi được giếng hay chưa?



Lời giải

Theo giả thiết số mét ốc sên bò được qua các ngày lập thành một cấp số cộng với ngày thứ nhất bò được là $u_1 = 2$ (m) và công sai $d = 3$ (m)

Do đó số mét ốc sên bò được sau 30 ngày là: $u_{30} = u_1 + (30-1)d = 2 + 29.3 = 89$ (m)

Vậy sau ngày thứ 30 con ốc sên vẫn chưa ra khỏi miệng giếng.

Câu 66: Một công ty trả lương cho anh **A** theo phương thức sau: Mức lương quý đầu tiên là $4,5$ triệu đồng/ quý. Kể từ quý tiếp theo, mỗi quý được tăng thêm $0,3$ triệu đồng. Hỏi tổng số tiền lương anh **A** nhận được sau 3 năm làm việc?

Lời giải

Gọi u_n là mức lương ở quý thứ n thì: $u_1 = 4,5$ và $d = 0,3$

1 năm có 4 quý nên 13 năm có 12 quý $\Rightarrow u_{12} = 4,5 + (12-1).0,3 = 7,8$.

Vậy: $S_{12} = \dfrac{(u_1 + u_{12})12}{2} = \dfrac{(4,5 + 7,8).12}{6} = 73,8$ (triệu đồng).

Câu 67: Dân số nước ta năm 2008 là 84 triệu người (đứng thứ 13 trên thế giới) bình quân dân số tăng 1 triệu người/ năm (bằng dân số 1 tỉnh). Với tốc độ tăng dân số như thế, năm 2026 dân số nước ta là bao nhiêu? Dự đoán đến năm nào thì dân số nước ta đạt mốc 1 tỷ người?

Lời giải

Theo giả thiết thì tốc độ tăng dân luôn ổn định đều qua các năm.

Do vậy số dân hằng năm lập thành một cấp số cộng với công sai $d=1$ triệu, $u_1=84$ triệu.

Nên dân số năm 2026 là: $u_{19} = 84 + (19-1).1 = 102$ triệu.

Theo dự đoán dân số nước ta được 1 tỉ người khi $n-1=1000-84 \Rightarrow n=917$.

Như vậy dân số nước ta được 1 tỷ vào năm 2925.

Câu 68: Khi ký hợp đồng dài hạn với các kỹ sư được tuyển dụng, công ty liên doanh A đề xuất hai phương án trả lương để người lao động tự lựa chọn, cụ thể:

+ ***Phương án 1:*** Người lao động sẽ nhận được 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên, kể từ năm làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng 3 triệu đồng mỗi năm.

+ ***Phương án 2:*** Người lao động sẽ nhận được 7 triệu đồng cho quý làm việc đầu tiên, kể từ quý thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500 000 đồng mỗi quý.

Nếu em là người ký hợp đồng lao động với công ty liên doanh A thì em sẽ chọn phương án nào?

Lời giải

Gọi n là số năm ký hợp đồng làm việc với công ty A ($n>0$)

Nếu ký hợp đồng theo phương án 1 thì tổng số tiền lương nhận được trong n năm là:

$$S_1 = n.36 + \frac{n(n-1)}{2}.3 = \frac{3n^2+69n}{2} \text{ (triệu đồng)}$$

Nếu ký hợp đồng theo phương án 2 thì tổng số tiền lương nhận được trong n năm là:

$$S_2 = 4n.7 + \frac{4n(4n-1)}{2}.0,5 = 4n^2+27n \text{ (triệu đồng)}$$

Xét $S_1 - S_2 = \dfrac{3n^2+69n}{2} - (4n^2+27n) = \dfrac{-5n^2+15n}{2}$

$$S_1 - S_2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-5n^2+15n}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 3$$

Vậy nếu làm việc không quá 3 năm thì lựa chọn theo phương án 1, nếu làm việc trên 3 năm thì lựa chọn phương án 2.

Câu 69: Tương truyền rằng nhà Vua Ấn Độ cho phép người phát minh ra bàn cờ vua (Seta) được lựa chọn một phần thưởng tùy thích. Người đó chỉ xin nhà vua thưởng cho số hạt thóc đặt lên 64 ô của bàn cờ vua như sau: Đặt lên ô thứ nhất của bàn cờ 1 hạt thóc, tiếp đến ô thứ hai 2 hạt, … cứ như vậy, số hạt thóc ở ô sau gấp đôi số hạt thóc ở ô liền trước cho đến ô cuối cùng. Hãy tìm tổng số hạt thóc mà nhà vua phải ban cho người phát minh ra bàn cờ vua.

Lời giải

Số hạt thóc là tổng của 64 số hạng đầu của cấp số nhân có $u_1 = 1,\ q = 2$:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Giả sử 1000 hạt thóc nặng 20gam, thì khối lượng thóc là $\dfrac{20\left(2^{64}-1\right)}{1000}\ gam \approx$ 369 tỷ tấn.

Như vậy là nhà vua đã nhầm khi nghĩ là mình thừa sức để thưởng cho nhà thông thái. Trong khi ngày nay, toàn thế giới chỉ sản xuất được khoảng hơn 2 tỷ tấn lương thực mỗi năm. Nếu đem rải đều số thóc này lên bề mặt trái đất thì sẽ được một lớp thóc dày 9mm. Nhà vua sẽ không thể có được số thóc khổng lồ như vậy.

Câu 70: Tỉ lệ tăng dân số của Thành phố A là $1,68\%$. Biết rằng số dân của Thành phố A hiện nay là $1,8$ triệu người. Số dân sau 5 năm của tỉnh đó là bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $P_0 = 1800000 = 1,8 \cdot 10^6$ và $r = 1,68\% = 0,0168$.

Gọi P_n là số dân của Thành phố A sau n năm nữa.

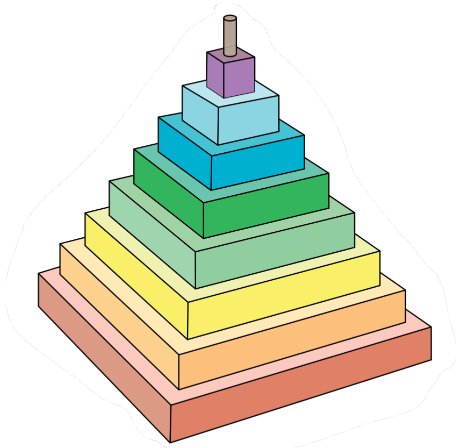
Ta có: $P_{n+1} = P_n + P_n r = P_n(1+r)$. (Số dân của năm sau bằng số dân của năm trước cộng với số dân tăng thêm).

Suy ra $\left(P_n\right)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu P_0 và công bội $q = 1 + r$.

Do đó số dân của Thành phố A sau 5 năm nữa là:

$P = P_0(1+r)^5 = 1800000.(1+0,0168)^5 \approx 1956366$.

Câu 71: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 8 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $512\,cm^2$). Tính diện tích mặt trên cùng

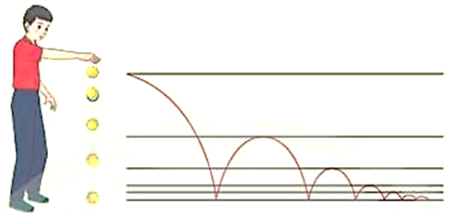


Lời giải

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{1}{2}$ và $u_1 = \dfrac{512}{2} = 256$.

Khi đó diện tích mặt trên cùng là: $u_8 = u_1 \cdot q^7 = 256.\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 = 2\ (cm)$.

Câu 72: Một quả bóng rơi từ một vị trí có độ cao $120cm$. Khi chạm đất, nó luôn nảy lên độ cao bằng một nửa độ cao của lần rơi trước đó.



Gọi $u_1 = 120$ là độ cao của lần rơi đầu tiên và $u_2; u_3; \ldots; u_n; \ldots$ là độ cao của các lần rơi kế tiếp. Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) và tìm điểm đặc biệt của dãy số đó.

Lời giải

$u_2 = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60$

$u_3 = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$

$u_4 = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$

$u_5 = \frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{15}{2}$

Dãy số có mỗi số hạng đều bằng một nửa số hạng đứng liền trước.

Câu 73: Một công ty tuyển một chuyên gia về công nghệ thông tin với mức lương năm đầu là 240 triệu đồng và cam kết sẽ tăng thêm 5% lương mỗi năm so với năm liền trước đó. Tính tổng số lương mà chuyên gia đó nhận được sau khi làm việc cho công ty 10 năm (làm tròn đến triệu đồng).

