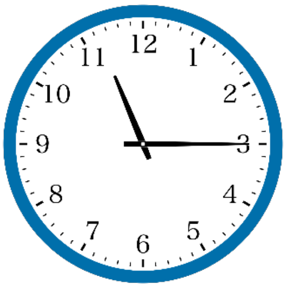
CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN LƯỢNG GIÁC

Câu 1: Trên mặt chiếc đồng hồ kim phút chỉ số 3 như hình vẽ.



Hỏi khi kim giờ chỉ số 2 (lần đầu tiên) thì kim phút quay một góc bao nhiêu độ?

Lời giải

Khi kim giờ chỉ số 2 thì kim phút quay số vòng là $\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}$ vòng.

Nên kim giờ đã quay một góc -990°.

Câu 2: Trên mặt chiếc đồng hồ kim giây chỉ số 12 như hình vẽ.

Hỏi khi kim phút chỉ số 3 (lần đầu tiên) thì kim giây quay một góc bao nhiêu độ?

Lời giải

Khi kim phút chỉ số 2 thì kim giây quay số vòng là 5 vòng.

Nên kim giờ đã quay một góc -1800°.

Câu 3: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270°?

Lời giải

Tính được: $270^\circ = \frac{270}{180}\pi = \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}.2\pi$

Vậy đu quay quay được góc 270° khi nó quay được $\frac{3}{4}$ vòng

Ta có: Đu quay quay được 1 vòng trong $\frac{1}{3}$ phút

Đu quay quay được $\frac{3}{4}$ vòng trong $\frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 4: Bánh xe của một người đi xe đạp quay được 15 vòng trong 6 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 10 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 660 mm.

Lời giải

Bán kính bánh xe đạp là: $r = \frac{d}{2} = 330 \text{ mm} = 33 \text{ cm}$.

Khi bánh xe quay được một vòng, thì người lái xe đi được một quãng đường dài bằng chu vi bánh xe và bằng $l_0 = 2\pi r = 66\pi$ cm.

Sau khi đi được 10 phút, bánh xe quay được $2,5.10.60 = 1500$ vòng.

Vậy trong 10 phút, người đó đi được $l = 1500.66\pi = 99000\pi$ cm.

Câu 5: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là $184\,\text{cm}$, bánh xe trước có đường kính là $92\,\text{cm}$, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút. Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút

Lời giải

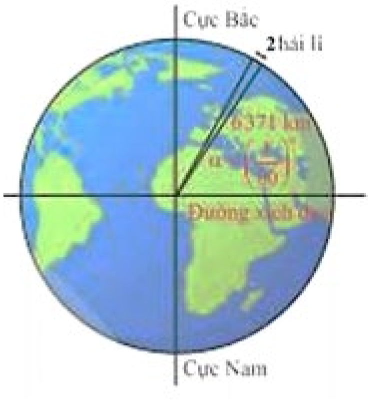
Bán kính của bánh xe sau: $\frac{184}{2} = 92\,\text{cm}$

Góc mà bánh xe sau quay được trong 10 phút là:

$10 \times 80 \times 360^\circ = 288000^\circ = 288000^\circ \times \frac{\pi}{180} = 1600\pi \text{rad}$

Quãng đường đi được của máy kéo sau 10 phút là: $92 \times 1660\pi \approx 462208(\text{cm}) = 4.62208\,\text{km}$

Câu 6: Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là $6371\,km$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

Lời giải

$\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} = \frac{\pi}{10800} rad$

2 hải lí $= 2.\frac{\pi}{10800} \cdot 6371 \approx 3,71(km)$

Câu 7: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 15 vòng trong 4 giây. Biết đường kính của bánh xe là $680mm$, hỏi trong 1 giây người đó đã đi được quãng đường bao nhiêu?

Lời giải

Trong 1 giây người bánh xe quay được số vòng là $\frac{15}{4}$ nên bánh xe quay được một góc là $\frac{15}{4}.2\pi = \frac{15\pi}{2}$.

Suy ra quãng đường người đó đi được là $\frac{15\pi}{2}.340 = 2550\pi$ mm.

Câu 8: Bánh xe của bé An có đường kính $30,48cm$ và quay được 11 vòng trong vòng 5 giây. Bé An đi được quãng đường 500 mét sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Mỗi giây bé An đi được quãng đường là $\frac{11}{5}.2\pi.0,1524 = \frac{4191\pi}{6250} m$.

Để đi được quãng đường 500 mét bé An cần đi thời gian là $600.\frac{6250}{4191\pi}$ giây xấp xỉ 4 phút.

Câu 9: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong khong gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quý đạo là đường tròn với tâm là tâm O của tái đất và bán kính $9000km$. Biết vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ. Hỏi vệ tịnh chuyển động quãng đường $300000km$ sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Mỗi giờ vệ tinh đi được quãng đường là $\frac{1}{2}.2\pi.9000 = 9000\pi km$.

Để vệ tinh đi được quãng đường $300000km$ cần đi thời gian là $\frac{300000}{9000\pi} \approx 10,61$ giờ.

Câu 10: Trạm vũ rụ Quốc tế ISS nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt trái Trái Đất khoảng $400km$. Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc $60°$ ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng – ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét (làm tròn tới hàng đơn vị) trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng đường kính trái đất là $12800km$.

Lời giải

Bán kính quỹ đạo của trạm vũ trụ quốc tế là $R = 6400 + 400 = 6800$ km.

Đổi $45° = 60.\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$.

Vậy khi được trạm mặt đất theo dõi, trạm ISS đã di chuyển quãng đường là

$l = 6800.\frac{\pi}{3} \approx 7121$ km.

Câu 11: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là $192cm$, bánh xe trước có đường kính là $96cm$, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết vận tốc của bánh xe trước là 150 vòng/phút. Tính vận tốc bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

Trong vòng 1 phút bánh xe trước quay một góc $150.2\pi = 300\pi$ rad.

Trong vòng 1 phút máy kéo đi được quãng đường là $S = 300\pi.96 = 28800\pi$ cm.

Suy ra trong vòng 1 phút bánh xe sau quay một góc 150π.

Vậy vận tốc của bánh xe sau là $\frac{150\pi}{2\pi} = 75$ vòng/phút.

Câu 12: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là $184cm$, bánh xe trước có đường kính là $92cm$, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.

a) Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.

b) Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).

c) Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

a) Chu vi của bánh xe sau là: $C_s = \pi.184$ (cm).

Khi đó, bánh xe sau đi mỗi vòng được quãng đường có độ dài là 184π (cm).

Trong 10 phút, bánh xe sau chuyển động được $80.10 = 800$ (vòng).

Quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút hay chính là quãng đường đi được khi bánh xe sau lăn 800 vòng là 800. $184\pi = 147200\pi(cm) = 1,472\pi(km)$.

b) Ta có: 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ.

Vận tốc của máy kéo là $v = \dfrac{1,472\pi}{\frac{1}{6}} \approx 27,75$ (km/giờ).

c) Chu vi của bánh xe trước là: $C_t = \pi.92(cm)$.

Khi bánh xe sau lăn được 800 vòng trong 10 phút thì bánh xe trước lăn được số vòng là $\dfrac{147200\pi}{92\pi} = 1600$ (vòng).

Vận tốc của bánh xe trước trong chuyển động này là $\dfrac{1600}{10} = 160$ (vòng/phút).

Câu 13: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là $196cm$, bánh xe trước có đường kính là $98cm$, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 90 vòng/phút.

a) Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 5 phút.

b) Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).

c) Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

a) Bán kính của bánh xe sau: $\dfrac{196}{2} = 98$ cm

Góc mà bánh xe quay sau được trong 5 phút là: $5\times 90\times 360^\circ = 162000^\circ = 162000^\circ \times \frac{\pi}{180} = 900\pi\,\text{rad}$

Quãng đường đi được của máy kéo sau 5 phút là: $98\times 900\pi \approx 277088(\text{cm}) = 2,77088$ km

b) Đổi 5 phút = $\frac{1}{12}$ giờ

Vận tốc của máy kéo là: $2,77088 : \frac{1}{12} \approx 33,25$ (km/h)

c) Góc mà bánh trước quay được trong 5 phút là: $98\times 900\pi : \frac{98}{2} = 1800\pi(\text{rad}) = 324000^\circ$

Số vòng lăn được của bánh xe trước là: $324000 : 360 = 900$ (vòng)

Vận tốc bánh trước là: $900 : 5 = 180$ (vòng/phút)

Câu 14: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 15 vòng trong 7 giây.

a) Tính góc (theo độ và rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là $680\,mm$.

Lời giải

a) 1 giây bánh xe quay được số vòng là: $15 : 7 = \frac{15}{7}$ (vòng)

Góc mà bánh xe quay được trong 1 giây: $\frac{15}{7}\times 360^\circ = 771^\circ 25' 43'' = \frac{30}{7}\pi \approx 4,3\pi(rad)$

b) Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60\times\frac{15}{7} = \frac{900}{7}$ vòng.

Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi(mm)$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là

$$680\pi\times\frac{900}{7} = \frac{612000}{7}\pi(mm) = 274665(mm) \approx 274,665(m)$$

Câu 15: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính $12000\,km$. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $4h$.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1h$; $3h$; $6h$; $11h$.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường $500000(km)$ sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a)

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 4 giờ là

$12000.2\pi = 24000\pi\left(km\right)$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ là

$12000.2\pi.\frac{1}{4} = 6000\pi\left(km\right)$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 3 giờ là

$12000.2\pi.\frac{3}{4} = 18000\pi\left(km\right)$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 6 giờ là

$12000.2\pi.\frac{6}{4} = 36000\pi\left(km\right)$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 11 giờ là

$12000.2\pi.\frac{11}{4} = 66000\pi\left(km\right)$

b)

Ta thấy quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ là: $6000\pi\left(km\right)$

Vệ tinh chuyển động được quãng đường $500000\left(km\right)$ trong thời gian là:

$\frac{500000}{6000\pi} = 26,5258... \approx 27$ (giờ)

Câu 16: Một vệ tinh được định vị tại ví trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh trái đất theo quỹ đạo là đường tròn có tâm là tâm O của trái đất, bán kính 9000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

a) Tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 3 giờ.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 30000 km sau bao lâu?

Lời giải

a) Sau 2 giờ vệ tinh chuyển động được quãng đường là $l = 2\pi R = 2.3,14.9000 = 56520$ km.

Vậy sau 3 giờ vệ tinh chuyển động được quãng đường là: $l_3 = \frac{3.56520}{2} = 84780$ km.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 30000 km sau thời gian là $t = \frac{30000.2}{56520} \approx 1,06$ giờ.

Câu 17: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (Hình vẽ). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau 1 phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu? Biết rằng bán kính $OA = 38$ cm, độ dày của lốp xe không đáng kể.

Lời giải

Sau 1 phút di chuyển van V cách vị trí A một góc $\alpha = 11.60 = 660\, rad = \left(\dfrac{118800}{\pi}\right)^0$.

Khoảng cách từ van V đến trục Ox là: $d = OV.\sin\alpha = 38.\sin\left(\dfrac{118800}{\pi}\right) \approx 9,97$ (cm).

Khoảng cách từ van V đến mặt đất là: $l = 38 - d = 38 - 9,97 = 28,03$ (cm).

Câu 18: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là $13 rad/s$ (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 62\, cm$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Hình 13

Lời giải

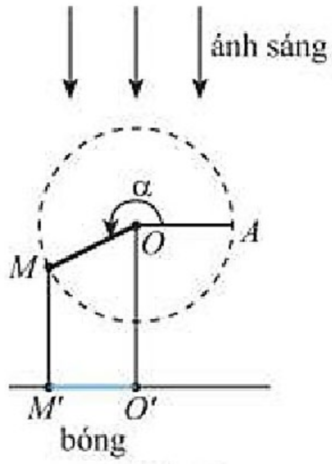
Ta có, tọa độ điểm V biểu diễn cho góc lượng giác trên có tọa độ là: $V(62.cos\alpha; 62.sin\alpha)$

Sau một phút di chuyển, van V quay được một góc lượng giác là $-13.60 = -780\ (rad)$

Khi đó, tọa độ điểm V biểu diễn cho góc lượng giác trên có tọa độ là: $V\left(62.cos(-780); 62.sin(-780)\right)$ hay $V(39,3; -48)$

Khoảng cách từ van đến mặt đất là: $62 + (-48) \approx 14(cm)$

Câu 19: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $5\frac{1}{6}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $50cm$? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 12

Lời giải

Sau khi thanh OM quay được 5 vòng, vị trí của thanh là OA.

Quay tiếp $\frac{1}{6}$, thanh sẽ tạo với OA một góc $\alpha = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Độ dài của bóng $O'M' = OM\cos\alpha = 50.\cos\frac{\pi}{3} = 25(cm)$.

Câu 20: Một đường tròn có bán kính $20cm$. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{12}$

b) 1,5;

c) $35°$;

d) $315°$.

Lời giải

a) Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{\pi}{12} = 5.236$ (cm)

b) Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times 1.5 = 30$ (cm)

c) Đổi $35° = \frac{7\pi}{36}$

Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{7\pi}{36} = 12.2173$ (cm)

d) Đổi $315° = \frac{7\pi}{4}$

Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{7\pi}{4} = 109.9557$ (cm)

Câu 21: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là $680\,mm$.

Lời giải

a) 1 giây bánh xe quay được số vòng là: $11:5 = \frac{11}{5}$ (vòng)

Góc mà bánh xe quay được trong 1 giây: $\frac{11}{5} \times 360° = 792° = 4.4\pi(rad)$

b) Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60 \times \frac{11}{5} = 132$ vòng.

Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi(mm)$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là

$680\pi \times 132 = 89760\pi(mm) = 89,76\pi(m)$

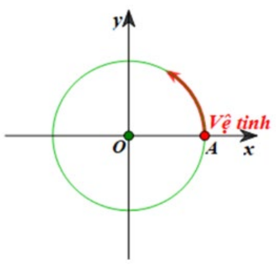
Câu 22: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính $9000\,km$. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2\,h$.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1h; 3h; 5h$.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường $200000\,km$ sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Giả sử vệ tinh được định tại vị trí A, chuyển động quanh Trái Đất được mô tả như hình vẽ dưới đây:



a) Vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo tức là vệ tinh chuyển động được quãng đường bằng chu vi của quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km.

Do đó quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $2\,h$ là: $2\pi \cdot 9000 = 18\pi(km)$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $1h$ là: $\frac{18\pi}{2}.1 = 9\pi(km)$.

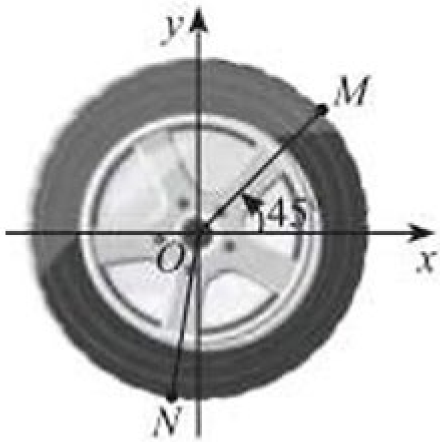
Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $3h$ là: $\frac{18\pi}{2}.3 = 27\pi(km)$.

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $5h$ là: $\frac{18\pi}{2}.5 = 45\pi(km)$.

b) Ta thấy vệ tinh chuyển động được quãng đường là $9\pi(km)$ trong $1h$.

Vậy vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km trong thời gian là: $\frac{200000}{9\pi} \approx 7074$ (giờ).

Câu 23: Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON).



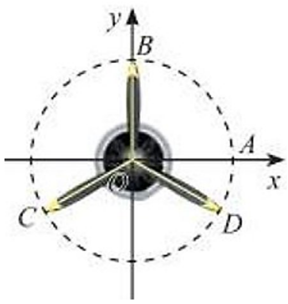
Hình 15

Lời giải

$(Ox, ON) = -99^\circ + k \cdot 360^\circ$

Câu 24: Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

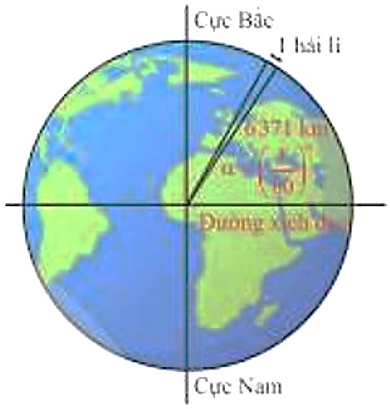


Hình 16

Lời giải

Điểm B, C, D biểu diễn cho góc lượng giác $\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$

Câu 25: Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha=\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là $6371km$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



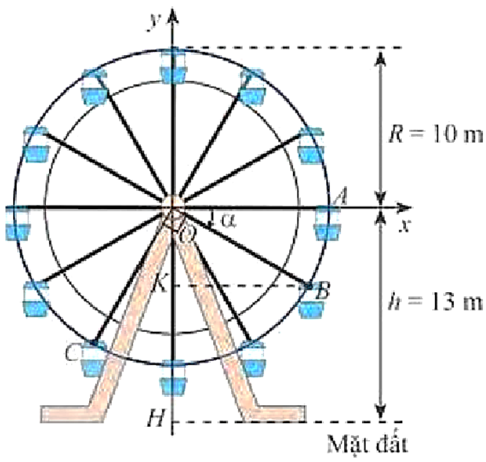
Hình 17

Lời giải

$$\alpha=\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}=\frac{\pi}{10800}rad$$

1 hải lí $=\frac{\pi}{10800}\cdot 6371\approx 1,85(km)$

Câu 26: Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C.



Hình 11

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13+10\sin\alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha=-30^{\circ}$.

b) Khi điểm B cách mặt đất $4m$ thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng KH

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn trên thì $\alpha > 0, \sin\alpha > 0$ và $OK = 10\sin\alpha$

Ta có: $KH = OH + OK = 13 + 10\sin\alpha$

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn dưới thì $\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$ và $OK = 10.(-\sin\alpha)$.

Ta có : $KH = OH - OK = 13 - 10\cdot(-\sin\alpha) = 13 + 10\sin\alpha$

Khi $\alpha = -30^\circ, KH = 13 + 10\cdot\frac{-1}{2} = 8$

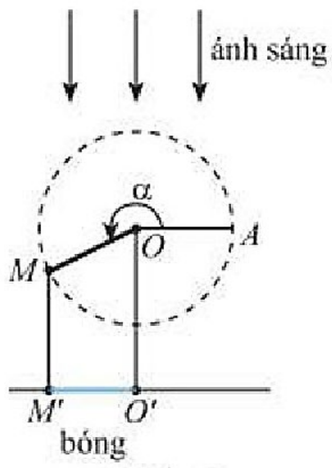
b) Gọi $(OA, OC) = \beta$. Ta có: $\beta = \alpha - 90^\circ$

Khi $KH = 4$. Suy ra $\sin\alpha = \frac{-9}{10}, \alpha < 0$

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{-9}{10}\right)^2} = \frac{-\sqrt{19}}{10}$$

Điểm C cách mặt đất là: $13 + 10\sin\beta \approx 12{,}96$

Câu 27: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $15cm$? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Lời giải

Sau khi thanh OM quay được 3 vòng, vị trí của thanh là OA.

