CHƯƠNG V

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I LÝ THUYẾT.

I. VEC-TƠ PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẲNG.

1. Định nghĩa.

Cho mặt phẳng (α).

- Nếu vec-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là **vec-tơ pháp tuyến** của (α).
- Nếu hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là **cặp vec-tơ chỉ phương** của (α).

2. Chú ý.

- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vec-tơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng đó.
- Nếu $\vec{n}$ là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

II. XÁC ĐỊNH VEC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG KHI BIẾT MỘT CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Định lý.

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vec-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ làm cặp vec-tơ chỉ phương thì (α) nhận vec-tơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

2. Chú ý.

a) Vec-tơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là *tích có hướng của hai vec-tơ* $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Tích có hướng của hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

b) Biểu thức $a_1b_2-a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2$ và $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}=a_3b_1-a_1b_3$. Như vậy: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$.

c) Hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa.

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng.

2. Nhận xét.

Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó,

Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

$N(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

3. Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng cơ bản

a) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vec-tơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

b) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vec-tơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vec-tơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$, ta thực hiện như sau

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

c) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau

Tìm cặp vec-tơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

d) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ là

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

a) Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó: $(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

Chú ý.

- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

b) Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

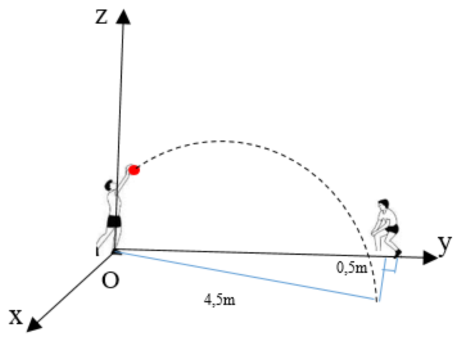
Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức

$$\mathrm{d}(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

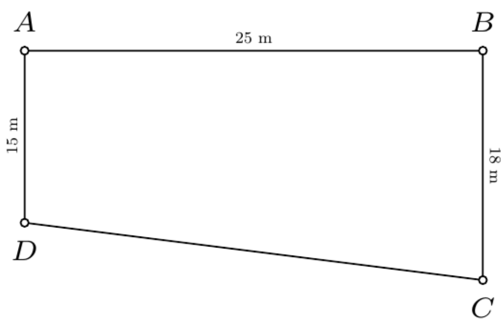
Câu 1: Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét) vào một ngôi nhà 1 tầng, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz. Biết rằng các vị trí $A(3;4;33), D(9;8;35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Hãy cho biết độ dày của mái nhà đó là bao nhiêu decimét?

Câu 2: Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Nam và An đang tập chuyền bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An $0,5m$ và cách Nam $4,5m$. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cx+d=0$ và vuông góc với mặt đất. Khi đó giá trị của $a+b+c+d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

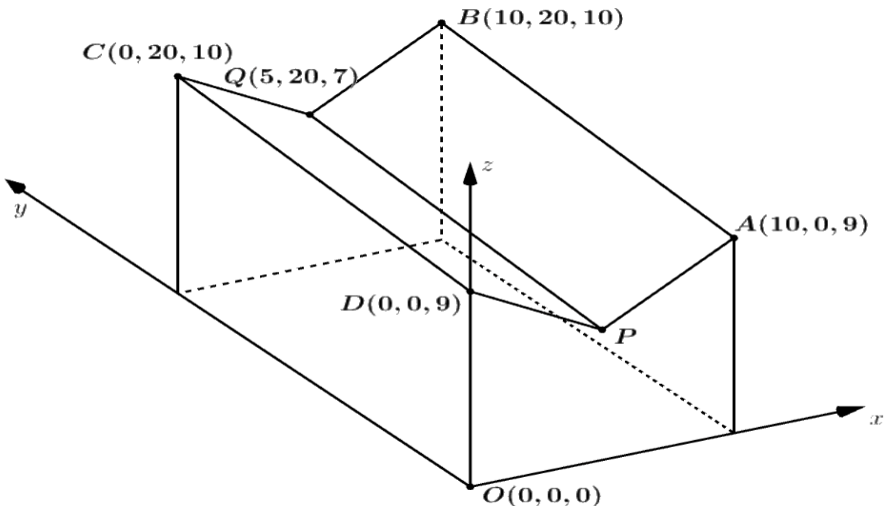


Câu 3: Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A,B,C,D, như hình vẽ.

Bước đầu chúng được lấy " thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25\,\text{m}$, $AD=15\,\text{m}$, $BC=18\,\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng sao cho bốn điểm A,B',C',D' đồng phẳng. Giá trị của a là



Câu 4: Hình bên dưới minh họa hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất. Biết rằng tọa độ của điểm $P(a;b;c)$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

