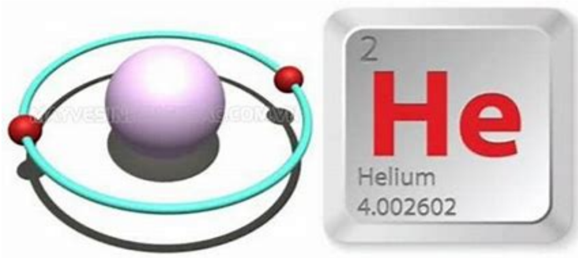
CHƯƠNG VI

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Câu 1: Trong khoa học, người ta thường phải viết các số rất lớn hoặc rất bé. Để tránh phải viết và đếm quá nhiều chữ số 0, người ta quy ước cách ghi các số dưới dạng $A.10^m$, trong đó $1 \le A \le 10$ và m là số nguyên. Một số được viết dưới dạng này, ta nói nó được viết dưới dạng khoa học.

a) Sao Thổ (tiếng Anh: Saturn), hay Thổ Tinh là hành tinh thứ sáu tính theo khoảng cách trung bình từ Mặt Trời và là hành tinh lớn thứ hai về đường kính cũng như khối lượng, sau Sao Mộc trong hệ Mặt Trời, người ta ước tính khoảng cách từ trái đất đến sao thổ là 14800000000km. Hãy viết số sau dưới dạng kí hiệu khoa học.

b) Heli (hay Hêli) là nguyên tố trong bảng tuần hoàn nguyên tố có ký hiệu He và số hiệu nguyên tử bằng **hai**, nguyên tử khối bằng 4. Tên của nguyên tố này bắt nguồn từ Helios, tên của thần Mặt Trời trong thần thoại Hy Lạp, do nguồn gốc nguyên tố này được tìm thấy trong quang phổ trên Mặt Trời. Biết khối lượng nguyên tử của Hêli là 0,00000000000000000000000000664465653665kg. Hãy viết số sau dưới dạng kí hiệu khoa học.



Lời giải

a) $1,48.10^{10}$.

b) $6,64465653665.10^{-27}\,kg$.

Câu 2: Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời.

Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU là khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Ta có khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là $1,52\ AU$ nên Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất số năm Trái Đất là $P=(1,52)^{\frac{3}{2}}\approx 1,87$.

Vậy Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất $P\approx 1,87$ năm Trái Đất.

Câu 3: Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $\left[H^+\right]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $\left[H^+\right]=8.10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho nuôi tôm sú phát triển không?

Lời giải

Độ pH của đầm là: pH = -log$\left[H^+\right]$= -log $(8.10^{-8})\approx 7,1$

Ta thấy 7,1 < 7,2 nên độ pH của đầm chưa thích hợp để cho tôm sú phát triển.

Câu 4: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng 5.10^{-13} gam và cứ 20 phút vi khẩn đó tự nhân đôi một lần. Gỉa sử được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đât là 6.10^{-23} gam (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $\alpha_0=5.10^{-3}$ (g) là khối lượng ban đầu của vi khuẩn.

Sau 20 phút đầu tiên, khối lượng của vi khuẩn là: $\alpha_0.2$.

Sau 20 phút thứ 2, khối lượng của vi khuẩn là:.$(\alpha_0.2).2=\alpha_0.2^2$

Sau 20 phút thứ 3, khối lượng của vi khuẩn là: $(\alpha_0.2^2).2=\alpha_0.2^3$.

Sau 20 phút thứ n, khối lượng vi khuẩn là: $\alpha_0.2^n$.

Gỉa sử: $\alpha_0.2^n=6.10^{27}$

$\Leftrightarrow 5.10^{-3}.2^n=6.10^{27}$

$\Leftrightarrow 2^n=1,2.10^{30}\Leftrightarrow n=\log_2\left(1,2.10^{10}\right)\approx 100$

Vậy sau khoảng 100.20 = 2000 phút ≈ 33,3 (giờ) thì khối lượng của tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất.

Câu 5: Ông An gửi 500 triệu vào ngân hàng theo hình thức lãi kép trong một thời gian khá lâu với lãi suất ổn định trong suốt thời gian tiết kiệm là 10% 1 năm. Tết năm nay do dịch bệnh nên ông rút hết tiền trong ngân hàng ra để gia đình chi tiêu. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra 20 triệu để sắm sửa đồ Tết thì ông còn 860 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu năm?

Lời giải

Giả sử ông An đã gửi tiết kiệm trong n năm.

Số tiền ông đã nhận được là 880 triệu.

Theo công thức lãi suất kép, ta có

$$880.10^6=500.10^6(1+0,1)^n\Leftrightarrow n=\log_{1,1}\frac{880}{500}\Leftrightarrow n\approx 5,93.$$

Vậy, ông A đã gửi tiết kiệm trong 6 năm.

Câu 6: Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $6,3\%$ / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y=\log_{1,063}\left(\frac{x}{20}\right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng sau $y=\log_{1,063}\left(\frac{30}{20}\right)=6.6\approx 7$ năm.

Câu 7: Chất phóng xạ polonium ^{210}Po có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong mẫu chỉ còn lại một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium ^{210}Po còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}\ (g)$. Điều kiện về thời gian để mẫu chất ngày còn lại không nhiều hơn 25 g là

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$M\le 25\Leftrightarrow 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}\le 25\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}\le\frac{25}{100}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\Leftrightarrow\frac{t}{138}\ge 2\Leftrightarrow t\ge 276 \text{ ngày.}$$

Câu 8: Trong một trận động đất, năng lượng giải tỏa E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E\approx 11,4+1,5M$.

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021).

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.

b) Năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

Lời giải

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter:

Thay M = 5 vào công thức, ta có: $log_E\approx 11,4+1,5.5\approx 18,9\Rightarrow E\approx 10^{18,9}$

b) Tính tỷ lệ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter so với tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter: $log_E\approx 11,4+1,5.8\approx 23,4\Rightarrow E\approx 10^{23,4}$

Gấp khoảng 31623 lần

Câu 9: Trong cây cối có chất phóng xạ $^{14}_{6}C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của $^{14}_{6}C$ là $T=5730$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t

được cho bởi công thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021).

Lời giải

Ta có: $\lambda = \frac{ln2}{T}$

Tỷ lệ phóng xạ giữa mẫu gỗ cổ và mẫu gỗ tươi cùng loại là:

$$\frac{H}{H_0} = 0.86 = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{ln2}{T}t}$$

$$t = \frac{T.ln0.86}{-ln2} \approx 1247 \text{ năm}$$

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó là khoảng 1247 năm.

Câu 10: Tại sông Sài Gòn, cường độ ánh sáng mặt trời đi qua môi trường nước được tính theo công thức $I = I_0.10^{\frac{-x}{3}}$, trong đó x là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt nước sông, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước sông.

a) Tại độ sâu 6 mét, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu lần I_0

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 12 mét bằng bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 mét.

Lời giải

a) Tại độ sâu 6 mét $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow I = I_0.10^{\frac{-6}{3}} = I_0.10^{-2} = 0,01.I_0$.