Quay tiếp $\frac{1}{10}$, thanh sẽ tạo với OA một góc $\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

Độ dài của bóng $O'M' = OM\cos\alpha = 15\cdot\cos\frac{\pi}{5} = 12,1(cm)$.

Câu 28: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là $11 rad/s$ (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58cm$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Hình 13

Lời giải

Sau một phút di chuyển, van V quay được một góc là $11.60 = 660\ (rad)$

Khoảng cách từ van đến mặt đất là: $58 + 58.\sin 660 \approx 57,7(cm)$

Câu 29: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Trong 3 giây, quạt quay được: $3\cdot\frac{45}{60} = \frac{9}{4}$ (vòng)

Vậy quạt quay dược một góc: $2\pi.\frac{9}{4} = \frac{9\pi}{2}$ (rad)

Câu 30: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và rađian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là $860mm$.

Lời giải

a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{12}{6} = 2$ vòng, tức là quay được một góc $4\pi(rad)$ hay 720°

.

b) Trong 1 phút, quãng đường mà người đi xe đã đi được là:

$I = 430 \cdot 4\pi \cdot 60 = 103200\pi (mm)$.

Câu 31: Kim giờ dài $6cm$ và kim phút dài $11cm$ của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Lời giải

Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác 2π; kim giờ quét được một góc $\frac{\pi}{6}$. Hiệu vận tốc giữa kim phút và kim giờ là $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) : \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{11}$. (giờ)

Vậy sau $\frac{1}{11}$ (giờ) hai kim sẽ vuông góc với nhau.

Tổng quãng đường hai đầu mút kim đi được là $I = R \cdot \alpha = 6 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{\pi}{6} + 11 \cdot \frac{1}{11} \cdot 2\pi = \frac{23\pi}{11} (cm)$.

Câu 32: Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài $1,75m$ và $1,26m$. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

Lời giải

a) Trong 15 phút thì mũi kim phút vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}$ độ dài đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1,75 = \frac{7}{8}\pi \approx 2,75 (m)$.

b) Trong 15 phút thì mũi kim giờ vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$ đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 1,26 = \frac{21}{400}\pi \approx 0,16 (m)$.

Câu 33: Huyện lị Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lị Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lị đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính $6378km$.

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^{\circ} - 9^{\circ} = 14^{\circ}$. Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\frac{6378 \cdot 14 \cdot \pi}{180} \approx 1558 (km)$

Câu 34: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Lời giải

a) Sau 1 giây, cánh quat quay được $\frac{175}{60}=\frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

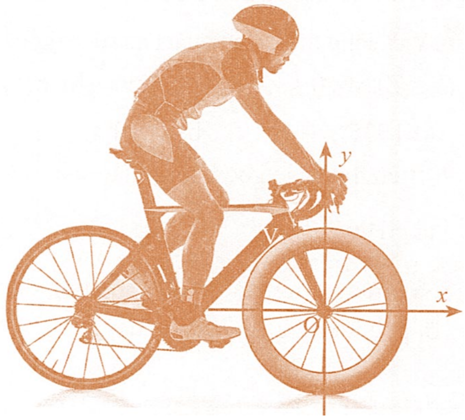
Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12}\cdot 2\pi=\frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6}\cdot 5=\frac{175\pi}{6}$.

b) Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là

$42\pi:\frac{35\pi}{6}=7,2$ giây.

Câu 35: Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là $35cm$. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Lời giải

a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8}=3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75.60=225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225.2\pi=450\pi$.

b) Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r=0,35m$.

Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi\cdot 0,35\approx 494,8(m)$.

Câu 36: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được $3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau $2h$, bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng $-2\pi(rad)$.

Vậy khi vệ tinh chuyển động được $3h$ thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng -3π (rad).

Câu 37: Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Do vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút và chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 15 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $-2\pi(rad)$.

Do đó, sau 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $\frac{-2\pi}{15}\cdot 10 = \frac{-4\pi}{3}(rad)$.

Câu 38: Một quả bóng Golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng cách d (mét) theo phương nằm ngang. Biết rằng $d = \frac{v_0^2.\sin 2\varphi}{g}$ trong đó $v_0\left(m/s\right)$ là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và φ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang. Tính giá trị của $\cos 2\varphi$, $\sin\varphi$ khi $v_0 = 15\left(m/s\right)$ $g = 10\left(m/s^2\right)$, $d = 18\left(m\right)$.

Lời giải

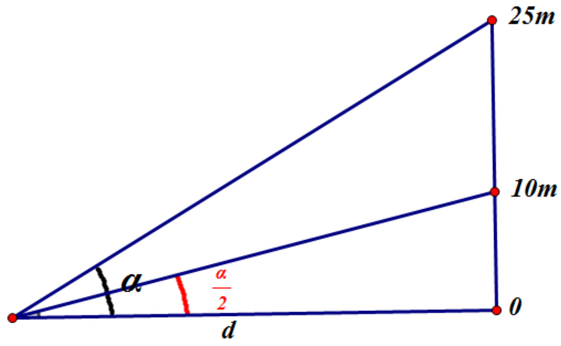
Ta có $d = \frac{v_0^2.\sin 2\varphi}{g}$ nên $18 = \frac{\left(15\right)^2.\sin 2\varphi}{10} \Leftrightarrow \sin 2\varphi = \frac{180}{225} = \frac{4}{5}$.

$0^0 < \varphi < 45^0 \Rightarrow 0^0 < 2\varphi < 90^0 \Rightarrow \cos 2\varphi > 0$ nên $\cos 2\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

Vì $0^0 < \varphi < 45^0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \Leftrightarrow \sin\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Câu 39: Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để gắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất $25\left(m\right)$ tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương ngắm với phương ngang). Nếu giảm góc ngắm đi một nửa thì vận động viên bắn trúng mục tiêu cách mặt đất $10\left(m\right)$. Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường?

Lời giải

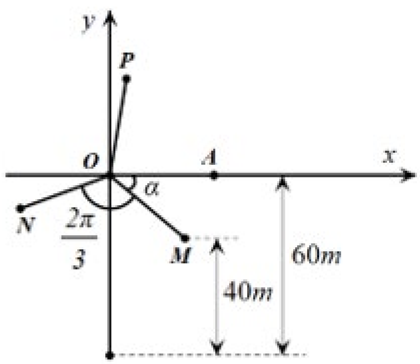


Gọi d là khoảng cách từ vận động viên đến bức tường, α là góc ngắm lúc đầu của vận động viên. Ta có $\tan\alpha = \frac{25}{d}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{10}{d}$.

Công thức nhân đôi: $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \dfrac{25}{d} = \dfrac{\frac{20}{d}}{1-\frac{100}{d^2}} \Leftrightarrow \dfrac{25}{d} = \dfrac{20d}{d^2-100} \Leftrightarrow d^2 = 500$

$\Leftrightarrow d = 10\sqrt{5} \simeq 22,36(m)$

Câu 40: Trong hình bên dưới, ba điểm M,N,P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài $31m$, độ cao của điểm M so với mặt đất là $40m$, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA,OM) là α.



a) Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA,ON) và (OA,OP), từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) $\sin\alpha = \frac{-20}{31} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{-20}{31}\right)^2} = \frac{\sqrt{561}}{31}$

b)

$$\sin(OA,ON)=\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\alpha\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$$

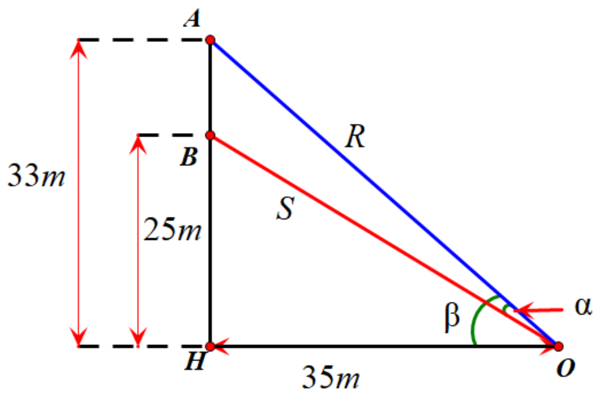
$$=-\frac{20}{31}.\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{561}}{31}.\frac{\sqrt{3}}{2}\approx-0,34$$

Chiều cao điểm N so với mặt đất là: $60+31.(-0,34)=49,46m$

$$\sin(OA,OP)=\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\approx0,98$$

Chiều cao điểm P so với mặt đất là: $60+31.0,98=90,38m$.

Câu 41: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $33m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $25m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $35m$ (như hình vẽ bên dưới).



a) Tính $tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Xét ΔAOH vuông tại H, ta có: $\tan\beta=\frac{AH}{HO}=\frac{33}{35}$.

Đặt $\widehat{BOH}=\gamma$

Xét ΔBOH vuông tại H, ta có: $\tan\gamma=\frac{BH}{HO}=\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$.

$$\tan\alpha=\tan\left(\beta-\widehat{BOH}\right)=\tan(\beta-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}$$

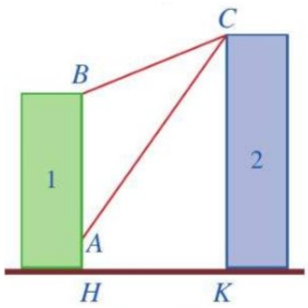
$$=\frac{\frac{33}{35}-\frac{5}{7}}{1+\frac{33}{35}\cdot\frac{5}{7}}=\frac{\frac{8}{35}}{\frac{82}{49}}=\frac{28}{205}$$

Vậy $\tan\alpha=\frac{28}{205}$.

b) Từ $\tan\alpha=\frac{28}{205}$, để tìm số đo góc α, ta sử dụng máy tính cầm tay, ta được kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là $8°$.

Vậy $\alpha \approx 8°$.

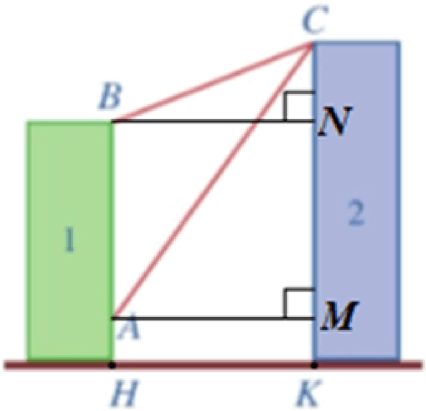
Câu 42: Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 50m$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $70m$, $AH = 2m, BH = 50m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

Lời giải

Kẻ $AM \perp CK$, $BN \perp CK$ (hình vẽ) ta có:



$BN = AM = HK = 50m;$

$CN = CK - NK = CK - BH = 70 - 50 = 20m;$

$MN = AB = BH - AH = 50 - 2 = 48m;$

$CM = CN + MN = 20 + 48 = 68\ (m).$

Đặt $\widehat{BCN} = \alpha, \widehat{ACM} = \beta$.

Xét ΔBCN vuông tại N có: $\tan\alpha = \dfrac{BN}{CN} = \dfrac{50}{20} = \dfrac{5}{2}$;

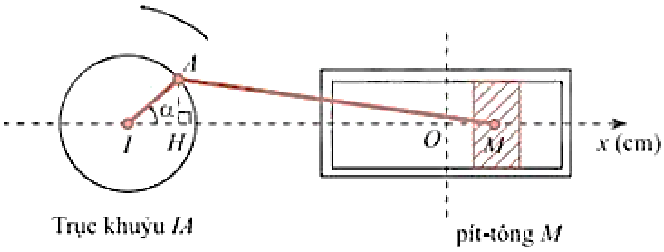
Xét ΔACM vuông tại M có: $\tan\beta = \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{50}{68} = \dfrac{25}{34}$;

Ta có: $\tan\widehat{ACB} = \tan\left(\widehat{BCN} - \widehat{ACM}\right) = \tan(\alpha - \beta)$

$$\Rightarrow \tan\widehat{ACB} = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{25}{34}}{1 + \frac{5}{2}\cdot\frac{25}{34}} = \frac{120}{193}.$$

Suy ra: $\widehat{ACB} = 31,87176...^\circ \approx 31,9^\circ$.

Câu 43: Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.



Hình 4

a) Biết $IA = 7\,cm$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α.

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -4\,cm$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì M ở vị trí O, H ở vị trí I. Ta có $IO = HM = AM$

$x_M = IM - OI = IH + HM - OI = IH + AM - AM = IH = IA \cdot \cos\alpha$
$x_M = 7\cos\alpha$

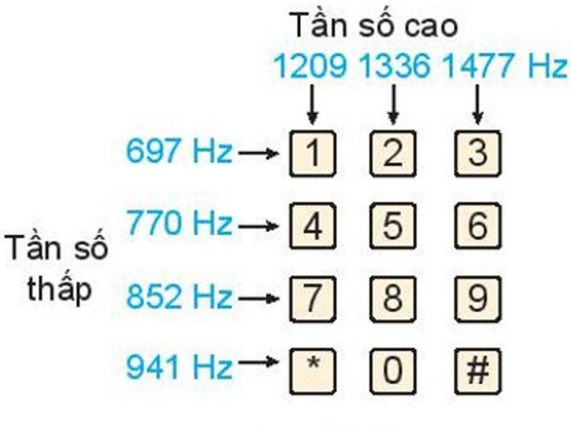
b) Sau khi chuyển động 1 phút, trục khuỷu quay được một góc là α

Khi đó $x_M = -4\,cm$. Suy ra $\cos\alpha = \frac{-4}{7}$

Sau khi chuyển động 2 phút, trục khuỷu quay được một góc là 2α

$$x_M = 7 \cdot \cos 2\alpha = 7.\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 7.\left(2\left(-\frac{4}{7}\right)^2 - 1\right) = -\frac{17}{7} \approx -2,4$$

Câu 44: Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).



a) Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.

b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số côsin.

Lời giải

a) $y=\sin(2\pi 770t)+\sin(2\pi 1209t)=\sin(1540\pi t)+\sin(2418\pi t)$

b)

$$\sin(1540\pi t)+\sin(2418\pi t)=2\sin\frac{1540\pi t+2418\pi t}{2}\cos\frac{1540\pi t-2418\pi t}{2}=2\sin(1979\pi t)\cos(-878\pi t)$$

Câu 45: Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A>0)$ và $\varphi\in[-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động.
Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)(cm),$$

$$x_2(t)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)(cm).$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

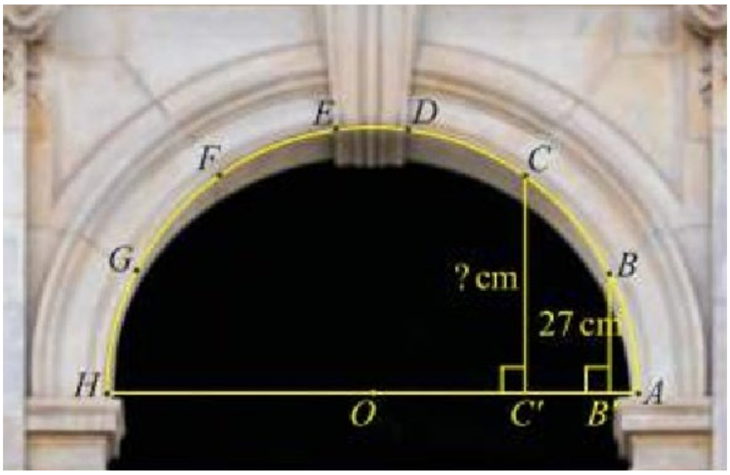
Lời giải

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=2\operatorname{coss}\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}\right]=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{12}\right)$$

Biên độ là $A=2\sqrt{2}$, pha ban đầu là $\varphi=-\frac{\pi}{12}$

Câu 46: Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chốt ở đỉnh. Nếu biết chiều rộng cổng và khoảng cách từ điểm B đến đường kính AH, làm thế nào để tính được khoảng cách từ điểm C đến AH ?



Lời giải

Do các cung AB, BC bằng nhau nên góc lượng giác $(OC,OB)=(OB,OA)$

Suy ra $(OC,OA)=2\cdot(OB,OA)$

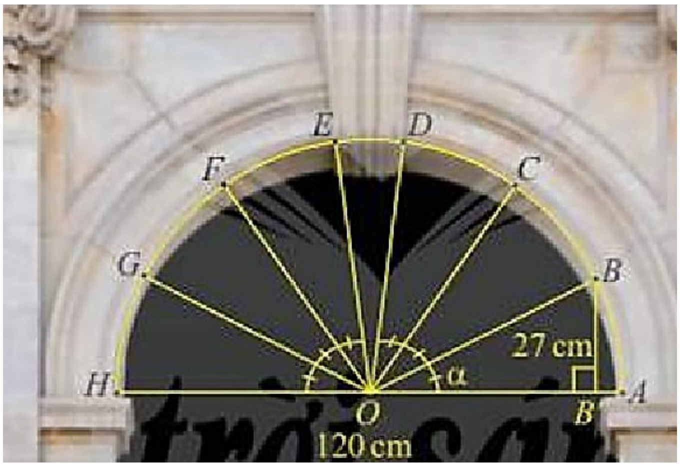
Ta có:

$BB'=R\cdot\sin(OB,OA)$
$CC'=R\cdot\sin(OC,OA)$

Do ta biết được BB', đường kính AH nên có thể tính được R và $\sin(OB,OA)$

Từ đó tính được sin(OC,OA) và biết được khoảng cách từ điểm C đến AH.

Câu 47: cho biết vòm cổng rộng $120\,cm$ và khoảng cách từ B đến đường kính AH là $27\,cm$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

Lời giải

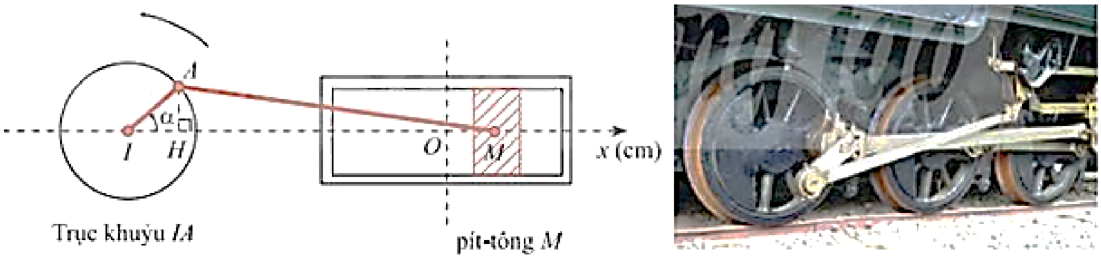
Ta có $AH = 120$. Suy ra $R = 120 : 2 = 60(cm)$

$\sin\alpha = \dfrac{BB'}{R} = \dfrac{27}{60} = \dfrac{9}{20}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{319}}{20}$ do có $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$CC' =$ R. $\sin 2\alpha =$ R. $2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 60\cdot 2\cdot\dfrac{9}{20}\cdot\dfrac{\sqrt{319}}{20} \approx 48,2(cm)$

Câu 48: Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.