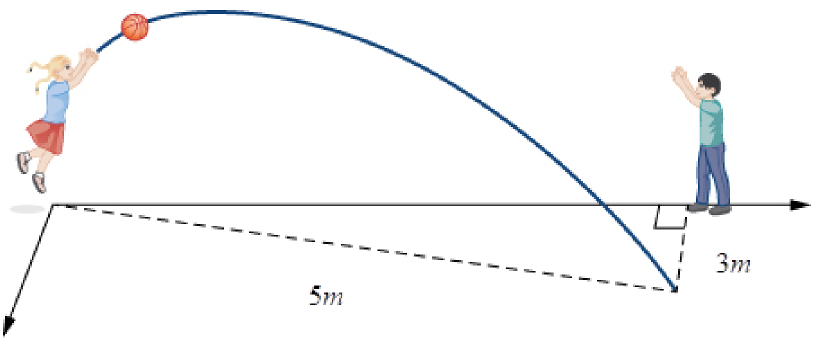


Câu 5: Trên thiết kế đồ họa 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng $(P): x+2y+3z+2=0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng (P). Biết rằng phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax+2y+bz+c=0$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Câu 6: Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng, một người chơi đặt điểm ngắm tại điểm O là giao điểm của AC và BD trong căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB=50(m), AD=35(m), AA'=10(m)$. Người chơi có nhiệm vụ từ điểm ngắm đã đặt bắn trúng một mục tiêu di động trên mặt phẳng $(CB'D')$ Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đó đến mục tiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Câu 7: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomet) vào một trận địa pháo phòng không, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Trong tập luyện, một vùng mặt phẳng trong tầm hoạt động của pháo được giữ bởi 3 điểm pháo $A(3;0;0)$; $B(0;1,5;0)$; $C(0;0;-1,5)$. Một mục tiêu bay từ $M(5;2;4)$ tới $N(1;0;-2)$. Khoảng cách từ điểm pháo A tới vị trí va chạm của mục tiêu khi tới mặt phẳng là bao nhiêu?

Câu 8: Hai đứa trẻ đang chơi với một quả bóng. Bé gái ném quả bóng cho bé trai. Quả bóng di chuyển trong không khí, uốn cong $3m$ về bên phải và rơi cách bé gái $5m$ (xem hình sau).

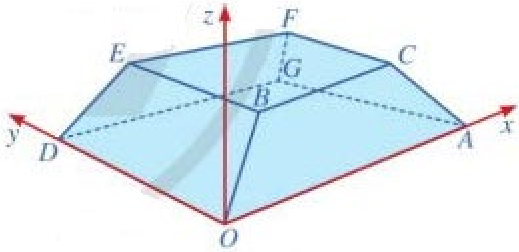


Biết mặt phẳng chứa quỹ đạo của quả bóng vuông góc với mặt đất và phương trình tổng quát của nó có dạng $ax+by+c=0$. Tính $a+b+c$?

Câu 9: Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường $(P),(Q),(R)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): x+2y-2z+1=0$, $(Q): 2x+y+2z-3=0$, $(R): 2x+4y-4z-22=0$.

Tính độ rộng bức tường (Q) của tòa nhà là

Câu 10: Một nhà hàng được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100m$, chiều rộng $OD=60m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$.



Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là

Câu 11: Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và có tâm của mặt đáy trên lần lợt là $A(3;2;3), B(6;3;3), C(9;4;2), D\left(6;0;\frac{5}{2}\right)$.

Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

CHƯƠNG V

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I LÝ THUYẾT.

I. VEC-TƠ PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẲNG.

1. Định nghĩa.

Cho mặt phẳng (α).

- Nếu vec-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là **vec-tơ pháp tuyến** của (α).
- Nếu hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là **cặp vec-tơ chỉ phương** của (α).

2. Chú ý.

- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vec-tơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng đó.
- Nếu $\vec{n}$ là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

II. XÁC ĐỊNH VEC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG KHI BIẾT MỘT CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Định lý.

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vec-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ làm cặp vec-tơ chỉ phương thì (α) nhận vec-tơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

2. Chú ý.

a) Vec-tơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là *tích có hướng của hai vec-tơ* $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Tích có hướng của hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

b) Biểu thức $a_1b_2-a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2$ và $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}=a_3b_1-a_1b_3$. Như vậy: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$.

c) Hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa.

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng.

2. Nhận xét.

Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó,

Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

$N(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

3. Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng cơ bản

a) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vec-tơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

b) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vec-tơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp vec-tơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$, ta thực hiện như sau

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

c) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau

Tìm cặp vec-tơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

d) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ là

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

a) Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó: $(\alpha_1)\parallel(\alpha_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$.

Chú ý.

- $(\alpha_1)\equiv(\alpha_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1=kD_2\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$.
- (α_1) cắt $(\alpha_2)\Leftrightarrow\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

b) Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó

$$(\alpha_1)\perp(\alpha_2)\Leftrightarrow\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức

$$\mathrm{d}(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét) vào một ngôi nhà 1 tầng, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz. Biết rằng các vị trí $A(3;4;33), D(9;8;35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Hãy cho biết độ dày của mái nhà đó là bao nhiêu decimét?

Lời giải

Do mặt dưới của mái nhà thuộc mặt phẳng vuông góc với trục Oz và đi qua điểm $A(3;4;33)$ nên phương trình mặt phẳng chứa mặt dưới của mái nhà là:

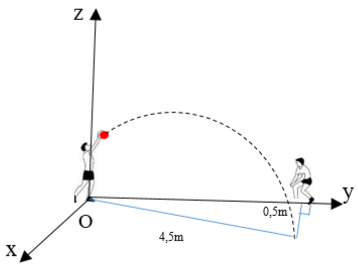
$$z-33=0.$$

Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng chứa mặt dưới của mái nhà bằng:

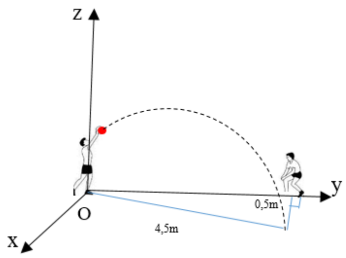
$$\frac{|35-33|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=2.$$

Vậy độ dày của mái nhà là 2 dm.

