CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ GIỚI HẠN VÀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 1: Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất
phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khoẻ của con người (T được gọi là chu kì
bán rã).

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \ldots$

Suy ra (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{2}$ có số hạng tổng quát là:

$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Ta có: $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.

c) Đổi $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ kg $= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3$ g

Để chất phóng xạ bé hơn $10^{-6}(\text{g})$ thì $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 31$.

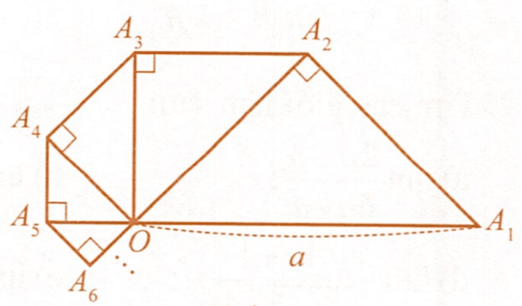
Vậy cần ít nhất 30 chu kì tương ứng với 720000 năm khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người.

Câu 2: Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lí và tái sử dụng. Với $100m^3$ ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lí và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

Lời giải

$$100+100\cdot 0,8+100\cdot(0,8)^2+100\cdot(0,8)^3+\ldots=100\cdot\frac{1}{1-0,8}=500\left(m^3\right).$$

Câu 3: Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a. Bên ngoài tam giác OA_1A_2, vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3. Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3, vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2).



Hình 2

Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\cdots$

Lời giải

Ta có các góc $\widehat{A_1OA_2},\widehat{A_2OA_3},\widehat{A_3OA_4},\ldots$ đều bằng 45°. Ta có:

$$A_1A_2=OA_2=OA_1\cdot\cos 45^\circ=a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_2A_3=OA_3=OA_2\cdot\cos 45^\circ=a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

$$A_3A_4=OA_4=OA_3\cdot\cos 45^\circ=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3;\ldots$$

Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,\ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\ldots$ là

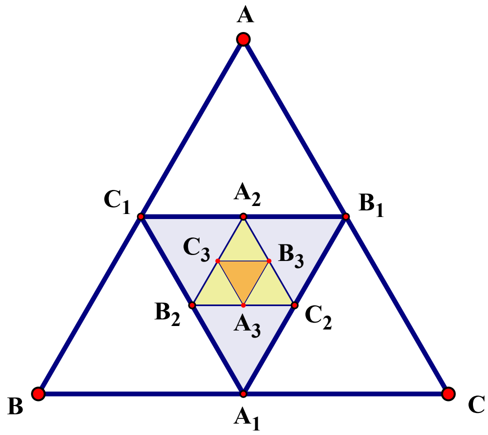
$$l=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot(2+\sqrt{2})=a(1+\sqrt{2}).$$

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 1. Nối các trung điểm A_1,B_1,C_1 của các cạnh BC,CA,AB ta được tam giác đều $A_1B_1C_1$. Tiếp tục nối các trung điểm A_2,B_2,C_2 của các cạnh B_1C_1,C_1A_1,A_1B_1 ta được tam giác đều $A_2B_2C_2$, thực hiện quá trình này đến vô hạn. Gọi S_n là diện tích của tam giác đều $A_nB_nC_n$.

a) Tính S_8

b) Tính tổng diện tích các tam giác đều $A_nB_nC_n$ thu được

c) Tính tổng các độ dài $l=AA_1+A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_{n-1}A_n+\ldots$



Lời giải

a) Diện tích tam giác ABC là: $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $S_1 = \frac{1}{4}S_0, S_2 = \frac{1}{4}S_1, S_3 = \frac{1}{4}S_2, \ldots$. Do đó $\{S_n\}$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_8 = S_1.q^7 = S_0.q^8 = \frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^8 = \frac{\sqrt{3}}{4^9}$

b) Tổng diện tích các tam giác đều $A_nB_nC_n$ là tổng của một CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng diện tích là

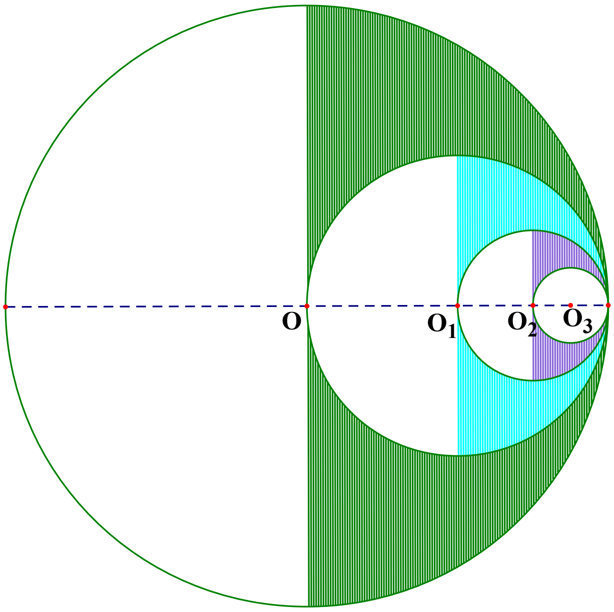
$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \ldots = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

c) Đặt $u_1 = AA_1, u_2 = A_1A_2, u_3 = A_2A_3, \ldots, u_n = A_{n-1}A_n$, ta có:

$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, u_2 = \frac{1}{2}u_1, u_3 = \frac{1}{2}u_2, \ldots, u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}, \ldots \Rightarrow \{u_n\}$ là một CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow l = \frac{u_1}{1-q} = \sqrt{3}$.

Câu 5: Cho đường tròn (C) tâm O, bán kính $r = 20cm$. Vẽ đường tròn (C_1) đi qua tâm O và tiếp xúc với (C), vẽ đường tròn (C_2) đi qua tâm của (C_1) và tiếp xức với (C_1). Tiếp tục quá trình này đến vô hạn. Ta tô màu phần ngoài của hình tròn mới theo quy luật nhu hình vẽ dưới đây. Tình diện tích toàn bộ phần tô màu.



Lời giải

Diện tích hình tròn ban đầu là $S_0 = 400\pi\left(cm^2\right)$

Gọi S_n là diện tích của hình tròn $\left(C_n\right) \Rightarrow \left\{S_n\right\}$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{4}$

Gọi u_n là diện tích phần tô màu ở bước thứ n, khi đó:

$u_1 = \frac{1}{2}S_0 - S_1; u_2 = \frac{1}{2}S_1 - S_2; ..., u_n = \frac{1}{2}S_{n-1} - S_n$

Tổng diện tích phần tô màu là:

$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \frac{1}{2}\left(S_0 + S_1 + ... + S_n + ...\right) - \left(S_1 + S_2 + ... + S_{n+...}\right)$

$= \frac{1}{2}S_0 - \frac{1}{2}\left(S_1 + S_2 + ... + S_{n+...}\right)$

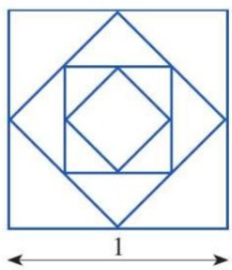
$= 200\pi - \frac{1}{2}.\frac{S_1}{1-q}$

$= \frac{400}{3}\pi\left(cm^2\right)$

Cách khác: Diện tích phần tô màu ở bước nào thì bằng diện tích của hình tròn tạo mới ở bước đó

Do đó: $S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = \frac{S_1}{1-q} = \frac{400}{3}\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 6: Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như h*ình bên dưới*. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.



a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n;

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Lời giải

a) Gọi S_n là diện tích của hình vuông thứ n.