Hình 4

a) Biết $IA = 8cm$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α.

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3cm$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ thì M ở vị trí O, H ở vị trí I. Ta có $IO = HM = AM$

$x_M = IM - OI = IH + HM - OI = IH + AM - AM = IH = IA\cdot\cos\alpha$

$x_M = 8\cos\alpha$

b) Sau khi chuyển động 1 phút, trục khuỷu quay được một góc là α

Khi đó $x_M = -3cm$. Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{-3}{8}$

Sau khi chuyển động 2 phút, trục khuỷu quay được một góc là 2α

$x_M = 8\cdot\cos 2\alpha = 8.\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = -5,75$

Câu 49: Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài $31m$, độ cao của điểm M so với mặt đất là $30m$, góc giữa các cánh quạt là $\dfrac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α.

Hình 5

a) Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP), từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) $\sin\alpha = \dfrac{-30}{31} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{-30}{31}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{61}}{31}$

b) $\sin(OA, ON) = \sin\left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3} - \cos\alpha\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3} \approx 0,27$

Chiều cao điểm N so với mặt đất là: $60 + 31.0,27 = 68,37\ (m)$

$\sin(OA, OP) = \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3} - +\cos\alpha\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3} \approx 0,7$

Chiều cao điểm P so với mặt đất là: $60 + 31.0,7 = 81,7\ (m)$

Câu 50: Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

$u = 40\sin(120\pi t) + 10\sin(360\pi t)\quad (V);$

$i = 4\sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)\quad (A).$

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

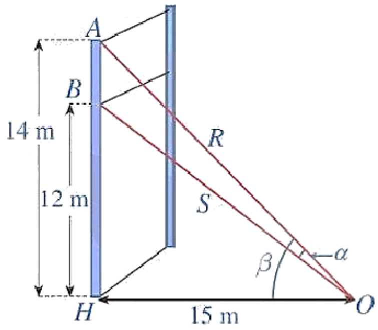
Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u\cdot i(W)$. Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có luỹ thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Lời giải

Ta có:

$$P = u\cdot i = [40\sin(120\pi t) + 10\sin(360\pi t)]\cdot[4\sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)]$$
$$= 160\sin^2(120\pi t) + 10\sin^2(360\pi t) + 80\sin(120\pi t)\sin(360\pi t)$$
$$= 80[1-\cos(240\pi t)] + 5[1-\cos(720\pi t)] + 40[\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)]$$
$$= 85 - 80\cos(240\pi t) - 5\cos(720\pi t) + 40\cos(240\pi t) - 40\cos(480\pi t)$$
$$= 85 - 40\cos(240\pi t) - 5\cos(720\pi t) - 40\cos(480\pi t)(W).$$

Câu 51: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $15m$ (Hình 18).



Hình 18

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Xét ΔAOH vuông tại H, ta có: $\tan\beta = \frac{AH}{HO} = \frac{14}{15}$.

Đặt $\widehat{BOH} = \gamma$

Xét ΔBOH vuông tại H, ta có: $\tan\gamma = \frac{BH}{HO} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\tan\alpha = \tan(\beta - \widehat{BOH}) = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\beta\tan\gamma} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{131}{75}} = \frac{10}{131}$$

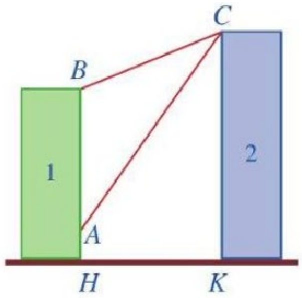
Vậy $\tan\alpha = \frac{10}{131}$.

b) Từ $\tan\alpha = \frac{10}{131}$, để tìm số đo góc α, ta sử dụng máy tính cầm tay

Ta được kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là 4°.

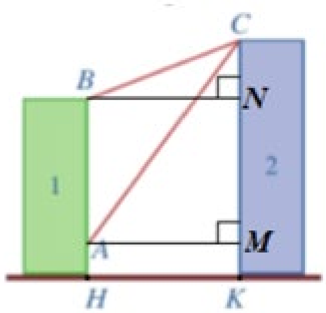
Vậy $\alpha \approx 4^\circ$

Câu 52: Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20m$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32m$, $AH = 6m, BH = 24m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

Lời giải



Kẻ $AM \perp CK, BN \perp CK$ (hình vẽ) ta có: $BN = AM = HK = 20(m)$

$CN = CK - NK = CK - BH = 32 - 24 = 8(m);$

$MN = AB = BH - AH = 24 - 6 = 18(m)$

$CM = CN + MN = 8 + 18 = 26(m)$

Đặt $\widehat{BCN} = \alpha, \widehat{ACM} = \beta$.

Xét ΔBCN vuông tại N có: $\tan\alpha = \dfrac{BN}{CN} = \dfrac{20}{8} = \dfrac{5}{2}$;

Xét ΔACM vuông tại M có: $\tan\beta = \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{20}{26} = \dfrac{10}{13}$;

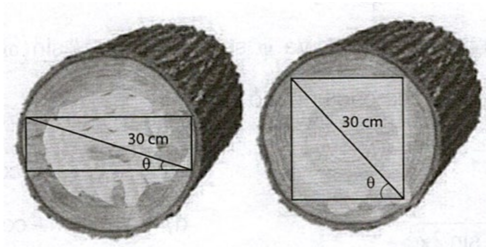
Ta có: $\tan\widehat{ACB} = \tan(\widehat{BCN} - \widehat{ACM}) = \tan(\alpha - \beta)$

$$\Rightarrow \tan\widehat{ACB} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{10}{13}}{1 + \frac{5}{2}\cdot\frac{10}{13}} = \frac{45}{76} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 0,01^{\circ}$$

Vậy góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất) có số đo xấp xỉ $0,01°$.

Câu 53: Một thanh xà gồ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính $30\,cm$.
a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gồ được tính bởi công thức

$S(\theta) = 450\sin 2\theta\left(cm^2\right)$, ở đó góc θ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gồ là lớn nhất.

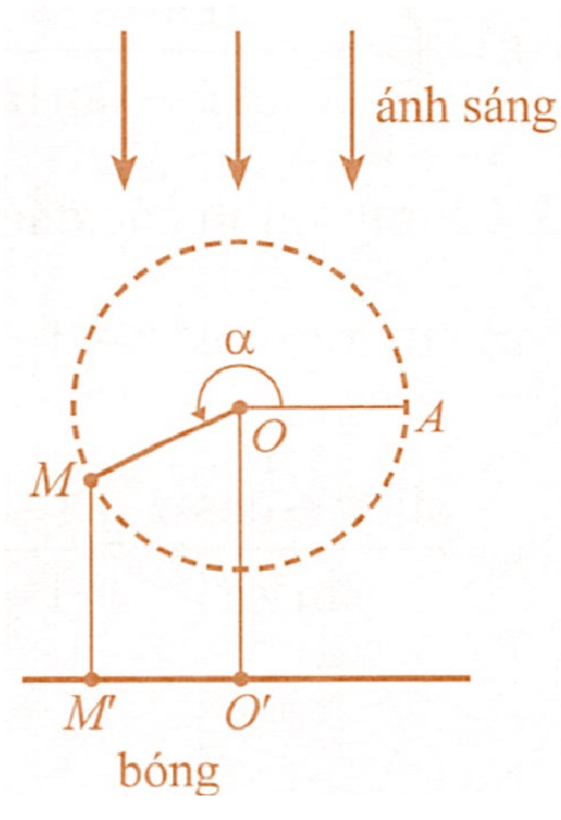
Lời giải

a) Mặt cắt của thanh xà gồ (hình dưới) là hình chữ nhật có hai kích thước là $AB = 30\cos\theta$ và $BC = 30\sin\theta$.

Vậy diện tích mặt cắt là $S = AB \cdot BC = 30 \cdot 30\sin\theta\cos\theta = 450\sin 2\theta$.

b) Ta có $S = 450\sin 2\theta \le 450$. Vậy diện tích mặt cắt của thanh xà gồ lớn nhất khi $\sin 2\theta = 1$ hay góc $\theta = 45^{\circ}$.

Câu 54: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $10\,cm$?



Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có $\alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}$.

Suy ra $O'M' = |OM\cos\alpha| = \left|10\cos\dfrac{120\pi}{13}\right| \approx 7,5cm$.

Câu 55: Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

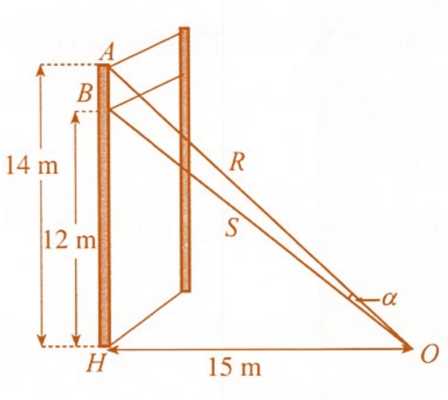
$d(t) = 4\sin\left[\dfrac{2\pi}{365}(t-80)\right] + 12,\ t \in \mathbb{Z}$ và $1 \le t \le 365.$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

$d(31) = 9,01$ giờ.

Câu 56: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 3).



Hình 3

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Ta có: $\alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}$.

Trong tam giác vuông AOH, $\tan\widehat{AOH} = \dfrac{AH}{OH} = \dfrac{14}{15}$.

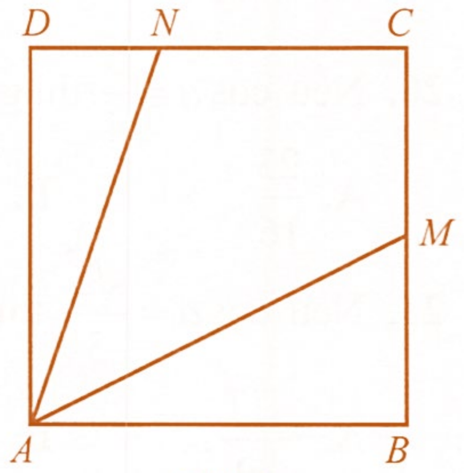
Trong tam giác vuông BOH, $\tan\widehat{BOH} = \dfrac{BH}{OH} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$.

Vậy $\tan\alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \dfrac{\tan\widehat{AOH} - \tan\widehat{BOH}}{1 + \tan\widehat{AOH}\cdot\tan\widehat{BOH}} = \dfrac{\dfrac{14}{15} - \dfrac{4}{5}}{1 + \dfrac{14}{15}\cdot\dfrac{4}{5}} = \dfrac{10}{131}$.

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Câu 57: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C. Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia

AM và AN, ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$



Hình 4

a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.

b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

a) Trong tam giác vuông ABM, $\tan\widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông ADN, $\tan\widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

Do đó, $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \frac{\tan\widehat{BAM} + \tan\widehat{DAN}}{1 - \tan\widehat{BAM}\tan\widehat{DAN}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$

b) $Do \tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 1$ nên $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{MAN} = 90^\circ - (\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 45^\circ$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45°.

Câu 58: Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức: $B(t) = 80 + 7\sin\frac{\pi t}{12}$, trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng $mmHg$ (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

a) 6 giờ sáng;

b) 10 giờ 30 phút sáng;

c) 12 giờ trưa;

d) 8 giờ tối.

Lời giải

a) $t=6, B(t)=80+7\sin\frac{6\pi}{12}=80+7\sin\frac{\pi}{2}=87(\text{mmHg})$

b) $t=10.5, B(t)=80+7\sin\frac{10.5\pi}{12}=82.6788(\text{mmHg})$

c) $t=12, B(t)=80+7\sin\frac{12\pi}{12}=80+7\sin\pi=80(\text{mmHg})$

d) $t=20, B(t)=80+7\sin\frac{20\pi}{12}=80+7\sin\frac{5\pi}{3}=73.9378(\text{mmHg})$

Câu 59: Mỗi ngày, người ta quan sát thấy mặt trời mọc đầu tiên tại Mỹ là tại vùng núi đảo ở Maine. Thời điểm mặt trời mọc được biểu diễn theo công thức $t(m)=1,665\sin(m+3)+5,485$, với t là thời điểm (được tính từ nửa đêm) và m là tháng (tính từ tháng 1). Hãy cho biết vào tháng 3 thì mặt trời mọc lúc mấy giờ?

Lời giải

Ta có: $t(3)=1,665\sin(3+3)+5,485\approx 5,0197\approx$ 5 giờ 1 phút.

Vậy vào tháng 3 thì mặt trời mọc lúc khoảng 5 giờ 1 phút.

Câu 60: Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức

$$B(t)=a+b\sin\frac{\pi t}{12},(a,b>0)$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thủy ngân). Biết huyết áp tâm trương thấp nhất là $78mmHg$ và huyết áp tâm trương lớn nhất là $92mmHg$, hỏi huyết áp tâm trương của người đó vào thời điểm 2 giờ 30 phút chiều nằm trong khoảng nào sau đây.

Lời giải

Vì $a,b>0$ và $-1\le\sin\frac{\pi t}{12}\le 1$ nên $B(t)_{\max}=a+b, B(t)_{\min}=a-b$ nên ta có

$\begin{cases}a+b=92\\a-b=78\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=85\\b=7\end{cases}$.

Tại thời điểm 2 giờ 30 phút chiều thì thời gian $t=14,5$ giờ.

Huyết áp tâm trương của người đó là $B(14,5)=85+7\sin\frac{\pi.14,5}{12}\approx 80,74mmHg$.

Câu 61: Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức: $B(t)=82+7\sin\frac{\pi t}{12}$, trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$

tính bằng $mmHg$ (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau (làm tròn đến 4 chữ số thập phân):

a) 5 giờ sáng;

b) 9 giờ 30 phút sáng;

c) 13 giờ chiều;

d) 9 giờ tối.

Lời giải

a) $t=5, B(5)=82+7\sin\frac{5\pi}{12}\approx 88,7615(\text{mmHg})$

b) $t=9,5, B(9,5)=80+7\sin\frac{9,5\pi}{12}\approx 86.2613(\text{mmHg})$

c) $t=13, B(13)=80+7\sin\frac{13\pi}{12}\approx 80,1883(\text{mmHg})$

d) $t=21, B(21)=80+7\sin\frac{21\pi}{12}\approx 77,0503(\text{mmHg})$

Câu 62: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t)=100\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kì của sóng là $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}}=30$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(30)=100\cos\left(\frac{\pi}{15}\times 30\right)=100(cm)$.

Vậy chiều cao của sóng là $100(cm)$.

Câu 63: Guồng nước (hay còn gọi là cọn nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $3,5m$; trục của nó đặt cách mặt nước $3m$. Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h=|y|$, trong đó $y=3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3$, với x (phút) là thời gian quay của guồng $(x\geq 0)$.

a) Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước $3m$.

b) Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước $6,5m$.

Lời giải

a) Để ống đựng nước cách mặt nước $3m$, ta có phương trình:

$$\left|3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3\right|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3=3 \\ 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3=-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{6}{3,5}<-1(VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x-\frac{\pi}{2}=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{2k+1}{4}; k\in\mathbb{Z}$$

Vì $x\geq 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{7}{4};...$

b) Để ống đựng nước cách mặt nước $6,5m$, ta có phương trình:

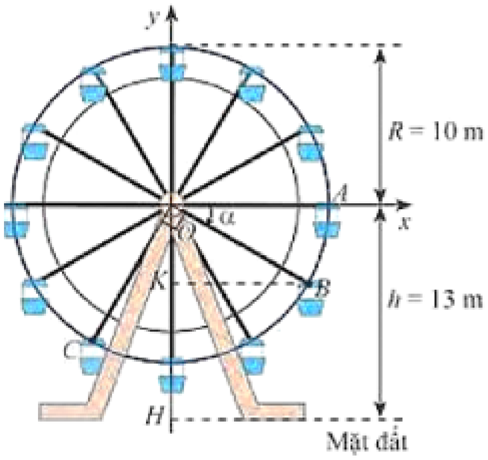
$$\left|3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3\right|=6,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3=6,5 \\ 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3=-6,5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{9,5}{3,5}<-1(VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{2k+1}{2}; k\in\mathbb{Z}$$

Vì $x \ge 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2};...$

Câu 64: Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C.



Hình 11

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13+10\sin\alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha=-30^\circ$.

b) Khi điểm B cách mặt đất $15m$ thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng KH

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn trên thì $\alpha>0, \sin\alpha>0$ và $OK=10\sin\alpha$

Ta có: $KH=OH+OK=13+10\sin\alpha$

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn dưới thì $\alpha<0$, $\sin\alpha<0$ và $OK=10.(-\sin\alpha)$.

Ta có : $KH=OH-OK=13-10\cdot(-\sin\alpha)=13+10\sin\alpha$

Khi $\alpha=-30°, KH=13+10\cdot\frac{-1}{2}=8$

b) Gọi $(OA,OC)=\beta$. Ta có: $\beta=\alpha-90°$

Khi điểm B cách mặt đất $15m$ thì $KH=15$. Suy ra $\sin\alpha=\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}, \alpha<0$

$\sin\beta=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{-1}{5}\right)^2}=\frac{-2\sqrt{6}}{5}$

Điểm C cách mặt đất là: $13+10\sin\beta\approx 3,20$

Câu 65: Trong vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trog đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(\mathrm{A} > 0)$ và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)(\mathrm{cm})$$

$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{cm})$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

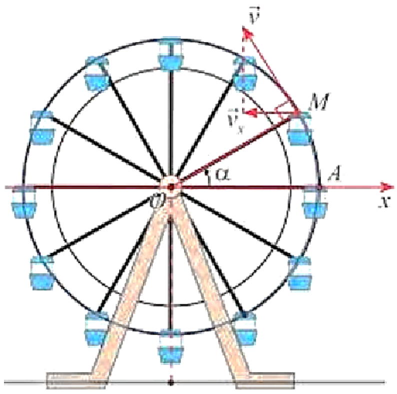
Lời giải

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2\cos s\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$$

Biên độ là $A = 2\sqrt{2}$, pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$

Câu 66: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,5.\sin\alpha$ (m/s) (Hình 11).



Hình 11

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x

b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

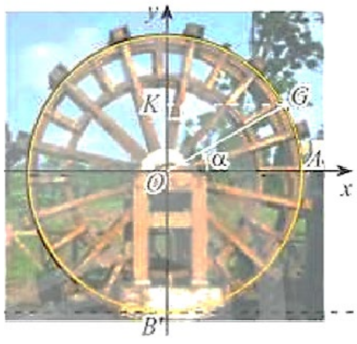
Lời giải

a) Do $-1 \le \sin\alpha \le 1$ nên $-0,5 \le 0,5.\sin\alpha \le 0,5$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,5(m)$ khi $\sin\alpha = 1$ và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,5\ (m)$ khi $\sin\alpha = -1$.

b) Dựa vào đồ thị hàm số sin, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \le \alpha \le 2\alpha$) , v_x tăng khi $\pi \le \alpha \le 2\pi$

Câu 67: Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng $3m$. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



Hình 12

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5m$.