Câu 2: Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Nam và An đang tập chuyền bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An $0,5m$ và cách Nam $4,5m$. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cx+d=0$ và vuông góc với mặt đất. Khi đó giá trị của $a+b+c+d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là điểm mà quả bóng chạm đất.

Khi đó $x_M = 0,5$, $y_M = \sqrt{4,5^2 - 0,5^2} = 2\sqrt{5}$

Vì $(\alpha) \perp (0xy)$ nên (α) có véc tơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$.

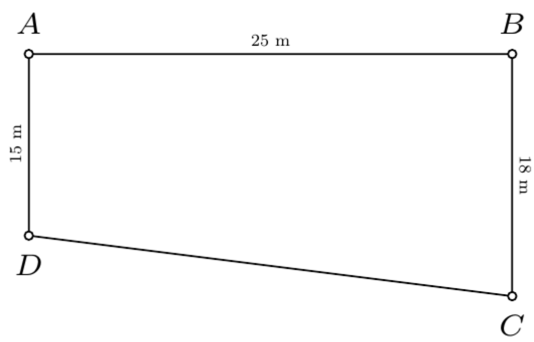
Mà (α) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{OM} = \left(0,5;2\sqrt{5};0\right)$

Khi đó véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\vec{k}, \overrightarrow{OM}\right] = \left(-2\sqrt{5};0,5;0\right)$.

$\Rightarrow (\alpha): -2\sqrt{5}x + 0,5y = 0$.

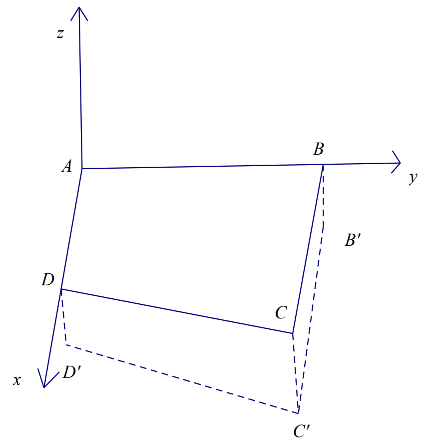
$\Rightarrow a = -2\sqrt{5}; b = 0,5; c = 0; d = 0 \Rightarrow a+b+c+d \approx -3,97$.

Câu 3: Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A,B,C,D, như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy " thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25\,\text{m}$, $AD = 15\,\text{m}$, $BC = 18\,\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng sao cho bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng. Giá trị của a là

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$.

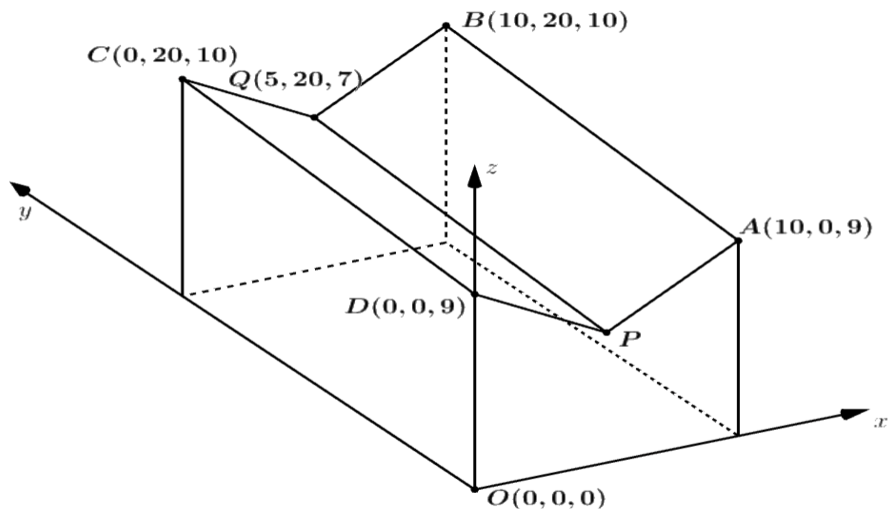
Theo bài ra có bốn điểm A; B'; C'; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D'): x + y + 250z = 0$.

Do $C'(1800;\ 2500;-a) \in (AB'D')$ nên có: $1800 + 2500 - 250a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$.

Vậy $a = 17,2\,\text{cm}$.

Câu 4: Hình bên dưới minh họa hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất. Biết rằng tọa độ của điểm $P(a;b;c)$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Vì các bức tường của nhà kho được xây vuông góc với mặt đất nên với hệ tọa độ trên ta có $P(x;\ 0;\ z)$.