Ta có: $S_1 = 1; S_2 = \frac{1}{2}; S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \ldots$

Dãy (S_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Khi đó ta có công thức tổng quát là: $S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Ta có: $|q| = \frac{1}{2} < 1$ nên dãy (S_n) trên lập thành một cấp số nhân lùi hạn nên ta có:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Vậy tổng diện tích của các hình vuông là 2 (đvdt).

Câu 7: Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khoẻ của con người (T được gọi là chu kì bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tich 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \ldots$

Suy ra (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{2}$ có số hạng tổng quát là:

$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

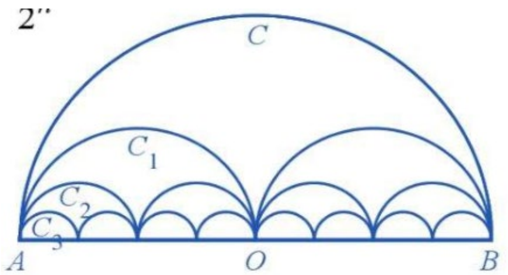
b) Ta có: $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.

c) Đổi $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ kg $= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3$ g

Để chất phóng xạ bé hơn $10^{-6}\left(\text{ g}\right)$ thì $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 10^{3}<10^{-6}\Leftrightarrow n>30$.

Vậy cần ít nhất 31 chu kì tương ứng với 744000 năm khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người.

Câu 8: Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB=2R$, C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2}$,C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{4}$,… C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2^n}$,… (Hình bên dưới).



Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

b) Tìm giới hạn của các dãy số $\left(p_n\right)$ và $\left(S_n\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $p_1=2.\dfrac{\pi R}{2}=\pi R; p_2=2^2.\dfrac{\pi R}{2^2}=\pi R; p_3=2^3.\dfrac{\pi R}{2^3}=\pi R;\ldots, p_n=2^n.\dfrac{\pi R}{2^n}=\pi R$

Ta có: $S_1=2.\dfrac{\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}{2}=\dfrac{\pi R^2}{2^2}; S_2=2^2.\dfrac{\pi\left(\dfrac{R}{2^2}\right)^2}{2}=\dfrac{\pi R^2}{2^3}; S_3=2^3.\dfrac{\pi\left(\dfrac{R}{2^3}\right)^2}{2}=\dfrac{\pi R^2}{2^4};\ldots; S_n=2^n.\dfrac{\pi\left(\dfrac{R}{2^n}\right)^2}{2}=\dfrac{\pi R^2}{2^{n+1}}$

b) Ta có: $\lim \mathrm{p}_n=\pi R$. $\lim \mathrm{S}_n=\lim\left(\dfrac{\pi R^2}{2^{n+1}}\right)=0$.

Câu 9: Từ độ cao $55{,}8\,m$ của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất *(hình bên dưới)*. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

Hình 18

Lời giải

Gọi u_n là dãy số thể hiện quãng đường di chuyển của quả bóng sau mỗi lần chạm đất.

Ta có: $u_1 = 55,8; u_2 = \frac{1}{10}u_1; u_3 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 u_1; ...; u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} u_1$.

Khi đó dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 55,8$ và công bội $q = \frac{1}{10}$ thỏa mãn $|q| < 1$.

Ta có: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 55,8 \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$.

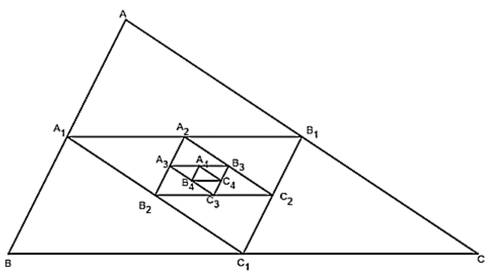
Suy ra $\lim S_n = \lim\left[55,8\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right] = \frac{55,8}{1-\frac{1}{10}} = 62(m)$

Vậy tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần là $62\,m$.

Câu 10: Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, Tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$,…, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_{n,..}$. Gọi $P_1, P_2, ..., P_n, ..$ và $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, …, $A_nB_nC_n$,….

1. Tìm giới hạn của các dãy số (P_n) và (S_n).

2. Tìm các tổng $P_1 + P_2 + ... + P_n + ...$ và $S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$



Lời giải

a) $\left(p_n\right)$ là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \ldots$

Ta có: $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_{\Delta ABC} = a + a + a = 3a$;

$\mathrm{p}_2 = p_{\Delta A_1B_1C_1} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot(3a) = \dfrac{1}{2}\cdot p_1$

$\mathrm{p}_3 = p_{\Delta A_2B_2C_2} = \dfrac{a}{4} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{a}{4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot(3a) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot p_1;\ldots$;

$p_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot p_1;\ldots$

Suy ra:

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(3a)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(3a) = 0.3a = 0$.

$\left(S_n\right)$ là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \ldots$

Gọi h là chiều cao của tam giác ABC và $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_{\Delta\mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{2}ah;$

$\mathrm{S}_2 = S_{\Delta A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}ah\right) = \dfrac{1}{4}\cdot S_1$;

$\mathrm{S}_3 = S_{\Delta A_2B_2C_2} = \ S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot S_1;\ldots;$

$S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot S_1;\ldots$

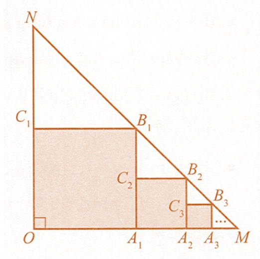
Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot S_1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}ah\right) = 0\cdot\dfrac{1}{2}ah = 0.$

b) Ta có $\left(p_n\ \right)$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = 3\,\mathrm{a}$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$P_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \dfrac{3a}{1 - \dfrac{1}{2}} = 6a$

+) Ta cũng có $\left(\mathrm{S}_n\right)$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $\mathrm{S}_1 = \dfrac{1}{2}$ ah và công bội $q = \dfrac{1}{4}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng: $S_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots = \dfrac{\dfrac{1}{2}ah}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}ah$

Câu 11: Cho tam giác OMN vuông cân tại O, $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN, vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON. Trong tam giác A_1MB_1, vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Hình 3

Lời giải

Độ dài cạnh của các hình vuông lần lượt là

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2; a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3; \ldots$$

Diện tích của các hình vuông lần lượt là

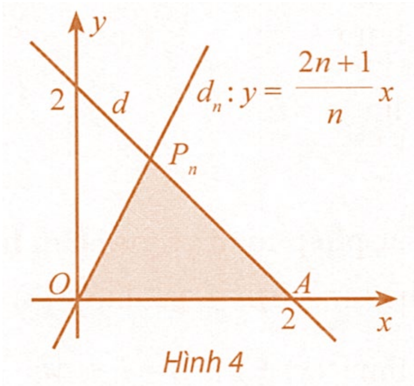
$$S_1 = a_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = a_2^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$S_3 = a_3^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \ldots$$

Các diện tích $S_1, S_2, S_3, \ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = \frac{1}{4}$ và công bội bằng $\frac{1}{4}$. Do đó, tổng diện tích các hình vuông là $S = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Câu 12: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng $d: x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n: y = \frac{2n+1}{n}x$ tại điểm $P_n\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n. Tìm $\lim S_n$.