Lời giải

Lương hằng năm (triệu đồng) của chuyên gia lập thành một cấp số nhân, với số hạng đầu $u_1 = 240$ và công bội $q = 1,05$. Tổng số lương của chuyên gia đó sau 10 năm chính là tổng của 10 số hạng đầu của cấp số nhân này và bằng $S_{10} = \frac{u_1\left(1 - q^{10}\right)}{1 - q} = \frac{240\left[1 - (1,05)^{10}\right]}{1 - 1,05} \approx 3019.$

Vậy tổng số lương (làm tròn đến triệu đồng) của chuyên gia đó sau 10 năm là 3019 triệu đồng hay 3,019 tỉ đồng.

Câu 74: Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Lời giải

Số vi khuẩn mỗi giờ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5000$ và công bội $q = 1.08$

Công thức tổng quát: $u_n = 5000 \times 1.08^{n-1}$

Sau 5 giờ số vi khuẩn là: $u_5 = 5000 \times 1.08^{5-1} = 5161$ (con vi khuẩn)

Câu 75: Một nhà máy tuyển thêm công nhân vào làm việc trong thời hạn ba năm và đưa ra hai phương án lựa chọn về lương như sau:

- Phương án 1: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 500 nghìn đồng.

- Phương án 2: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 5%.

Với phương án nào thì tổng lương nhận được sau ba năm làm việc của người công nhân sẽ lớn hơn?

Lời giải

Theo phương án 1, tiền lương mỗi quý sẽ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5\times 3 = 15$, công sai $d = 0.5\times 3 = 1.5$

Công thức tổng quát là: $u_n = 15 + 1.5(n-1)$

Sau 3 năm làm việc (tương ứng với 12 quý) lương của người nông dân là: $\frac{12}{2}[2\times 15 + (12-1)\times 1.5] = 279$ (triệu đồng)

Theo phương án 2, tiền lương mỗi quý sẽ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5\times 3 = 15$, công bội $q = 1.05$

Công thức tổng quát là: $u_n = 15\times 1.05^{n-1}$

Sau 3 năm làm việc lương của người nông dân là: $\frac{15\left(1-1.05^{12}\right)}{1-1.05} = 238.757$ (triệu đồng)

Vậy theo phương án 1 thì tổng lương nhận được của người nông dân là cao hơn

Câu 76: Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá trị của chiếc máy ủi mỗi năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 3 và công bội $q = 0.8$.

Giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm sử dụng là: $u_5 = 3\times 0.8^{5-1} = 0.1875$ (tỷ đồng)

Câu 77: Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là $0,91\%$. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Lời giải

Dân số hằng năm lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 97 và công bội $q = 1.0091$

Dân số của quốc gia đó năm 2030 (tức $n = 11$) là $u_{11} = 97\times 1.0091^{11-1} = 106.197$ (triệu người)

Câu 78: Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là $50mg$, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải

Lượng thuốc trong máu mỗi ngày cảu bệnh nhân lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 50 và công bội $q = 0.5$

Tổng lượng thuốc trong máu 10 ngày liên tiếp chính là tổng 10 số hạng đầu cảu cấp số nhân này và bằng: $S_n = \dfrac{50\left[1-(0.5)^{10}\right]}{1-0.5} = 99.902(mg)$

Câu 79: Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Lời giải

Lúc 1 giờ đồng hồ đánh 1 tiếng chuông.

Lúc 2 giờ đồng hồ đánh 2 tiếng chuông

Lúc 12 giờ trưa đồng hồ đánh 12 tiếng chuông.

Do đó, từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh số tiếng chuông là: $1+2+3+\ldots.+11+12$

Đây là tổng 12 số hạng của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Vậy tổng số tiếng chuông đồng hồ trong khoảng thời gian từ 0 đến 12 giờ trưa là: $S_{12} = \dfrac{12\times(1+12)}{2} = 78$

Câu 80: Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải

Số tế bào phân chia sau mỗi 20 phút tạo thành cấp số nhân với số hạng đầu là 2, công bội là 2

Sau 24 giờ (tức $n = (24\times 60):20 = 72$) tế bào ban đầu phân chia thành số tế bào là: $u_{72} = 2\times 2^{71} = 4.722\times 10^{21}$

Suy ra ba số cần tìm là $18, 7, -4$ hoặc $3, 7, 11$

Câu 81: Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân $0,5m$. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao $16cm$.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Lời giải

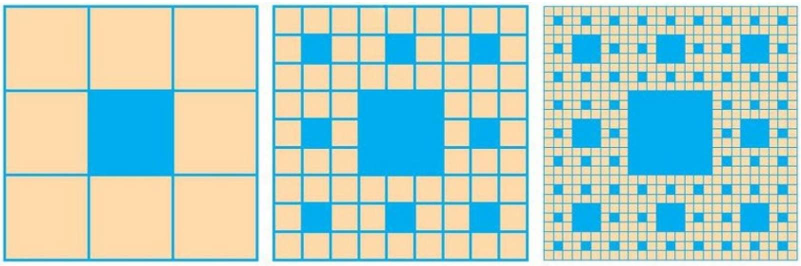
a) Mỗi bậc thang cao $16cm = 0,16m$.

$\Rightarrow n$ bậc thang cao $0,16n(m)$

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân $0,5m$ nên công thức tính độ cao của bậc n so với mặt sân sẽ là: $h_n = \left(0,5+0,16n\right)\left(m\right)$

b) Độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân ứng với $n=25$ là: $h_{25}=0,5+0,16.25=4,5\left(m\right)$

Câu 82: Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?



Hình 2.1

Lời giải

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ nhất là: $\frac{1}{9}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^0

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ hai là: $\frac{1}{9^2}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^1

…

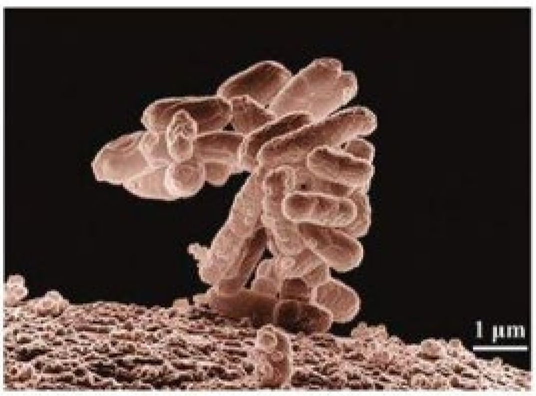
Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ năm là: $\frac{1}{9^5}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^4

Tổng diện tích các ô vuông màu xanh là: $\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}\times 8^1+\ldots+\frac{1}{9^5}\times 8^4=0.445$

Câu 83: Vi khuẩn E.coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. (Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, 2010)

Giả sử lúc đầu có 100 vi khuẩn E.coli.

Hỏi có bao nhiêu vi khuẩn E.coli sau 180 phút?



Hình ảnh phóng to của vi khuẩn E.coli

Lời giải

Số lượng vi khuẩn lúc đầu $Q_0 = 100$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi đầu tiên (sau $20 = 1.20$ phút) là: $Q_1 = 100.2 = 200$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ hai (sau $40 = 2.20$ phút) là: $Q_2 = 100 \cdot 2 \cdot 2 = 100.2^2 = 400$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ ba (sau $60 = 3.20$ phút) là: $Q_3 = 100 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^3 = 800$ (vi khuẩn).

Tổng quát: Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ n (sau $n.20$ phút) là: $Q_n = 100.2^n$ (vi khuẩn).

Vì vậy số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ thứ 9 (sau $180 = 9.20$ phút) là: $Q_9 = 100.2^9 = 51200$ (vi khuẩn).

Câu 84: Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14% /năm. (Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là: $u_1 = 97,6 + 97,6 \cdot 0,0114 = 97,6 \cdot (1 + 0,0114)$ $= 97,6.1,0114 \approx 98,7$ (triệu người).

b) Gọi u_n là dân số của Việt Nam sau n năm.

Do tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,14% nên ta có: $\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,0114 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,0114) \\ &= u_{n-1} \cdot 1,0114, \quad n \geq 2. \end{aligned}$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 97,6.1,0114$, công bội $q = 1,0114$.

Vậy dân số của Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020 là: $u_n = 97,6 \cdot 1,0114 \cdot 1,0114^{n-1} = 97,6 \cdot 1,0114^n$ (triệu người).

Câu 85: Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/ năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

Lời giải

Số tiền ban đầu $T_1 = 100$ (triệu đồng).

Số tiền sau 1 năm bác Linh thu được là: $T_2 = 100 + 100.6\% = 100.(1 + 6\%)$ (triệu đồng)

Số tiền sau 2 năm bác Linh thu được là: $T_3 = 100.(1+6\%) + 100.(1+6\%).6\% = 100.(1+6\%)^2$ (triệu đồng)

Số tiền sau 3 năm bác Linh thu được là: $T_4 = 100.(1+6\%)^2 + 100.(1+6\%)^2.6\% = 100.(1+6\%)^3$ (triệu đồng)

Số tiền sau n năm bác Linh thu được chính là một cấp số nhân với số hạng đầu $T_1 = 100$ và công bội $q = 1+6\%$ có số hạng tổng quát là:

$T_{n+1} = 100.(1+6\%)^n$ (triệu đồng).