Mặt phẳng (ABQ) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0;\ 20;\ 1)$ và $\overrightarrow{BQ} = (-5;\ 0;\ -3)$ nên (ABQ) có một vectơ pháp tuyến là: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BQ}\right] = (-60;\ -5;\ 100)$. Mà mặt phẳng (ABQ) đi qua điểm $A(10;\ 0;\ 9)$ nên có phương trình là:

$$-60(x-10)-5(y-0)+100(z-9)=0 \Leftrightarrow -60x-5y+100z-300=0.$$

Mặt phẳng (CDQ) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CD}=(0;\,-20;-1)$ và $\overrightarrow{CQ}=(5;\,0;\,-3)$ nên (CDQ) có một vectơ pháp tuyến là: $\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CQ}\right]=(60;\,-5;\,100)$. Mà mặt phẳng (CDQ) đi qua điểm $D(0;\,0;\,9)$ nên có phương trình là:

$$60(x-0)-5(y-0)+100(z-9)=0 \Leftrightarrow 60x-5y+100z-900=0.$$

Vì điểm P thuộc mặt phẳng (ABQ) nên tọa độ của điểm P thỏa mãn:

$$-60x-5.0+100z-300=0 \Leftrightarrow -60x+100z=300\ (1)$$

Vì điểm P thuộc mặt phẳng (CDQ) nên tọa độ của điểm P thỏa mãn:

$$60x-5.0+100z-900=0 \Leftrightarrow 60x+100z=900\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-60x+100z=300\\ 60x+100z=900\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ z=6\end{cases}$.

Khi đó $P(5;\,0;\,6)$. Vậy $a+b+c=5+0+6=11$.

Câu 5: Trên thiết kế đồ họa 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng $(P): x+2y+3z+2=0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng (P). Biết rằng phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax+2y+bz+c=0$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vì $(Q)\,//\,(P)$ nên (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;\,2;\,3)$.

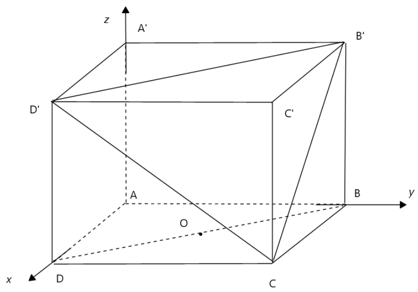
Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;\,2;\,3)$ là:

$$1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0.$$

Khi đó $a=1,\ b=3,\ c=-14$. Vậy $a+b+c=-10$.

Câu 6: Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng, một người chơi đặt điểm ngắm tại điểm O là giao điểm của AC và BD trong căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB=50(m), AD=35(m), AA'=10(m)$. Người chơi có nhiệm vụ từ điểm ngắm đã đặt bắn trúng một mục tiêu di động trên mặt phẳng $(CB'D')$ Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đó đến mục tiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $B'(50;0;10), D'(0;35;10), C(50;35,0)$ và $O(25;17,5;0)$

Mặt phẳng $(CB'D')$ nhận $\overrightarrow{B'D'}=(-50;35;0)$ và $\overrightarrow{CB'}=(0;-35;10)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên $(C'BD)$ nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{C'B}\right]=(350;500;1750)$ làm vectơ pháp tuyến

Mặt khác, $(CB'D')$ qua $D'(0;35;10)$ nên có phương trình $35x+50y+175z-3500=0$

Do mục tiêu di động trên mặt phẳng $(C'BD)$ nên khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đến mục tiêu chính là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng $(C'BD)$

Ta có $d\left(O;(C'BD)\right)=\dfrac{|35.25+50.17,5+75.0-3500|}{\sqrt{35^2+50^2+175^2}}\approx 9,44(m)$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đến mục tiêu là khoảng $9,44$ mét.

Câu 7: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomet) vào một trận địa pháo phòng không, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Trong tập luyện, một vùng mặt phẳng trong tầm hoạt động của pháo được giữ bởi 3 điểm pháo $A(3;0;0)$; $B(0;1,5;0)$; $C(0;0;-1,5)$. Một mục tiêu bay từ $M(5;2;4)$ tới $N(1;0;-2)$. Khoảng cách từ điểm pháo A tới vị trí va chạm của mục tiêu khi tới mặt phẳng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm pháo $A(3;0;0)$; $B(0;1,5;0)$; $C(0;0;-1,5)$ nên có phương trình là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1,5}+\dfrac{z}{-1,5}=1 \Leftrightarrow x+2y-2z-3=0$.

Giả sử điểm $G(x_G;y_G;z_G)$ là vị trí khi mục tiêu bay tới mặt phẳng (P) để tới vị trí N nên $G\in(P)$.

Do $\overrightarrow{MG},\overrightarrow{MN}$ là 2 vecto cùng hướng nên tồn tại số thực $t>0$ sao cho $\overrightarrow{MG}=t\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MG}=(x_G-5;y_G-2;z_G-4);\overrightarrow{MN}=(-4;-2;-6)$

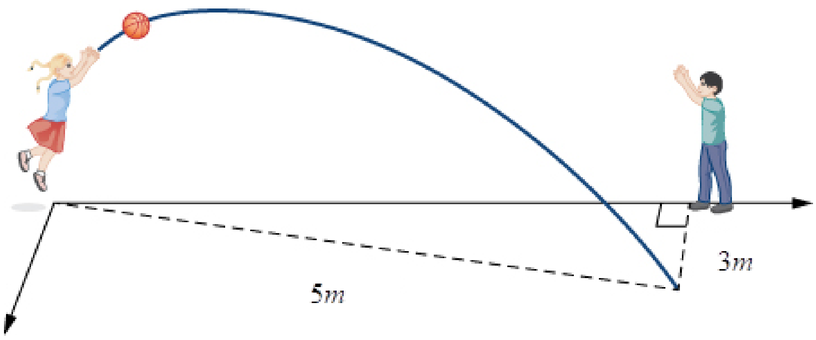
Nên $\begin{cases} x_G - 5 = -4t \\ y_G - 2 = -2t \\ z_G - 4 = -6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 5 - 4t \\ y_G = 2 - 2t \\ z_G = 4 - 6t \end{cases}$

Vì $G \in (P) \Leftrightarrow 5 - 4t + 2(2 - t) - 2(4 - 6t) = 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow G(3;1;1)$.