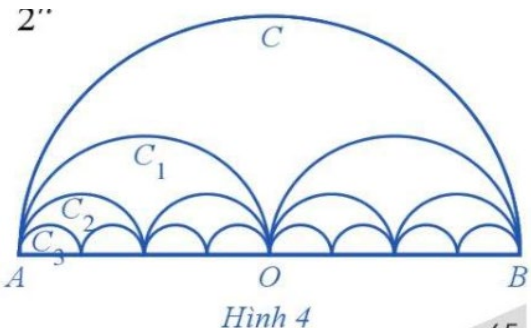
Lời giải

$A(2;0); P_n\left(\frac{2n}{3n+1}; \frac{4n+2}{3n+1}\right); OA = 2; AP_n = \frac{4n+2}{3n+1}\cdot\sqrt{2}; \widehat{OAP_n} = 45^\circ$.

$$S_n = \frac{1}{2}OA\cdot AP_n\cdot\sin\widehat{OAP} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4n+2}{3n+1}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4n+2}{3n+1}$$

$$\lim S_n = \lim\frac{4n+2}{3n+1} = \lim\frac{4+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{4}{3}$$

Câu 13: Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$, C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}, \ldots$ C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}, \ldots$ (Hình 4).



Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

Lời giải

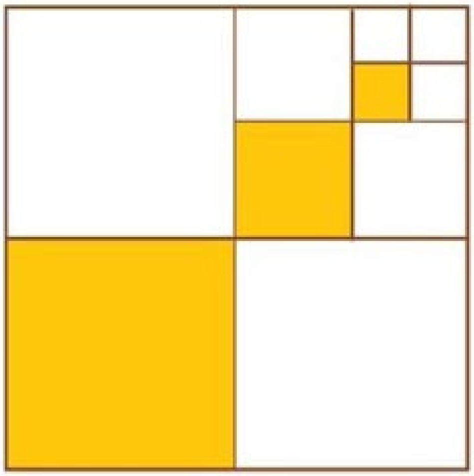
+) Ta có: $p_1 = \frac{\pi R}{2}; p_2 = \frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2^2}; p_3 = \frac{\pi R}{8} = \frac{\pi R}{2^3}; \ldots$

(p_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = \frac{\pi R}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2} < 1$ có số hạng tổng quát $p_n = \frac{\pi R}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

+) Ta có: $C_1 = \dfrac{\pi R^2}{4}; C_2 = \dfrac{\pi R^2}{4^2}; C_3 = \dfrac{\pi R^3}{4^3};\ldots$

(C_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $C_1 = \dfrac{\pi R^2}{4}$ và công bội $q = \dfrac{1}{4} < 1$ có số hạng tổng quát $C_n = \dfrac{\pi R}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Câu 14: Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái $(H.5.2)$.



Hình 5.2

Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.

a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

b) Tìm $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Lời giải

a) Ta có: u_1 là độ dài cạnh của hình vuông được tô màu tạo từ việc chia hình vuông cạnh 1 thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau, do đó $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

Cứ tiếp tục như thế, ta được: $u_2 = \dfrac{1}{2}u_1, u_3 = \dfrac{1}{2}u_2, \ldots, u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1}, \ldots$

Do vậy, độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

Do đó, tổng của n số hạng đầu là $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

b) Ta có: $S=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-0=1$.

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q. Khi đó $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

Vì $|q|<1$ nên $q^n\to0$ khi $n\to+\infty$ Do đó, ta có

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{u_1}{1-q}-\left(\frac{u_1}{1-q}\right)q^n\right]=\frac{u_1}{1-q}$.

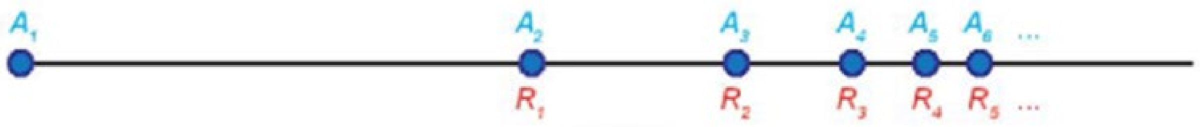
Câu 15: Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc $100\,km/h$, vận tốc của rùa là $1\,km/h$ và khoảng cách ban đầu $a=100(km)$.

a) Tính thời gian $t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2, từ A_2 đến $A_3,\ldots$, từ A_n đến $A_{n+1},\ldots$

b) Tính tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3,\ldots,A_nA_{n+1}$,., tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa.

c) Sai lầm trong lập luận của Zeno là ở đâu?

Lời giải



Ta có: Achilles chạy với vận tốc $100\,km/h$, vận tốc của rùa là $1\,km/h$.

a) Để chạy hết quãng đường từ A_1 đến A_2 với $A_1A_2=a=100(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_1=\frac{100}{100}=1(h)$. Với thời gian t_1 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_2A_3=1(km)$.

Để chạy hết quãng đường từ A_2 đến A_3 với $A_2A_3=1(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_2=\frac{1}{100}(h)$. Với thời gian t_2 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_3A_4=\frac{1}{100}(km)$.

Tiếp tục như vậy, để chạy hết quãng đường từ A_n đến A_n+1 với $A_nA_n+1=\frac{1}{100^{n-2}}(km)$, Achilles phải mất thời gian $t_n=\frac{1}{100^{n-1}}(h)\ldots$

b) Tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3,\ldots,A_nA_n+1,\ldots$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa là

$$T=1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^{n-1}}+\frac{1}{100^n}+\ldots(h)$$

Đó là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, công bội, nên ta có

$$T = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}(h)$$

Như vậy, Achilles đuổi kịp rùa sau $1\frac{1}{99}$ giờ.

c) Nghịch lý Zeno chỉ đúng với điều kiện là tổng thời gian Achilles chạy hết các quãng đường để đuổi kịp rùa phải là vô hạn, còn nếu nó hữu hạn thì đó chính là khoảng thời gian mà anh bắt kịp được rùa.

Câu 16: Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc $150mg$. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Lời giải

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày đầu tiên là $150mg$.

Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%.

Do đó, lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ hai là

$$150 + 150 \cdot 5\% = 150(1+0,05)$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ ba là

$$150 + 150(1+0,05) \cdot 5\% = 150 + 150\left(0,05 + 0,05^2\right) = 150\left(1 + 0,05 + 0,05^2\right)$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ tư là

$$150 + 150\left(1 + 0,05 + 0,05^2\right) \cdot 5\% = 150\left(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3\right)$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ năm là

$$150 + 150\left(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3\right) \cdot 5\% = 150\left(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4\right)$$
$$= 157,8946875(mg).$$

Cứ tiếp tục như vậy, ta ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài là

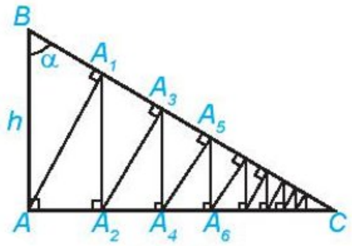
$$S = 150\left(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \ldots\right)$$

Lại có $1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 0,05$.

Do đó, $1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \ldots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-0,05} = \frac{20}{19}$.

Suy ra $S=150\cdot\frac{20}{19}=\frac{400}{361}$.

Câu 17: Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB=h$ và góc B bằng α (hình bên dưới).



Từ A kẻ $AA_1\perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2\perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3\perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α.

Lời giải

Tam giác AA_1B vuông tại A_1 có $AB=h$ và.

Do đó, $AA_1=AB\sin B=h\sin\alpha$.

Ta có: $\hat{B}+\widehat{BAA_1}=90^\circ$ và $\widehat{A_1AA_2}+\widehat{BAA_1}=90^\circ$, suy ra $\widehat{A_1AA_2}=\hat{B}=\alpha$.

Tam giác AA_1A_2 vuông tại A_2 nên $A_1A_2=AA_1\sin\widehat{A_1AA_2}=h\sin\alpha\cdot\sin\alpha=h\sin^2\alpha$.