Câu 86: Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n.

Ta có: $u_1 = 60$;

$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,08 = u_{n-1} \cdot (1+0,08) = u_{n-1} \cdot 1,08$.

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1,08$.

Áp dụng công thức tính tổng S_n, ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm là: $S_{10} = \dfrac{60\left(1-1,08^{10}\right)}{1-1,08} \approx 869,194$ (triệu đồng).

Câu 87: Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1%/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.
a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Ta có dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_0 = 2$ triệu dân và công sai q = 1%. Khi đó số hạng tổng quát của $u_n = 2 \cdot (1+1\%)^{n-1}$ (triệu dân).

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là:

$u_{10} = 2 \cdot (1+1\%)^{10-1} \approx 2,19$ (triệu dân).

Câu 88: Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).
a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

a) Sau 1 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$u_1 = 800 - 800.4\% = 800.(1-4\%) = 768$ (triệu đồng).

Sau 2 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$u_1 = 800.(1-4\%) - 800.(1-4\%).4\% = 800.(1-4\%)^2 = 737,28$ (triệu đồng).

b) Gọi (u_n) là giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

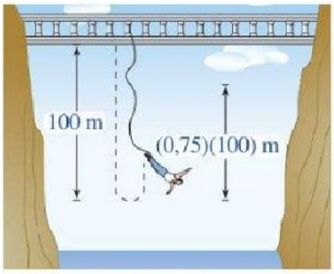
Dãy số (u_n) tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu là giá trị đầu của ô tô là $u_0 = 800$ triệu đồng và công bội $q = 1-4\%$.

Khi đó công thức tổng quát để tính $u_n = 800.(1-4\%)^n$.

c) Sau 10 năm sử dụng giá trị của ô tô còn lại là:

$u_{10} = 800.(1-4\%)^{10} \approx 531,87$ (triệu đồng).

Câu 89: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài $100m$. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Hình 3

Lời giải

Gọi (u_n) là độ dài dây kéo sau n lần rơi xuống ($n \in \mathbb{N}$)

Ta có: $u_0 = 100(m)$

Sau lần rơi đầu tiên độ dài dây kéo còn lại là: $u_1 = 100.75\%(m)$.

Sau cú nhảy tiếp theo độ dài dây kéo còn lại là: $u_2 = 100.75\%.75\% = 100.(75\%)^2(m)$.

Dãy số này lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là 100 và công bội $q = 0,75\%$, có công thức tổng quát $(u_n) = 100.(0,75\%)^{n-1}$ (m). Tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống là: $S_{10} = \dfrac{100\left(1-(75\%)^{10}\right)}{1-75\%} \approx 377,5(m)$

Câu 90: Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây,. ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử người ta đã trồng được n hàng.

Số cây ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Tổng số cây ở n hàng cây là:

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = 4950$$
$$\Leftrightarrow n^2 + n - 9900 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 99 \vee n = -100 \text{ (L)}$$

Vậy có 99 hàng cây được trồng theo cách trên.

Câu 91: Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288\,m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Lời giải

Diện tích mặt đáy tháp là $u_1 = 12288\left(m^2\right)$.

Diện tích mặt sàn tầng 2 là: $u_2 = 12288.\frac{1}{2} = 6144\left(m^2\right)$.

.

Gọi diện tích mặt sàn tầng n là u_n với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân là $u_1 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$, có số hạng tổng quát là:

$$u_n = 12288.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Diện tích mặt tháp trên cùng chính là mặt tháp thứ 11 nên ta có:

$$u_{11} = 12288\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11-1} = 12\left(m^2\right)$$

Câu 92: Một khay nước có nhiệt độ $23^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C

Lời giải

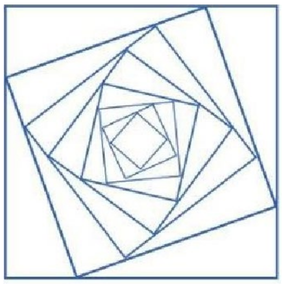
Gọi u_n là nhiệt độ của khay nước đó sau n giờ (đơn vị độ C) với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_1 = 23; u_2 = 23 - 23.20\% = 23.(1-20\%) = 23.80\%; u_3 = 23.80\%.80\% = 23.(80\%)^2; \ldots$

Suy ra dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 23$ và công bội $q = 80\%$ có số hạng tổng quát $u_n = 23.(80\%)^{n-1}$ độ C

Vậy sau 6 giờ thì nhiệt độ của khay là $u_6 = 23.(80\%)^5 \approx 7,5^{\circ}C$.

Câu 93: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n. Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Lời giải

Độ dài cạnh của hình vuông đầu tiên là: $a_1 = 4$.

Độ dài cạnh của hình vuông thứ n là: a_n.

Độ dài cạnh của hình vuông thứ $n+1$ là: $a_{n+1} = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right) \cdot a_n$.

Suy ra: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

Vậy (a_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = 4$ và công bội $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 94: Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Lời giải

Gọi (u_n) là số tiền sau mỗi tháng ông An còn nợ ngân hàng.

Lãi suất mỗi tháng là 1%.

Ta có:

$u_1 = 1000000000$ đồng.

$u_2 = u_1 + u_1 \cdot 1\% - a = u_1(1+1\%) - a$ (đồng)

$u_3 = u_1(1+1\%) - a + \left[u_1(1+1\%) - a\right] \cdot 1\% - a = u_1(1+1\%)^2 - a(1+1\%) - a$

…

$u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - a(1+1\%)^{n-2} - a(1+1\%)^{n-3} - a(1+1\%)^{n-4} - \ldots - a.$

Ta thấy dãy $a(1+1\%)^{n-2}; a(1+1\%)^{n-3}; a(1+1\%)^{n-4}; \ldots; a$ lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = a$ và công bội $q = 99\%$ có tổng $n-2$ số hạng đầu là:

$$S_{n-2} = \frac{a\left(1-(99\%)^{n-2}\right)}{1-99\%} = 100a\left[1-(99\%)^{n-2}\right].$$

Suy ra $u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - 100a\left[1-(99\%)^{n-2}\right]$.

Vì sau 2 năm bằng 24 tháng thì ông An trả xong số tiền nên $n = 24$ và $u_{24} = 0$. Do đó ta có:

$u_{24} = u_1(1+1\%)^{23} - 100a\left[1-(99\%)^{22}\right] = 0$

$\Leftrightarrow 1000000000.(99\%)^{23} - 100a\left[1-(99\%)^{22}\right] = 0$

$\Leftrightarrow a = 40006888,25$

Vậy mỗi tháng ông An phải trả 40006888,25 đồng.

Câu 95: Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Lời giải

Dân số qua các năm là:

$u_{2011} = P$

$u_{2012} = P + aP = P(1+a) = u_{2011} \cdot (1+a)$

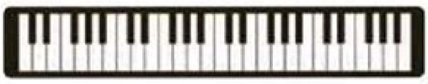
$u_{2013} = P(1+a) + aP(1+a) = P(1+a)^2 = u_{2012} \cdot (1+a)$

…..

$u_{n+1} = u_n(1+a)$

Vậy dân số các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là $1+a$

Câu 96: Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân.



Hình 1

Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là $415\,Hz$ và $466\,Hz$ (theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt nhạc)). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Do tần số của ba phím Sol, La, Si tạo thành cấp số nhân nên gọi tần số 3 phím lần lượt là: a, aq, aq^2

Ta có: $a = 415$ và $aq^2 = 466$. Nên $q = 1,06$

Suy ra: $aq = 440$

Vậy tần số của phím La là $440\,Hz$

Câu 97: Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/ Poloni-210). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

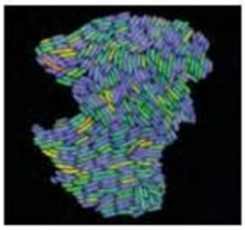
b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải

a) Sau $690 = 138.5$ ngày, tức là sau 5 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là: $20.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1,25(\text{ gam })$

b) Sau $7314 = 138.53$ ngày, tức là sau 53 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là: $20.\left(\frac{1}{2}\right)^{52} = 4,44.10^{-15}$ (gam)

Câu 98: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

Lời giải

Tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút là: $S_{20} = \dfrac{20\cdot\left[1-2^{20}\right]}{1-2} = 20971500$

Câu 99: Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là $0,75\%$.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Lời giải

Dân số của thành phố từ năm 2022 lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $1+0,0075=1,0075$

Dân số của thành phố vào năm n là: $u_n=2,1.1,0075^{n-2022}$

a) $u_{2032}=2,1.1,0075^{2032-2022}=2,26$

b) Khi $u_n=2.u_{2022}\Leftrightarrow 1,0075^{n-2022}=2\Leftrightarrow n=2115$

Vậy đến năm 2115, dân số thành phố gấp đôi so với năm 2022

Câu 100: Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là $9m$.