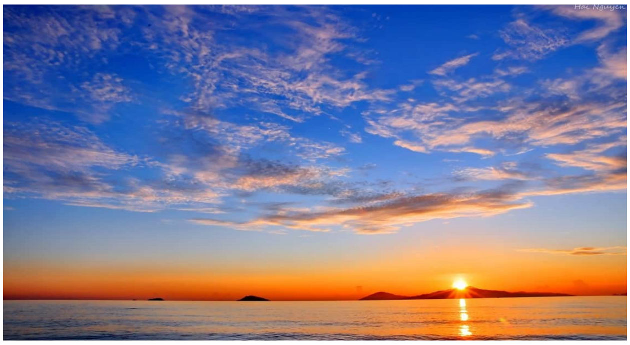
b) Tại độ sâu 12 mét $\Rightarrow x = 12 \Rightarrow I_{12} = I_0.10^{\frac{-12}{3}} = I_0.10^{-4} = 0,0001.I_0$.

Tại độ sâu 3 mét $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow I_3 = I_0.10^{\frac{-3}{3}} = I_0.10^{-1} = 0,1.I_0$.

Suy ra: $\frac{I_{12}}{I_3} = \frac{0,0001.I_0}{0,1.I_0} = \frac{1}{1000}$. Vậy cường độ ánh sáng tại độ sâu 12 mét bằng $\frac{1}{1000}$ cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 mét.

Câu 11: Tại Mũi Né của vùng biển Bình Thuận, cường độ ánh sáng mặt trời đi qua môi trường nước biển được tính theo công thức $I = I_0.e^{\frac{-3x}{13}}$, trong đó x là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt nước biển,

I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Hỏi tại độ sâu 26 mét thì cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.



Lời giải

Tại độ sâu 26 mét $\Rightarrow x = 26 \Rightarrow I = I_0.e^{\frac{-3.36}{13}} = I_0.e^{-6} = \frac{1}{e^6}.I_0$.

Vậy tại độ sâu 26 mét thì cường độ ánh sáng giảm $e^6 \approx 403,429$ lần so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.

Câu 12: Theo thống kê vào ngày 01/01/ 2023 dân số Việt Nam là 99.332.000 người, giả sử tốc độ tăng dân số tự nhiên là $0,85\%$ / năm. Nếu tốc độ tăng dân số này tiếp tục được duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số Việt Nam sau t năm, kể từ năm 2023 được tính bởi công thức $P(t) = 99,332.(1+0,0085)^t$ (đơn vị tính bằng triệu người).

a) Tính tổng dân số Việt Nam vào ngày 01/01/2030, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần mười.

b) Tính tổng dân số Việt Nam vào thời điểm ngày 15/6/2040, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Tại thời điểm ngày 01/01/2030 ứng với $t = 7$.

Do đó: dân số Việt Nam là $P(7) = 99,332.(1+0,0085)^7 \approx 105,4$ triệu người.

b) Tại thời điểm ngày 15/6/2040 ứng với $t = 17,5$.

Do đó: dân số Việt Nam là $P(17,5) = 99,332.(1+0,0085)^{17,5} \approx 115,2$ triệu người.

Câu 13: Số lượng vi khuẩn H trong phòng thí nghiệm tính theo công thức $s(t) = s_0.3^t$ trong đó s_0 là số lượng vi khuẩn H lúc đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn có trong t phút. Biết sau 5 phút thì số lượng vi khuẩn H là 243000 con. Hỏi sau 9 phút thì số lượng vi khuẩn H bao nhiêu?

Lời giải

Vì sau 5 phút thì số lượng vi khuẩn A là 243000 con nên: $243000 = s_0.3^5 \Rightarrow s_0 = \dfrac{243000}{3^5} = 1000$.

Số lượng vi khuẩn H sau 9 phút là: $s(9) = s_0.3^9 = 1000.3^9 = 1,9683.10^7$ (con).

Câu 14: *Dát vàng chính là công nghệ tạo ra những lát vàng mỏng, rất mỏng để dát lên bất kỳ sản phẩm, đồ vật nào mà con người mong muốn. Toàn bộ quy trình được người thợ gia công thực hiện hoàn toàn bằng tay và vô cùng tỉ mỉ với từng đường nét.* Giả sử với một chỉ vàng, người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng có kích thước diện tích bề mặt bằng viên gạch men và có độ dày khoảng $1,94.10^{-7}\,m$. Viên gạch men có độ dày $30\ mm$. Hỏi cần bao nhiêu lá vàng như trên, xếp chồng lên nhau để có độ dày bằng độ dày viên gạch men.

Lời giải

Ta có: $30\ mm = 3.10^{-2}\,m$.

Số lá vàng cần xếp chồng lên nhau là: $\dfrac{3.10^{-2}}{1,94.10^{-7}} \approx 154.639$.

Vậy cần khoảng 154.639 lá vàng thì xếp chồng lên nhau để có độ dày bằng viên gạch men.

Câu 15: Tại một cửa hàng bán đạp xe điện, công thức $P(t) = 12.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc xe đạp điện sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của xe đạp điện sau 1 năm 6 tháng, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần ngàn.

b) Sau 3 năm sử dụng, giá trị còn lại của xe đạp điện bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu.

Lời giải

a) Sau 1 năm 6 tháng thì $t = 1,5 \Rightarrow P(1,5) = 12.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1,5}{3}} \approx 8,485$.

Vậy sau 1 năm 6 tháng thì giá trị còn lại của xe đạp điện là $\approx 8,485$ (triệu đồng).

b) Giá trị ban đầu của xe đạp điện là $P = 12$.

Sau 3 năm sử dụng thì giá trị còn lại của xe đạp điện là: $t = 3 \Rightarrow P(3) = 12.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{3}} = 6$ (triệu đồng).

Vậy sau 3 năm đưa vào sử dụng thì giá trị còn lại của xe đạp điện bằng 50% so với ban đầu.

Câu 16: Công ty DAHON chuyên về mua bán xe ô tô đã qua sử dụng, sau khi khảo sát thị trường 06 tháng đã đưa ra công thức chung về giá trị còn lại của ô tô 4 chỗ kể từ khi đưa vào sử dụng (các loại xe 4 chỗ không sử dụng mục đích kinh doanh) được tính $P(t) = A.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$. Trong đó A là giá tiền ban đầu mua xe (triệu đồng), t là số năm kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng. Biết giá trị mua xe ban đầu là 970 triệu đồng, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần mười.

b) Sau khi đưa vào sử dụng 09 năm thì giá trị còn lại của ô tô bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu (giá mua ban đầu là 970 triệu đồng).

Lời giải

a) Ta có: $A = 970$ triệu; $t = 2,5$ năm.

Vậy giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng là:

$P(2,5) = 970.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{2,5}{4}} \approx 810,4$ triệu đồng.

b) Giá trị còn lại của xe sau khi đưa vào sử dụng 09 năm là:

$P(9)=970.\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{9}{4}}\approx 507,8$ triệu đồng.