Vì $AB\perp AC$ và $A_1A_2\perp AC$ nên $AB//A_1A_2$, suy ra $\widehat{A_2A_1A_3}=\hat{B}=\alpha$ (2 góc đồng vị).

Tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_3 nên $A_2A_3=A_1A_2\cdot\sin\widehat{A_2A_1A_3}=h\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha=h\sin^3\alpha$.

Tam giác $A_2A_3A_4$ vuông tại A_4 nên $A_3A_4=A_2A_3\cdot\sin\widehat{A_3A_2A_4}=h\sin^3\alpha\cdot\sin\alpha=h\sin^4\alpha$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta xác định được $A_{n-1}A_n=h\sin^n\alpha$.

Ta có: $AA_1A_2A_3\ldots=AA_1+A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_{n-1}A_n+\ldots$

$=h\sin\alpha+h\sin^2\alpha+h\sin^3\alpha+\ldots+h\sin^n\alpha+\ldots$

Vì góc B là góc nhọn nên $\sin B=\sin\alpha<1$, do đó $|\sin\alpha|<1$.

Khi đó, độ dài của đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=h\sin\alpha$ và công bội $q=\sin\alpha$.

Do đó, $AA_1A_2A_3\ldots=\frac{u_1}{1-q}=\frac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Câu 18: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\frac{50t}{t+4}(t\ge 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t}{t+4}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t}{t\left(1+\dfrac{4}{t}\right)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50}{1+\dfrac{4}{t}}=50$.

Ý nghĩa: Tối đa một nhân viên chỉ có thể lắp được 50 bộ phận mỗi ngày.

Câu 19: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x)=50000+105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình $\bar{C}(\mathrm{x})$ để sản xuất một sản phẩm là:

$\bar{C}(x)=\dfrac{50000+105x}{x}$ (sản phẩm).

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar{C}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50000+105x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{50000}{x}+105\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{50000}{x}+105\right)=105$.

Ý nghĩa: Khi số sản phẩm sản xuất ra ngày càng nhiều thì chi phí trung bình chỉ tối đa là 105 nghìn đồng.

Câu 20: Người ta làm đèn tre như hình bên, các hình tròn chồng lên nhau. Trong đó tính từ dưới lên hình tròn lớn nhất C_1 bán kính $R=50(\mathrm{cm})$, hình tròn C_2 có bán kính bằng $\dfrac{9}{10}$ bán kính của đường tròn C_1, hình tròn C_3 có bán kính bằng $\dfrac{9}{10}$ bán kính của đường tròn C_2. Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy hình tròn $C_1,C_2,C_3,\ldots,C_n,\ldots$. Tính tổng chiều dài các thanh tre đã làm chiếc đèn tre.

Lời giải

Gọi $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n,\ldots$ lần lượt là chu vi của các hình tròn $C_1,C_2,C_3,\ldots,C_n,\ldots$.

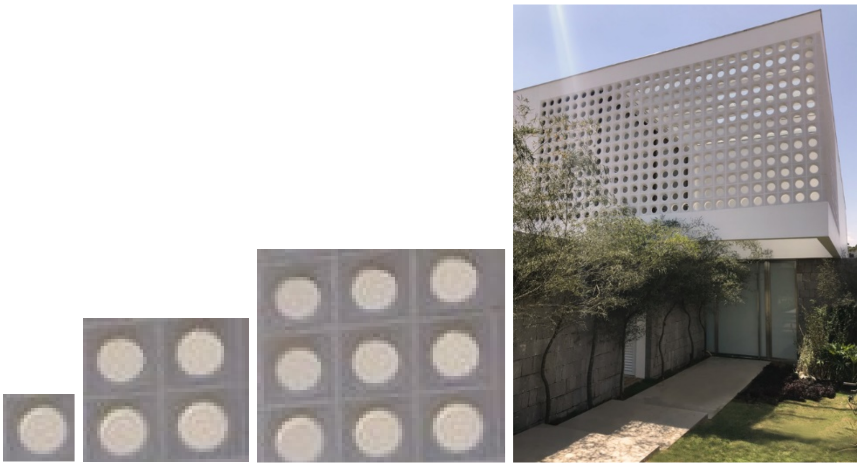
Tổng chiều dài các thanh tre đã làm nên chiếc đèn là :

$$p=P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n+\ldots=2\pi R+2\pi\left(\frac{9}{10}R\right)+\pi\left(R\left(\frac{9}{10}\right)^2\right)+\ldots+\pi\left(R\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right)+\ldots$$

$$=2\pi R\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}+\ldots\right)=2.\pi.50.\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=3140(cm)=31,4m.$$

<u>Chú ý:</u> dãy số $1,\dfrac{9}{10},\left(\dfrac{9}{10}\right)^2,\ldots,\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1},\ldots$ là cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 21: Người ta làm lỗ thông gió của một ngôi nhà bằng cách ghép một dãy hình tròn có cùng bán kính là $3cm$, theo các bước như Hình 2. Kí hiệu u_n (đơn vị diện tích) là diện tích hình tròn ghép được ở bước thứ n.



Bước 1 Bước 2 Bước 3 Bước … Bước n

a) Với n như thế nào thì u_n vượt quá $90000\pi; 9000000\pi$?

b) Với n như thế nào thì u_n vượt quá $45m^2$?

Lời giải

a) Gọi $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ lần lượt là diện tích các hình tròn $\left(cm^2\right)$ tương tứng từ các bước $1, 2, 3, \ldots, n$.

Ta có:

$$u_1 = \pi.3^2 = 1^2.\pi.3^2$$
$$u_2 = 4.\pi.3^2 = 2^2.\pi.3^2$$
$$u_3 = 9.\pi.3^2 = 3^2.\pi.3^2$$
$$...$$
$$u_n = \quad n^2.\pi.3^2$$

Ta xét $u_n > 90000\pi \Leftrightarrow n^2.\pi.3^2 > 90000\pi \Rightarrow n > 100$.

Vậy $n > 100$ thì u_n vượt quá 90000π hình tròn.

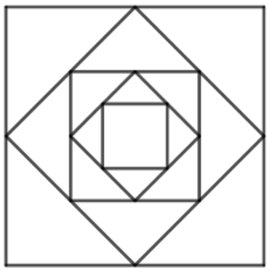
Ta xét $u_n > 9000000\pi \Leftrightarrow n^2\pi.3^2 > 9000000\pi \Rightarrow n > 1000$.

Vậy $n > 1000$ thì u_n vượt quá 1000000 hình tròn.

b) Xét $u_n > S \Leftrightarrow n^2.\pi.3^2 > 450000 \Leftrightarrow n^2 > \dfrac{50000}{\pi} \Rightarrow n > 15923,5668$

Vậy với $n > 15924$ thì u_n vượt quá $45m^2$.

Câu 22: Cho hình vuông có cạnh bằng $a(m)$, gọi là hình vuông H_1. Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành hình vuông H_2. Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành hình vuông H_3. Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots$.



a

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của hình H_n và tính $\lim p_n$.