Lời giải

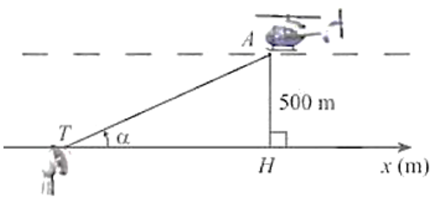
a) $h = 3 + 3.\sin\alpha$

b) Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0 \le \alpha \le 4\pi$

Khi $h = 1,5$. Suy ra $\sin\alpha = \frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \alpha = \frac{11\pi}{6}; \alpha = \frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha = \frac{23\pi}{6}$

Câu 68: Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H, α là góc lượng giác $(Tx, TA)(0 < \alpha < \pi)$.



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α.

b) Dựa vào đồ thị hàm số côtang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot\alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$ thì $\frac{-\sqrt{3}}{3}<\cot\alpha<\sqrt{3}$

Vậy $x_H \in \{-288,7;866\}$

Câu 69: Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(cm)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày $(0\le t\le 24)$ cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+10$. Hỏi vào thời điểm nào trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải

Ta có $3\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+10\le 13$

Mà $3\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+10=13 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=1$ $\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}=k2\pi \Leftrightarrow t=24k-4\,(k\in\mathbb{Z})$ nên

$0\le 24k-4\le 24 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\le k\le\frac{7}{6}\Rightarrow k=1\Rightarrow t=20$.

Vậy vào thời điểm $20h$ trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất là $13(cm)$.

Câu 70: Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t)=a+b\sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t-\frac{37}{12}\right)\right],(a,b>0)$, trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên. Biết chất ô nhiễm trong một mét khối không khí cao nhất là 50 miligam và thấp nhất là 20 miligam. Hỏi trong ngày thứ Hai của tuần thứ 2, ngày thứ Tư của tuần thứ 3 và ngày thứ Ba của tuần thứ 4 và ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 của tháng thì số gam chất ô nhiễm nhiều nhất nằm trong khoảng nào?

Lời giải

Vì $a,b>0$ và $-1\le\sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t-\frac{37}{12}\right)\right]\le 1$ nên $\begin{cases}P(t)_{\max}=a+b\\ P(t)_{\min}=a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=50\\ a-b=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=35\\ b=15\end{cases}$.

$\Rightarrow P(t)=35+15\sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t-\frac{37}{12}\right)\right],(a,b>0)$.

Số miligam của ngày thứ Hai của tuần thứ 2 là $P(2)\approx 22,6$.

Số miligam của ngày thứ Tư của tuần thứ 3 là $P(11)\approx 45,996$.

Số miligam của ngày thứ Ba của tuần thứ 4 là $P(17)\approx 33,88$.

Số miligam của ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 là $P(20)=42,5$.

Câu 71: Mực nước lên xuống của thủy triều trong một ngày tại một cửa biển được tính theo công thức $y=\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+73)\right)+1$ với x là giờ $(0\le x\le 24)$, y tính theo đơn vị m so với mực nước biển. Hỏi vào lúc $17h$ thì mực nước ở độ cao bao nhiêu so với mực nước biển?

Lời giải

Thay $x=17$ vào công thức $y=\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+73)\right)+1$ ta có $y=\sin\left(\frac{\pi}{180}(17+73)\right)+1=2$.

Vậy vào lúc $x=17$ thì mực nước ở độ cao $2m$ so với mực nước biển.

Câu 72: Số giờ có ánh sáng mặt trời của Thủ đô Hà Nội năm 2018 được cho bởi công thức $y=3\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right)+13$ với $1\le x\le 365$ là số thứ tự của ngày trong năm. Ngày nào sau đây của năm 2018 thì số giờ có ánh sáng mặt trời của Hà Nội lớn nhất?

Lời giải

Để số giờ có ánh sáng mặt trời lớn nhất thì hàm số $y=3\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right)+13$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right)=1\Leftrightarrow x=30+k360, k\in Z$. Vì $1\le x\le 365$ nên ta có

$$1\le 30+k360\le 365\Leftrightarrow -0,08\le k\le 0,93\Rightarrow k=0.$$

Do đó $x=30$ (tháng đầu tiên của năm)

Câu 73: Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kì T của dao động là $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t=0, t=\frac{T}{4}, t=\frac{T}{2}, t=\frac{3T}{4}, t=T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0;2T]$ trong trường hợp:

a) $A=3cm,\varphi=0$;

b) $A=3cm,\varphi=-\frac{\pi}{2}$;

c) $A=3cm,\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Từ $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ta có $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Khi đó ta có phương trình li độ là $x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t+\varphi\right)$.

a)

- Với $A = 3cm$ và $\varphi = 0$ thay vào phương trình li độ $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$

•$t = 0$ thì $x = 3\cos 0 = 3$;

•$t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) = 3\cos\frac{\pi}{2} = 0$;

•$t = \frac{T}{2}$ thì $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) = 3\cos\pi = -3$

•$t = \frac{3T}{4}$ thì $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}\right) = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 0$;

•$t = T$ thì $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}.T\right) = 3\cos 2\pi = 3$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $\left[0;2T\right]$:

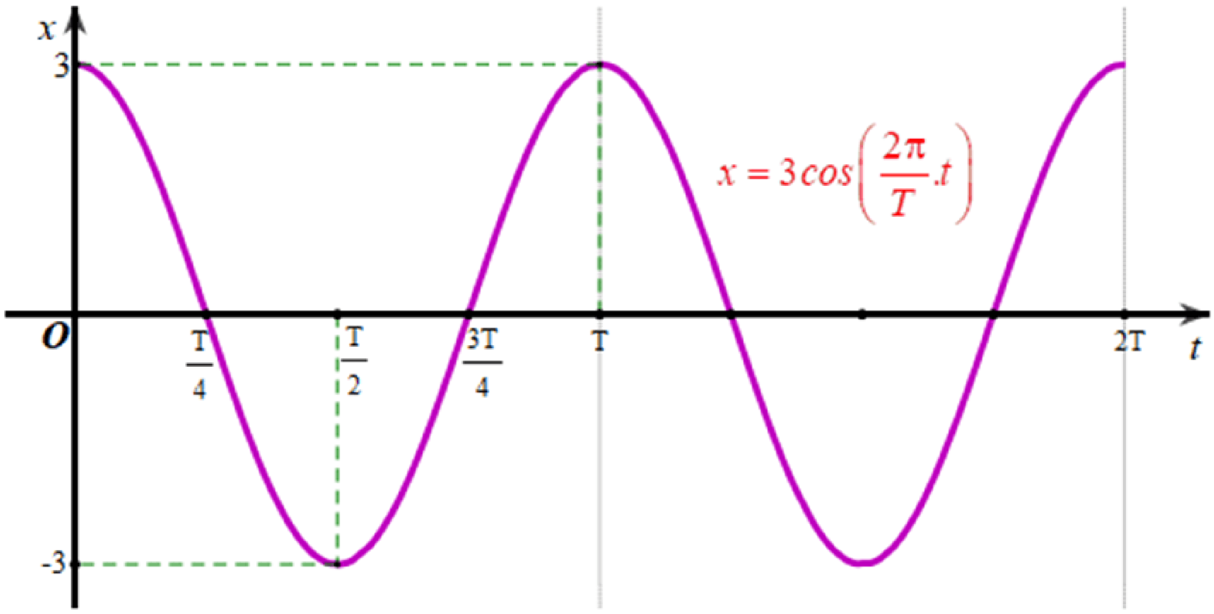
Xét hàm số $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ có chu kì là T.

Ta vẽ đồ thị hàm số $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;T]$ theo bảng sau:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$	3	0	-3	0	3

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T, ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[T;2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;2T]$ như sau:



b) - Với $A = 3cm$ và $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$

$\cdot t = 0$ thì $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) = 3\sin 0 = 0$

$\cdot t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3$;

$\cdot t = \frac{T}{2}$ thì $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) = 3\sin\pi = 0$;

$\cdot t = \frac{3T}{4}$ thì $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}\right) = 3\sin\frac{3\pi}{2} = -3$;

$\cdot t = T$ thì $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) = 3\sin 2\pi = 0$.

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

Xét hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}, t\right)$ có chu kì là T.

Ta vẽ đồ thị hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ theo bảng sau:

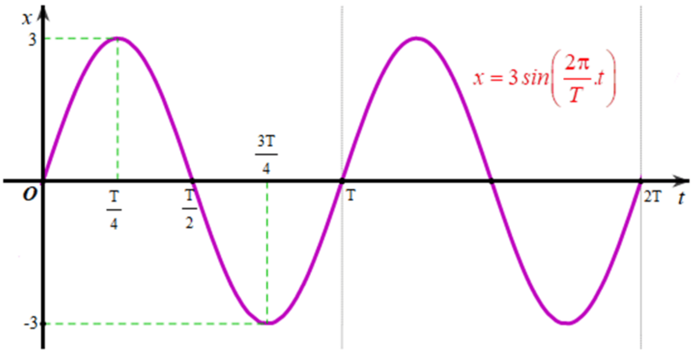
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T

$x=3\sin\left(\frac{2\pi}{T}.t\right)$	0	3	0	-3	0

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x=3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T, ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x=3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[T;2T]$

.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x=3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;2T]$ như sau:



c) - Với $A=3cm$ và $\varphi=\frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t+\varphi\right)$ ta có:

$$x=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)=-3\cos\left(\pi-\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)\right)=-3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)=-3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

$\cdot t=0$ thì $x=-3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)=-3\sin 0=0$

$\cdot t=\frac{T}{4}$ thì $x=-3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)=-3\sin\frac{\pi}{2}=-3$;

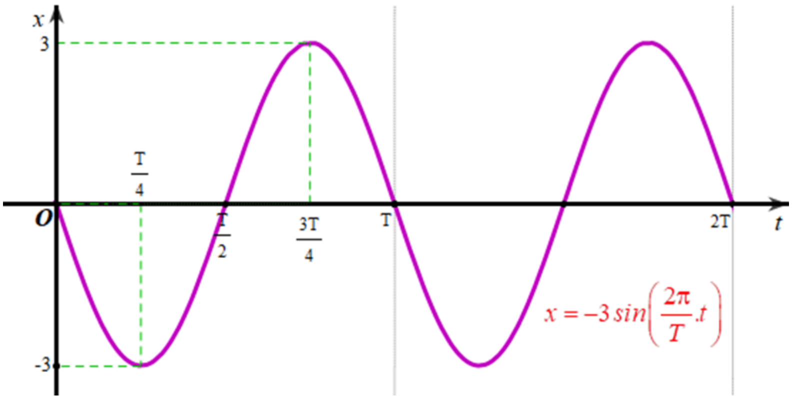
$\cdot t=\frac{T}{2}$ thì $x=-3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)=-3\sin\pi=0$;

$\cdot t=\frac{3T}{4}$ thì $x=-3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}\right)=-3\sin\frac{3\pi}{2}=3$;

$\cdot t=T$ thì $x=-3\sin\left(\frac{2\pi}{T}.T\right)=-3\sin 2\pi=0$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x=-3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ trên đoạn $[0;2T]$:

Đồ thị hàm số $x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T},t\right)$ là hình đối xứng với đồ thị hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ qua trục hoành:



Câu 74: Vì sao mặt cắt của sóng nước trên mặt hồ được gọi là có dạng hình sin?

Lời giải

Vì hình ảnh mặt cắt sóng nước giống với đồ thị của hàm lượng giác $y = \sin x$

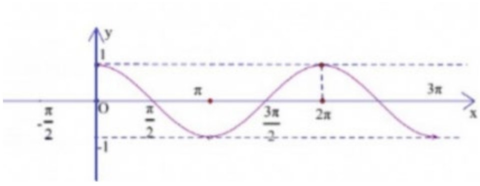
Câu 75: Li độ $s(cm)$ của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) được cho bởi hàm số $s = 2\cos\pi t$. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 1 giây đầu thì li độ s nằm trong đoạn $[-1;1](cm)$.

Hình 6

(Theo https://www.britannica.com/sciencel simple-harmonic-motion)

Lời giải

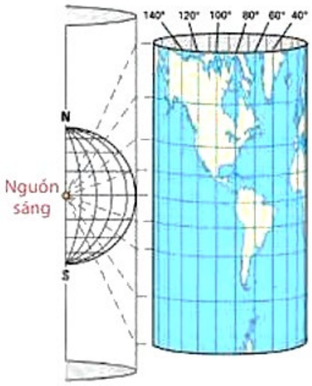
Trong 3 giây đầu, $0 \le t \le 3$ nên $0 \le \pi t \le 3\pi$



Dựa vào đồ thị hàm số côsin, ta thấy $\cos \pi t = 1$ khi $\pi t = 0$ và $\pi t = 2\pi$

Vậy con lắc có li độ lớn nhất tại các thời điểm $t = 0$ và t = 2

Câu 76: Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong Hình 9. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ $\varphi^\circ (-90 < \varphi < 90)$ được cho bởi hàm số $y = 20\tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)(cm)$. Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá $20cm$ trên bản đồ.



Hình 9

(Theo https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/)

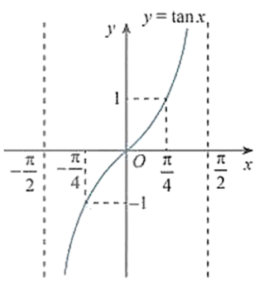
Giải

Vì điểm nằm cách xích đạo không quá $20cm$ trên bản đồ nên ta có $-20 \le y \le 20$.

Khi đó $-20 \le 20\tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \le 20$ hay $-1 \le \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \le 1$.

Ta có $-90 < \varphi < 90$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{180}\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Xét đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (Hình 10).

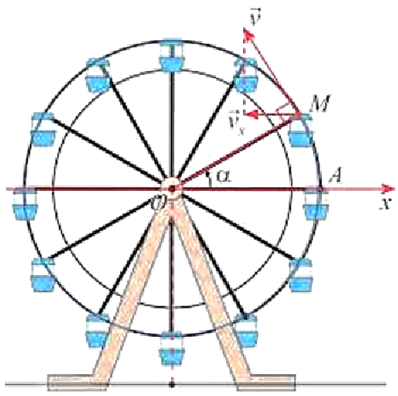


Hình 10

Ta thấy $-1 \le \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \le 1$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{180}\varphi \le \frac{\pi}{4}$ hay $-45 \le \varphi \le 45$.

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá $20cm$ nằm ở vĩ độ từ -45° đến 45°.

Câu 77: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin\alpha (m/s)$ (Hình 11).



Hình 11

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x.

b) Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

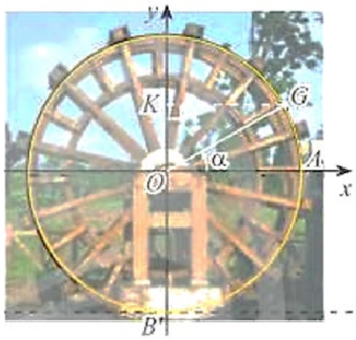
Lời giải

a) Do $-1 \le \sin\alpha \le 1$ nên $-0,3 \le 0,3\sin\alpha \le 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3(m)$ và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3\ (m)$.

b) Dựa vào đồ thị hàm số sin, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \le \alpha \le 2\alpha$), v_x tăng khi $\pi \le \alpha \le 2\pi$

Câu 78: Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng $3m$. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



Hình 12

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5m$.

Lời giải

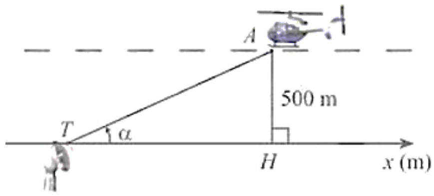
a) $h = 3 + 3.\sin\alpha$

b) Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0 \le \alpha \le 4\pi$

Khi $h = 1,5$. Suy ra $\sin\alpha = \frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \alpha = \frac{11\pi}{6}; \alpha = \frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha = \frac{23\pi}{6}$

Câu 79: Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H, α là góc lượng giác $(Tx, TA)(0 < \alpha < \pi)$.



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α.

b) Dựa vào đồ thị hàm số côtang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot\alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $\frac{-\sqrt{3}}{3} < \cot\alpha < \sqrt{3}$

Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$

Câu 80: Giả sử vận tốc v (tính bằng lítgiây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức $v = 0,85\sin\frac{\pi t}{3}$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây).

a) Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v > 0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v < 0$.

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

Lời giải

a) Thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ chính là một chu kì tuần hoàn của hàm $v(t)$ và là $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$ (giây)

Ta có: 1 phút = 60 giây.

Do đó, số chu kì hô hấp trong một phút của người đó là $\frac{60}{6}=10$ (chu kì).

b) Ta có: $v=0.85\sin\frac{\pi t}{3}$

- $v<0$ khi $0.85\sin\frac{\pi t}{3}>0 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi t}{3}>0$

Mà $-1\le\sin\frac{\pi t}{3}\le 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó, $0<\sin\frac{\pi t}{3}\le 1$

- $v<0$ khi $0.85\sin\frac{\pi t}{3}<0 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi t}{3}<0$

Mà $-1\le\sin\frac{\pi t}{3}\le 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó, $-1\le\sin\frac{\pi t}{3}<0$

Với t $\in(0;3)$ ta có $0<\sin\frac{\pi t}{3}\le 1$

Với $t\in(3;5]$ ta có $-1\le\sin\frac{\pi t}{3}<0$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm sau 0 giây đến trước 3 giây thì người đó hít vào và khoảng thời điểm sau 3 giây đến 5 giây thì người đó thở ra.

Câu 81: Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A>0), \omega t+\varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi\in[-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T=\frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t)=-5\cos 4\pi t(cm)$.

a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.

b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t=2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

Lời giải

a) Ta có: $-5\cos 4\pi t=5\cos(4\pi t+\pi)$.

Khi đó vật dao động điều hòa theo phương trình $x(t)=5\cos(4\pi t+\pi)(cm)$ với biên độ dao động là $A\ =5>0$ và pha ban đầu của dao động là $\varphi=\pi$.

b) Pha của dao động tại thời điểm $t=2$ (giây) là $\omega t+\varphi=4\pi.2+\pi=9\pi$.

Dao động điều hòa có chu kì là $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}=0.5$, có nghĩa là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần là 0,5 giây. Do đó, trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được $2:0,5=4$ dao động toàn phần.

Câu 82: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kì của sóng là $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}}=20$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}\times 20\right)=90(cm)$.

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 83: Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t)=0,8\cos 0,5t+4$.