Tỉ lệ phần trăm so với ban đầu là: $\frac{P(9)}{P(0)}\times 100\% \simeq 52,35\%$

Câu 17: Thang đo Richter là 1 thang logarit với đơn vị là độ Richter. Độ Richter tương ứng với lôgarit thập phân của biên độ những sóng địa chấn đo ở 100 km cách chấn tâm của cơn động đất. Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M=\log\frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn $(A_0=1\mu m)$.

Trận động đất mạnh nhất được ghi nhận tại Việt Nam là trận động đất tại lòng chảo Điện Biên vào năm 1935.

a). Tính độ lớn của trận động đất tại lòng chảo Điện Biên vào năm 1935, biết biên độ A bằng $10^{6,9}.A_0$

b) Trận động đất mạnh nhất được ghi nhận tại Valdivia thuộc miền nam Chi Lê vào tháng 05/1960 có biên độ lớn gấp nhất gấp $10^{\frac{13}{5}}$ lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại lòng chảo Điện Biên vào năm 1935. Tính độ lớn của trận động đất tại Valdivia thuộc miền nam Chi Lê vào tháng 05/1960.

Lời giải

a) Tính độ lớn của trận động đất tại lòng chảo Điện Biên vào năm 1935 là:

$M=\log\frac{A}{A_0}=\log\frac{10^{6,9}.A_0}{A_0}=6,9$ độ Richter.

b) Gọi A là biên độ lớn nhất của trận động đất tại lòng chảo Điện Biên của nước Việt Nam

Gọi A_C là biên độ lớn nhất của trận động đất tại Valdivia thuộc miền nam Chi Lê vào tháng 05/1960.

Khi đó: $A_C=10^{\frac{13}{5}}.A=10^{\frac{13}{5}}.10^{6,9}.A_0=10^{9,5}.A_0$.

Tính độ lớn của trận động đất tại Valdivia thuộc miền nam Chi Lê vào tháng 05/1960 là:

$M_C=\log\frac{A_C}{A_0}=\log(\frac{10^{9,5}.A_0}{A_0})=9,5$ độ Richter.

Câu 18: Trong hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH=-\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có $pH=7$ thì trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là $0,001 mol/L$. Dung dịch này có tính acid hay kiềm hay trung tính.

b) Dung dịch A có nộng độ H^+ gấp bảy lần nồng độ H^+ của dung dịch **B.** Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu.

Lời giải

a) $pH=-\log(0,001)=-\log(10^{-3})=3<7\Rightarrow$ dung dịch có tính acid.

b) Gọi pH_A, pH_B lần lượt là độ pH của dung dịch A và dung dịch B

Gọi $[H^+]_A, [H^+]_B$ lần lượt là nồng độ của dung dịch A và dung dịch B

Ta có: $pH_A = -\log[H^+]_A = -\log(7[H^+]_B) = -\log(7) - \log[H^+]_B = -\log(7) + pH_B$

$\Rightarrow pH_B - pH_A = \log(7) \approx 0,845$.

Vậy: Dung dịch B có độ pH lớn hơn độ pH của dung dịch A là $\approx 0,845$.

Câu 19: Để xác định tính acid (hay tính base) của một dung dịch, người ta đã dựa vào độ pH của dung dịch: $pH = -\log\left[H^+\right]$, với [H$^+$] là nồng độ của ion hydro (mol/L hay M).

Dung dịch với độ pH bằng 7 sẽ được coi là trung hòa, độ pH < 7 là acid, độ pH > 7 là base.

Giả sử một dung dịch có nồng độ của ion hydrogen là $\left[H^+\right] = 0,00003M$. Hãy xác định xem dung dịch đó có tính axit, bazơ hay trung hòa?

Lời giải

Độ pH của dung dịch trên là: $pH = -\log\left[H^+\right] = -\log(3.10^{-5}) \approx 4,523 < 7$ nên dung dịch trên là axit.

Câu 20: Độ pH của dung dịch được tính bởi công thức: $pH = -\log\left[H^+\right]$, với [H$^+$] là là nồng độ của ion hydro (mol/L hay M).

a) Nguồn nước của Vĩnh Hảo được lấy từ độ sâu 50m. Trải qua 3 tầng địa chất đá tổ ong – đất sét nứt – cát trắng. Sau khi được thu hoạch, nước sẽ đi qua quá trình xử lý tại nhà máy, để giữ lại các dưỡng chất cần thiết như K, Mg, Na, Ca, Fl, HCO3, SiO3. Nước khoảng Vĩnh Hảo có nồng độ H^+ là $0,32.10^{-8}\ mol/L$. Tính độ pH của nước khoáng Vĩnh Hảo.

b) Một loại trà sữa A có nồng độ H^+ gấp 30 lần nồng độ H^+ của nước khoảng Vĩnh Hảo. Tính độ H^+ của loại trà sữa đó.


Lời giải

a) Độ pH của nước khoáng Vĩnh Hảo là: $pH = -\log\left[H^+\right] = -\log[0,32.10^{-8}] \approx 8,495$.

b) Độ pH của trà sữa A là: $pH = -\log\left[H^+\right] = -\log[30.(0,32.10^{-8})] \approx 7,02$.

Câu 21: Nhảy dù là môn thể thao hành động bao gồm nhảy ra khỏi một chiếc máy bay hay dụng cụ bay khác ở trên không trung và rơi trở về Trái Đất với sự trợ giúp của lực hấp dẫn trong khi sử dụng một chiếc dù nhảy để làm chậm sự chuyển động của một đối tượng thông qua một bầu không khí bằng cách tạo ra kéo, hoặc trong trường hợp ram-dù không khí, nâng khí động học.

Một người nhảy dù tại bãi biển Đà Nẵng, biết rằng độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức áp suất theo độ cao là $a = 199.(\frac{7}{2} - \log p)$, trong đó a là độ cao so với với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng Pa). Tính độ cao so với mực nước biển, biết áp suất ở nơi người đó đang ở vị trí trên không trung 2500 Pa,, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần trăm.

Lời giải

Ta có: $a = 199.(\frac{7}{2} - \log p) \Leftrightarrow a = 199.(\frac{7}{2} - \log 2500) \Leftrightarrow a \approx 20,31m$.

Câu 22: Áp suất khí quyển p (tính bằng kilopascal, viết tắt là kPa) ở độ cao h (so với mực nước biển, tính bằng km) được tính theo công thức sau: $\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7}$ *(Theo britannica.com)*.

a) Tính áp suất khí quyển ở độ cao 5km.

b) Ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ như thế nào?

Lời giải

a) Áp suất khí quyển ở độ cao 5 km được tính bằng cách đưa giá trị $h = 5$ vào công thức:

$$\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7} = -\frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{p}{100} = e^{-\frac{5}{7}} \Rightarrow p = 100e^{-\frac{5}{7}} \approx 48,95\text{kPa}$$

b) Để tính áp suất khí quyển ở độ cao 10km, ta đưa giá trị $h = 10$ vào công thức ban đầu:

$$\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7} = -\frac{10}{7} \Leftrightarrow \frac{p}{100} = e^{-\frac{10}{7}} \Rightarrow p = 100e^{-\frac{10}{7}} \approx 23,97kPa.$$

Câu 23: Giả sử nhiệt độ $T\left({}^\circ\text{C}\right)$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 27 + 65e^{-0,4t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 37°C?