(Hình 3)

a) Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.

b) Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.

Lời giải

Độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ nhất là $u_1=9$

Độ cao các lần nảy lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = 0,6; u_n=9.0,6^{n-1}$

a) $u_3=9.0,6^{3-1}=3,24$

b) $S_5=\dfrac{5\cdot\left[1-0,6^5\right]}{1-0,6}=11,528$

Câu 101: Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là $12\%/$ năm, xuất cư là $2\%/$ năm, tử vong là $8\%/$ năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

Lời giải

Số cá thể của quần thể qua các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là: $q=1+0,12-0,02-0,08=1,02$

Số cá thể sau hai năm là: $110000.1,02^2 = 114444$ (cá thể)

Câu 102: Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La Trung là $400\,Hz$ và tần số của phím La Cao cao hơn 12 phím là $800\,Hz$ (nguồn: https:// vi.wikipedia.org/wiki/Organ). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Ta có: $q^{12} = \dfrac{800}{400} = 2$

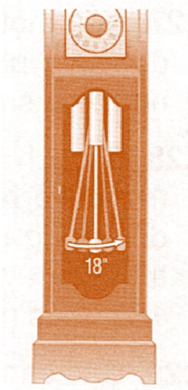
Suy ra: $q = 1,06$

Câu 103: Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng $1,14\%$ thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Lời giải

Ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là: $97,6.(1+0,0114)^{20} = 122,4$ (triệu người)

Câu 104: Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài $46\,cm(H\,.\,2.1)$.



Hình 2.1

Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Do lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài $46\,cm$, sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0,98$.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1q^9 = 46 \cdot 0,98^9 \approx 38,35(cm)$.

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S_{15}=u_1\frac{1-q^{15}}{1-q}=46\cdot\frac{1-0,98^{15}}{1-0,98}\approx 601,29(cm).$$

Câu 105: Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sê lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

Lời giải

Gọi u_n là số người bị bệnh ở cuối tuần thứ n. Vì có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo nên dãy số $\left(u_n\right)$ là một cấp số nhân có $u_1=5$ và công bội $q=4$. Suy ra số người bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh ở cuối tuần 10 là $u_{10}=u_1q^9=5\cdot 4^9=1310720$ (người).

Câu 106: Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà người kĩ sư đó nhận được ở năm thứ n. Vì người kĩ sư được công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5% nên dãy số $\left(u_n\right)$ là một cấp số nhân có $u_1=180$ và công bội $q=1+5\%=1,05$. Khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty thì mức lương năm của người kĩ sư đó là

$u_6=u_1q^5=229,73$ (triệu đồng)

Câu 107: Để tích luỹ tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi $0,5\%$ cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích luỹ này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích luỹ được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Hoa có trong chương trình tích luỹ ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n). Kí hiệu $a=0,5$ triệu đồng, $r=0,5\%$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 1 là $u_1=a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 2 là $u_2=u_1(1+r)+a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 3 là

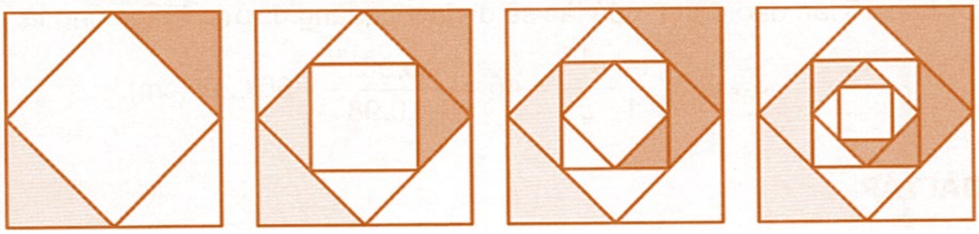
$u_3=u_2(1+r)+a=a(1+r)^2+a(1+r)+a.$

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng n là

$$u_n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots+a(1+r)+a=a\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1}=a\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

Vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180, cô ấy sẽ tích luỹ được $u_{180}=a\frac{(1+r)^{180}-1}{r}=145,41$ (triệu đồng). Khi đó, tuổi của con gái cô Hoa là $3+180:12=18$ tuổi.

Câu 108: Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài $16cm$. Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới).



Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.

Lời giải

Gọi u_n là diện tích hai tam giác được tô màu ở lần thực hiện thứ n. Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ban đầu.

Ở lần 1 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}$ nên $u_1=2\cdot\frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}=\frac{a^2}{2^2}$ và độ dài cạnh hình vuông sau đó là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ở lần 2 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_2=\frac{a^2}{2^3}$.

Ở lần 3 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_3=\frac{a^2}{2^4}$.

Như vậy, dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1=\frac{a^2}{4}$ và công bội $q=\frac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích sau năm lần thực hiện là $S_5=u_1\frac{1-q^5}{1-q}=124\left(cm^2\right)$.

Chú ý. Diện tích cần tính bằng diện tích hình vuông ngoài cùng trừ đi diện tích hình vuông trong cùng rồi chia 2.

Câu 109: Anh Nam là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Anh vừa kí hợp đồng 5 năm với một câu lạc bộ với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch câu lạc bộ đưa ra cho anh Nam ba phương án về lương như sau:

- Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.

- Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

- Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp anh Nam xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của anh Nam là lớn nhất?

Lời giải

Ta tính tổng tiền lương của anh Nam theo từng phương án:

- Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$5\cdot 300+5\cdot 50=1750$ (triệu đồng)

- Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$300+300\cdot(1+10\%)+300\cdot(1+10\%)^2+300\cdot(1+10\%)^3+300(1+10\%)^4$

$=1831,53$ (triệu đồng).

- Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$300+330+360+390+420=1800$ (triệu đồng).

Vậy anh Nam nên sử dụng Phương án 2 để nhận được tổng lương sau 5 năm là cao nhất.

Câu 110: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.

Lời giải

Ta có: 2 giờ $=120$ phút $=6.20$ phút. Do đó, sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n-1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1=200$ và $q=2$.

Ta có $u_7=u_1\cdot q^6=200\cdot 2^6=12800$.

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 111: Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8% / năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Lời giải

Khoảng 215892500 đồng.

Câu 112: Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài $100m$. Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

Lời giải

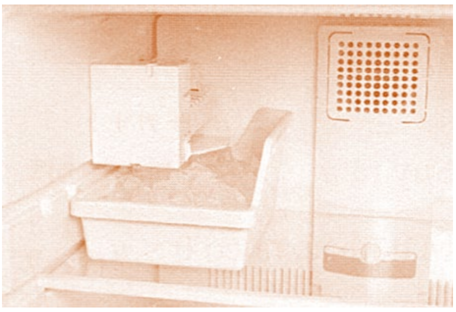
$S_{10}=\dfrac{80\left(1-0,8^{10}\right)}{1-0,8}\approx 357,05(m)$.

Câu 113: Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là $6144m^2$. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.

Lời giải

$u_{10}=u_1\cdot q^9=6144\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^9=12\left(m^2\right)$.

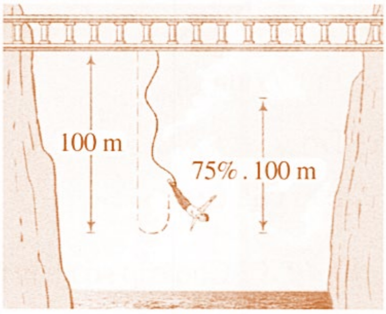
Câu 114: Một khay nước có nhiệt độ $20^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm đi 25% . Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.



Lời giải

$u_5=u_1\cdot q^4=20\cdot 0,75^4\approx 6,33^\circ C$.

Câu 115: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài $100m$. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3).



Hình 3

Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $u_1(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ nhất, ta có: $u_1 = 100$; $v_1(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ nhất, ta có: $v_1 = 100 \cdot 0,75 = 75$

$u_2(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ hai, ta có: $u_2 = v_1 = 0,75u_1$;

$v_2(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ hai, ta có: $v_2 = 0,75u_2 = 0,75v_1$.

Như vậy, ta có hai cấp số nhân đều có công bội $0,75$ là: $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ và $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ với $u_1 = 100$ và $v_1 = 75$.

Ta có: $u_1 + u_2 + \ldots + u_{10} = 100 \cdot \left(\dfrac{1-0,75^{10}}{1-0,75}\right); v_1 + v_2 + \ldots + v_{10} = 75 \cdot \left(\dfrac{1-0,75^{10}}{1-0,75}\right)$.

Vậy quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên (tính từ lúc bắt đầu nhảy) là:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}) = 175 \cdot \left(\dfrac{1-0,75^{10}}{1-0,75}\right) \approx 661(m).$$

Câu 116: Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

Lời giải

1912 triệu đồng.