$\overrightarrow{AG} = (0;1;1) \Rightarrow AG = \sqrt{2} = 1,41$.

Vậy khoảng cách từ vị trí A đến điểm va chạm là $1,41$ km.

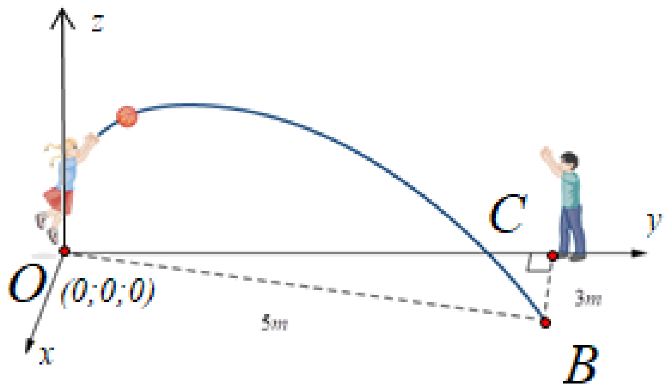
Câu 8: Hai đứa trẻ đang chơi với một quả bóng. Bé gái ném quả bóng cho bé trai. Quả bóng di chuyển trong không khí, uốn cong $3m$ về bên phải và rơi cách bé gái $5m$ (xem hình sau).



Biết mặt phẳng chứa quỹ đạo của quả bóng vuông góc với mặt đất và phương trình tổng quát của nó có dạng $ax + by + c = 0$. Tính $a + b + c$?

Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:



Ta có $OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = 4$ suy ra $B(3;4;0)$.

Mặt phẳng chứa quỹ đạo đi qua $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{k}(0;0;1)$, $\overrightarrow{OB}(3;4;0)$ làm vec tơ chỉ phương.

Suy ra vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{k};\overrightarrow{OB}\right] = (-4;3;0)$

Vậy phương trình mặt phẳng chứa quỹ đạo của quả bóng là: $-4(x-0) + 3(y-0) + 0(z-0) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 3y = 0$. $a + b + c = 1$.

Câu 9: Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường $(P),(Q),(R)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + 2z - 3 = 0$, $(R): 2x + 4y - 4z - 22 = 0$.

Tính độ rộng bức tường (Q) của tòa nhà là

Lời giải

Ta có

$(P): x+2y-2z+1=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;2;-2)$

$(Q): 2x+y+2z-3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(2;1;2)$

$(R): 2x+4y-4z-22=0$. có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_R=(2;4;-4)$

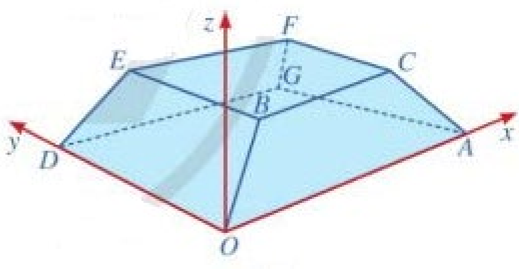
Ta có $\vec{n}_R=2\vec{n}_P; \frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{1}{-22}$ nên hai bức tường (P) và (R) song song nhau

$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=1.2+2.1+(-2).2=0\Rightarrow \vec{n}_P\perp\vec{n}_Q$ nên bức tường (Q) vuông góc với hai bức tường (P) và (R).

Chọn điểm $M(-1;0;0)\in(P)$ Do hai bức tường (P) và (R) song song nhau nên:

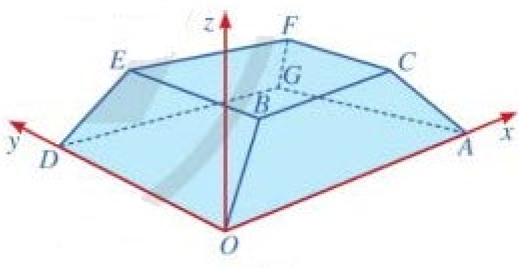
$d((P),(R))=d(M,(R))=\frac{|2.(-1)+4.0-4.0-22|}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{24}{6}=4m$ Vậy độ rộng bức tường (Q) của tòa nhà là $4m$.

Câu 10: Một nhà hàng được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100m$, chiều rộng $OD=60m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$.



Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là.......

Lời giải



Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$. $\overrightarrow{OD}=(0;60;0),\overrightarrow{OB}=(10;10;8)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right]=(480;0;-600)$

Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(4;0;-5)$ là: $4x-5z=0$

Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là:

$$d\left(G,(OBED)\right)=\frac{|4.100-5.0|}{\sqrt{16+25}}=\frac{400\sqrt{41}}{41}\approx 62,5m$$

Câu 11: Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và có tâm của mặt đáy trên lần lượt là $A(3;2;3),B(6;3;3),C(9;4;2),D\left(6;0;\frac{5}{2}\right)$.

Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải

Ta có

$\overrightarrow{AB}=(3;1;0);\overrightarrow{AC}=(6;2;1)$

Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;3;0)$ nên phương trình $(ABC): x-3y+3=0$

.

Vậy khoảng cách cần tìm là $d\left(D,(ABC)\right)=\dfrac{|1.6+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$.

CHƯƠNG V

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I LÝ THUYẾT.

I. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

1. Định nghĩa:

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng (Δ).