Lời giải

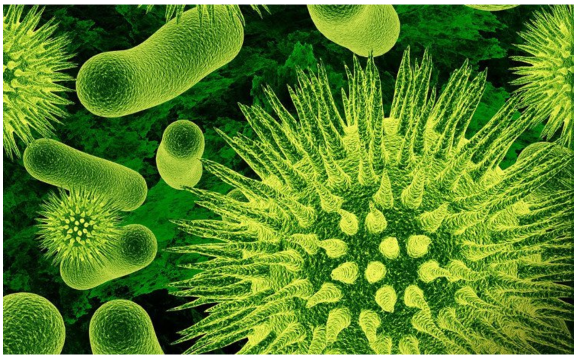
a) Nhiệt độ ban đầu của vật: $T = 27 + 65e^{-0,4.0} = 92\left({}^\circ\text{C}\right)$

b) Để tìm thời gian t mà nhiệt độ của vật còn lại 37°C.

$$37 = 27 + 65e^{-0,4t} \Rightarrow \ln\frac{37-27}{65} = -0,4t \Leftrightarrow t \approx 4,68 \text{ phút.}$$

Vậy sau khoảng 4,68 phút nhiệt độ của vật sẽ giảm còn 37°C.

Câu 24: Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?



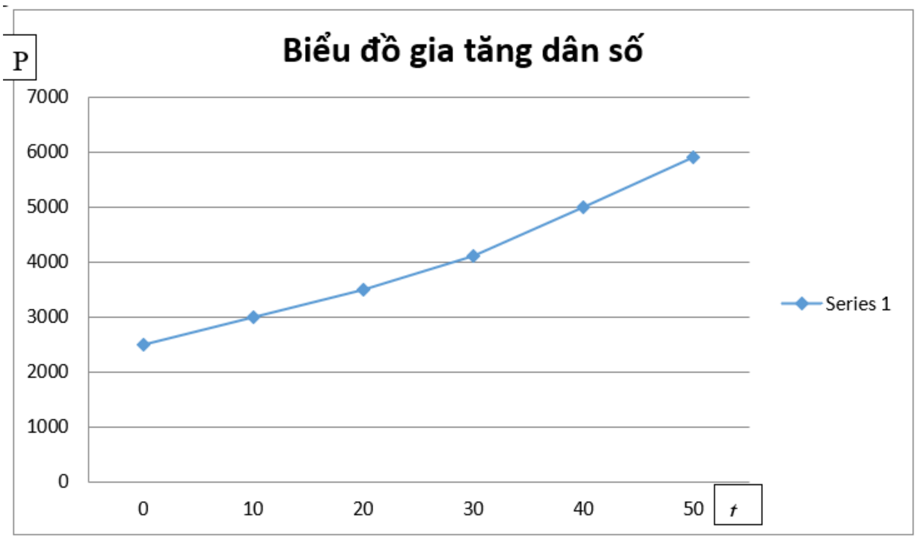
Lời giải

Sau 3 phút ta có: $s(3)=s(0).2^3 \Rightarrow s(0)=\dfrac{s(3)}{2^3}=78125.$

Tại thời điểm t số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con nên ta có:

$s(t)=s(0).2^t \Leftrightarrow 2^t=\dfrac{s(t)}{s(0)} \Leftrightarrow 2^t=\dfrac{10.000.000}{78125} \Leftrightarrow 2^t=128 \Leftrightarrow t=7$.

Câu 25: Theo số liệu thức tế, dân số thế giới năm 1950 là 2560 triệu người, còn năm 1980 là 3040 triệu người. người ta dự đoán dân số thế giới phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số mũ $P(t)=a.e^{bt}$ với a, b là hằng số và độ biến thiên của $P(t)$ theo thời gian tỷ lệ thuận với $P(t)$. Hãy dự đoán dân số thế giới vào năm 2030.



Lời giải

Số dân tại thời điểm $t=1950$ là: $P_{(1950)}=a.e^{b.1950}=2560 \quad (1)$

Số dân tại thời điểm $t=1980$ là: $P_{(1980)}=a.e^{b.1980}=3040 \quad (2)$

Lấy (2) chia (1) vế theo vế ta được: $\dfrac{a.e^{b.1950}}{a.e^{b.1980}}=\dfrac{3040}{2560} \Leftrightarrow e^{30b}=\dfrac{19}{16}$

$\Leftrightarrow 30b = \ln\frac{19}{16} \Rightarrow b = \frac{1}{30}.\ln\frac{19}{16} (*)$

Thay (*) vào (1) ta được: $a.e^{65.\ln\frac{19}{16}} = 2560 \Rightarrow a = \frac{2560}{e^{65.\ln\frac{19}{16}}}$

Vậy dân số tại thời điểm $t = 2030$ là: $P_{(2030)} = a.e^{b.2030} \approx 4048$ triệu người.

Câu 26: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $x\%/$ năm$\left(x > 0\right)$. Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x, biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

Ta có công thức: $100.\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 = 119,1016 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{100} = 1,06 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = 0,06 \Leftrightarrow x = 6$.

Câu 27: Thầy B muốn xây một căn nhà. Chi phí xây nhà hết 1 tỉ đồng, hiện nay thầy B có 700 triệu đồng. Vì không muốn vay tiền nên Thầy B quyết định gửi số tiền 700 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 12%/1 năm, tiền lãi của năm trước được cộng vào tiền gốc của năm sau. Tuy nhiên giá xây dựng cũng tăng mỗi năm 1% so với năm trước. Hỏi sau bao lâu Thầy B sẽ tiết kiệm đủ tiền xây nhà? (kết quả lấy gần đúng đến 1 chữ số thập phân).

Lời giải

Gọi V_n là chi phí xây dựng sau n năm, T_n là tổng số tiền thu được sau n năm.

Ta có: $V_0 = 1$ tỉ

$V_1 = 1(1+1\%)$ tỉ.

$V_2 = 1\left(1+1\%\right).1\% + 1\left(1+1\%\right) = 1\left(1+1\%\right)^2$ tỉ.

….

$\Rightarrow V_n = 1\left(1+1\%\right)^n$ tỉ.

Ta có: 700000000 = 0,7 tỉ

Số tiền thu được sau n năm: $T_n = 0,7.\left(1+12\%\right)^n$ tỉ

Để xây được nhà thì ở năm thứ n thì số tiền thầy Quỳnh thu được phải bằng số tiền chi phí xây dựng.

$\Rightarrow T_n = V_n \Leftrightarrow 0,7\left(1+12\%\right)^n = 1\left(1+1\%\right)^2$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{1+12\%}{1+1\%}\right)^n = \frac{1}{0,7} \Leftrightarrow n = \log_{\frac{1+12\%}{1+1\%}}\frac{1}{0,7} \approx 3,5$.