Câu 117: Một công ty mua một chiếc máy với giá 1 tỉ 200 triệu đồng. Công ty nhận thấy, trong vòng 5 năm đầu, tốc độ khấu hao là $25\%/$ năm (tức là sau mỗi một năm, giá trị còn lại của chiếc máy bằng 75% giá trị của năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của chiếc máy đó sau 1 năm, 2 năm.

b) Sau 5 năm, giá trị của chiếc máy đó còn khoảng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Giá trị của máy sau 1 năm, 2 năm lần lượt là:

$1200\cdot 0,75=900$ (triệu đồng); $1200\cdot 0,75^2=675$ (triệu đồng).

b) Sau 5 năm, giá trị chiếc máy đó còn là: $1200\cdot 0,75^5\approx 285$ (triệu đồng).

Câu 118: Một du khách vào trường đua chó ở Phú Quốc và tham gia đặt cược, lần đầu đặt 8000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

Lời giải

Theo giả thiết số tiền du khách đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1=8000$ và công bội $q=2$.

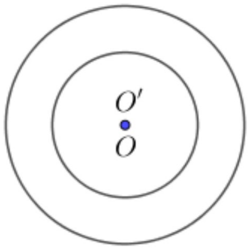
Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9=u_1+u_2+\ldots+u_9=\frac{u_1\left(1-q^9\right)}{1-q}=4088000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là: $u_{10}=u_1\cdot q^9=4096000$

Ta có $u_{10}-S_9=8000>0$ nên du khách thắng 8000 (đồng)

Câu 119: Cho n đường tròn đồng tâm O. Biết rằng $r_1=4$; chu vi đường tròn $\left(O;r_2\right)$ có gấp 2 lần chu vi đường tròn $\left(O;r_1\right)$;…; chu vi đường tròn $\left(0;r_n\right)$ gấp 2 lần chu vi đường tròn $\left(O;r_{n-1}\right)$. Chu vi đường tròn $\left(O;r_n\right)$ gấp 256 lần chu vi đường tròn $\left(O;r_1\right)$. Tính r_{n-1}?



Lời giải

Ta có chu vi đường tròn có bán kính r là: $P=2\pi r$

Do chu vi đường tròn $\left(O;r_2\right)$ gấp 2 lần chu vi đường tròn $\left(O;r_1\right)\Rightarrow 2\pi r_2=2.2\pi r_1\Leftrightarrow r_2=2r_1$.

Do chu vi đường tròn $\left(O;r_n\right)$ gấp 2 lần chu vi đường tròn $\left(O;r_{n-1}\right)$ nên: $2\pi r_n=2.2\pi r_{n-1}$

$\Leftrightarrow r_n=2r_{n-1}$

Suy ra dãy số $r_1;r_2;r_3\ldots;r_n$ là cấp số nhân có $u_1=r_1=4$ và công bội $q=2$

$\Rightarrow r_n=r_1\cdot 2^{n-1}=4.256=1024$

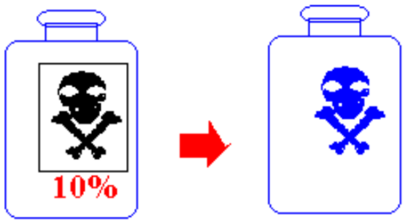
$\Rightarrow r_{n-1}=r_n:2=256$.

Câu 120: Một lọ thủy tinh dung tích 1000ml chứa đầy 1 loại dung dịch chất độc nồng độ 10% đã được chuyển sang bình chứa khác; nhưng dung dịch độc hại sau khi đổ hết vẫn còn dính lọ $0,1\%$. Để chất độc còn trong lọ $\le 0,001\mu$ gam (microgam), người ta dùng nước cất xúc rửa lọ thủy tinh này. Hỏi:

a) Phải xúc rửa bao nhiêu lần nếu mỗi lần dùng 1000ml nước cất?

b) Phải xúc nữa bao nhiêu lần nếu mỗi lần dùng 100ml nước cất?

Giả thử rằng mỗi lần xúc rửa, chất độc hòa tan hết trong nước và sau khi đổ đi dung dịch mới cũng vẫn còn dính lọ một lượng như nhau.



Lời giải

Lượng chất độc tồn trong lọ lúc đầu là: $(100\,g:1000)=\dfrac{1}{10}$ (gam)

Lượng chất độc tồn trong lọ theo yêu cầu là: $0,001\mu$ gam $=\dfrac{1}{10^9}$ (gam)

a) Mỗi lần xúc rửa với 1.000ml nước cất, vẫn còn đính lọ 1ml (0,1%) nghĩa là lượng chất độc đã giảm đi 1000 $\left(hay\,10^3\right)$ lần.

Lập bảng lượng chất độc tồn đọng sau các lần xúc rửa, ta có:

Lúc đầu	Lần 1	Lần 2	Lần 3
$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10^3}$	$\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10^6}$	$\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10^9}$

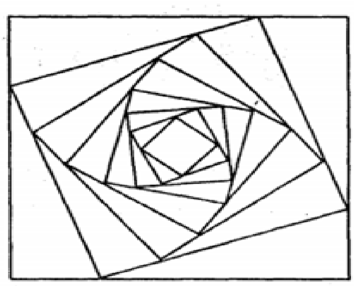
Vậy sau 3 lần xúc rửa với 1.000ml/ lần thì chất độc còn $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10^9}\le\dfrac{1}{10^9}$ gam.

b) Phần giải này mời bạn đọc tự thực hành.

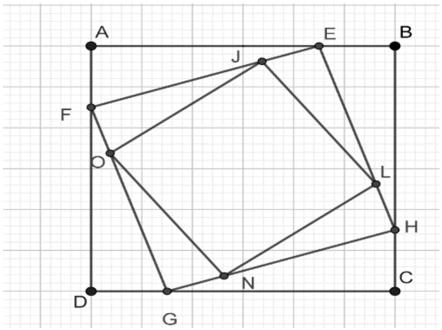
Câu 121: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (hình vẽ). Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1,C_2,C_3,\ldots,C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông $C_i(i\in\{1;2;3;\ldots\})$. Đặt $T=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n+\ldots$

a) Khi $T=\dfrac{32}{3}$, tính a?

b) Khi $T=\dfrac{128}{3}$, tính a?



Lời giải



a) Giả sử hình vuông cần phân chia các cạnh của hình vuông $ABCD$ bởi các điểm $E;F;G;H$ để tạo thành hình vuông EFGH, khi đó các điểm $E;F;G;H$ thỏa mãn như hình vẽ khi đó: $AE=\frac{3}{4}AB;\mathrm{AF}=\frac{1}{4}AD$.

$S_{ABCD}=a^2$.

Ta có: $\mathrm{EF}=\sqrt{\left(\frac{AB}{4}\right)^2+\left(\frac{3AB}{4}\right)^2}=\frac{AB\sqrt{10}}{4}\Rightarrow S_{EFGH}=\frac{10AB^2}{16}=\frac{10}{16}a^2$.

$\mathrm{JO}=\sqrt{\left(\frac{AB\sqrt{10}}{16}\right)^2+\left(\frac{3AB\sqrt{10}}{16}\right)^2}=\frac{10AB}{16}\Rightarrow S_{JONL}=\frac{10^2AB^2}{16^2}=\frac{10^2}{16^2}a^2$.

Từ đó ta thấy diện tích các hình vuông giảm dần và lập thành cấp số nhân có công bội $q=\frac{10}{16}$.

Ta có: $T=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n+\ldots=a^2\left(1+\frac{10}{16}+\frac{10^2}{16^2}+\ldots.+\frac{10^n}{16^n}+\ldots\right)$

$$T=\left(\frac{1}{1-\frac{10}{16}}\right).a^2=\frac{8}{3}.a^2=\frac{32}{3}\Rightarrow a=2.$$

Vậy $a=2$.

b) Diện tích của hình vuông C_1, cạnh $x_1=a$ (với $a>0$) là $S_1=a^2$.

Độ dài cạnh của hình vuông C_2 là: $x_2=\sqrt{\left(\frac{1}{4}x_1\right)^2+\left(\frac{3}{4}x_1\right)^2}=\frac{x_1\sqrt{10}}{4}=\frac{a\sqrt{10}}{4}\Rightarrow S_2=\frac{5}{8}a^2$

Độ dài cạnh của hình vuông C_2 là: $x_3=\sqrt{\left(\frac{1}{4}x_2\right)^2+\left(\frac{3}{4}x_2\right)^2}\mathrm{n}=\frac{x_2\sqrt{10}}{4}=\frac{5a}{8}\Rightarrow S_3=\left(\frac{5}{8}\right)^2\mathrm{a}^2$

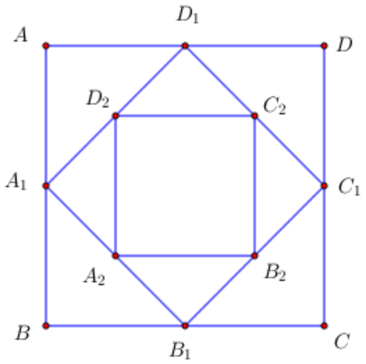
Tương tự, diện tích của hình vuông nên C_i là $S_i=\left(\frac{5}{8}\right)^{i-1}a^2$. Và $S_n=\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}a^2$

Do đó: $T=\left(1+\frac{5}{8}+\left(\frac{5}{8}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right)a^2=\frac{128}{3}$ mà $T_0=1+\frac{5}{8}+\left(\frac{5}{8}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$

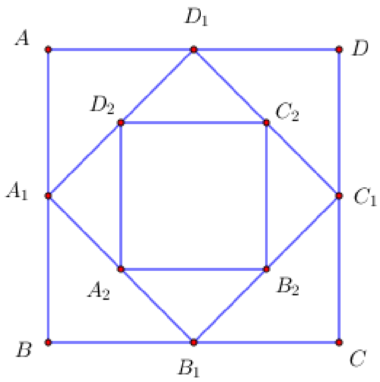
là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=1,q=\frac{5}{8}\to T_0=\frac{1}{1-\frac{5}{8}}=\frac{8}{3}$.