2. Nhận xét:

a) Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta \Rightarrow k.\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của đường thẳng Δ. Vậy đường thẳng (Δ) có vô số VTCP và các VTCP này cùng phương với nhau.

b) Nếu Δ đi qua hai điểm A và B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của đường thẳng Δ.

c) Nếu Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q) thì $\overrightarrow{\mathrm{u}_\Delta} = \left[\overrightarrow{\mathrm{n}_\mathrm{P}};\overrightarrow{\mathrm{n}_\mathrm{Q}}\right]$ - là một VTCP của đường thẳng Δ (với $\overrightarrow{\mathrm{n}_\mathrm{P}};\overrightarrow{\mathrm{n}_\mathrm{Q}}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng $(\mathrm{P});(\mathrm{Q})$).

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

1. Định nghĩa:

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

b) Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-x_0}{u_1} = \dfrac{y-y_0}{u_2} = \dfrac{z-z_0}{u_3}$ (với $u_1u_2u_3 \neq 0$).

2. Chú ý:

Cho đường thẳng Δ có phương trình là: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ $(\mathrm{t} \in \mathbb{R})$

$\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ - là một VTCP của Δ.

$M \in \Delta \Leftrightarrow M(x_0+u_1t; y_0+u_2t; z_0+u_3t)$

III. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG; GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐƯỜNG THẲNG.

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α), $0^o \le \varphi \le 90^o$, ta có:

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{n};\vec{u}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}.\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{u}\right|}$$

2. Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và đường thẳng Δ' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}=(u_1';u_2';u_3')$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ đường thẳng Δ', $0^o \le \varphi \le 90^o$, ta có:

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{u};\overrightarrow{u'}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\overrightarrow{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\overrightarrow{u'}\right|}$$

IV. KHOẢNG CÁCH.

1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$,cho điểm M và đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$.Khoảng cách giữa M và Δ là:

$$d(M;\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song: bằng khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và đường thẳng Δ' đi qua điểm $M_0'(x_0';y_0';z_0')$, có VTCP $\overrightarrow{u'}=(u_1';u_2';u_3')$

Giả sử $\Delta//\Delta'$, khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' là:

$$d(\Delta;\Delta')=d(M_0;\Delta')=d(M_0';\Delta)$$

3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và đường thẳng Δ' đi qua điểm $M_0'(x_0';y_0';z_0')$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}=(u_1';u_2';u_3')$

Giả sử Δ và Δ' là hai đường thẳng chéo nhau, khi đó khoảng cách giữa chúng là:

$$d(\Delta;\Delta')=\frac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM_0}\right|}{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{u'}\right]\right|}$$

V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG; VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng (Δ) và (Δ') biết rằng:

Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3) \Rightarrow \Delta:\begin{cases} x=x_0+u_1t \\ y=y_0+u_2t \\ z=z_0+u_3t \end{cases}$

Δ' đi qua điểm $M'_0(x'_0;y'_0;z'_0)$ và có VTCP $\vec{u'}=(u'_1;u'_2;u'_3) \Rightarrow \Delta':\begin{cases} x=x'_0+u'_1t' \\ y=y'_0+u'_2t' \\ z=z'_0+u'_3t' \end{cases}$

<u>Cách 1</u>:

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_0+u_1t=x'_0+u'_1t' \\ y_0+u_2t=y'_0+u'_2t' \\ z_0+u_3t=z'_0+u'_3t' \end{cases}$ (ẩn t,t') (1).

a) $\Delta//\Delta' \Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm và hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{u'}$ cùng phương.

b) Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm và hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{u'}$ không cùng phương.

c) Δ và Δ' trùng nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có vô số nghiệm.

d) Δ và Δ' cắt nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có đúng một nghiệm.

<u>Cách 2</u>:

a) $\Delta//\Delta' \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{u'}$ cùng phương và $M_0 \notin \Delta'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\vec{u'}\right]=\vec{0} \\ \left[\vec{u},\overrightarrow{M_0M'_0}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$

b) Δ và Δ' trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{u'}$ cùng phương và $M_0 \in \Delta'$ $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right]=\left[\vec{u},\overrightarrow{M_0M'_0}\right]=\vec{0}$.

c) Δ và Δ' cắt nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{u},\vec{u'}$ không cùng phương và ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{u'}$, $\overrightarrow{M_0M'_0}$ đồng phẳng.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\vec{u'}\right]\neq\vec{0} \\ \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}=0 \end{cases}$$

d) Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{u'}$ không cùng phương và $\vec{u}$, $\vec{u'}$, $\overrightarrow{M_0M'_0}$ không đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\neq 0.$$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x=x_0+u_1t \\ y=y_0+u_2t \\ z=z_0+u_3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Gọi $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT của mặt phẳng (α) và $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ là VTCP của đường thẳng Δ.

<u>Cách 1</u>:

Xét phương trình: $A(x_0+u_1t)+B(y_0+u_2t)+C(z_0+u_3t)=0$ (t là ẩn) (2)

a) Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì Δ và (α) không có điểm chung $\Leftrightarrow \Delta//(\alpha)$.

b) Nếu phương trình (2) có đúng một nghiệm $t=t_0$ thì đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α) tại điểm $N(x_0+u_1t_0;y_0+u_2t_0;z_0+u_3t_0)$.

c) Nếu phương trình (2) có vô số nghiệm thì Δ thuộc $(\alpha) \Leftrightarrow \Delta//(\alpha)$.