(Theo https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t=2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu $3,6m$ để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thuỷ. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Tại thời điểm $t=2$. Ta có: $h(t)=0,8\cdot\cos(0,5\cdot 2)+4=4,43(m)$

b)

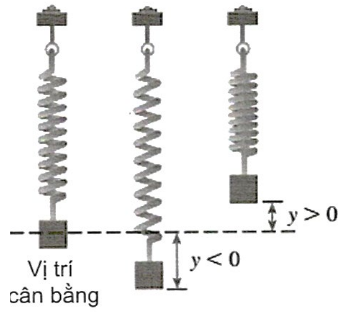
Dựa vào đồ thị hàm số cos:

Những thời điểm tàu không thể hạ thuỷ là khi $0,8\cos 0,5t+4<3,6\Leftrightarrow\cos 0,5t<-0,5$

$\Leftrightarrow\frac{2\pi}{3}<0,5t<\frac{4\pi}{3}\Leftrightarrow 4,19<t<8,38$

Vậy thời điểm tàu có thể hạ thuỷ là $(0;4,19)\cup(8,38;12)$

Câu 84: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y=25\sin 4\pi t$ ở đó y được được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.



a) Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.

b) Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.

c) Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Lời giải

a) Hàm số $y=25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$. Suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T=\frac{1}{2}$ giây.

b) Vì chu kì dao động của con lắc là $T=\frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $f=\frac{1}{T}=2\,Hz$.

c) Vì phương trình dao động của con lắc là $y=25\sin 4\pi t$, nên biên độ dao động của nó là $A=25\,cm$. Từ đó, khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $2A=50\,cm$.

Câu 85: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao $40\,m$ in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t)=40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$

ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Lời giải

a) - Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t=8-6=2$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là $S(2)=40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 2\right)\right|=40\sqrt{3}(m)$.

- Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t = 12 - 6 = 6$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là $S(6) = 40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 6\right)\right| = 0(m)$.

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ toà nhà được chiếu xuống móng của toà nhà.

- Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t = 14 - 6 = 8$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $S(8) = 40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot 8\right)\right| = \frac{40\sqrt{3}}{3}(m)$.

- Tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối, ta có $t = \left(17 + \frac{3}{4}\right) - 6 = \frac{39}{4}$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối là $S\left(\frac{39}{4}\right) = 40\left|\cot\left(\frac{\pi}{12}\cdot\frac{39}{4}\right)\right| \approx 59,86(m)$.

b) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao tòa nhà khi

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right| = 40 \Leftrightarrow \cot\frac{\pi}{12}t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \le t \le 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

c) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t \to 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12}t \to \pi$, do đó $\cot\frac{\pi}{12}t \to -\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 86: Hai sóng âm có phương trình lần lượt là
$f_1(t) = C\sin\omega t$ và $f_2(t) = C\sin(\omega t + \alpha)$.

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo ra một âm kết hợp có phương trình

$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C\sin\omega t + C\sin(\omega t + \alpha)$.

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng $f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, ở đó A, B là hai hằng số phụ thuộc vào α.

b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k\sin(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

a) Ta có $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$= C\sin\omega t + C\sin(\omega t + \alpha) = C\sin\omega t + C(\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha)$.

Vậy $f(t) = C(1 + \cos\alpha)\sin\omega t + C\sin\alpha\cos\omega t = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ với $A = C(1 + \cos\alpha), B = C\sin\alpha$.

b) Khi $C=10$ và $\alpha=\frac{\pi}{3}$, ta có

$$f(t)=10\sin\omega t+10\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)=10\cdot 2\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=10\sqrt{3}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k=10\sqrt{3}$ và $\varphi=\frac{\pi}{6}$

Câu 87: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó $x(t)(cm)$ là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động $(A>0)$ và $\varphi\in[-\pi;\pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$x_1(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)(cm)$ và $x_2(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)(cm)$.

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Lời giải

a) Ta có $x(t)=x_1(t)+x_2(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=3.2\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)}{2}$$

$$=6\cos\frac{\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{12}\right).$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t)=3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{12}\right)$.

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A=3\sqrt{2}\,cm$ và pha ban đầu là $\varphi=\frac{\pi}{12}$.

Câu 88: Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$p(t)=120+15\cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Lời giải

a) Hàm số $p(t)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $t \pm \frac{1}{75} \in \mathbb{R}$ và $p\left(t+\frac{1}{75}\right) = 120 + 15\cos(150\pi t + 2\pi) = 120 + 15\cos 150\pi t = p(t)$.

Do đó $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Vì $-1 \le \cos 150\pi t \le 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \le p(t) \le 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

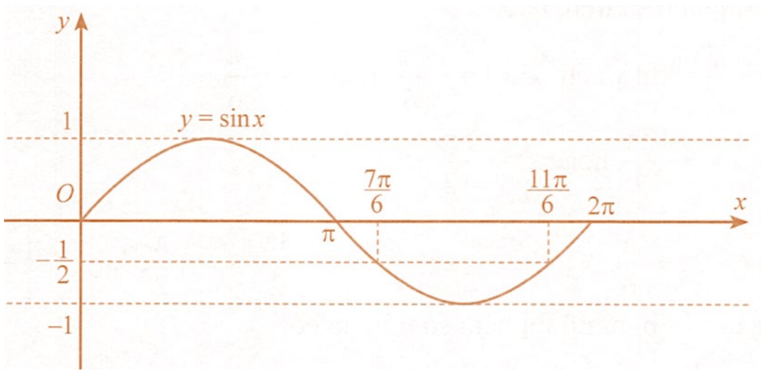
Vậy chỉ số huyết áp của người đó là $135/105$.

Câu 89: Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \le -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Trong 4 giây đầu, ta có $0 \le t \le 4$, suy ra $0 \le \frac{\pi}{2}t \le 2\pi$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2}t$, khi đó $x \in [0; 2\pi]$. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ như sau:



Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0; 2\pi]$, ta có:

$s \le -\frac{3}{2}$ khi $3\sin x \le -\frac{3}{2}$ hay $\sin x \le -\frac{1}{2}$, suy ra $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$.

Do đó $\frac{7}{3} \le t \le \frac{11}{3}$.

Câu 90: Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega > 0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hòa trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3cm, \varphi = 0$;

b) $A = 3cm, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;

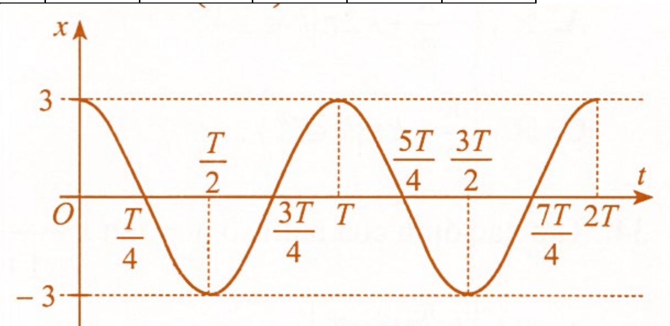
c) $A = 3cm, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

a) Khi $A = 3cm, \varphi = 0$, ta có: $x = 3\cos(\omega t) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3

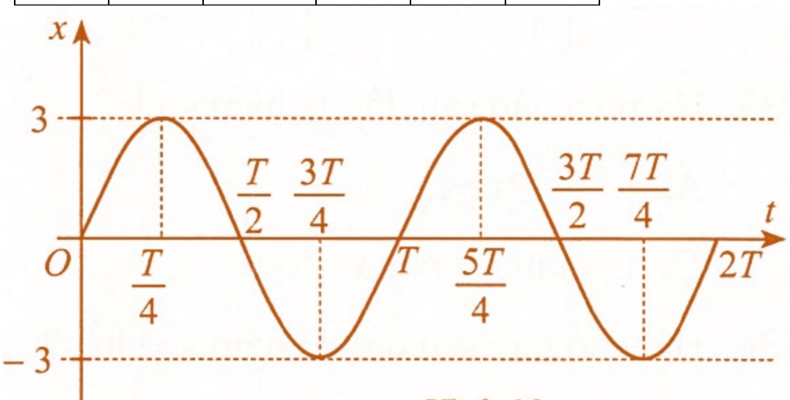


Hình 9

b) Khi $A = 3cm, \varphi = -\frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0

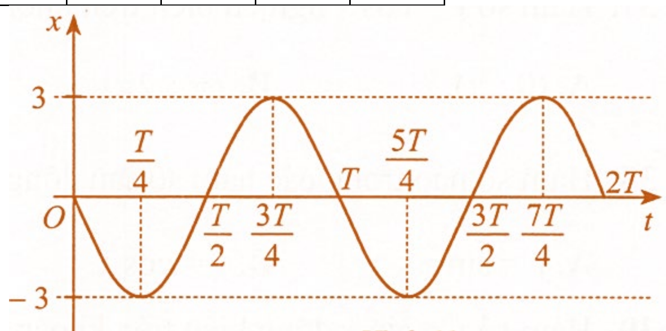


Hình 10

c) Khi $A = 3cm, \varphi = \frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

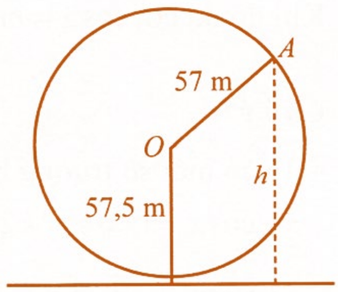
Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



Hình 11

Câu 91: Một vòng quay trò chơi có bán kính $57\,m$, trục quay cách mặt đất $57,5\,m$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút $(t \geq 0)$ (Hình 12).



Hình 12

a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$?

b) Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?

c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là $86\,m$?

Lời giải

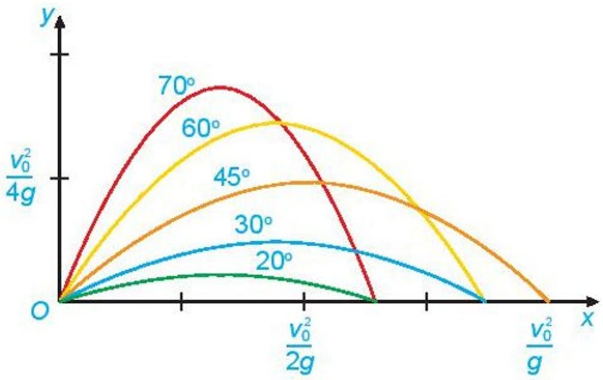
a) Vì vòng quay trò chơi quay mỗi vòng hết 15 phút nên chu kì của hàm số $h(t)$ bằng 15 phút.

b) Khi $t = 0$ thì $h = 57\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 57,5 = 0,5(m)$. Vậy khi đó khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng $0,5\,m$.

c) Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ hay $t = 7,5$ (phút); cabin đạt được chiều cao là $86\,m$ lần đầu tiên khi $t = 5$ (phút).

Câu 92: Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

Lời giải



Chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ đặt tại vị trí khẩu pháo, trục Ox theo hướng khẩu pháo như hình bên. Khi đó, theo Vật lí, ta biết rằng quỹ đạo của quả đạn pháo có dạng đường parabol có phương trình (với g là gia tốc trọng trường) $y=\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$.

Cho $y=0$ ta được $\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha=0$, suy ra $x=0$ hoặc $x=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Quả đạn tiếp đất khi $x=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Ta có $x=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\le\frac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha=1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha=1$, ta được $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Do $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ nên $\alpha=\frac{\pi}{4}$ hay $\alpha=45°$
.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng $45°$.

Câu 93: Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là $\alpha\left(0°\le\alpha\le 360°\right)$ thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$F=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$.

(Theo trang usno.navy.mil).

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

a) $F = 0$ (trăng mới);

b) $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm);

c) $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);

d) $F = 1$ (trăng tròn).

Lời giải

a) Với $F = 0$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 1 \Leftrightarrow a = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Với $F = 0,25$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha) = 0,25 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$

c) Với $F = 0,5$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha) = 0.5 \Leftrightarrow \cos a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

d) Với $F = 1$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos a = -1 \Leftrightarrow a = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 94: Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500\, m/s$ hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$, ở đó $g = 9,8\, m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị tí đặt khẩu pháo $22000\, m$.

c) Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Lời giải

Vì $v_0 = 500\, m/s, g = 9,8\, m/s^2$ nên ta có phương trình quỹ đạo của quả đạn là

$y = \frac{-9.8}{2\times 500^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$ hay $y = \frac{-49}{2500000\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$

a) Quả đạn chạm đất khi $y=0$, khi đó $y=\frac{-49}{2500000\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$

$\Leftrightarrow x\left(\frac{-49}{2500000\cos^2\alpha}x+\tan\alpha\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{2500000\cos^2\alpha\times\tan\alpha}{49}$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{2500000\cos\alpha\sin\alpha}{49}$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1250000\sin 2\alpha}{49}$

Loại $x=0$ (đạn pháo chưa được bắn).

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là $x=\frac{1250000\sin 2\alpha}{49}(m)$.

b) Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo $22000\,m$ thì $x=22000\,m$.

Khi đó $\frac{1250000\sin 2\alpha}{49}=22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha=\frac{539}{625}$

Gọi $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ là góc thỏa mãn $\beta=\frac{539}{625}$. Khi đó ta có: $\sin 2\alpha=\sin\beta$

$\Leftrightarrow 2\alpha=\beta+k2\pi$ hoặc $2\alpha=\pi-\beta+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{\beta}{2}+k\pi$ hoặc $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$

c) Hàm số $y=\frac{-49}{2500000\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$ là một hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có tọa độ đỉnh $I(x_I;y_I)$ là

$$\begin{cases} x_I=-\frac{b}{2a}=-\frac{\tan\alpha}{2\times\frac{-49}{250000\cos^2\alpha}}=\frac{1250000\cos\alpha\sin\alpha}{49} \\ y_I=f\left(x_I\right)=\frac{-49}{2500000\cos^2\alpha}\left(\frac{1250000\cos\sin\alpha}{49}\right)^2+\frac{1250000\cos\alpha\sin\alpha}{49}\tan\alpha \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} x_I=\frac{1250000\cos\alpha\sin\alpha}{49} \\ y_I=\frac{625000\sin^2\alpha}{49} \end{cases}$

Do đó, độ cao lớn nhất của quả đạn là $y_{\max}=\frac{625000\sin^2\alpha}{49}$

Ta có $y_{\max}=\frac{625000\sin^2\alpha}{49}\le\frac{625000}{49}$, dấu "=" xảy ra khi $\sin^2 a=1$ hay $\alpha=90^\circ$.

Như vậy góc bắn $\alpha = 90^{\circ}$ thì quả đan đạt độ cao lớn nhất.

Câu 95: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hòa là vị trí vật đứng yên, khi đó $x = 0$, ta có

$$2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

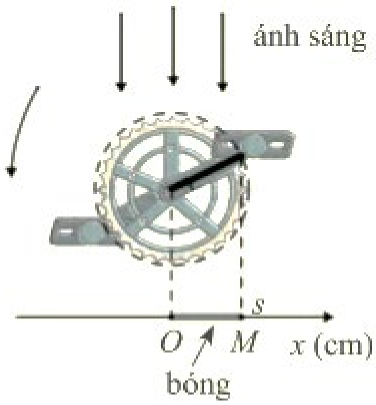
Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0 \le t \le 6$ hay

$$0 \le \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \le 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le k \le \frac{90 - 2\pi}{3\pi}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Câu 96: Trong hình bên, khi bàn đạp xe đạp quay, bóng M của đầu trục quay dao động trên mặt đất quanh điểm O theo phương trình $s = 17\cos 5\pi t$ với $s(cm)$ là toạ độ của điểm M trên trục Ox và t (giây) là thời gian bàn đạp quay. Làm cách nào để xác định được các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng $10cm$?



Lời giải

Độ dài bóng OM bằng $10cm$ khi $s = 10$ hoặc $s = -10$.

Khi $s = 10$. Ta có: $17\cos 5\pi t = 10$

Khi $s = 10$. Ta có: $17\cos 5\pi t = -10$

Từ đó, ta có thể xác định được các thời điểm t

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 97: Phương trình chuyển động của bóng đầu trục bàn đạp là $x=17\cos 5\pi t(cm)$ với t được đo bằng giây. Xác định các thời điểm t mà tại đó độ dài bóng $|x|$ vừa bằng $10cm$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có $|x|=10$

$\Leftrightarrow |17\cos 5\pi t|=10$

$\Leftrightarrow 17\cos 5\pi t=10 \ \vee 17\cos 5\pi t=-10$

$\bullet 17\cos 5\pi t=10$

$\Leftrightarrow 5\pi t=0,94+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \ \vee \ 5\pi t=-0,94+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

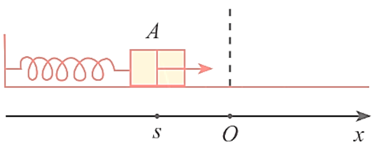
$\Leftrightarrow t=0,06+0,4k, k\in\mathbb{Z} \ \vee \ t=-0,06+0,4k, k\in\mathbb{Z}$

$\bullet 17\cos 5\pi t=-10$

$\Leftrightarrow 5\pi t=2,2+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \ \vee \ 5\pi t=-2,2+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=0,14+0,4k, k\in\mathbb{Z} \ \vee \ t=-0,14+0,4k, k\in\mathbb{Z}$

Câu 98: Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Toạ độ $s(cm)$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s=10\sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s=-5\sqrt{3}\,cm$?



Hình 9

(Theo https://ww.britannica.com/science/simple-harmonic-motion)

Lời giải

Khi: $s=-5\sqrt{3}$ thì $10\sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)=-5\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 10t+\frac{\pi}{2}=\frac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \ \vee \ 10t+\frac{\pi}{2}=\pi-\frac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=\frac{-1}{12}+\frac{1}{5}k, k\in\mathbb{Z} \ \vee \ t=\frac{1}{12}+\frac{1}{5}k, k\in\mathbb{Z}$

Câu 99: Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1km$. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10} rad/s$ và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rọi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

Hình 10

(Theo https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology)

a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO. Viết hàm số biểu thị toạ độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t.

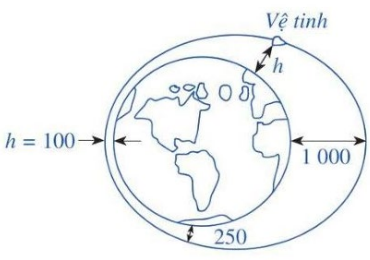
b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với toạ độ $y_N = -1(km)$. Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Lời giải

a) $y_M = \tan \frac{\pi}{10} t$

b) Khi $y_N = -1$ ta có $\tan \frac{\pi}{10} t = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{15}{2} + 10k, k \in \mathbb{Z}$

Câu 100: Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là đường elip (Hình 33). Độ cao $h(km)$ của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450\cos \frac{\pi}{50} t$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021), trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Tại thời điểm t bằng bao nhiêu thì vệ tinh cách mặt đất $1000\,km; 250\,km; 100\,km$?