Suy ra $T=\frac{8}{3}a^2=\frac{128}{3}\Rightarrow a=4$.

Câu 122: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và có diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2. Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3, …và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích S_4, S_5,…, S_{100} (tham khảo hình bên). Tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{100}$.



Lời giải



Ta có $S_1 = a^2$; $S_2 = \frac{1}{2}a^2$; $S_3 = \frac{1}{4}a^2$,…

Do đó S_1, S_2, S_3,…, S_{100} là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = S_1 = a^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Suy ra $S = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{100} = S_1.\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$.

Câu 123: Một người bắt đầu đi làm được nhận được số tiền lương là 5.200.000đ một tháng. Sau 36 tháng người đó được tăng lương 7,5 %. Hằng tháng người đó tiết kiệm 20% lương để gửi vào ngân hàng với lãi suất 0,3% tháng theo hình thức lãi kép (nghĩa là lãi của tháng này được nhập vào vốn của tháng kế tiếp). Biết rằng người đó nhận lương vào đầu tháng và số tiền tiết kiệm được chuyển ngay vào ngân hàng.

Lời giải

Đặt $a = 5.200.000$, $m = 20\%$, $n = 0,3\%$, $t = 7,5\%$.

Hết tháng thứ nhất, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là $T_1 = am(1+n)^1$.

Hết tháng thứ hai, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$T_2 = \left(T_1 + am\right)(1+n) = am(1+n)^2 + am(1+n)^1$.

Tượng tự cho đến tháng thứ 36.

Hết tháng thứ 36, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{36} = am(1+n)^{36} + am(1+n)^{35} + \ldots + am(1+n) = am \cdot (1+n)\frac{(1+n)^{36}-1}{n}$$

Thay số ta được $T_{36} \approx 39592539,06$

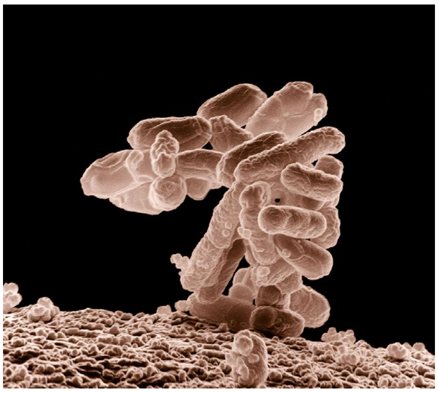
Vậy số tiền người đó tiết kiệm được là 39.592.539 đồng.

Câu 124: Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần.

a) Hỏi 1 tế bào sau mười lần phân chia sẽ thành bao nhiêu tế bào?

b) Nếu có 10^{11} tế bào thì sau 4 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

(Nguồn wikipedia.org).



Lời giải

a) Lúc đầu có 1 tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Vậy sau mười lần phân chia ta u_{11} là số tế bào nhận được: $u_{11} = u_1.q^{10} = 1024$ (tế bào)

b) Lúc đầu có 10^{11} tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{11}$ và công bội $q = 2$.

Do cứ 20 phút phân đôi một lần nên sau 4 giờ sẽ có 12 lần phân chia tế bào. Ta có u_{13} là số tế bào nhận được sau 4 giờ.

Vậy, số tế bào nhận được sau 4 giờ là $u_{13} = u_1q^{12} = 409600 \cdot 10^9$.

Câu 125: Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Giả sử 1 tế bào E. Coli khối lượng khoảng 15.10^{-15} g. Hỏi sau 2 ngày khối lượng do 1 tế bào vi khuẩn sinh ra là bao nhiêu?

Lời giải

Một tế bào E. Coli

Sau 20 phút thành: $2 = 2^1$ tế bào.

Sau $40 = 2.20$ phút thành: $4 = 2^2$ tế bào.

Sau $60 = 3.20$ phút thành: $8 = 2^3$ tế bào.

……………………………………………………………

Sau 2 ngày $= 144.20$ phút thành 2^{144} tế bào.

Vậy sau 2 ngày khối lượng do 1 tế bào vi khuẩn sinh ra là:

$2^{144}.15.10^{-15} = 3,34511178.10^{29}\left(g\right) \approx 3,35.10^{26}\left(kg\right)$.

Câu 126: Theo giả thiết thì con lắc dao động tắt dần chậm sau mỗi chu kì và biên độ giảm 5%

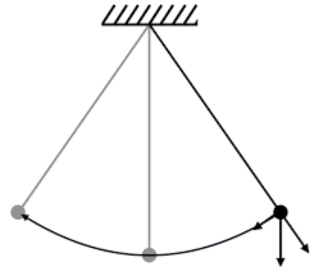
Do vậy độ lớn biên độ lập thành một cấp số nhân với $u_1 = 20$ và $q = 100\% - 5\% = 95\% = 0,95$;

$u_7 = u_1q^6 = 20.(0,95)^6 \approx 14,7\left(cm\right)$.

Vậy sau 6 lần dao động biên dộ con lắc còn gần bằng $14,7cm$.

Lời giải

Một con lắc dao động tắt dần chậm với biên độ ban đầu là 20cm, biết cứ sau mỗi chu kì biên độ con lắc giảm đi một lượng bằng 5% biên độ lần dao động trước đó. Hỏi sau 6 lần dao động biên dộ con lắc còn bao nhiêu cm?



Câu 127: Tìm hiểu tiền công khoan giếng ở hai cơ sở khoan giếng, người ta được biết:

- Ở cơ sở A: Giá của mét khoan đầu tiên là 62.000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 10000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước.
- Ở cơ sở B: Giá của mét khoan đầu tiên là 62.000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 9 % giá của mét khoan ngay trước.

Một người muốn chọn một trong hai cơ sở nói trên để thuê khoan một cái giếng sâu 20 mét, một cái giếng sâu 30 mét ở hai địa điểm khác nhau. Hỏi người ấy nên chọn cơ sở khoan giếng nào cho từng giếng để chi phí khoan hai giếng là ít nhất. Biết chất lượng và thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau.

Lời giải

Kí hiệu A_n, B_n lần lượt là số tiền công (đơn vị đồng) cần trả theo cách tính giá của cơ sở A và cơ sở B.

Theo giả thiết ta có:

A_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 50000$ và công sai $d = 10000$.

B_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = 50000$ và công bội $q = (1+9\%) = 1,09$.

Do đó

$$A_{20} = \frac{20\left(2u_1 + 19d\right)}{2} = 10(2.62000 + 19.10000) = 3140000$$

$$B_{20} = v_1\frac{1-q^{20}}{1-q} = 50000\cdot\frac{1-(1,09)^{20}}{1-1,09} \approx 2558006$$

Suy ra nên chọn cơ sở B khoan giếng 20 mét.

$$A_{30} = \frac{30(2u_1 + 29d)}{2} = 15(2.50000 + 29.10000) = 5850000$$

$$B_{30} = v_1 \frac{1-q^{30}}{1-q} = 50000 \cdot \frac{1-(1,09)^{30}}{1-1,09} \approx 6815377$$

Suy ra nên chọn cơ sở A để khoan giếng 30 mét.

Vậy chọn cở sở A khoan giếng 30 mét, chọn cơ sở B khoan giếng 20 mét.

Câu 128: Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Hỏi sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả bao nhiêu điều ước?

Lời giải

Ngày thứ nhất Aladin ước 3 điều,

Ngày thứ hai Aladin ước 2.3 điều,

Ngày thứ ba Aladin ước $2.2.3 = 2^2.3$ điều,

Ngày thứ tư Aladin ước $2.2^2.3 = 2^3.3$ điều,

…

Ngày thứ 10 Aladin ước $2^9.3$ điều.

Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: $3\left(1+2+2^2+2^3+...+2^9\right) = 3\left(\frac{1-2^{10}}{1-2}\right) = 3069$ điều.