<u>Cách 2</u>:

a) Δ cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u}\neq 0$

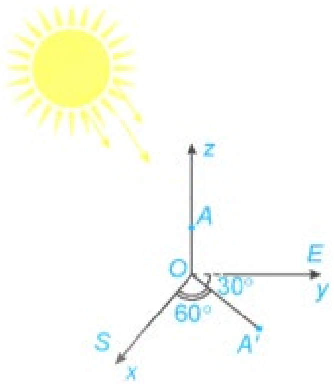
b) $\Delta//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\ M\in\Delta \Rightarrow M\notin(\alpha)\end{cases}$

c) Δ thuộc $(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\ M\in\Delta \Rightarrow M\in(\alpha)\end{cases}$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm trên mặt phẳng (Oxy). Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x-2y+5=0$ và $(Q): x-2y-3z+20=0$. Hỏi chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà lên nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu?

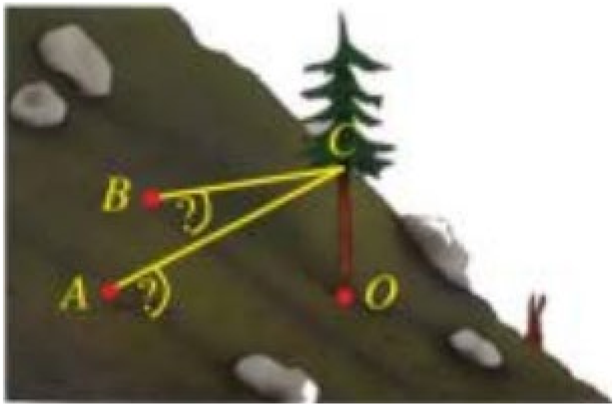
Câu 2: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6 m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại ví trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời, bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột 3 m về hướng $S60^o E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60^o tạo với hướng đông góc 30^o) (hình bên dưới). Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ là O, tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Tính góc tạo bởi đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét với mặt đất.



Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(11;4;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;-4;0)$ với tốc độ là $5\,m/s$ (Đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét); giả sử sau $t(s)$ kể từ lúc xuất phát $(t\ge 0)$, cabin đến điểm M; Một người đứng tại điểm O quan sát cabin chạy trên cáp treo, sau thời gian bao nhiêu thì khoảng cách giữa người quan sát và cabin gần nhau nhất?

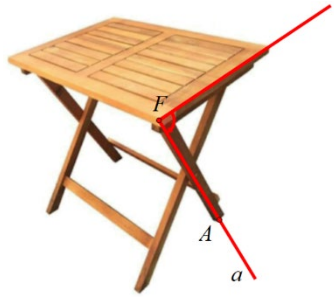
Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki – lô - mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64;128;64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không quá 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1458=0$ sao cho hai máy bay M,N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M,N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 5: Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc O (gốc cây thông) và A,B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0;0;0)$, $A(5;-3;1)$, $B(-3;-4;2)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0;0;5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



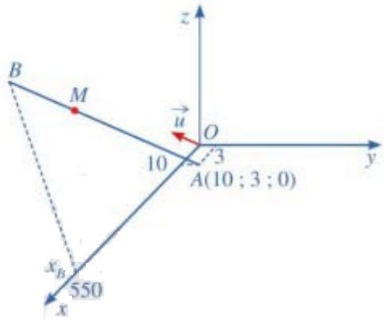
Câu 6: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$. Biết tọa độ du khách khi ở độ cao 12 mét là $(a;b;c)$. Tính $P=5a+b+c$.

Câu 7: Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ Oxyz. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng $a:\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{4}$ cắt mặt bàn $(P): x+y-2z+6=0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA=40\sqrt{3}\,cm$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là:



Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một Cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ kết thúc tại điểm B có hoành độ $x_B=550$ chuyển động đều theo đường cáp có Vecto chỉ phương là $\vec{u}=(2;-2;1)$ (Hình bên dưới). Tính độ dài đường cáp AB?

(Nguồn: https://shutterstock.com)

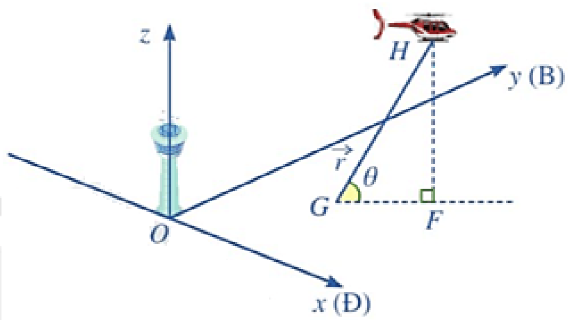


Câu 9: Trong hệ trục tọa độ Oxyz, sàn nhà của một công trình thuộc mặt phẳng Oxy, tay vịn của lan can cầu thang là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(5;1;9)$ và $B(2;1;12)$. Góc tạo bởi tay vịn của lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng bao nhiêu độ?

Câu 10: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 6 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 2 m; 3 m; 4 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

Câu 11: Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$. Sàn nhà của công trình thuộc mặt phẳng (Oxz), đường ống thoát nước thẳng và đi qua hai điểm $A(1;2;3), B(-1;4;-2)$. Tính góc tạo bởi đường ống thoát nước và mặt sàn.

Câu 12: *Hình bên dưới* minh hoạ đường bay của một chiếc trực thăng H cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc toạ độ O là chân tháp điều khiển của sân bay; trục Ox là hướng đông (Đ), trục Oy là hướng bắc (B) và trục Oz là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét.