Hình 33

Lời giải

- Để vệ tinh cách mặt đất 1000 km thì $550+450\cos\frac{\pi}{50}t=1000$

$\Leftrightarrow 450\cos\frac{\pi}{50}t=450 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{50}t=1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{50}t=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z},t\geq 0)$

$\Leftrightarrow t=k2\pi\cdot\frac{50}{\pi}=100k\,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy tại các thời điểm $t=100k$ (với $k\in\mathbb{Z},t\geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất $1000\,km$.

- Để vệ tinh cách mặt đất 250 km thì $550+450\cos\frac{\pi}{50}t=250$

$\Leftrightarrow 450\cos\frac{\pi}{50}t=-300 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{50}t=-\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{50}t\approx 2,3+k2\pi\\ \frac{\pi}{50}t\approx -2,3+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z},t\geq 0)$$

(Dùng máy tính cầm tay (chuyển về chế độ "radian") bấm liên tiếp $\boxed{SHIFT}\boxed{\cos}\boxed{-}\boxed{2}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{=}$ ta được kết quả gần đúng là 2,3)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\approx\frac{115}{\pi}+100k\\ t\approx -\frac{115}{\pi}+100k\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z},t\geq 0)$$

Vậy tại các thời điểm $t\approx\pm\frac{115}{\pi}+100k$ (với $k\in\mathbb{Z},t\geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 250 km.

- Để vệ tinh cách mặt đất 100 km thì $550+450\cos\frac{\pi}{50}t=100$

$\Leftrightarrow 450\cos\frac{\pi}{50}t=-450$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{50}t=-1$

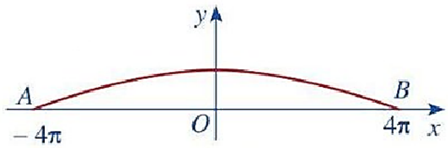
$\Leftrightarrow \frac{\pi}{50}t=\pi+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z},t\geq 0).$

$\Leftrightarrow t=50+100k\,(k\in\mathbb{Z}\}$

Vậy tại các thời điểm $t=50+100k$ (với $k\in\mathbb{Z},t\geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 100 km.

Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải một trong các phương trình có dạng: $\sin x = m, \cos x = m, \tan x = m, \cot x = m$, trong đó x là ẩn số, m là số thực cho trước. Các phương trình đó là các phương trình lượng giác cơ bản.

Câu 101: Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos\frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 38.



Hình 38

Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.

Lời giải

Với mỗi điểm M nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M.

Xét phương trình: $4,2 \cdot \cos\frac{x}{8} = 3 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{8} = \frac{5}{7}$. Do $x \in [-4\pi; 4\pi]$ nên $\frac{x}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó, ta có: $\cos\frac{x}{8} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{x}{8} \approx \pm 0,775$, suy ra $\left|\frac{x}{8}\right| < 0,78 \Leftrightarrow |x| < 6,24$.

Do sà lan có thể đi qua được gầm cầu nên chiều rộng của khối hàng hoá là: $2|x| < 12,48 < 12,5(m)$.

Câu 102: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \le 365$.

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Lời giải

a) Để thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)+12=12$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=k\pi(k\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow t-80=182k(k\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow t=80+182k(k\in\mathbb{Z}).$$

Do $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$ nên ta có:

$$\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ 0<80+182k\le 365\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ -80<182k\le 285\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ -\dfrac{40}{91}<k\le\dfrac{285}{182}\end{cases}\Leftrightarrow k\in\{0;1\}$$

Với $k=0$ thì $t=80+182.0=80$;

Với $k=1$ thì $t=80+182\cdot 1=262$

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 trong năm.

b) Để thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)+12=9$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)=-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow t-80=-91+364k\,(k\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow t=-11+364k\,(k\in\mathbb{Z})$$

Do $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$ nên ta có:

$$\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ 0<-11+364k\le 365\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ 11<364k\le 376\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{11}{364}<k\le\dfrac{94}{91}\end{cases}\Leftrightarrow k=1$$

Với $k=1$ thì $t=-11+364.1=353$.

Vậy thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

c) Để thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)+12=15$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)=1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow t-80=91+364k\,(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow t=171+364k\,(k\in\mathbb{Z})$

Do $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$ nên ta có:

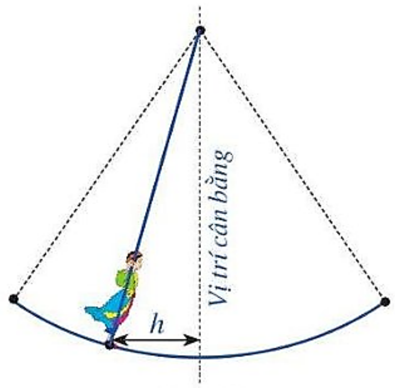
$\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\0<171+364k\le 365\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\-171<364k\le 194\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\-\frac{171}{364}<k\le\frac{97}{182}\end{cases}\Leftrightarrow k=0$

Với $k=0$ thì $t=171+364.0=171$.

Vậy thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 171 trong năm.

Câu 103: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t\ge 0$) bởi hệ thức $h=|d|$ với $d=3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d>0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d<0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m;0m$?



Hình 39

Lời giải

• Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 3 m thì:

$$\left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|=3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\cos[\frac{\pi}{3}(2t-1)]=3 \\ 3\cos[\frac{\pi}{3}(2t-1)]=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=1 \\ \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}(2t-1)=k2\pi \\ \frac{\pi}{3}(2t-1)=\pi+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-1=6k \\ 2t-1=3+6k \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t=6k+1 \\ 2t=6k+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3k+\frac{1}{2} \\ t=3k+2 \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Do $t\geq 0, k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;\ldots\}$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} t\in\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2};\frac{13}{2};\ldots\right\} \\ t\in\{2;5;8;\ldots\} \end{array}\right. \Leftrightarrow t\in\left\{\frac{1}{2};2;\frac{7}{2};5;\frac{13}{2};8;\ldots\right\}$.

Vậy $t\in\left(\frac{1}{2};2;\frac{7}{2};5;\frac{13}{2};8;\ldots\right)$ (giây) thì khoảng cách h là $3m$.

• Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là $0m$ thì:

$$\left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|=0 \Leftrightarrow 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow 2t-1=\frac{3}{2}+3k$$

$$\Leftrightarrow 2t=\frac{5}{2}+3k \Leftrightarrow t=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}k.$$

Do $t\geq 0, k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;\ldots\}$, khi đó $t\in\left\{\frac{5}{4};\frac{11}{4};\frac{17}{4};\ldots\right\}$.

Vậy $t\in\left\{\frac{5}{4};\frac{11}{4};\frac{17}{4};\ldots\right\}$ (giây) thì khoảng cách h là $0m$.

Câu 104: Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày $(0\leq t<24)$ cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)+12$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021). Tìm t để độ sâu của mực nước là:

a) $15m$;

b) $9m$;

c) $10,5m$.

Lời giải

a) Để độ sâu của mực nước là $15m$ thì:

$h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)+12=15 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)=1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6}+1=k2\pi (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow t=-\frac{6}{\pi}+12k (k\in\mathbb{Z})$

Do $0\le t<24$ nên $0\le -\frac{6}{\pi}+12k<24$

$\Leftrightarrow \frac{6}{\pi}\le 12k<24+\frac{6}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\le k<2+\frac{1}{2\pi}$

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1;2\}$.

Với $k=1$ thì $t=-\frac{6}{\pi}+12.1\approx 10,09$ (giờ);

Với $k=2$ thì $t=-\frac{6}{\pi}+12.2\approx 22,09$ (giờ).

Vậy lúc 10,09 giờ và 22,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 15 m.

b) Để độ sâu của mực nước là $9m$ thì:

$h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)+12=9 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)=-1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6}+1=\pi+k2\pi (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow t=6-\frac{6}{\pi}+12k (k\in\mathbb{Z})$

Do $0\le t<24$ nên $0\le 6-\frac{6}{\pi}+12k<24$

$\Leftrightarrow -6+\frac{6}{\pi}\le 12k<18+\frac{6}{\pi}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\le k<\frac{3}{2}+\frac{1}{2\pi}$

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1\}$.

Với $k=0$ thì $t=6-\frac{6}{\pi}+12.0\approx 4,09$ (giờ);

Với $k=1$ thì $t=6-\frac{6}{\pi}+12.1\approx 16,09$ (giờ).

Vậy lúc 4,09 giờ và 16,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 9 m.

c) Để độ sâu của mực nước là 10,5 m thì:

$h \quad = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)+12 = 10,5$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi t}{6}+1 = \frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ \frac{\pi t}{6}+1 = -\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4-\frac{6}{\pi}+12k \quad (1) \\ t = -4-\frac{6}{\pi}+12k \, (2) \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

- Do $0 \le t < 24$ nên (1) ta có: $0 \le 4-\frac{6}{\pi}+12k < 24$

$\Leftrightarrow -4+\frac{6}{\pi} \le 12k < 20+\frac{6}{\pi}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}+\frac{1}{2\pi} \le k < \frac{5}{3}+\frac{1}{2\pi}$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0;1\}$.

Với $k = 0$ thì $t = 4-\frac{6}{\pi}+12.0 \approx 2,09$ (giờ);

Với $k = 1$ thì $t = 4-\frac{6}{\pi}+12.1 \approx 14,09$ (giờ).

- Do $0 \le t < 24$ nên từ (2) ta có: $0 \le -4-\frac{6}{\pi}+12k < 24$

$\Leftrightarrow 4+\frac{6}{\pi} \le 12k < 28+\frac{6}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{2\pi} \le k < \frac{7}{3}+\frac{1}{2\pi}$

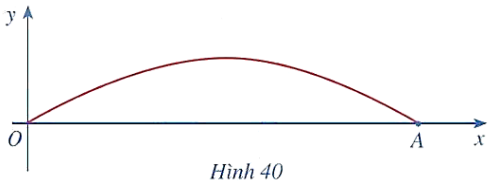
Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1;2\}$.

Với $k = 1$ thì $t = -4-\frac{6}{\pi}+12.1 \approx 6,09$ (giờ);

Với $k = 2$ thì $t = -4-\frac{6}{\pi}+12.2 \approx 18,09$ (giờ).

Vậy lúc 2,09 giờ, 6,09 giờ, 14,09 giờ và 18,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 10,5 m.

Câu 105: Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8\cdot\sin\frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.



Hình 40

a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là $9m$ sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3m$.

Lời giải

a) Hai vị trí O và A là hai vị trí chân cầu, tại hai vị trí này ta có: $y=0$

$$\Leftrightarrow 4,8\cdot\sin\frac{x}{9}=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{9}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{9}=k\pi(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x=9k\pi(k\in\mathbb{Z})$$

Quan sát đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số $y=4,8\cdot\sin\frac{x}{9}$ cắt trục hoành tại điểm O và A liên tiếp nhau với $x\ge 0$.

Xét $k=0$, ta có $x_1=0$;

Xét $k=1$, ta có $x_2=9\pi$.

Mà $x_1=0$ nên đây là hoành độ của O, do đó $x_2=9\pi$ là hoành độ của điểm A.

Khi đó $OA=9\pi\approx 28,3$.

Vậy chiều rộng của con sông xấp xỉ 28,3 m.

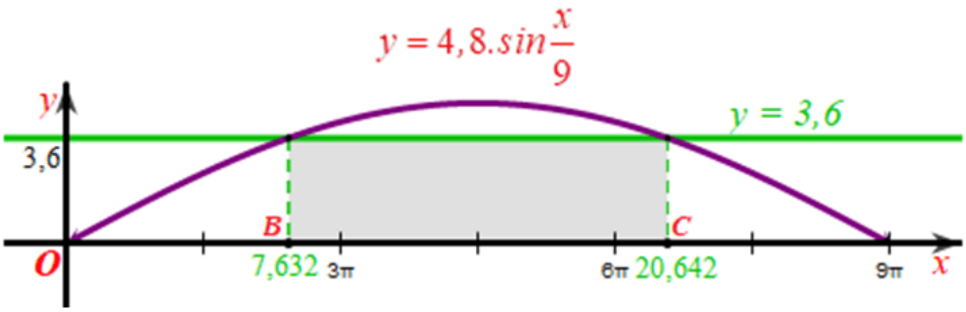
b) Do sà lan có độ cao $3,6$m so với mực nước sông nên khi sà lan đi qua gầm cầu thì ứng với $y=3,6$.

$$\Leftrightarrow 4,8.\sin\frac{x}{9}=3,6 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{9}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{9}\approx 0,848+k2\pi \\ \frac{x}{9}\approx \pi-0,848+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\approx 7,632+18k\pi \\ x\approx 9\pi-7,632+18k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Xét $k=0$, ta có $x_1\approx 7,632; x_2\approx 20,642$.

Ta biểu diễn các giá trị x vừa tìm được trên hệ trục tọa độ vẽ đồ thị hàm số $y=4,8\cdot\sin\frac{x}{9}$ như sau:

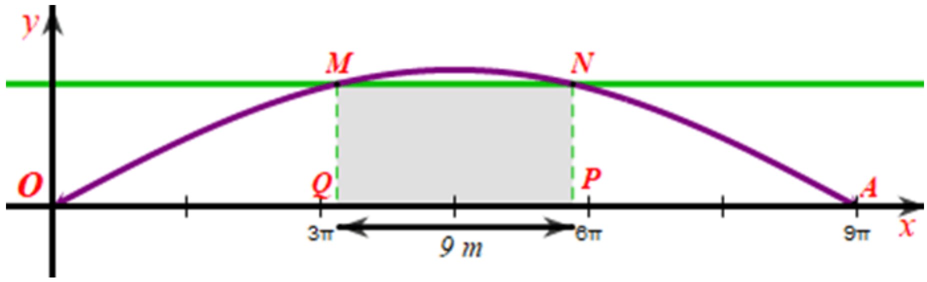


Khi đó để sà lan có thể đi qua được gầm cầu thì khối hàng hóa có độ cao $3,6$ m phải có chiều rộng nhỏ hơn độ dài đoạn thẳng BC trên hình vẽ.

Mà $BC\approx 20,642-7,632=13,01(m)<13,1(m)$.

Vậy chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $13,1$ m.

c) Giả sử sà lan chở khối hàng được mô tả bởi hình chữ nhật $MNPQ$:



Khi đó $QP=9; OA=28,3$ và $OQ=PA$.

Mà $OQ+QP+PA=OA\Rightarrow OQ+9+OQ\approx 28,3\Rightarrow OQ\approx 9,65$

Khi đó $y_M=4,8\cdot\sin\frac{x_M}{9}=4,8\cdot\sin\frac{OQ}{9}\approx 4,8\cdot\sin\frac{9,65}{9}\approx 4,22(m)<4,3(m)$.

Vậy để sà lan có thể đi qua được gầm cầu thì chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3$ m.

Câu 106: Cho vận tốc $v(cm/s)$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v=-3\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)$.

(Theo https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;

b) Vận tốc con lắc bằng $1,5cm/s$.

Lời giải

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

$\Leftrightarrow 1,5t+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=\frac{7\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}k, k\in\mathbb{Z}$

b) Khi $v=1,5$ Ta có:

$\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow 1,5t+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \vee 1,5t+\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=\frac{5\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}k, k\in\mathbb{Z} \vee t=\frac{-\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}k, k\in\mathbb{Z}$

Câu 107: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $p(t)=115+25\sin(160\pi t)$,

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

a) Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.

b) Tìm số nhịp tim mỗi phút.

c) Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Lời giải

a) Chu kì của hàm số $p(t)$ là $T=\frac{2\pi}{160\pi}=\frac{1}{80}$

b) Thời gian giữa hai lần tim đập là $T=\frac{1}{80}$ (phút)

Số nhịp tim mỗi phút là $1:\frac{1}{80}=80$ nhịp.

c) Ta có: $-1\le \sin(160\pi t)\le 1$ với mọi $t\in\mathbb{R}$

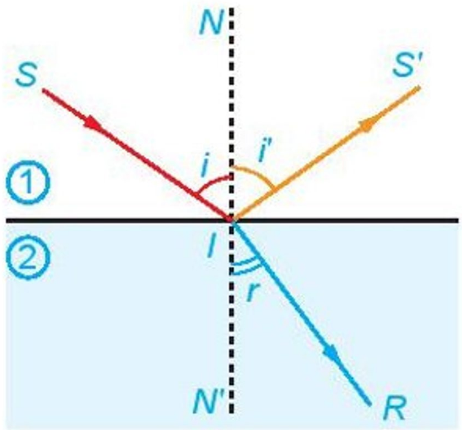
$\Leftrightarrow -25\le 25\sin(160\pi t)\le 25$ với mọi $t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 115+(-25)\le 115+25\sin(160\pi t)\le 115+25$ với mọi $t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 90\le p(t)\le 140$ với mọi $t\in\mathbb{R}$

Do đó, chỉ số huyết áp của người này là $\frac{140}{90}$ và chỉ số huyết áp của người này cao hơn mức bình thường.

Câu 108: Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình.



Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_2}{n_1}$.

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i=50°$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $i=50^\circ, n1=1, n2=1,33$, thay vào $\frac{\sin i}{\text{sinr}}=\frac{n_2}{n_1}$ ta được:

$\frac{\sin 50^\circ}{\sin r}=\frac{1.33}{1}\ (DKXD:\sin r\ne 0)$

$\Rightarrow \sin r=\frac{\sin 50^\circ}{1.33}$

$\Leftrightarrow \sin r\approx 0,57597$ (Thoa man)

$\Leftrightarrow \sin r\approx \sin\left(35^\circ 10'\right)$

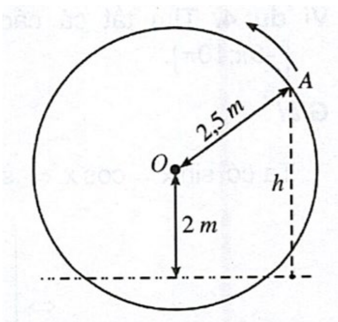
$\Leftrightarrow r\approx 35^\circ 10'+k360^\circ \vee r\approx 180^\circ-35^\circ 10'+k360^\circ (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow r\approx 35^\circ 10'+k360^\circ \vee r\approx 144^\circ 50'+k360^\circ (k\in\mathbb{Z})$

Mà $0^\circ<r<90^\circ$ nên $r\approx 35^\circ 10'$.

Vậy góc khúc xạ $r \approx 35^\circ 10'$.

Câu 109: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước $2m$ (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$ với x là thời gian quay của guồng $(x \ge 0)$, tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

Lời giải

a) $Vi^{-}1 \le \sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \le 1$ nên $-2,5 \le 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \le 2,5$ và do đó ta có

$$-0,5 = 2 - 2,5 \le 2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \le 2 + 2,5 = 4,5 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, gầu ở vị trí cao nhất khi $\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy gầu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ phút.