Câu 28: Trong cây cối có chất phóng xạ ${}_{6}^{14}C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được phóng xạ của nó bằng 85% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của ${}_{6}^{14}C$ là $T = 5000$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t được cho bởi công thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ.

Lời giải

Từ đó, ta có thể tính được hằng số phóng xạ: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T} = \dfrac{\ln 2}{5000} \approx 1,39.10^{-4}$.

Giờ ta cần tìm thời gian t mà đã trôi qua từ thời điểm mẫu gỗ cổ được sinh ra đến thời điểm hiện tại. Để tìm thời gian này, ta sử dụng tỷ lệ phóng xạ giữa mẫu gỗ cổ và mẫu gỗ tươi cùng loại:

$$\frac{H}{H_0} = 0,85 = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \frac{\ln 0,85}{-1,39.10^{-4}} \approx 1169,2 \text{ năm}.$$

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó là khoảng $1169,2$ năm.

Câu 29: Trên mỗi chiếc radio đều có các vạch chia để người sử dụng dễ dàng chọn đúng sóng radio cần tìm. Biết rằng vạch chia ở vị trí cách vạch tận cùng bên trái một khoảng $d(\text{cm})$ thì ứng với tần số $F = ka^d\,(kHz)$, trong đó k và a là hai hằng số được chọn sao cho vạch tận cùng bên trái ứng với tần số 620kHz, vạch tận cùng bên phải ứng với tần số 1710kHz và hai vạch này cách nhau $20\,\text{cm}$

a) Tính k và a (tính a chính xác đến hàng phần nghìn)

b) Tìm $d(\text{cm})$ biết rằng vạch đó là chương trình ca nhạc có tần số là $F = 1500\text{kHz}$.

Lời giải

a) Khi $d = 0$ thì $F = 620$ và khi $d = 20$ thì $F = 1710$,

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 620 = ka^0 \\ 1710 = ka^{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 620 \\ a^{20} = \dfrac{1710}{620} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 620 \\ a = \sqrt[20]{\dfrac{1710}{620}} \approx 1,052 \end{cases}$.

Vậy $k = 620;\quad a = 1,052$.

b) Chương trình ca nhạc có tần số là $F = 1500kHz$, vậy ta có phương trình:

$$1500 = ka^d \Leftrightarrow a^d = \frac{1500}{k} \Leftrightarrow d = \log_a \frac{1500}{k} \Leftrightarrow d = \log_{1,052} \frac{1500}{620} \approx 17,43(cm).$$

Vậy muốn mở tới ngay chương trình ca nhạc, ta chỉnh đến vạch chia cách vạch ban đầu một khoảng $17,43(cm)$.

Câu 30: Một người gửi tiền vào ngân hàng một số tiền là 200.000.000 đồng, họ định gửi theo kì hạn n năm với lãi suất là 12% một năm; sau mỗi năm không nhận lãi mà để lãi nhập vốn cho năm kế tiếp. Tìm n nhỏ nhất lãi nhận được hơn 60.000.000 đồng.

Lời giải

Ta có số tiền lãi $> 60.000.000 \Rightarrow$ số tiền lãi và vốn >260.000.000.

Số tiền nhận được sau n năm: $200.000.000 \times (1,12)^n$

Theo đề bài bài Ta có:

$$200.000.000 \times (1,12)^n > 260.000.000 \Leftrightarrow 1,12^n > 1,3 \Leftrightarrow n > 2,31 \Rightarrow n = 3.$$

Câu 31: Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \dfrac{100}{1 + 49.e^{-0,015x}},\ \ x \geq 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

Lời giải

Ta có: $P(x) = \dfrac{100}{1 + 49.e^{-0,015x}} \geq 75 \Leftrightarrow x \geq 333$.

Câu 32: Khi một kim loại được làm nóng đến 600^0C, độ bền kéo của nó giảm đi 50%. Sau khi kim loại vượt qua ngưỡng 600^0C, nếu nhiệt độ kim loại tăng thêm 5^0C thì độ bền kéo của nó giảm đi 35% hiện có. Biết kim loại này có độ bền kéo là $280M\ Pa$ dưới 600^0C và được sử dụng trong việc xây dựng các lò công nghiệp. Nếu mức an toàn tối thiểu độ bền kéo của vật liệu này là $38M\ Pa$, thì nhiệt độ an toàn tối đa của lò công nghiệp bằng bao nhiêu, tính theo độ Celsius?

Lời giải

Ở 600^0C độ bền kéo của kim loại là $140MPa = DB$ (đặt ẩn phụ này để gon tính toán phía sau). Cứ tăng 5^0C thì độ bền kéo giảm 35% DB còn 65% DB

Sau n lần tăng 5^0C thì độ bền kéo còn $(65\%)^n$ ***DB.***

Theo đề $(65\%)^n DB \geq 38 \Rightarrow n \leq \log_{(65\%)} \dfrac{38}{DB} \approx 3,02$.

Do đó nhiệt độ tối đa là 600^0C + 3.5^0C = 615^0**C.**

Câu 33: Một người gửi 150 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 200 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu?

Lời giải

Ta có số tiền thu được sau t quý là $T = 150(1 + 1,65\%)^t$.

Theo đề bìa ta có: $T \geq 200 \Leftrightarrow 150(1 + 1,65\%)^t \geq 200 \Leftrightarrow (1 + 1,65\%)^t \geq \dfrac{4}{3}$.

$\Leftrightarrow \log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%)^t \ge \log_{\frac{4}{3}}\frac{4}{3} \Leftrightarrow t.\log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%) \ge 1 \Leftrightarrow t \ge \dfrac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%)} = 17,6$

Suy ra số quý tối thiểu: $t = 18$ quý = 4 năm 6 tháng.

Câu 34: Thầy Cư có 500 triệu đồng gửi ngân hàng kì hạn 3 tháng với lãi suất 0,65% một tháng theo thể thức lãi kép. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu quý gửi tiền vào ngân hàng, thầy Cư mới có số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu gửi ngân hàng, giả sử người đó không rút lãi trong tất cả các quý định kì. (Số quý gửi là số nguyên)

Lời giải

Áp dụng công thức $P_n = P_0(1+r)^n$ ta có: $P_0 = 500\,000\,000$ đồng, lãi suất trong 1 kì hạn là:

$r = 3\times 0,65\% = 1,95\%$.

Sau n quý tổng số tiền (vốn và lãi) thầy Cư có được là: $P_n = P_0(1+r)^n$

Suy ra tổng số tiền lãi có được sau n quý là: $P_n - P_0$.

Cần tìm n để $P_n - P_0 > P_0 \Leftrightarrow P_0(1+r)^n - P_0 > P_0 \Leftrightarrow (1+r)^n > 2$.

$\Leftrightarrow n > \log_{1+r} 2 \Leftrightarrow n > \log_{1+1,95\%} 2 \approx 35,89 \ge 36$.

Vậy sau 36 quý (tức là 9 năm) thầy Cư sẽ có số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu gửi ngân hàng.