Lời giải

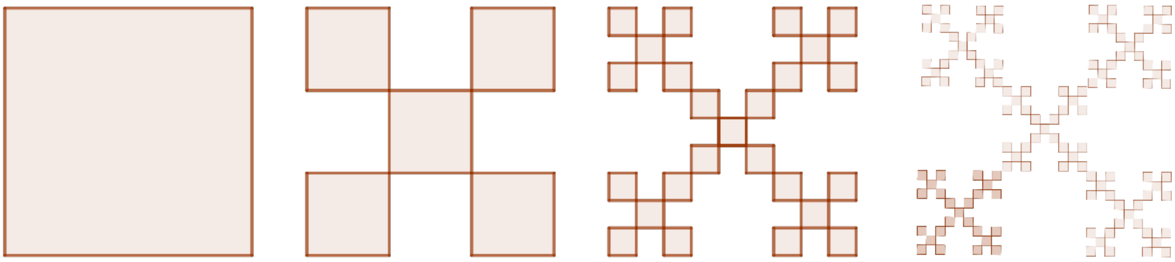
a) Ta có: $S_1 = a^2\left(m^2\right)$; $S_2 = \left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(m^2\right)$; $S_3 = \left(a\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2.2}\right)^2\left(m^2\right)$; … $S_n = \left(a\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right)^2\left(m^2\right)$,...

$$\lim S_n = \lim\left(a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = \lim\left(a^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = a^2.0 = 0$$

b) $p_1 = 4a\left(m\right), p_2 = 4a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(m\right), p_3 = 4a\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2.2}\left(m\right),..., p_n = 4a\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left(m\right),...$

$$\lim p_n = \lim 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 4a\lim\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 4a.0 = 0.$$

Câu 23: Bắt đầu hằng một hình vuông H_0 cạnh bằng $a\left(m\right)$ (hình H_0). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1. Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2. Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n $(n = 0,1,2,3,...)$.



H_0 H_1 H_2 H_3

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\dfrac{1}{3}a\left(m\right)$;

H_2 có $5.5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}a = \dfrac{1}{3^2}a\left(m\right)$;....

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\dfrac{1}{3^n}a\left(m\right)$.

a) Tính tổng diện tích S của $H_i, i = 0,...,n,...$ và tính $\lim S$.

b) Tính tổng chu vi p của hình $H_i, i = 0,...,n$ và tính $\lim p$.

Lời giải

Gọi $S_0, S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ lần lượt là diện tích của các hình vuông $H_0, H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$.

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = a^2 + \left(a\frac{1}{3}\right)^2 + \left(a\frac{1}{3^2}\right)^2 + ... + \left(a\frac{1}{3^n}\right)^2 + ...$$

$$= a^2\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + ... + \frac{1}{9^n} + ...\right) = a^2\frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}}\left(m^2\right);\ \lim S = \lim a^2\frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}a^2\left(m^2\right).$$

<u>Chú ý:</u> dãy số $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{9^2}, ..., \frac{1}{9^n}, ...$ là cấp số nhân lùi vô hạn.

Gọi $p_0, p_1, p_2, p_3, ..., p_n, ...$ lần lượt là chu vi của các hình vuông $H_0, H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$.

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = 4a + 4a\frac{1}{3} + 4a\frac{1}{3^2} + ... + 4a\frac{1}{9^n} + ... = 4a\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{9^n} + ...\right)$$

$$= 4a\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}(m);\ \lim p = \lim 4a\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 6a(m).$$

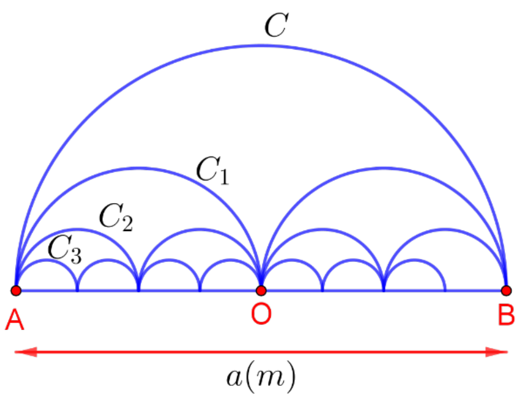
<u>Chú ý:</u> dãy số $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^n}, ...$ là cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 24: Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = a(m)$,

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{a}{2}$,

C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{a}{4}, \dots$

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{a}{2^n}, \dots$



Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

Lời giải

a) $p = \pi\frac{a}{2}(m)$; $p_1 = 2\pi\frac{a}{2^2}(m)$; $p_2 = 2^2\pi\frac{a}{2^3}(m)$; ...; $p_n = 2^n\pi\frac{a}{2^{n+1}}(m)$

$S = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(m^2\right)$; $S_1 = 2\pi\left(\frac{a}{2^2}\right)^2\left(m^2\right)$; $S_2 = 2^2\pi\left(\frac{a}{2^3}\right)^2\left(m^2\right)$; ...; $S_n = 2^n\pi\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^2\left(m^2\right)$

b) $\lim p_n = \lim\left(2^n \pi \dfrac{a}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2} a\pi$.

$\lim S_n = \lim 2^n \pi \left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)^2 = \dfrac{1}{4} a^2 \pi \lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

Câu 25: Một cái hồ đang chứa $600m^3$ nước mặn với nồng độ muối $20kg/m^3$. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $10m^3$ / phút.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Lời giải

a) Thể tích nước ngọt bơm vào sau t phút là: $10t$ (m^3).

Khối lượng muối là: $600.20 = 1200kg$ (kg).

Thể tích hồ sau khi bơm nước biển vào là: $600 + 10t$ (m^3).

Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là:

$C(t) = \dfrac{1200}{600+10t}\left(kg/m^3\right)$.

b) Ta có : $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1200}{600+10t} = 0\ \left(kg/m^3\right)$.

Vậy sau một thời gian bơm nước ngọt vào hồ thì nồng độ muối trong hồ là $0\left(kg/m^3\right)$.

Câu 26: Trong hồ có chứa 12000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 40gam / lít vào hồ với tốc độ 20 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là

$C(t) = \dfrac{40t}{600+t}$(gam / lít) .

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu bơm nước vào hồ một thời gian dài (xem như $t \to +\infty$).

Lời giải

a) Thể tích nước biển bơm vào sau t phút là: $20t$ (lít).

Khối lượng muối là: $40.20t = 800t$ (gam).

Thể tích hồ sau khi bơm nước biển vào là: $12000 + 20t$ (lít).

Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là:

$$C(t) = \frac{800t}{12000 + 20t} = \frac{40t}{600 + t}(\text{gam / lít}).$$

b) Ta có : $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{40t}{600 + t} = 40$ (gam/lít).

Vậy khi bơm nước vào hồ một thời gian dài thì nồng độ muối trong hồ bằng 40 (gam/lít), tương đương với nồng độ muốn trong nước biển.

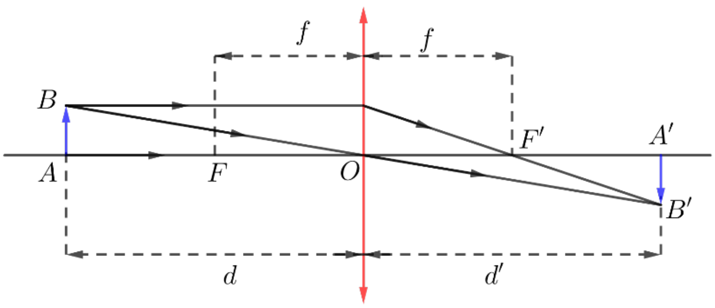
Câu 27: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính. Ta có công thức: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay $d' = \frac{df}{d - f}$

.

Xét hàm số $g(d) = \frac{df}{d - f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim\limits_{d \to f^+} g(d)$.

b) $\lim\limits_{d \to +\infty} g(d)$.