Câu 129: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,… và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

Lời giải

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 7, d = 5$.

Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 25450 = S_n$.

Ta có: $25450 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7n + \frac{n^2-n}{2}.5 \Leftrightarrow 5n^2 + 9n - 50900 = 0 \Leftrightarrow n = 100$

Câu 130: Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là $4,5$ triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm $0,3$ triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ty.

Lời giải

Ta có 3 năm bằng 12 quý.

Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_{12}$ là tiền lương kĩ sư đó trong các quý (từ quý 1 đến quý 12).

Suy ra (u_n) là cấp số cộng với công sai $4,5$.

Vậy số tiền lương kĩ sư nhận được là

$$S_{12} = n\frac{2u_1 + (n-1)d}{2} = 12\frac{2\times 4,5 + 11\times 0,3}{2} = 73,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 131: Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, …, cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Tính số hàng cây được trồng.

Lời giải

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n.

Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, … và $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 3003$.

Nhận xét dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Khi đó $S = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} = 3003$.

Suy ra: $\dfrac{n\left[2.1 + (n-1)1\right]}{2} = 3003$

$\Leftrightarrow n(n+1) = 6006 \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 77 \\ n = -78 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 77$ (vì $n \in \mathbb{N}$).

Vậy số hàng cây được trồng là 77.

Câu 132: Một chú Cò khát nước, chú tìm thấy một chiếc bình đựng nước nhưng cổ bình vừa cao lại vừa bé nên chú không thể uống được. Chú bèn nhặt những hòn sỏi bỏ vào bình để nước dâng lên, phút đầu tiên chú bỏ được 5 viên sỏi, do quen việc nên từ phút thứ hai mỗi phút chú lại bỏ nhiều hơn phút trước đó 4 viên sỏi (trong phút thứ 2 bỏ được 9 viên). Sau 10 phút thì nước đã dâng lên để chú có thể uống được. Hỏi chú cò đã phải nhặt tổng cộng bao nhiêu viên sỏi để bỏ vào bình?

Lời giải

Số sỏi chú Cò nhặt bỏ vào bình theo từng phút lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 5$, công sai $d = 4$.

Số sỏi chú bỏ vào trong phút thứ 10: $u_{10} = 5 + 9.4 = 41$ viên.

Tổng cộng số sỏi chú Cò đã nhặt bỏ vào bình: $S_{10} = \dfrac{10(u_1 + u_{10})}{2} = 230$ viên.

Câu 133: Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, \ldots u_{30}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai,… và dãy ghế số ba mươi.

Ta có công thức truy hồi ta có $u_n = u_{n-1} + 4$, $(n = 2, 3, \ldots, 30)$.

Ký hiệu: $S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30}$, theo công thức tổng các số hạng của một cấp số cộng với $u_1 = 15$, $d = 4$ ta được:

$S_{30}=\frac{30}{2}\left(2u_1+(30-1)4\right)=15(2.15+29.4)=2190$.

Câu 134: Trong tháng 12, lớp 11A dự kiến quyên góp tiền để đi làm từ thiện như sau: ngày đầu tiên quyên góp, mỗi bạn bỏ 2000 đồng vào lợn, từ ngày thứ hai trở đi mỗi bạn bỏ vào lợn hơn ngày liền trước đó 500 đồng. Hỏi sau 28 ngày lớp 11A quyên góp được bao nhiêu tiền? Biết lớp có 40 bạn.

Lời giải

Số tiền một học sinh lớp 11A bỏ vào lợn sau 28 ngày: $S_{28}=[2.2000+27.500].14=245000$

Cả lớp 11A quyên góp được $245000*40=9800000$ đồng.

Câu 135: Người ta trồng cây theo hình tam giác với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây,… ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Ta thấy số cây ở mỗi hàng tạo nên một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=1$.

Ta có $S_n=\frac{\left(2u_1+(n-1)d\right)n}{2}\Rightarrow\frac{n^2+n}{2}=4950\Leftrightarrow n^2-n-9900=0\Rightarrow n=99$.

Câu 136: Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1,3,5,... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp - mô hình như hình bên). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?

Lời giải

Số hộp sữa trên mỗi hàng là số hạng của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=1$

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng liên tiếp của CSC:

$S_n=\frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]\Leftrightarrow 900=\frac{n}{2}\left[2.1+(n-1).2\right]\Leftrightarrow n^2=900\Rightarrow n=30.$

Vậy $u_{30}=1+29*2=59.$

Cách 2:

Áp dụng công thức $1+3+5+.....+(2n-1)=n^2$. Suy ra $n=30$. Vậy $2n-1=59$.

Câu 137: Trên một bàn bida có 15 quả bóng được đánh số lần lượt từ 1 đến 15, nếu người chơi đưa được quả bóng nào vào lỗ thì sẽ được số điểm tương ứng với số trên quả bóng đó. Số điểm tối đa người chơi có thể đạt được là bao nhiêu?

Lời giải

Người chơi sẽ đạt số điểm cao nhất nếu đánh được tất cả 15 quả bóng vào lỗ.

Khi đó tổng điểm đạt được là $1+2+...+15=120$.

Câu 138: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Lời giải

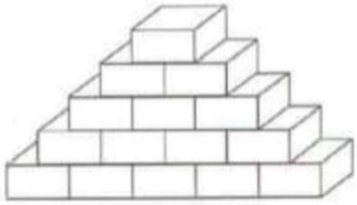
Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 80.000$ và công sai $d = 5.000$ ta được số tiền phải trả khi khoan đến mét thứ n là:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$$

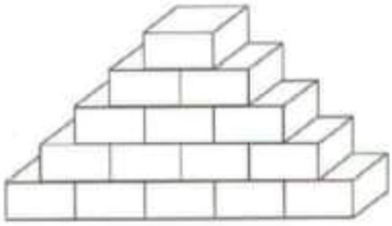
Khi khoan đến mét thứ 50, số tiền phải trả là:

$$S_{50} = \frac{50\left[2.80000 + (50-1).5000\right]}{2} = 10.125.000 \text{ đồng.}$$

Câu 139: Bà chủ khách sạn trên đèo **Mã Pi Lèng** muốn trang trí một góc nhỏ trên ban công sân thượng cho đẹp nên quyết định thuê nhân công xây một bức tường gạch với xi măng (như hình vẽ), biết hàng dưới cùng có 500 viên, mỗi hàng tiếp theo đều có ít hơn hàng trước 1 viên và hàng trên cùng có một viên. Hỏi số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là bao nhiêu viên?



Lời giải



Theo Câu ra ta có số viên gạch từ hàng dưới cùng đến hàng trên cùng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 500$, công sai $d = -1$ nên công thức số hạng tổng quát là: $u_n = 500 + (n-1)(-1)$

Hay $u_n = 501 - n$. Vì hàng trên cùng một viên nên giải phương trình $501 - n = 1 \Leftrightarrow n = 500$.

Vậy có tất cả 500 hàng gạch và hàng trên cùng là $u_{500} = 1$.

Do đó số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường là:

$$S_{500} = 500 + 499 + 498 + ... + 1 = \frac{500(500+1)}{2} = 125250.$$

Câu 140: Sinh nhật lần thứ 17 của An vào ngày 01 tháng 5 năm 2018. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá 3850000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình nên An quyết định bỏ ống heo 1000 đồng vào ngày 01 tháng 02 năm 2018. Trong các ngày tiếp theo, ngày sau bỏ ống nhiều hơn ngày trước 1000 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của mình, An có bao nhiêu tiền (tính đến ngày 30 tháng 4 năm 2018)?

Lời giải

Số tiền bỏ heo của An mỗi ngày tạo thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1000$, công sai $d = 1000$.

Tổng số tiền bỏ heo tính đến ngày thứ n là:

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$

Tính đến ngày 30 tháng 4 năm 2018 (tính đến ngày thứ 89) tổng số tiền bỏ heo là:

$S_{89} = \dfrac{89\left[2.1000 + (89-1).1000\right]}{2} = 45.89.1000 = 4005000$ đồng.

Câu 141: Sinh nhật bạn của Trung vào ngày 30 tháng 04 năm 2019. Trung muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2019, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, Trung đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2019 đến ngày 30 tháng 4 năm 2019).

Lời giải

Số ngày bạn Trung để dành tiền (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2019 đến ngày 30 tháng 4 năm 2019) là $31 + 28 + 31 + 30 = 120$ ngày.

Số tiền bỏ ống heo ngày đầu tiên là: $u_1 = 100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ hai là: $u_2 = 100 + 1.100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ ba là: $u_3 = 100 + 2.100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ n là: $u_n = u_1 + (n-1)d = 100 + (n-1)100 = 100n$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ 120 là: $u_{120} = 100.120 = 12000$.

Sau 120 ngày thì số tiền Trung tích lũy được là tổng của 120 số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$, công sai $d = 100$.