Câu 35: Kết quả thống kê cho biết ở thời điểm năm 2013 dân số Việt Nam là 90 triệu người, tốc độ tăng dân số là $1,1\%$ / năm. Nếu mức tăng dân số ổn định như vậy thì dân số Việt Nam sẽ gấp đôi (đạt ngưỡng 180 triệu) vào năm nào?

Lời giải

Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.

Theo đề bài ta có: $S = A.e^{ni} \Leftrightarrow 180 = 90e^{1,1\%.n} \Leftrightarrow n = 63.01338005$.

Vậy sau khoảng hơn 63 năm thì dân số Việt Nam đạt ngưỡng 180 triệu hay vào khoảng năm 2077.

Câu 36: Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \ge 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

Lời giải

Ta có $75 - 20\ln(t+1) \le 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \ge 3,25 \Leftrightarrow t \ge 24,79$. Khoảng 25 tháng.

Câu 37: Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất $0,4\%$ giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm, tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

Lời giải

Sau một năm số tiền anh Hùng làm ra là $6.12 = 72$ triệu đồng.

Sau một năm giá trị xe công nông còn $100(1-0,4\%)^{12} \approx 95,3042$ triệu đồng.

Vậy sau một năm số tiền anh Hùng có là $167,3042$ triệu đồng.

Câu 38: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó được rút là bao nhiêu?

Lời giải

Phương pháp: Quy bài toán về tính tổng cấp số nhân, rồi áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân:

Dãy $u_1;u_2;u_3;...;u_n$ được gọi là 1 CSN có công bội q nếu: $u_k = u_{k-1}q$.

Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

+ Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân.

Cách giải: + Gọi số tiền người đó gửi hàng tháng là $a = 1$ triệu.

+ Đầu tháng 1: người đó có a.

Cuối tháng 1: người đó có $a.(1+0,01) = a.1,01$.

+ Đầu tháng 2 người đó có: $a + a.1,01$.

Cuối tháng 2 người đó có: $1,01(a + a.1,01) = a(1,01 + 1,01^2)$.

+ Đầu tháng 3 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2)$.

Cuối tháng 3 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2).1,01 = a(1 + 1,01^2 + 1,01^3)$.

….

+ Đến cuối tháng thứ 27 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + ... + 1,01^{27})$.

Ta cần tính tổng: $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + ... + 1,01^{27})$.

Áp dụng công thức cấp số nhân trên với công bội là $1,01$ ta được $\dfrac{1-1,01^{27}}{1-0,01} = 100.(1,01^{27} - 1)$ triệu đồng.

Câu 39: Một tờ "siêu giấy" dày $0,1\text{mm}$ có thể gấp được vô hạn lần. Hỏi sau bao nhiêu lần gấp thì tờ giấy này đụng mặt trăng. Biết khoảng cách từ trái đất đến mặt trăng là $384000\,\text{km}$.

Lời giải

Gọi n là số lần gấp thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có $1km = 10^6 mm$; Theo bài ra ta có: $0,1.2^n = 384000.10^6 \Rightarrow n \approx 41,804$.

Vậy, sau 42 lần gấp thì tờ giấy đụng mặt trăng.

Câu 40: Ông Toàn gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng ngân hàng *ACB* theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ kế tiếp) với lãi suất 14 % một năm. Hỏi sau hai năm ông Toàn thu được cả vốn lẫn lãi bao nhiêu (Giả sử lãi suất không thay đổi)?

Lời giải

Áp dụng công thức tính lãi kép, sau hai năm ông Toàn thu được cả vốn lẫn lãi là.

$50(1+0,14)^2 = 64,98$ (triệu đồng).

Câu 41: Ông Quang cho ông Tèo vay 1 tỉ đồng với lãi suất hàng tháng là $0,5\%$ theo hình thức tiền lãi hàng tháng được cộng vào tiền gốc cho tháng kế tiếp. Sau 2 năm, ông Tèo trả cho ông Quang cả gốc lẫn lãi. Hỏi số tiền ông Tèo cần trả là bao nhiêu đồng? (Lấy làm tròn đến hàng nghìn).

Lời giải

Tổng số tiền ông Tèo cần trả sau 24 tháng là: $P_{24}=1(1+0,5\%)^{24}\approx 1.127.160.000$ (đồng).

Câu 42: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất $1,65\%$ một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

Lời giải

Số tiền của người ấy sau n kỳ hạn là $T=15\left(1+\dfrac{1,65}{100}\right)^{n}$.

Theo đề bài, ta có $15\left(1+\dfrac{1,65}{100}\right)^{n}>20\Leftrightarrow n>\log_{1+\frac{1,65}{100}}\dfrac{4}{3}\approx 17,56$.

Câu 43: Giá trị còn lại của một chiếc xe theo thời gian khấu hao t được xác định bởi công thức:

$V(t)=15000e^{-0,15t}$, trong đó $V(t)$ được tính bằng USD và t được tính bằng năm. Hỏi sau bao lâu giá trị còn lại của chiếc xe chỉ là 5000 USD gần nhất với số nào sau đây?

Lời giải

$$V(t)=15000e^{-0,15t}\Leftrightarrow e^{-0,15t}=\frac{V(t)}{15000}\Leftrightarrow -0,15t=\ln\left(\frac{V(t)}{15000}\right)\Leftrightarrow t=-\frac{20}{3}\ln\left(\frac{V(t)}{15000}\right).$$

Thay $V(t)=5000$ ta được $t=-\dfrac{20}{3}\ln\left(\dfrac{5000}{15000}\right)\approx 7,324$ năm.

Câu 44: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là $78.685.800$ người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S=A.e^{Nr}$ (trong đó A: là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Nếu dân số vẫn tăng với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

Lời giải

Ta có: $78685800.e^{N.0,017}=120000000\Leftrightarrow N\approx 24,8$ (năm).

Do đó, tới năm 2026 thì dân số nước ta đạt mức 120 triệu người.

Câu 45: Huyện A có 300 nghìn người. Với mức tăng dân số bình quân $1,2\%$/năm thì sau n năm dân số sẽ vượt lên 330 nghìn người. Hỏi n nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Số dân của huyện A sau n năm là $x=300.000(1+0,012)^{n}$.

$$\Leftrightarrow 300.000(1+0,012)^{n}>330.000\Leftrightarrow n>\log_{1,012}\frac{33}{30}\Leftrightarrow n>7,99.$$

Nên n nhỏ nhất bằng 8 năm.

Câu 46: Một chủ hộ kinh doanh có 32 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là $2.000.000đ/1$ phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên $200.000đ/1$ tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh sẽ cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

Lời giải

Gọi $n, \left(n\in\mathbb{N}\right)$ là số lần tăng giá.

Hàm thu nhập của tháng: $f\left(n\right)=\left(2000000+n.200000\right)\left(32-n.2\right)$.

$=-400000n^2+2400000n+64000000$ là hàm bậc 2 theo n, có hệ số $a<0$.