Lời giải

a) $\lim\limits_{d \to f^+} g(d) = \lim\limits_{d \to f^+} \frac{df}{d - f} = +\infty$; Điều này có nghĩa là khi vật tiến về tiêu điểm chính thì ảnh tiến về vô cực của thấu kính hội tụ.

b) $\lim\limits_{d \to +\infty} g(d) = \lim\limits_{d \to +\infty} g\frac{df}{d - f} = f$. Điều này có nghĩa là khi vật tiến về ở vô cực thì ảnh tiến về tiêu điểm chính của thấu kính hội tụ.

Câu 28: Một xưởng sản xuất nón bảo hiểm, tính trung bình mỗi nhân viên có thể lắp ráp được số nón bảo hiểm được tính theo biểu thức $N(t)=\dfrac{600t}{t+10},(0\le t)$ với t ngày. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

$\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{600t}{x+10}=600$.

Với thời gian làm việc là vô hạn mà số nón bảo hiểm nhân viên lắp ráp trung bình là 600 cái. Vậy, do năng suất con người có hạn, nên dù có tăng thời gian làm việc lên thì số lượng sản phẩm trung bình không vượt quá giới hạn này.

Câu 29: Một cơ sở sản xuất bếp gas, tính chi phí sản xuất x (sản phẩm) xác định bởi hàm số: $C(x)=200+120x$ (ngàn đồng).

a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{200+120x}{x}\Rightarrow\overline{C}(1)=\frac{200+120.1}{1}=320 \text{ (ngàn đồng)}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{C}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{200+120x}{x}=320$.

Với số sản phẩm sản xuất tăng lên vô hạn mà chi phí sản suất trung bình một sản phẩm vẫn là 320 ngàn đồng. Vậy, số sản phẩm sản xuất tăng bao nhiêu đi nữa thì chi phí sản xuất sản phẩm trung bình một sản phẩm cũng không vượt quá giới hạn này.

Câu 30: Một hãng taxi đưa ra giá cước cho loại xe 4 chỗ như sau:

Loại xe	**Giá cước cho 1 km đầu tiên**	**Giá cước cho km thứ 2 đến km thứ 25**	**Giá cước cho km thứ 26 trở lên**
VF 5 plus	20.000 đồng/ km	15.000 đồng/ km	15.000 đồng/ km

(qua 1 km đầu được tính cho km thứ hai, qua km thứ 25 được tính cho km thứ 26).

Giá cước được biểu diễn bởi hàm số $T(x)=\begin{cases}20000 & \text{khi } 0<x\le 1\\ 20000+(x-1).15000 & \text{khi } 1<x\le 25\\ 380000+(x-25).14000 & \text{khi } x>25.\end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$, với $x(km)$.

Lời giải

+ Tại $x_0=1$ ta có:

$T(1)=20000$; $\lim\limits_{x\to1^-}T(x)=\lim\limits_{x\to1^-}20000=20000$

$\lim\limits_{x\to1^+}T(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[20000+(x-1)15000\right]=20000$

Vì $\lim\limits_{x\to1^-}T(x)=\lim\limits_{x\to1^+}T(x)=T(1)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0=1$

+ Tại $x_0=25$ ta có: $T(25)=20000+(25-1)15000=380000$

$\lim\limits_{x\to 25^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 25^-}\left[20000+(x-1)15000\right] = 380000$

$\lim\limits_{x\to 25^+} T(x) = \lim\limits_{x\to 25^+}\left[380000+(x-25)14000\right] = 380000$

Vì $\lim\limits_{x\to 25^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 25^+} T(x) = T(25)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 25$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục

Câu 31: Biểu giá bán lẻ điện sinh hoạt của EVN được áp dụng theo Quyết định 1062/QĐ-BCT với mức giá bán lẻ điện chưa bao gồm thuế giá trị gia tăng, cụ thể:

kWh	Giá tiền (đồng/ kWh)
Từ 1 đến 50	1,728
Từ 50 đến 100	1,786
Từ 101 đến 200	2,074
Từ 201 đến 300	2,612
Từ 301 đến 400	2.919
Từ 401 trở lên	3,015

Giá tiền được biểu diễn bởi hàm số $T(x) = \begin{cases} 1,728 & \text{khi } 0 < x \le 50 \\ 1,728 + (x-50).1,786 & \text{khi } 50 < x \le 100 \\ 91,028 + (x-100).2,074 & \text{khi } 100 < x \le 200 \\ 298,428 + (x-200).2,612 & \text{khi } 200 < x \le 300 \\ 559,628 + (x-300).2,219 & \text{khi } 300 < x \le 400 \\ 781,528 + (x-400).3,015 & \text{khi } x > 400 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$, với $x(kWh)$.

Lời giải

+ Tại $x_0 = 50$ ta có:

$T(50) = 1,728$

$\lim\limits_{x\to 50^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 50^-} 1,728 = 1,728$; $\lim\limits_{x\to 50^+} T(x) = \lim\limits_{x\to 50^+}\left[1,728+(x-50).1,786\right] = 1,728$

Vì $\lim\limits_{x\to 50^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 50^+} T(x) = T(50)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 50$

+ Tại $x_0 = 100$ ta có:

$T(100) = 1,728 + (100-50).1,786 = 91,028$

$\lim\limits_{x\to 100^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 100^-}\left[1,728+(x-50).1,786\right] = 91,028$

$\lim\limits_{x\to 100^+} T(x) = \lim\limits_{x\to 100^+}\left[91,028+(x-100).2,074\right] = 91,028$

Vì $\lim\limits_{x\to 100^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 100^+} T(x) = T(100)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 100$.

+ Tại $x_0 = 200$ ta có:

$T(200) = 91,028 + (200-100).2,074 = 298,428$

$\lim\limits_{x\to 200^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 200^-}\left[91,028+(x-100).2,074\right] = 298,428$

$\lim\limits_{x\to 200^+} T(x) = \lim\limits_{x\to 200^+}\left[298,428+(x-200).2,612\right] = 298,428$

Vì $\lim\limits_{x\to 200^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 200^+} T(x) = T(200)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 200$

+ Tại $x_0 = 300$ ta có:

$$T(300) = 298,428 + (300 - 200).2,612 = 559,628$$

$$\lim_{x\to 300^-} T(x) = \lim_{x\to 300^-} [298,428 + (x-200).2,612] = 599,628$$

$$\lim_{x\to 300^+} T(x) = \lim_{x\to 300^+} [559,628 + (x-300).2,219] = 599,628$$

Vì $\lim_{x\to 300^-} T(x) = \lim_{x\to 300^+} T(x) = T(300)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 300$.

+ Tại $x_0 = 400$ ta có:

$$T(400) = 559,628 + (400-300).2,219 = 781,528$$

$$\lim_{x\to 400^-} T(x) = \lim_{x\to 400^-} [559,628 + (x-300).2,219] = 781,528$$

$$\lim_{x\to 400^+} T(x) = \lim_{x\to 400^+} [781,528 + (x-400).3,015] = 781,528$$

Vì $\lim_{x\to 400^-} T(x) = \lim_{x\to 400^+} T(x) = T(400)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 400$

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục

Câu 32: Biết rằng khi nung nóng một vật với nhiệt độ tăng từ $20°C$, mỗi phút tăng $4°C$ trong 70 phút, sau đó giảm mỗi phút $2°C$ trong 50 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ ($°C$) trong tủ theo thời gian t (phút) có dạng:

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 4t & \text{khi } 0 \le t \le 70 \\ a - 2t & \text{khi } 70 < t \le 120 \end{cases}$$

(a là hằng số). Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của a.