Vậy số tiền Trung tích lũy được là $S_{120} = \dfrac{120}{2}(u_1 + u_{120}) = \dfrac{120}{2}(100 + 12000) = 726000$ đồng.

Câu 142: Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiết theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

Lời giải

Gọi n là số tuần anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình

Số tiền anh ta tiết kiệm được sau n tuần đó là $S = 42 + 8n$

Theo Câu ra $S = 42 + 8n \ge 400 \Leftrightarrow n \ge 44.75 \Rightarrow n = 45$

Vậy kể cả tuần đầu thì tuần thứ 46 anh ta có đủ tiền để mua cây guitar đó.

Câu 143: Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng năm. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016).

Lời giải

Số ngày bạn An để dành tiền (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016) là $31 + 29 + 31 + 30 = 121$ ngày.

Số tiền bỏ ống heo ngày đầu tiên là: $u_1 = 100$,

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ hai là: $u_2 = 100 + 1.100$,

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ ba là: $u_3 = 100 + 2.100$,

…

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ n là: $u_n = u_1 + (n-1)d = 100 + (n-1)100 = 100n$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ 121 là: $u_{121} = 100.121 = 12100$.

Sau 121 ngày thì số tiền An tích lũy được là tổng của 121số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$, công sai $d = 100$.

Vậy số tiền An tích lũy được là $S_{121} = \frac{121}{2}(u_1 + u_{121}) = \frac{121}{2}(100 + 12100) = 738100$ đồng.

Câu 144: Chu vi một đa giác là $158cm$, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3cm$. Biết cạnh lớn nhất là $44cm$. Tính số cạnh của đa giác đó.

Lời giải

Giả sử đã giác đã cho có n cạnh thì chu vi của đa giác là: $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$ với u_1 là cạnh nhỏ nhất.

Suy ra: $158 = \frac{(u_1 + 44)n}{2} \Leftrightarrow 316 = (u_1 + 44)n \Leftrightarrow 2^2.79 = (u_1 + 44)n$

Do đó $u_1 + 44$ là ước nguyên dương của $316 = 2^2.79$ và đa giác có ít nhất ba cạnh nên

$\frac{316}{3} > u_1 + 44 > 44$. Suy ra: $u_1 + 44 = 79 \Leftrightarrow u_1 = 35$.

Số cạnh của đa giác đã cho là: $\frac{44-35}{3} + 1 = 4$ (cạnh).

Câu 145: Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày. Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau 7314 ngày.

Lời giải

Kí hiệu u_n là khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau n chu kì án rã.

Ta có 7314 ngày gồm 53 chu kì bán rã. Theo đề Câu ra, ta cần tính u_{53}.

Từ giả thiết suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = \frac{20}{2} = 10$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Do đó $u_{53} = 10.\left(\frac{1}{2}\right)^{52} \approx 2,22.10^{-15}$.

Câu 146: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Tính diện tích mặt trên cùng.

Lời giải

Diện tích bề mặt của mỗi tầng lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$ và $u_1 = \frac{12288}{2} = 6\,144$.

Khi đó diện tích mặt trên cùng là $u_{11} = u_1 q^{10} = \frac{6144}{2^{10}} = 6$.

Câu 147: Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

Lời giải

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + ... + u_9 = \frac{u_1\left(1-q^9\right)}{1-q} = 10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1.q^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên du khách thắng 20000.

Câu 148: Một người bắt đầu đi làm được nhận được số tiền lương là 7000000đ một tháng. Sau 36 tháng người đó được tăng lương 7%. Hằng tháng người đó tiết kiệm 20% lương để gửi vào ngân hàng với lãi suất 0,3%/tháng theo hình thức lãi kép. Biết rằng người đó nhận lương vào đầu tháng và số tiền tiết kiệm được chuyển ngay vào ngân hàng.

a) Hỏi sau 36 tháng tổng số tiền người đó tiết kiệm được là bao nhiêu?

b) Hỏi sau 60 tháng tổng số tiền người đó tiết kiệm được là bao nhiêu?

Lời giải

a) Đặt $a = 7.000.000$, $m = 20\%$, $n = 0,3\%$, $t = 7\%$.

Hết tháng thứ nhất, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là $T_1 = am(1+n)^1$.

Hết tháng thứ hai, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_2 = (T_1 + am)(1+n) = am(1+n)^2 + am(1+n)^1.$$

Hết tháng thứ 36, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{36} = am(1+n)^{36} + am(1+n)^{35} + ... + am(1+n) = am.(1+n)\frac{(1+n)^{36}-1}{n}$$

Thay số ta được $T_{36} \approx 53\,297\,648,73$.

b) Hết tháng thứ 37, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{37} = \left[T_{36} + a(1+t)m\right](1+n) = T_{36}.(1+n)^1 + a(1+t)m.(1+n)$$

Hết tháng thứ 38, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{38} = \left[T_{37} + a(1+t)m\right](1+n) = T_{36}.(1+n)^2 + a(1+t)m\left[(1+n)^2 + (1+n)\right].$$

Hết tháng thứ 60, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{60} = T_{36}(1+n)^{24} + a(1+t)m\left[(1+n)^{24} + (1+n)^{23} + ... + (1+n)\right]$$

$$= T_{36}(1+n)^{24} + a(1+t)m.(1+n)\frac{(1+n)^{24}-1}{n}.$$

Thay số và tính ta được tổng số tiền tiết kiệm sau 60 tháng của người đó là:

$T_{60} \approx 94\,602\,156,59$.

Câu 149: Cho dãy số (u_n) được xác định $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1, n = 1,2,3,... \end{cases}$. Biết rằng người sinh năm 2022 tuổi Dần, hỏi người sinh năm $\sqrt{4u_{45}u_{43}+1}$ tuổi gì?

Lời giải

Ta có: $u_2 = 2u_1 - u_0 + 1 = 3$.

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + 1, \ (1)$$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ khi đó (1) trở thành $v_n = v_{n-1} + 1$. Suy ra dãy số (v_n) là cấp số cộng có công sai $d = 1$ và $v_1 = u_2 - u_1 = 2$.

Vậy: $v_n = v_1 + (n-1)d = 2 + n - 1 = n + 1$.

Ta có:

$u_{n+1} - u_n = n + 1$.

$u_n - u_{n-1} = n$

$u_{n-1} - u_{n-2} = n - 1$

…………………

$u_2 - u_1 = 2$

Cộng vế với vế ta được:

$u_{n+1} - u_1 = 2 + 3 + ... + n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + 1$

$u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ hay $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suy ra: $u_{45} = 1035, u_{43} = 946$. Vậy $\sqrt{4u_{45}u_{43} + 1} = 1979$.

Vậy năm 1979 là năm mùi.

Câu 150: Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế. Các dãy sau, mỗi dãy nhiều hơn dãy ngay trước nó 4 ghế. Hỏi sân vận động có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Số ghế trong mỗi dãy của sân vận động lập thành một cấp số cộng có $U_1 = 15$ và $d = 4$.

Vậy tổng tất cả các ghế của sân vận động là tổng 30 số hạng đầu của cấp số cộng trên, do đó áp dụng công thức $S_n = nU_1 + \dfrac{n(n-1)d}{2}$ ta có $S_{30} = 30.15 + \dfrac{30(30-1)4}{2} = 2190$

Vậy sân vận động có tất cả 2190 ghế.

Câu 151: Hùng đang tiết kiệm để mua một cây đàn piano có giá 142 triệu đồng. Trong tháng đầu tiên, anh ta để dành được 20 triệu đồng. Mỗi tháng tiếp theo anh ta để dành được 3 triệu đồng và đưa số tiền tiết kiệm của mình. Hỏi ít nhất vào tháng thứ bao nhiêu thì Hùng mới có đủ tiền để mua cây đàn piano đó?

Lời giải

Tổng số tiền Hùng tiết kiệm được vào mỗi tháng (đơn vị: triệu đồng) lập thành một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 20$ và công sai $d = 3$.

Tổng số tiền Hùng tiết kiệm được vào tháng thứ n bằng

$u_n = u_1 + (n-1)d = 20 + (n-1).3 = 3n + 17$

Hùng có đủ tiền mua cây đàn $\Leftrightarrow 3n + 17 \geq 142 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{125}{3} \approx 41,67$.

Vậy ít nhất vào tháng thứ 42 thì Hùng mới có đủ tiền để mua cây đàn piano đó.

Câu 152: Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, …, cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là

Lời giải

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n.

Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, … và $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 3003$.

Nhận xét dãy số $\left(u_n\right)$ là cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Khi đó $S = \dfrac{n\left[2u_1 + \left(n-1\right)d\right]}{2} = 3003$.

Suy ra $\dfrac{n\left[2.1 + \left(n-1\right)1\right]}{2} = 3003 \Leftrightarrow n\left(n+1\right) = 6006 \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 77 \\ n = -78 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 77$

(vì $n \in \mathbb{N}$**).**