Tương tự, gầu ở vị trí thấp nhất khi

$$\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm $0, 1, 2, 3, \ldots$ phút.

b) Gầu cách mặt nước $2m$ khi $2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = 2$

$$\Leftrightarrow \sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy chiếc gầu cách mặt nước $2m$ lần đầu tiên tại thời điểm $x = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 110: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số $L(t)=12+2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$ $,t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$.

a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

Vì $-1\le\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)\le 1$ nên $-2,83\le 2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)\le 2,83$, do đó

$$9,17=12-2,83\le 12+2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)\le 12+2,83=14,83\forall t\in\mathbb{R}.$$

a) Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=-1\Leftrightarrow\frac{2\pi}{365}(t-80)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=-\frac{45}{4}+365k(k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $0<t\le 365$ nên $k=1$, suy ra $t=-\frac{45}{4}+365=353,75$. Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố A sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

b) Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=1\Leftrightarrow\frac{2\pi}{365}(t-80)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=171,25+365k(k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $0<t\le 365$ nên $k=0$, suy ra $t=171,25$. Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố A sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

c) Thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$$12+2,83\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=10\Leftrightarrow\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]=-\frac{200}{283}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2\pi}{365}(t-80)\approx-0,78+k2\pi\\ \frac{2\pi}{365}(t-80)\approx 3,93+k2\pi\end{array}\right.$$

Từ đó ta được $\left[\begin{array}{l}t\approx 34,69+365k\\ t\approx 308,30+365k\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. Vì $0<t\le 365$ nên $k=0$ suy ra $t\approx 34,69$ hoặc $t\approx 308,30$. Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thành phố A sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.

Câu 111: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$P(t)=100+20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là $100mmHg$.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là $120mmHg$.

Lời giải

a) Huyết áp là $100mmHg$ khi

$$P(t)=100\Leftrightarrow 100+20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=100\Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=0\Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t=k\pi\Leftrightarrow t=\frac{3k}{7}(k\in\mathbb{Z}).$$

Xét $0<t<1\Leftrightarrow 0<\frac{3k}{7}<1\Leftrightarrow 0<k<\frac{7}{3}\Leftrightarrow k\in\{1;2\}$ vì $k\in\mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 mmHg.

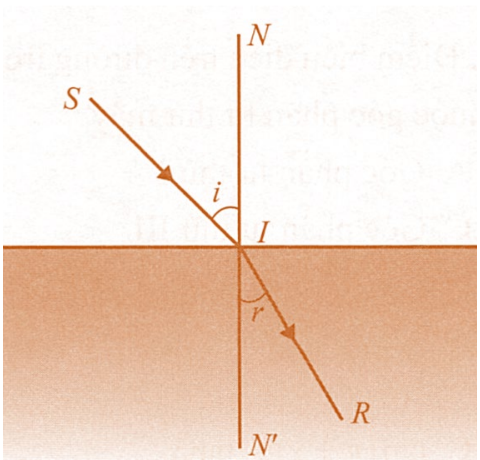
b) Huyết áp là $120mmHg$ khi

$$P(t)=120\Leftrightarrow 100+20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=120\Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=1\Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=\frac{3}{14}+\frac{6k}{7}(k\in\mathbb{Z}).$$

Xét $0<t<1\Leftrightarrow 0<\frac{3}{14}+\frac{6k}{7}<1\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{11}{12}\Leftrightarrow k=0$ vì $k\in\mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 mmHg.

Câu 112: Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30°. Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu?



Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Vì $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin r}$ nên $\sin r = \frac{\sin 60^\circ \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Suy ra $r = 37,76^\circ$.

Câu 113: Một quả bóng được ném xiên một góc $\alpha\left(0^\circ \le \alpha \le 90^\circ\right)$ từ mặt đất với tốc độ $v_0(m/s)$. Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu $10m/s$ và góc ném là 30° so với phương ngang.

b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là $10m/s$ thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là $5m$?

Lời giải

a) $d = 5\sqrt{3} \approx 8,66(m)$;

b) $d = 5 \Leftrightarrow \frac{10^2 \cdot \sin 2\alpha}{10} = 5 \Leftrightarrow 10\sin 2\alpha = 5 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\alpha = 30^\circ$ hoặc $2\alpha = 150^\circ \Leftrightarrow \alpha = 15^\circ$ hoặc $\alpha = 75^\circ$.

Câu 114: Chiều cao $h(m)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20\sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao $40m$ lần đầu tiên?

Lời giải

a) $50m$;

b) 12,5 giây.

Câu 115: Vận tốc $v_1(cm/s)$ của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc $v_2(cm/s)$ của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

$v_1(t) = -4\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ và $v_2(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng $2cm/s$;

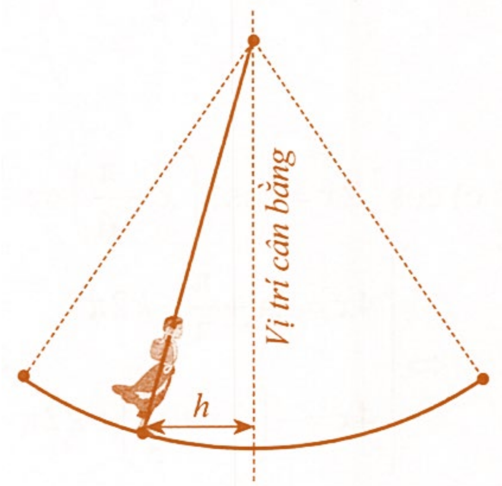
b) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Lời giải

a) $t = \frac{5\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$;

b) $t = \frac{19\pi}{16} + k\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{32} + k\frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{N}$.

Câu 116: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 14). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian $t(s)$ (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?



Hình 14

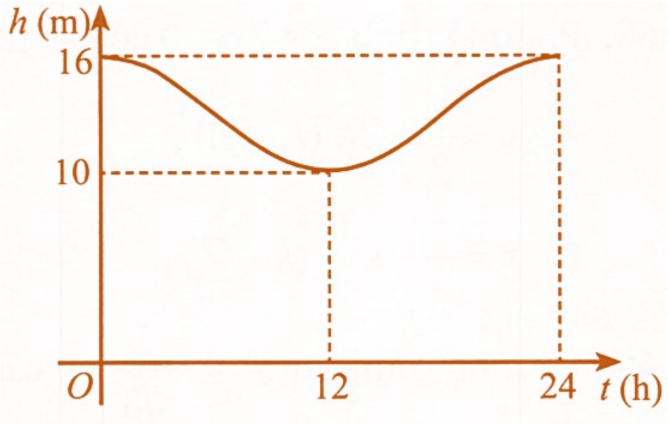
Giải

Do $-1 \leq \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 1$ nên $-3 \leq 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 3$ hay $-3 \leq d \leq 3$. Do đó, $0 \leq |d| \leq 3$.

Vậy $h = 3$ khi $|d| = 3$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0$ $\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$; $h = 0$ khi $|d| = 0$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow t = \frac{5+6k}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$.

Câu 117: Mực nước cao nhất tại một cảng biển là $16m$ khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là $10m$. Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Hình 15

Biết chiều cao của mực nước $h(m)$ theo thời gian $t(h)(0 \le t \le 24)$ được cho bởi công thức $h = m + a\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a.

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là $11,5m$.

Lời giải

a) Chiều cao của mực nước cao nhất là $m + a$ khi $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) = 1$ và thấp nhất bằng $m - a$ khi $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) = -1$. Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} m + a = 16 \\ m - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ a = 3. \end{cases}$

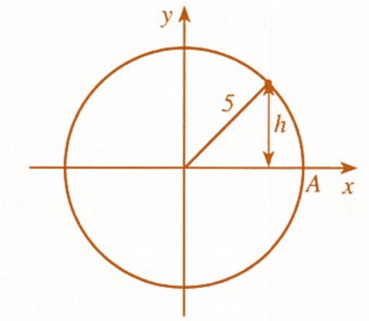
b) Từ câu a ta có công thức: $h = 13 + 3\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$. Do chiều cao của mực nước là $11,5m$ nên

$$13 + 3\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) = 11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) = -\dfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{12}t = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{12}t = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 + 24k \\ t = -8 + 24k \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t = 8$ (h) và $t = 16$ (h).

Câu 118: Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính $5cm$. Khoảng cách $h(cm)$ từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = a\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây $(t \ge 0)$ và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16).



Hình 16

a) Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?

b) Tìm giá trị của a.

c) Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h = 2,5cm$ và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.

Lời giải

a) Xét $h = 0$ hay $a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 5k$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 0$.

Ta nhận thấy, từ thời điểm ban đầu, cứ sau 5 giây, khoảng cách từ chất điểm đến trục hoành lại bằng 0. Suy ra sau mỗi 5 giây, chất điểm chuyển động được nửa vòng. Vậy chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây.

b) Do chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây nên khi $t = 2,5$ giây thì chất điểm chuyển động được một phần tư vòng theo chiều dương, suy ra tại $t = 2,5$ ta có $y = |y| = h = 5 \Leftrightarrow a\sin\left(\frac{\pi}{5}\cdot\frac{5}{2}\right) = 5 \Leftrightarrow a = 5$.

c) Từ kết quả câu b, ta có: $y = 5\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$. Do $h = 2,5cm$ và chất điểm nằm ở dưới trục hoành nên $y = -2,5$. Với $y = -2,5$, ta có:

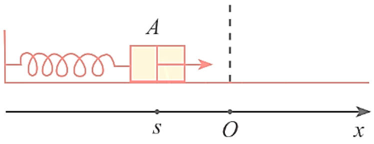
$$5\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = -2,5 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{5}t = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{5}t = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-5+60k}{6} \\ t = \frac{35+60k}{6} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Với vòng quay đầu tiên thì $0 \leq t \leq 10$, do đó $t = \frac{35}{6}, t = \frac{55}{6}$.

Vậy tại thời điểm $t = \frac{35}{6}$ giây, $t = \frac{55}{6}$ giây thì chất điểm ở vị trí có $h = 2,5cm$ và nằm ở dưới trục hoành.

Câu 119: Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Toạ độ $s(cm)$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s=10\sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s=-5\sqrt{3}\,cm$?



Hình 9

Lời giải

Khi: $s=-5\sqrt{3}$ thì $10\sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)=-5\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 10t+\frac{\pi}{2}=\frac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \vee 10t+\frac{\pi}{2}=\pi-\frac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=\frac{-1}{12}+\frac{1}{5}k, k\in\mathbb{Z} \vee t=\frac{1}{12}+\frac{1}{5}k, k\in\mathbb{Z}$

Câu 120: Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t)=0,8\cos 0,5t+4$.

(Theo https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t=2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu $3,6m$ để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thuỷ. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Tại thời điểm $t=2$. Ta có: $h(t)=0,8\cdot\cos(0,5\cdot 2)+4=4,43(m)$

b)

Dựa vào đồ thị hàm số cos:

Những thời điểm tàu không thể hạ thuỷ là khi $0,8\cos 0,5t+4<3,6 \Leftrightarrow \cos 0,5t<-0,5$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}<0,5t<\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 4,19<t<8,38$

Vậy thời điểm tàu có thể hạ thuỷ là $(0;4,19)\cup(8,38;12)$

Câu 121: Cho vận tốc $v(cm/s)$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v=-3\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)$.

(Theo https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;

b) Vận tốc con lắc bằng $1,5\,cm/s$.

Lời giải

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

$\Leftrightarrow 1,5t+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=\frac{7\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}k, k\in\mathbb{Z}$

b) Khi $v=1,5$ Ta có:

$\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow 1,5t+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \vee 1,5t+\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=\frac{5\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}k, k\in\mathbb{Z} \vee t=\frac{-\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}k, k\in\mathbb{Z}$

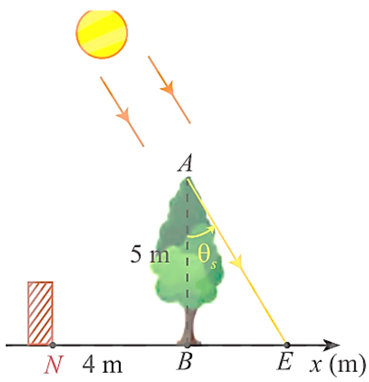
Câu 122: Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao $5m$. Bóng của cây là BE. Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx. Góc thiên đỉnh $\theta_s=(AB,AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức $\theta_s(t)=\frac{\pi}{12}(t-12)rad$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6<t<18$).

(Theo https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle)

a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t.

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N=-4(m)$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 1

Lời giải

a) $x_E = 5\tan\frac{\pi}{12}(t-12)$

b) Do $6 < t < 18$ nên $\frac{-\pi}{2} < \frac{\pi}{12}(t-12) < \frac{\pi}{2}$

Dựa vào đồ thị hàm tan:

Bóng cây phủ qua tường rào khi $x_E < -4 \Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{12}(t-12) < \frac{-4}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t-12) < -0,67 \Leftrightarrow t < 9,4$

Vậy thời điểm bóng cây phủ qua hàng rào là $6 < t < 9,4$

Câu 123: Guồng nước (hay còn gọi là cọn nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $3,5m$; trục của nó đặt cách mặt nước $3m$. Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 3,5\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$, với x (phút) là thời gian quay của guồng $(x \ge 0)$.

a) Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước $3m$.

b) Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước $6,5m$.

Lời giải

a) Để ống đựng nước cách mặt nước $3m$, ta có phương trình:

$$\left|3,5\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\right| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3,5\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 3 \\ 3,5\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ 3,5\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{6}{3,5} < -1 (VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x - \frac{\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

Vì $x \ge 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{7}{4}; \ldots$

b) Để ống đựng nước cách mặt nước $6,5m$, ta có phương trình: $\left|3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3\right|=6,5$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3=6,5 \\ 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3=-6,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ 3,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{9,5}{3,5}<-1(VN) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2\pi x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{2k+1}{2};k\in\mathbb{Z}$.

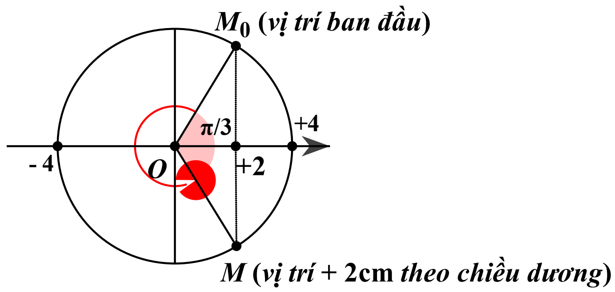
Vì $x\geq 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2};...$

Câu 124: Một vật dao động điều hòa với phương trình $x=4\cos(6\pi t+\frac{\pi}{3})$, ($x$ tính bằng cm, t tính bằng giây). Xác định thời điểm vật qua vị trí $x=2cm$ theo chiều dương lần thứ 2 kể từ thời điểm ban đầu.

Lời giải

Ta có: $x=2\Rightarrow 4\cos(6\pi t+\frac{\pi}{3})=2\Rightarrow\cos(6\pi t+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow 6\pi t+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

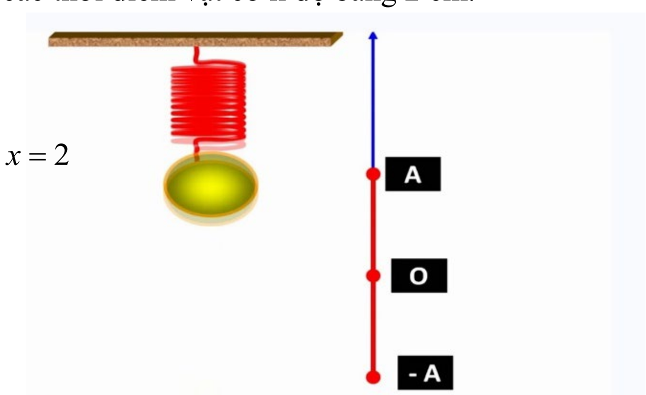
Vật qua vị trí x = 2 cm theo chiều dương $\Rightarrow 6\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$



$\Rightarrow 6\pi t=-\frac{2\pi}{3}+k.2\pi\Rightarrow t=-\frac{1}{9}+\frac{k}{3}\geq 0$ với $k=1;2;3$

Vậy vật đi qua lần thứ 2, ứng với $k=2\Rightarrow t=-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$ s

Câu 125: Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x=-5\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định các thời điểm vật có li độ bằng 2 cm.



Lời giải

Ta có $x=2 \Leftrightarrow 2=-5\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)=-0,4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 1,89+6m \\ t\approx -1,89+6n \end{array}\right.(n,m\in\mathbb{Z})$

Do $t>0$ nên $m\in\mathbb{N}$ và $n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy vật có li độ bằng 2 cm tại các thời điểm $\left[\begin{array}{l} t\approx 1,89+6m(m\in\mathbb{N}) \\ t\approx -1,89+6n(n\in\mathbb{N}^*) \end{array}\right.$

Câu 126: Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là $\alpha\left(0^\circ \le \alpha \le 360^\circ\right)$ thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức $F=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$. Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

a) $F=0$ (trăng mới).

b) $F=0,25$ (trăng lưỡi liềm).

c) $F=0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng).

d) $F=1$ (trăng tròn).

Lời giải

a) Với $F=0$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) Với $F=0,25$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=0,25 \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $\alpha=-\frac{\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbf{Z})$

c) Với $F=0,5$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=0.5 \Leftrightarrow \cos\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

d) Với $F=1$, ta có $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=1 \Leftrightarrow \cos\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 127: Toà chung cư The Landmar tại Thành Phố Hồ Chí Minh tại thời điểm năm 2022 là ngôi nhà chọc trời cao nhất Việt Nam và Đông Nam Á, với chiều cao 461m cùng 81 tầng. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao $461m$ in trên mặt nước, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t)=461\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$, trong đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

b) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Lời giải

a) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao tòa nhà khi

$$S(t)=461 \Leftrightarrow 461\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|=461 \Leftrightarrow \cot\frac{\pi}{12}t=\pm1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow t=\pm3+12k(k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $0\le t\le 12$ nên $t=3$ hoặc $t=9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

b) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t\to12$, vì vậy $\frac{\pi}{12}t\to\pi$, do đó $\cot\frac{\pi}{12}t\to-\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 128: Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sau h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày $\left(0\le t\le 24\right)$ cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)+0,5$. Tìm t để độ sâu của mực nước là $3,5m$.

Lời giải

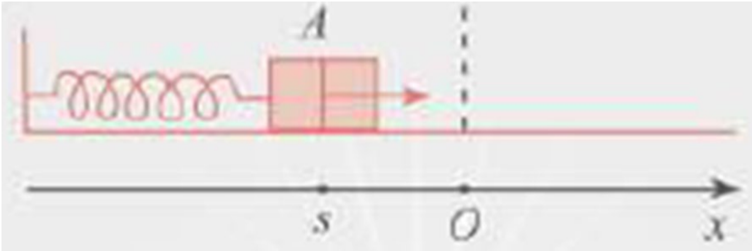
Độ sâu của mực nước là $3,5m$ thì $h=3,5$

Khi đó: $3,5=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)+0,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}+1\right)=\cos0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6}+1=k2\pi$

$\Leftrightarrow t=\frac{6(k2\pi-1)}{\pi};k\in Z$. Vì $0\le t<24$ nên $0\le\frac{6(k2\pi-1)}{\pi}\le24 \Leftrightarrow 0<k\le2$.