Vậy $f\left(n\right)$ đạt giá trị lớn nhất khi $n=\dfrac{-2400000}{2.\left(-400000\right)}=3$.

$$\left.\begin{array}{l} *f\left(3\right)=67.600.000 \\ *f\left(0\right)=64.000.000 \end{array}\right\}\Rightarrow f\left(3\right)>f\left(0\right).$$

Vậy chủ hộ sẽ cho thuê với giá $2.000.000+3*200.000=2.600.000$đ.

Câu 47: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm, người đó thu được số tiền gấp ba số tiền ban đầu?

Lời giải

Gọi số tiền gửi ban đầu là P. Sau n năm, số tiền thu được là: $P_n=P\left(1+0,06\right)^n=P(1,06)^n$.

Để $P_n=3P$ thì phải có $\left(1,06\right)^n=3$. Do đó $n=\log_{1,06}3\approx 18,85$.

Vì n là số tự nhien nên ta chọn $n=19$.

Câu 48: Một người gửi gói tiết kiệm linh hoạt của ngân hàng cho con với số tiền là 500000000 VNĐ, lãi suất 7%/năm. Biết rằng người ấy không lấy lãi hàng năm theo định kỳ sổ tiết kiệm. Hỏi sau 18 năm, số tiền người ấy nhận về là bao nhiêu? (Biết rằng, theo định kì rút tiền hằng năm, nếu không lấy lãi thì số tiền sẽ được nhập vào thành tiền gốc và sổ tiết kiệm sẽ chuyển thành kì hạn 1 năm tiếp theo).

Lời giải

Gọi a là số tiền gửi vào hàng tháng gửi vào ngân hàng.
x là lãi suất ngân hàng.
n là số năm gửi.
Sau năm 1 thì số tiền là: $a+ax=a\left(x+1\right)$.

Sau năm 2: $a\left(x+1\right)+a\left(x+1\right)x=a\left(x+1\right)\left(x+1\right)=a\left(x+1\right)^2$.

Sau năm 3: $a\left(x+1\right)^2+a\left(x+1\right)^2x=a\left(x+1\right)^2\left(x+1\right)=a\left(x+1\right)^3$.

Sau năm 4: $a\left(x+1\right)^3+a\left(x+1\right)^3x=a\left(x+1\right)^3\left(x+1\right)=a\left(x+1\right)^4$.

Sau n năm,số tiền cả gốc lẫn lãi là: $a\left(x+1\right)^n$.

Vậy sau 18 năm, số tiền người ý nhận được là: $500.000.000\left(0,07+1\right)^{18}=1,689,966,000$ VNĐ.

Câu 49: Một cửa hàng bán lẻ phần mềm soạn thảo công thức toán học MathType với giá là 10 USD. Với giá bán này, cửa hàng chỉ bán được khoảng 25 sản phẩm. Cửa hàng dự định sẽ giảm giá bán, ước tính cứ mỗi lần giảm giá bán đi 2 USD thì số sản phẩm bán được tăng thêm 40 sản phẩm. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá mua về của một sản phẩm là 5 USD.

Lời giải

Gọi x là giá giảm trên một sản phẩm, khi đó sẽ bán thêm được $20x$ sản phẩm.

Vậy lợi nhuận thu được bằng:

$$L(x)=(25+20x)(10-x-5)=-20x^2+75x+125=-20\left(x-\frac{15}{8}\right)^2+\frac{3125}{16}\leq\frac{3125}{16}.$$

Lợi nhuận tối đa thu được là $\frac{3125}{16}=195,3125$ USD khi $x=\frac{15}{8}$ hay giá bán một sản phẩm là $10-\frac{15}{8}=8,125$ USD.

Câu 50: Sau 15 năm ra trường, thầy A đã tiết kiệm được cho mình số tiền 300 triệu đồng, thầy dự định sẽ dùng số tiền đó để mua một căn nhà. Nhưng hiện nay để mua được căn nhà vừa ý, thầy A cũng cần phải có 600 triệu đồng. Rất may một học trò cũ của thầy sau khi ra trường công tác đã lập gia đình và mua nhà ở thành phố nên đồng ý để thầy Hợp ở lại căn nhà của mình trong khoảng thời gian tối đa 10 năm, đồng thời chỉ bán lại căn nhà khi trong khoảng thời gian đó thầy A giao đủ số tiền 600 triệu đồng. Sau khi tính toán thầy quyết định gửi toàn bộ số tiền 300 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $8,1\%$ / năm và lãi hàng năm nhập vào vốn. Hỏi phải mất thời gian tối thiểu bao nhiêu năm nữa thầy A mới mua được căn nhà này.

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép ta có:

$P_n=P_0(1+r)^n \Leftrightarrow 600=300(1+8,1\%)^n \Leftrightarrow n=\log_{1+8,1\%}2\approx 8,699$. Chọn $n=9$.

Phải mất thời gian tối thiểu 9 năm nữa thầy A mới mua được căn nhà này.

Câu 51: Số lượng của một loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q(t)=Q_0.e^{0.195t}$, trong đó Q_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn có 100.000 con?

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $Q(t)=5000.e^{0.195t}$. Để số lượng vi khuẩn là 100.000 con thì.

$$Q(t)=5000.e^{0.195t}=100.000 \Leftrightarrow e^{0.195t}=2 \Leftrightarrow t=\frac{1}{0.195}\ln 20\approx 15.36(h).$$

Câu 52: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn $2015-2021$ (6 năm) là $10,6\%$ so với số lượng hiện có năm 2015 theo phương thức "ra 2 vào 1" (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến $0,01\%$).

Lời giải

Gọi x $(x\in\mathbb{N}^*)$ là số cán bộ công chức tỉnh A năm 2015.

Gọi r là tỉ lệ giảm hàng năm.

Số người mất việc năm thứ nhất là: $x\cdot r$.

Số người còn lại sau năm thứ nhất là: $x-x\cdot r=x(1-r)$.

Tương tự, số người mất việc sau năm thứ hai là: $x(1-r)r$.

Số người còn lại sau năm thứ hai là: $x(1-r)-x(1-r)\cdot r=x(1-r)^2$.

$\Rightarrow$ Số người mất việc sau năm thứ sáu là: $x(1-r)^5\cdot r$.

Tổng số người mất việc là: $x\cdot r+x\cdot(1-r)\cdot r+x\cdot(1-r)^2\cdot r+...+x\cdot(1-r)^5\cdot r=10,6\%x$.

$\Leftrightarrow r+(1-r)r+(1-r)^2r+...+(1-r)^5r=0,106$.

$\Leftrightarrow \dfrac{r\left[1-(1-r)^6\right]}{1-(1-r)}=0,106 \Rightarrow r\approx 0,0185$.

Vì tỉ lệ giảm hàng năm bằng với tỉ lệ tuyển dụng mới nên tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm là $1,85\%$.

Câu 53: Giả sử tỉ lệ lạm phát của Việt Nam trong 10 năm qua là 5%. Hỏi nếu năm 2007, giá xăng là 12000 VND/lít. Hỏi năm 2016 giá tiền xăng là bao nhiêu tiền một lít.

Lời giải

Giá xăng năm 2008 là $12000(1+0,05)$.

Giá xăng năm 2009 là $12000(1+0,05)^2$.