Lời giải

Tại $t_0 = 70$ ta có: $T(70) = 300$

$\lim_{x\to 70^-} T(x) = \lim_{x\to 70^-} (20 + 4t) = 300$; $\lim_{x\to 70^+} T(x) = \lim_{x\to 70^+} (a - 2t) = a - 140$

Hàm số liên tục trên tập xác đinh khi: $\lim_{x\to 70^-} T(x) = \lim_{x\to 70^+} T(x) = T(60) \Leftrightarrow a - 140 = 300 \Leftrightarrow a = 440$

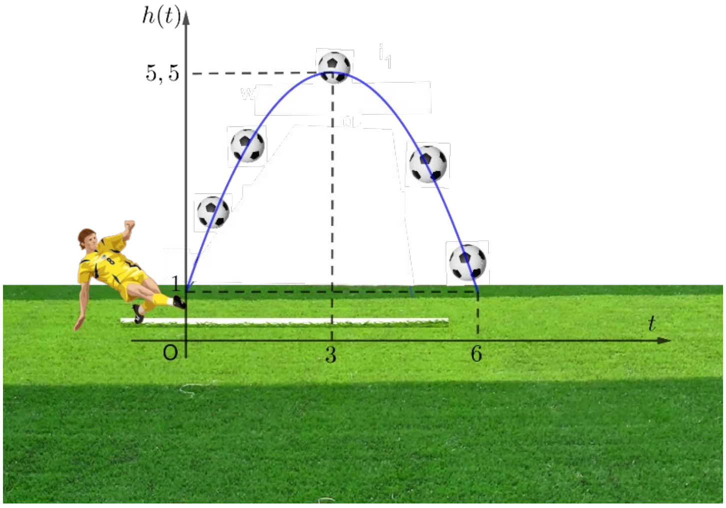
.

Vậy giá trị của $a = 440°C$.

Câu 33: Biểu thị độ cao $h(t)$ của một quả bóng đá lên trên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$.

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t\to 3}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1\right)$.



Lời giải

a) Hàm số $f(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+3t+1$ có tập xác định $D=[0,6]$. Xét trên $(0;6)$:

+ Tại $t_0=0$ ta có: $f(0)=1$; $\lim\limits_{t\to 0^+}T(x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{2}t^2+3t+1\right)=1$.

Do đó $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=f(0)=1$ (1).

+ Tại $t_0=6$ ta có: $f(6)=1$; $\lim\limits_{t\to 6^-}T(x)=\lim\limits_{t\to 6^-}\left(-\dfrac{1}{2}t^2+3t+1\right)=1$.

Do đó $\lim\limits_{t\to 6^-}f(t)=f(6)=1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $[0,6]$.

b) $\lim\limits_{t\to 3}\left(-\dfrac{1}{2}t^2+3t+1\right)=5,5$.

Câu 34: Một người lái xe ô tô, trong 20 km đầu xe chạy với vận tốc 40 km/h, sau đó cứ đến 10 km tiếp theo xe tăng tốc thêm $x(km/h)$, $x>0$. Biểu thức vận tốc của xe là $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{20}{5+2x}$ có đơn vị đo là giờ (h). Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định.

Lời giải

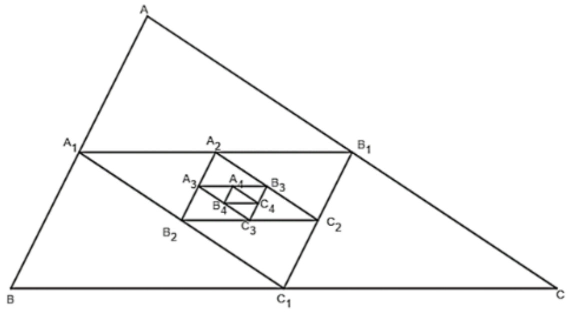
Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{20}{5+2x}$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Tại $x_0=0$ ta có: $f(0)=4,5$; $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{20}{5+2x}\right)=4,5$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=4,5$. Vậy hàm số liên tục trên $D=(0;+\infty)$.

Câu 35: Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1,\ldots,$

tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n,\dots$ Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$.



a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải

a)

$+)(p_n)$ là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

Ta có: $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_{\Delta ABC} = a + a + a = 3a$;

$$\mathrm{p}_2 = p_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3a) = \frac{1}{2} \cdot p_1$$

$$\mathrm{p}_3 = p_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3a) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot p_1; \dots ;$$

$$p_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot p_1; \dots$$

Suy ra:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (3a)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty}(3a) = 0.3a = 0.$$

(S_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

Gọi h là chiều cao của tam giác ABC và $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$$\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}ah;$$

$$\mathrm{S}_2 = S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}ah\right) = \frac{1}{4} \cdot S_1;$$

$$\mathrm{S}_3 = S_{\Delta A_2B_2C_2} = S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots ;$$

$$S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot S_1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}ah\right) = 0\cdot\frac{1}{2}ah = 0.$$

b)

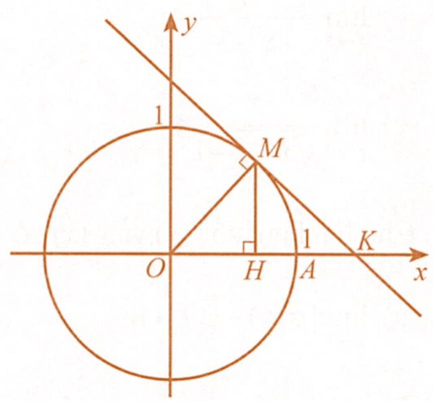
+) Ta có (p_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = 3a$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$P_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \frac{3a}{1-\frac{1}{2}} = 6a$$

+) Ta cũng có (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = \frac{1}{2}ah$ và công bội $q = \frac{1}{4}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$S_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots = \frac{\frac{1}{2}ah}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}ah$$

Câu 36: Cho điểm $M\left(t;\sqrt{1-t^2}\right), 0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Lời giải

Điểm M dần đến điểm A khi $t \to 1^-$. Do đó, ta cần tìm giới hạn $\lim_{t\to 1^-}\frac{HK}{HA}$.

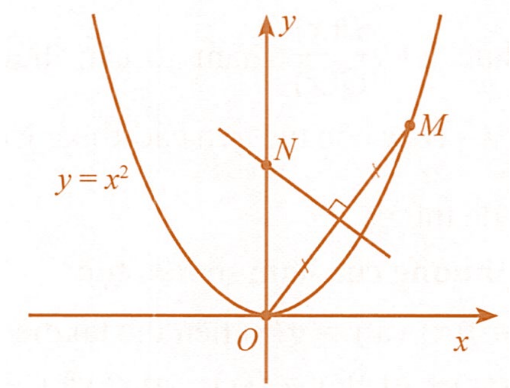
Ta có $H(t;0)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M nhận $\overrightarrow{OM} = \left(t;\sqrt{1-t^2}\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $d: t(x-t) + \sqrt{1-t^2}\left(y-\sqrt{1-t^2}\right) = 0$.

Thay $y = 0$ vào phương trình của d ta nhận được $x = \frac{1}{t}$. Suy ra $K\left(\frac{1}{t};0\right)$.

Ta có: $HA=1-t; HK=\frac{1}{t}-t=\frac{1-t^2}{t}; \frac{HK}{HA}=\frac{1-t^2}{t(1-t)}=\frac{1+t}{t}$; $\lim_{t\to 1^-}\frac{HK}{HA}=\lim_{t\to 1^-}\frac{1+t}{t}=\frac{1+1}{1}=2$.

Vậy khi điểm M dần đến điểm A thì giá trị của tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến 2.

Câu 37: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M\left(t;t^2\right), t>0$, nằm trên đường parabol $y=x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N. Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O?



Lời giải

Trung điểm của đoạn thẳng OM là $I\left(\frac{t}{2};\frac{t^2}{2}\right)$.