Mà $k \in Z \Rightarrow k \in \{1;2\} \Rightarrow t \in \left\{\frac{6(2\pi-1)}{\pi};\frac{6(4\pi-1)}{\pi}\right\}$.

Câu 129: Vật nặng khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Toạ độ $s(\text{cm})$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s=10\sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)$. Trong 2 giây đầu tiên, có bao nhiêu lần vật A đi qua vị trí $s=-5\sqrt{3}\,\text{cm}$?



Lời giải

Ta có: $10\sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)=-5\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

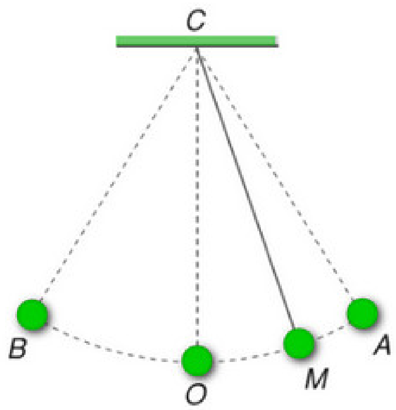
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10t+\frac{\pi}{2}=-\frac{2\pi}{3}+n2\pi \\ 10t+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{3}+m2\pi \end{array}\right. (m,n\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{7\pi}{6}+n\frac{\pi}{5} \\ t=\frac{7\pi}{6}+m\frac{\pi}{5} \end{array}\right. (m,n\in\mathbb{Z})$$

Với $t\in[0;2]$ thì ta có $\left[\begin{array}{l} 0\le -\frac{7\pi}{6}+n\frac{\pi}{5}\le 2 \\ 0\le \frac{7\pi}{6}+m\frac{\pi}{5}\le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{35}{6}\le n\le \frac{95}{6} \\ -\frac{35}{6}\le m\le \frac{25}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n\in\{6,7,8...,15\} \\ m\in\{0,1,2...4\} \end{array}\right.$

Vậy có 15 lần vật A qua vị trí $s=-5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Câu 130: Cho vận tốc $v(\text{cm/s})$ của một con lắc đơn theo thời gian t(giây) được cho bởi công thức $v=-3\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)(t>0)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
b) Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.



Lời giải

a) $v=-3\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)\le 3(\forall t)$

Và $-3\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)=3 \Leftrightarrow \sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow 1,5t+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$t=-\frac{5\pi}{9}+k\frac{4\pi}{3}; t>0 \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{9}+k\frac{4\pi}{3}>0 \Leftrightarrow k>\frac{5}{12}$. Suy ra $k\in\mathbb{N}^*=\{1;2;3;...\}$.

Vậy vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất $v_{\max}=3$ tại các thời điểm:

$$t=-\frac{5\pi}{9}+k\frac{4\pi}{3}\left(k\in\mathbb{N}\right)$$

b) $v=1,5 \Leftrightarrow -3\sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)=1,5 \Leftrightarrow \sin\left(1,5t+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1,5t+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+m2\pi \\ 1,5t+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.\left(m,k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{4\pi}{9}+m\frac{4\pi}{3} \\ t=\frac{2\pi}{3}+k\frac{4\pi}{3} \end{array}\right.$$

Do $t>0$ nên $\left[\begin{array}{l} m\in\mathbb{N}^*=\{1;2;3;...\} \\ k\in\mathbb{N}=\{0;1;2;...\} \end{array}\right.$.

Vậy Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s tại các thời điểm $\left[\begin{array}{l} t=-\frac{4\pi}{9}+m\frac{4\pi}{3}\left(m\in\mathbb{N}^*\right) \\ t=\frac{2\pi}{3}+k\frac{4\pi}{3}\left(k\in\mathbb{N}\right) \end{array}\right.$.

Câu 131: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t(s) (với $t\geq 0$) bởi hệ thức $h=|d|$ với $d=3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d>0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d<0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m$?

Lời giải

Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 3m thì:

$$\left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=3 \\ 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=1 \\ \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}(2t-1)=k2\pi \\ \frac{\pi}{3}(2t-1)=\pi+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-1=6k \\ 2t-1=3+6k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t=6k+1 \\ 2t=6k+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3k+\frac{1}{2} \\ t=3k+2 \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Do $t\geq 0, k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;\ldots$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} t\in\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2};\frac{13}{2};\ldots\right\} \\ t\in\{2;5;8;\ldots\} \end{array}\right. \Leftrightarrow t\in\left\{\frac{1}{2};2;\frac{7}{2};5;\frac{13}{2};8;\ldots\right\}$.

Vậy $t\in\left(\frac{1}{2};2;\frac{7}{2};5;\frac{13}{2};8;\ldots\right)$ (giây) thì khoảng cách h là 3m.

Câu 132: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x=2\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$.Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần ?

Lời giải

Tại vị trí cân bằng thì $x=0$.

Ta có $\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow 5t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow t=\frac{2\pi}{15}+\frac{k\pi}{5}$

Do $0<t<6$ nên $0<\frac{2\pi}{15}+\frac{k\pi}{5}<6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}<k<8,89 \Rightarrow k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Vậy có 9 giá trị *k*, tương ứng ta có 9 lần vật qua vị trí cân bằng.

Câu 133: Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(cm)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày $(0\leq t\leq 24)$ cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+10$. Hỏi vào thời điểm nào trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải

Ta có $3\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+10\leq 13$

Mà $3\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)+10=13 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=1$ $\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{3}=k2\pi \Leftrightarrow t=24k-4\,(k\in\mathbb{Z})$ nên

$0\leq 24k-4\leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\leq k\leq\frac{7}{6} \Rightarrow k=1 \Rightarrow t=20$.

Vậy vào thời điểm $20h$ trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất là $13(cm)$.

Câu 134: Số giờ có ánh sáng mặt trời của Thủ đô Hà Nội năm 2023 được cho bởi công thức $y=3\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right)+13$ với $1\le x\le 365$ là số thứ tự của ngày trong năm. Ngày nào sau đây của năm 2023 thì số giờ có ánh sáng mặt trời của Hà Nội lớn nhất?

Lời giải

Để số giờ có ánh sáng mặt trời lớn nhất thì hàm số $y=3\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right)+13$ đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó $\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right)=1\Leftrightarrow x=30+k360, k\in Z$. Vì $1\le x\le 365$ nên ta có

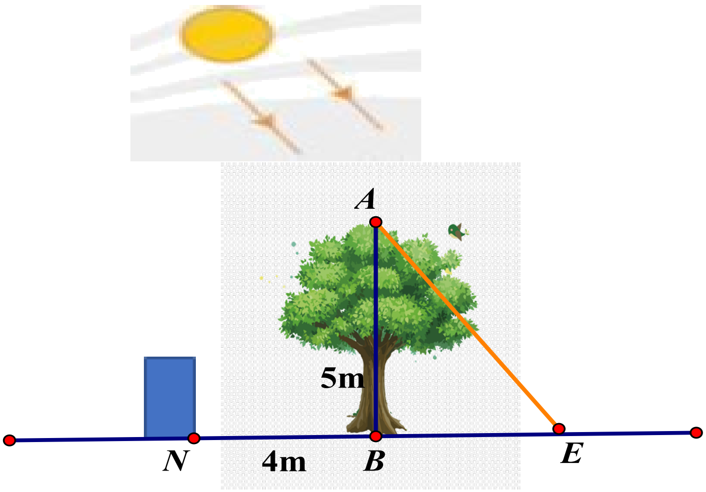
$$1\le 30+k360\le 365\Leftrightarrow -0,08\le k\le 0,93\Rightarrow k=0.$$

Do đó $x=30$ (tháng đầu tiên của năm).

Câu 135: Trong hình vẽ bên cây xanh AB nằm trên đường xách đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE. Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx Góc thiên đỉnh $\theta_x=(AB,AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt trời thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức $\theta_x(t)=\frac{\pi}{12}(t-12)$rad với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6<t<18$)

a) Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t.

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N=-4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải

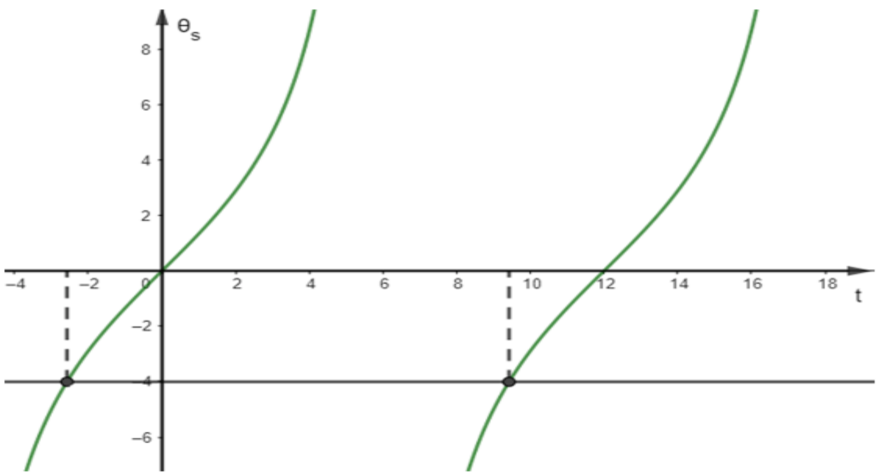
a) $x = AB.\tan\theta \Leftrightarrow x = 5\tan\left(\dfrac{\pi}{12}(t-12)\right) \Leftrightarrow x = 5\tan\dfrac{\pi t}{12}$

b) $x_N = -4 \Leftrightarrow 5\tan\dfrac{\pi t}{12} = -4 \Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{12} \approx -0,67 + k\pi\,(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow t \approx -2,6 + 12k$

Do $6 < t < 18$ nên $6 < -2,6 + 12k < 18 \Leftrightarrow 0,29 < k < 1,7$. Suy ra $k = 1 \Rightarrow t \approx 9,4$

Vậy khoảng 9 giờ 25 phút thì bóng cây phủ qua vị trí tường rào N

Đồ thị của hàm số $\theta_s = 5\tan\left(\dfrac{\pi}{12}(t-12)\right)$



Dựa vào đồ thị hàm số để $\theta_s = 5\tan\left(\dfrac{\pi}{12}(t-12)\right) < -4$ và $6 < t < 18$ suy ra các thời điểm để bóng cây phủ qua hàng rào N là $6 < t < 9,4$.

Câu 136: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12, \text{ với } t\in\mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \le 365.$$

a) Thành phố A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

a) Với $d=12$, ta có $12=3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{182}(t-80)=0\\ \frac{\pi}{182}(t-80)=\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=80\\ t=262\end{array}\right..$$

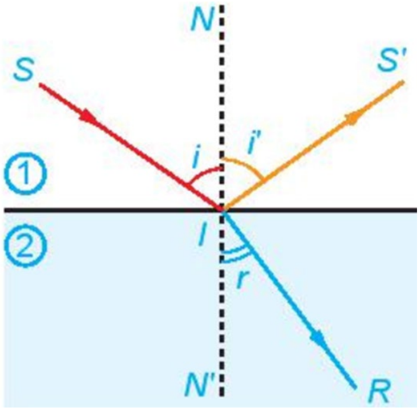
Vậy A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào các ngày thứ 80 và 262 trong năm.

b) Với $d=9$, ta có $9=3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]=-1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{182}(t-80)=-\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{182}(t-80)=\frac{3\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow t=353.$$

Vậy A có đúng 9 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

Câu 137: Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình 1.26. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_2}{n_1}$.



Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i=50°$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là $1,33$.

Lời giải

Theo Câu ra ta có: $i=50°, n_1=1, n_2=1,33$ thay vào $\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_2}{n_1}$ ta được:

$$\frac{\sin 50°}{\sin r}=\frac{1,33}{1}(r\neq 0) \Rightarrow \sin r=\frac{\sin 50°}{1,33}\approx 0,57597 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}r\approx 35°10'+k360°\\ r\approx 180°-35°10'+k360°\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}r\approx 35°10'+k360°\\ r\approx 144°50'+k360°\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Mà $0°<r<90° \Rightarrow r\approx 35°10'$

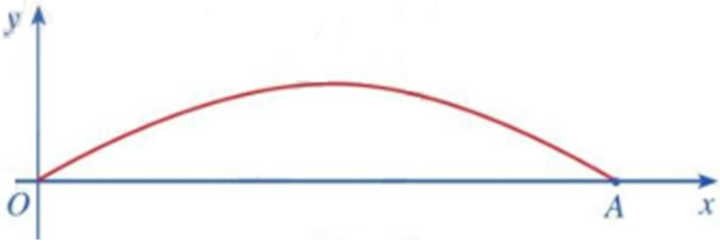
Vậy góc khúc xạ $r\approx 35°10'$

Câu 138: Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y=4,8.\sin\frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở *Hình 40*.

a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6$ m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn $13,1$ m.

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9 m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn $4,3$ m.



Lời giải

a) $y = 4,8.\sin\frac{x}{9}(x \geq 0)$. Cho $y = 0$, ta tìm được $x = 0$ hoặc $x = 9\pi \approx 28,3$. Vậy chiều rộng con sông là $OA \approx 28,3(m)$

b) Với $y = 3,6$. Ta có $3,6 = 4,8.\sin\frac{x}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \approx 7,6 + 18k\pi \\ x_2 \approx 20,6 + 18k\pi \end{array}\right.$

Vậy chiều rộng khối hàng cho phép khoảng $x_2 - x_1 \approx 13(m)$.

c) Tại vị trí đỉnh cầu, ta có $y = y_{\max} = 4,8 \Rightarrow x \approx 14,1$. Để sà lan chở khối hàng hóa rộng 9m qua cầu thì vị trí khối hàng hóa phải ở trong khu vực $x = 9,6$ đến $x = 18,6$.

Khi đó, $x \approx 9,6 \Rightarrow y \approx 4,8\sin\frac{9,6}{9} \approx 4,2$, $x \approx 18,6 \Rightarrow y \approx 4,8\sin\frac{18,6}{9} \approx 4,2 < 4,3$.

Vậy khối hàng hóa cao tối đa khoảng $4,2$ (m).

Câu 139: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$ ở đó $P(t)$ là huyết áp tinh theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 mmHg.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 mmHg.

Lời giải

a) Huyết áp là 100mmHg khi $P(t)=100 \Leftrightarrow 100+20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t=k\pi$

$\Leftrightarrow t=\frac{3k}{7}(k\in\mathbb{Z})$

Với $0<t<1 \Leftrightarrow 0<\frac{3k}{7}<\frac{7}{3} \Leftrightarrow 0<k<\frac{7}{3} \Leftrightarrow k\in\{1;2\}$ vì $k\in\mathbb{Z}$

Vậy trong khoảng từ 0 giây đến 1 giây có 2 lần huyết áp là 100mmHg

b) Huyết áp là 120mmHg khi $P(t)=120 \Leftrightarrow 100+20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)=1$

$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=\frac{3}{14}+\frac{6k}{7}(k\in\mathbb{Z})$

Với $0<t<1 \Leftrightarrow 0<\frac{3}{14}+\frac{6k}{7}<1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4}<k<\frac{11}{12} \Leftrightarrow k=0$ vì $k\in\mathbb{Z}$

Vậy trong khoảng từ 0 giây đến 1 giây có 1 lần huyết áp là 120mmHg .

Câu 140: Một chiếc máy bay được yêu cầu bay chờ hạ cánh gần sân bay quốc tế Tân Sơn Nhất Công thức $d(x)=70\sin(0,65x)+150$ biểu diễn cho khoảng cách từ máy bay đến sân bay trong khoảng thời gian x. Trong đó, d tính bằng dặm và x tính bằng phút.

a) Khi máy bay bắt đầu bay chờ hạ cánh, $x=0$, nó cách Tân Sơn Nhất bao xa?

b) Trong thời gian 20 phút đầu tiên sau khi máy bay bay chờ hạ cánh, vào thời gian x bằng bao nhiêu thì máy bay cách sân bay đúng 100 dặm?

c) Trong khi máy bay đang bay chờ hạ cánh, có bao giờ nó cách sân bay 70 dặm hay không? Tại sao?

Lời giải

a) Khi máy bay bắt đầu bay chờ hạ cánh, $x=0$, ta có: $d(0)=70\sin(0)+150=150$

Vậy máy bay cách sân bay Tân Sơn Nhất 150 dặm.

b) Máy bay cách sân bay đúng 100 dặm, khi đó:

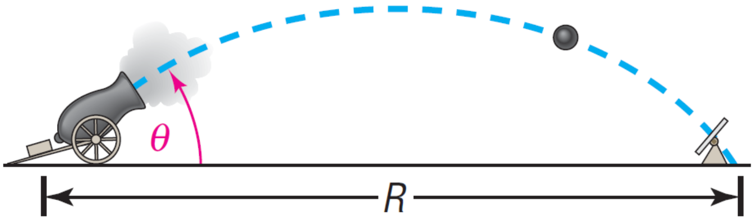
$d(x)=100 \Leftrightarrow 70\sin(0,65x)+150=100 \Leftrightarrow \sin(0,65x)=-\dfrac{5}{7} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 15,7237 \\ x\approx 6,0572 \\ x\approx 8,4424 \\ x\approx 18,1089 \end{array}\right.$.

c) Giả sử máy bay cách sân bay 70 dặm, khi đó: $d(x)=70 \Leftrightarrow 70\sin(0,65x)+150=70$

$\Leftrightarrow \sin(0,65x)=-\dfrac{8}{7}<-1$.

Phương trình vô nghiệm. Do đó, khi máy bay bay chờ hạ cánh thì không thể cách sân bay 70 dặm.

Câu 141: Một vật được bắn lên trên tạo với phương ngang một góc θ và với vận tốc ban đầu v_0 feet/s (xem hình minh họa). Nếu bỏ qua sức cản của không khí, tầm xa R của vật đó được cho bởi hàm số $R(\theta)=\dfrac{1}{32}v_0^2\sin 2\theta$. Tìm góc θ để R đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải

Ta có $R(\theta)=\dfrac{1}{32}v_0^2\sin(2\theta)\le\dfrac{1}{32}v_0^2$.

Do đó $\max R(\theta)=\dfrac{1}{32}v_0^2$ khi $\sin(2\theta)=1 \Leftrightarrow 2\theta=90° \Leftrightarrow \theta=45°$.

Vậy với góc $\theta=45°$ thì R đạt giá trị lớn nhất.

TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN LƯỢNG GIÁC