….

Giá xăng năm 2016 là $12000(1+0,05)^9\approx 18615,94$ VND/lit.

Câu 54: Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, ông An đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 800 triệu đồng với lãi suất $x\%/\,năm$, điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, ông An đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền là 1.058 triệu đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa ông An và ngân hàng là bao nhiêu?

Lời giải

Công thức tính tiền vay lãi kép $T_n=a(1+x)^n$.

Trong đó a: số tiền vay ban đầu, x: lãi suất $x\%/\,năm$, n: số năm $\Rightarrow x=\sqrt[n]{\dfrac{T_n}{a}}-1$.

Vậy $x=\sqrt{\dfrac{1\,058}{800}}-1=0,15$ tức là $15\%/\,năm$.

Câu 55: Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong gỗ là $65,21$ (%). Hãy xác định niên đại của công trình kiến trúc đó.

Lời giải

Theo đề, ta có: $65,21\%=100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5750}}\Rightarrow t=3547$ năm.

Câu 56: Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sản suất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số: $f(m,n)=m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}$, trong đó là m số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 USD. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

Lời giải

Vì mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm nên

$f(m,n)\geq 40 \Leftrightarrow m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\geq 40 \Leftrightarrow m^2.n\geq 40^3$. Chi phí phải trả trong 1 ngày của hãng là

$6m+24n=6(m+4n)=6\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}+4n\right)\geq 6.3.\sqrt[3]{\frac{m}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot 4n}=18\sqrt[3]{m^2.n}\geq 18\sqrt[3]{40^3}=18.40=720.$

Câu 57: Hiện tại dân số ở Hà Nội là 7,55 triệu người với tốc độ tăng dân số 2% một năm và dân số Thành phố Hồ Chí Minh là 8,15 triệu người với tốc dộ tăng dân số 1,5% một năm. Hỏi ít nhất sau bao nhiêu năm nữa thì số dân Hà Nội vượt số dân Thành phố Hồ Chí Minh.

Lời giải

Số dân của Hà Nội sau n năm là $X_1=7,55(1+0,02)^n=7,55.(1,02)^n$.

Số dân của thành phố Hồ Chí Minh sau n năm là $X_2=8,15(1+0,015)^n=8,15.(1,015)^n$.

$X_1>X_2\Rightarrow 7,55.(1,02)^n>8,15.(1.015)^n\Rightarrow\left(\frac{1,02}{1,015}\right)^n>\frac{8,15}{7,55}\Rightarrow n>\log_{\frac{1,02}{1,015}}\left(\frac{8,15}{7,55}\right)\approx 15,56$.

Vậy sau ít nhất 16 năm.

Câu 58: Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.00 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu đồng một tháng?

Lời giải

Số tiền thuê căn hộ: $y=(150-5x)(2.000.000+100.000x),(x\in N)$.

$y'=-1.000.000x+5.000.000=0\Leftrightarrow x=5$.

Vậy $y_{\max}=2.500.000\Leftrightarrow x=5$.

Câu 59: Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

Lời giải

Theo đề bài số lượng bèo ban đầu 0,04 diện tích mặt hồ.

Sau 7 ngày số lượng bèo là $0,04\times 3^1$ diện tích mặt hồ.

Sau 14 ngày số lượng bèo là $0,04\times 3^2$ diện tích mặt hồ.

….

Sau $7\times n$ ngày số lượng bèo là $0,04\times 3^n$ diện tích mặt hồ.

Để bèo phủ kín mặt hồ thì $0,04\times 3^n=1\Leftrightarrow 3^n=25\Leftrightarrow n=\log_3 25$.

Vậy sau $7\times\log_3 25$ ngày thì bèo vừa phủ kín mặt hồ.

Câu 60: Cường độ một trận động đất $M\,(richter)$ được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_o$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_o là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8.3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?

Lời giải

$M_1 = \log\dfrac{A_1}{A_o} = 8,3 \Rightarrow A_1 = 10^{8,3}.A_o$.

$M_2 = \log\dfrac{A_2}{A_o} = \log\dfrac{4A_1}{A_o} = \log\dfrac{4.10^{8,3}A_o}{A_o} = \log\left(4.10^{8,3}\right) = 8,3 + \log 4 \approx 8,9.$

Câu 61: Số lượng của một số loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q = Q_o.e^{0,195t}$, trong đó Q_o là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao lâu có $100\ 000$ con?

Lời giải

$Q = Q_o e^{0,195t} \Rightarrow 100\,000 = 5000e^{0,195t} \Rightarrow t = 15,36$.

Câu 62: Một người quan sát một đám bèo phát triển trên mặt hồ thì thấy cứ sau một giờ thì diện tích của đám bèo lớn gấp 10 lần diện tích đám bèo trước đó, với tốc độ tăng không đổi thì sau 9 giờ đám bèo ấy phủ kín mặt hồ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì đám bèo ấy phủ kín một phần ba mặt hồ?

Lời giải

Gọi a diện tích ban đầu của đám bèo.

Sau một giờ diện tích đám bèo là $a_1 = 10a$; Sau n giờ diện tích đám bèo là $a_n = a.10^n$.

Sau 9 giờ diện tích đám bèo là $a_9 = a.10^9 = S$; (S) là diện tích của mặt hồ.

Ta có đám bèo ấy phủ kín một phần ba mặt hồ

$\Leftrightarrow \dfrac{S}{3} = \dfrac{a.10^9}{3} = a.10^n \Leftrightarrow 10^n = \dfrac{10^9}{3} \Leftrightarrow n = \log\dfrac{10^9}{3} = 9 - \log 3$.

Câu 63: Cho một chất Uranium phóng xạ có tỉ lệ phóng xạ hằng ngày là $-0,4\%$ tức là khối lượng của nó giảm $0,4\%$ mỗi ngày. Khối lượng của chất đó sau n ngày được tính theo công thức $M = M_0.e^{ni}$ trong đó M_0 là khối lượng ngày đầu, i là tỉ lệ phóng xạ hàng ngày. Hỏi sau 50 ngày phóng xạ, 30 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu?

Lời giải

Áp dụng công thức $M = M_0.e^{ni}$ ta được $M = 30.e^{-0,004.50} \approx 24,5619(g)$.

Cách khác: Khối lượng Uranium giảm từng ngày $0,4\%$ nên:

Sau ngày thứ nhất lượng Uranium còn: $30 - 30.\dfrac{4}{1000} = 30\left(1 - \dfrac{4}{1000}\right)\ (g)$.

Sau ngày thứ hai lượng Uranium còn: $30\left(1 - \dfrac{4}{1000}\right) - 30\left(1 - \dfrac{4}{1000}\right).\dfrac{4}{1000} = 30\left(1 - \dfrac{4}{1000}\right)^2 (g)$.

………………

Sau ngày thứ 50 lượng Uranium còn: $30\left(1 - \dfrac{4}{1000}\right)^{50} \approx 24,5520\ (g)$.

(Công thức đầu tính khối lượng giảm liên tục, cách 2 tính theo kiểu lãi kép (tức có “kì hạn”).