Đường trung trực của OM nhận vectơ $\overrightarrow{OM}=\left(t;t^2\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $d: t\left(x-\frac{t}{2}\right)+t^2\left(y-\frac{t^2}{2}\right)=0$. Thay $x=0$ vào phương trình của d, ta nhận được $y=\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)$.

Suy ra $N\left(0;\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)\right)$.

Điểm M dần đến điểm O khi t dần đến 0^+. Ta có $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)=\frac{1}{2}$.

Suy ra khi điểm M dần đến điểm O thì điểm N dần đến điểm $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

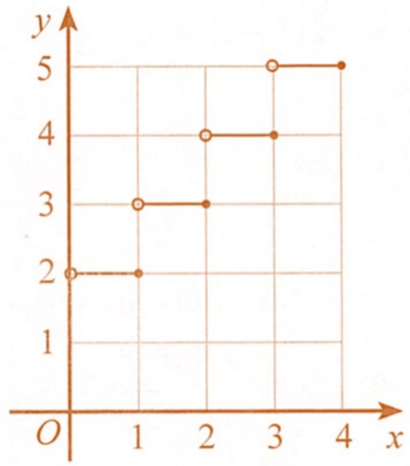
Câu 38: Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0<t\le 4$). Viết công thức xác định hàm số $y=P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0;4]$.

Giải

Hàm số $P(t)$ trên $(0;4]$ có công thức:

$$P(t)=\begin{cases}2 & \text{khi} \quad 0<t\le 1\\ 3 & \text{khi} \quad 1<t\le 2\\ 4 & \text{khi} \quad 2<t\le 3\\ 5 & \text{khi} \quad 3<t\le 4\end{cases}$$ (P tính theo chục nghìn đồng, t tính theo giờ).

Đồ thị của hàm số $P(t)$ như Hình bên dưới.



Trên mỗi nữa khoảng $(0;1],(1;2],(2;3]$ và $(3;4]$, hàm số đều có dạng $P(t)=c$ (c là hằng số) nên hàm số liên tục trên mỗi khoảng này.

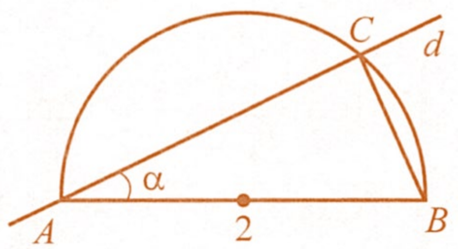
Ta có $\lim\limits_{t\to 1^-}P(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}2=2;\lim\limits_{t\to 1^+}P(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}3=3$. Do $\lim\limits_{t\to 1^-}P(t)\ne\lim\limits_{t\to 1^+}P(t)$ nên hàm số không liên tục tại điểm $t=1$.

Tương tự, chỉ ra được hàm số không liên tục tại các điểm $t=2$ và $t=3$.

Vậy hàm số liên tục trên các nửa khoảng $(0;1],(1;2],(2;3]$ và $(3;4]$; gián đoạn tại các điểm $t=1,t=2$ và $t=3$.

Câu 39: Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A, cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}S(\alpha),\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}S(\alpha)$.



Lời giải

$S(\alpha)=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha=\sin 2\alpha,\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$

Do các hàm số $y=\sin 2\alpha$ đều liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số $y=S(\alpha)$ liên tục trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$\lim\limits_{\alpha\to 0^+}S(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\sin 2\alpha=0$

$\lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-}S(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-}\sin 2\alpha=0.$

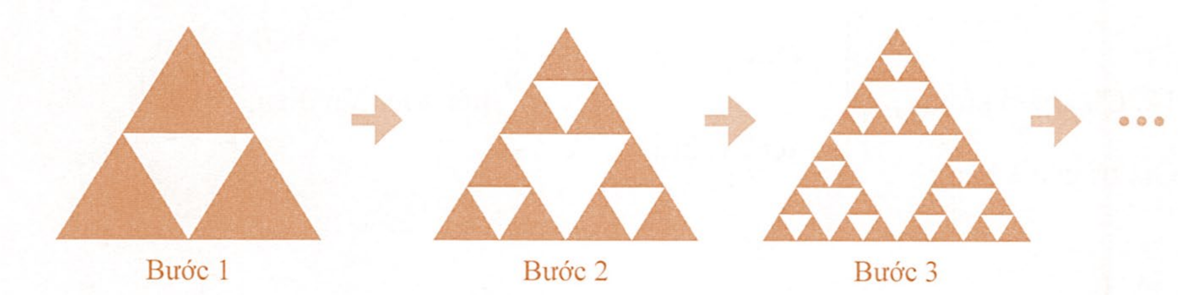
Câu 40: Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước như sau:

Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).

Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n, bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$).

Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Lời giải

$$S=\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+3^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+3^n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+\ldots$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\ldots.$$

Đây là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=\frac{1}{4}$, công bội $q=\frac{3}{4}$, nên

$$S=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=1.$$

Câu 41: Biết rằng, từ vị trí A, một mũi tên bay với tốc độ $10\,m/s$ hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng $10\,m$ (Hình bên dưới). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B, trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB. Tiếp theo, nó phải đến trung điểm A_2 của A_1B. Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B. Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B".

Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

Lời giải

Thời gian để mũi tên bay từ A đến A_1 là $\frac{1}{2}$ giây, từ A_1 đến A_2 là $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ giây, từ A_2 đến A_3 là $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3},\ldots$.

Tổng thời gian bay của mũi tên là $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$(*)

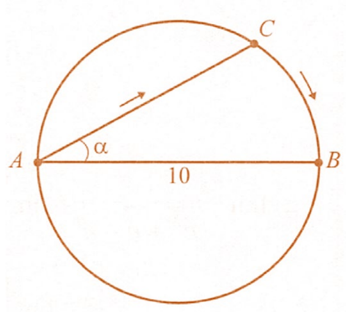
Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công bội bằng $\frac{1}{2}$.

Do đó, tổng này bằng $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$ (giây).

Như vậy, mũi tên đến bia mục tiêu sau 1 giây.

Lập luận của nhà thông thái không đúng, sai lầm ở chỗ cho rằng tổng ở (*) không phải là một số hữu hạn.

Câu 42: Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB=10\,m$, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình bên dưới).



Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

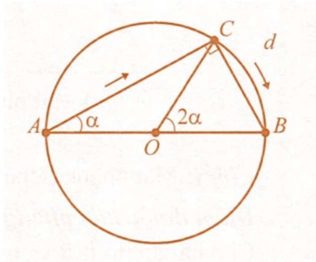
a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y=S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} S(\alpha)$ và $\lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.

Lời giải

Kí hiệu O là tâm hình tròn.



a) Do tam giác ABC vuông tại C nên $AC = AB\cos\alpha = 10\cos\alpha(m)$.

Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha$. Suy ra độ dài cung CB là $l = OB\cdot\widehat{BOC} = 5\cdot 2\alpha = 10\alpha(m)$.

Quãng đường di chuyển (tính theo m) của người đó là

$$S(\alpha) = AC + l = 10\cos\alpha + 10\alpha = 10(\alpha + \cos\alpha)\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Do các hàm số $y = \alpha$ và $y = \cos\alpha$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = S(\alpha)$ liên tục trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

c) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} S(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0^+} 10(\alpha + \cos\alpha) = 10\left(\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha + \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\cos\alpha\right)$

$= 10(0+1) = 10.$ $\lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^+} 10(\alpha + \cos\alpha) = 10\left(\lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^+}\alpha + \lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^+}\cos\alpha\right)$

$= 10\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 5\pi$