Trực thăng cất cánh từ điểm G. Vecto $\vec{r}$ chỉ vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh $(t\geq 0)$ có toạ độ là: $\vec{r}=(1+t;0,5+2t;2t)$.

a) Tìm góc θ mà đường bay tạo với phương ngang.

b) Lập phương trình đường thẳng GF, trong đó F là hình chiếu của điểm H lên mặt phẳng (Oxy).

c) Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km. Tìm toạ độ điểm mà máy bay trực thăng bắt đầu đi vào đám mây.

d) Giả sử một đỉnh núi nằm ở điểm $M(5;4,5;3)$. Tìm giá trị của t khi HM vuông góc với đường bay GH. Tìm khoảng cách từ máy bay trực thăng đến đỉnh núi tại thời điểm đó.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trị trí $A(3,5;-2;0,4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3,5;5,5;0)$ trên đường băng EG (Hình 37).

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

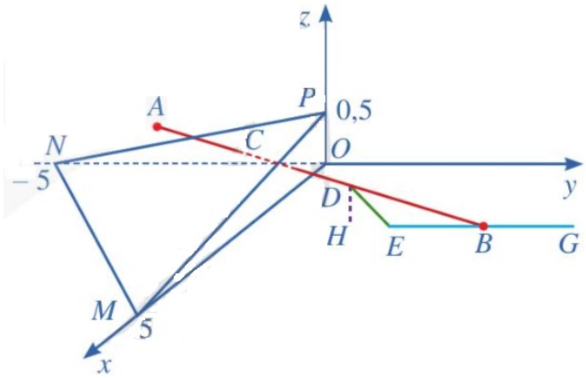
b) Hãy cho biết góc trượt (góc giữa đường thẳng bay AB và mặt phẳng nằm ngang (Oxy)) có nằm trong phạm vi cho phép từ $2,5°$ đến $3,5°$ hay không?

c) Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5;0;0)$, $N(0;-5;0)$, $P(0;0;0,5)$. Tìm tọa độ của điểm C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.

d) Tìm tọa độ của điểm D trên đoạn thẳng AB là vị trí mà máy bay ở độ cao $120\,\text{m}$.

e) Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu $E(3,5;6,5;0)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Hỏi sau khi ra khỏi đám mây, người phi công có đạt được quy định an toàn đó hay không? Biết rằng tầm nhìn của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m

(*Nguồn: R.Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage, 2014*)



CHƯƠNG V

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I LÝ THUYẾT.

I. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯƠNG THẲNG.

1. Định nghĩa:

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng (Δ).

2. Nhận xét:

a) Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta \Rightarrow k.\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của đường thẳng Δ. Vậy đường thẳng (Δ) có vô số VTCP và các VTCP này cùng phương với nhau.

b) Nếu Δ đi qua hai điểm A và B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của đường thẳng Δ.

c) Nếu Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q) thì $\overrightarrow{\mathrm{u}_\Delta} = \left[\overrightarrow{\mathrm{n}_\mathrm{P}};\overrightarrow{\mathrm{n}_\mathrm{Q}}\right]$ - là một VTCP của đường thẳng Δ (với $\overrightarrow{\mathrm{n}_\mathrm{P}};\overrightarrow{\mathrm{n}_\mathrm{Q}}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng $(\mathrm{P});(\mathrm{Q})$).

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

1. Định nghĩa:

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1;u_2;u_3)$

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

b) Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-x_0}{u_1} = \dfrac{y-y_0}{u_2} = \dfrac{z-z_0}{u_3}$ (với $u_1u_2u_3 \neq 0$).

2. Chú ý:

Cho đường thẳng Δ có phương trình là: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} (\mathrm{t} \in \mathbb{R})$

$\vec{u} = (u_1;u_2;u_3)$ - là một VTCP của Δ.

$M \in \Delta \Leftrightarrow M(x_0 + u_1 t; y_0 + u_2 t; z_0 + u_3 t)$

III. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG; GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐƯỜNG THẲNG.

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α), $0^{o}\le\varphi\le 90^{o}$, ta có:

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{n};\vec{u}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}.\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{u}\right|}$$

2. *Góc giữa hai đường thẳng*

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và đường thẳng Δ' có vectơ chỉ phương $\vec{u'}=(u_1';u_2';u_3')$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ đường thẳng Δ', $0^{o}\le\varphi\le 90^{o}$, ta có:

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{u};\vec{u'}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u'}\right|}$$

IV. KHOẢNG CÁCH.

1. *Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng*

Trong không gian $Oxyz$,cho điểm M và đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$.Khoảng cách giữa M và Δ là:

$$d(M;\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song: bằng khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và đường thẳng Δ' đi qua điểm $M_0'(x_0';y_0';z_0')$, có VTCP $\vec{u'}=(u_1';u_2';u_3')$

Giả sử $\Delta//\Delta'$, khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' là:

$$d(\Delta;\Delta')=d(M_0;\Delta')=d(M_0';\Delta)$$

3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và đường thẳng Δ' đi qua điểm $M_0'(x_0';y_0';z_0')$, có vectơ chỉ phương $\vec{u'}=(u_1';u_2';u_3')$

Giả sử Δ và Δ' là hai đường thẳng chéo nhau, khi đó khoảng cách giữa chúng là:

$$d(\Delta;\Delta')=\frac{\left|\left[\vec{u};\vec{u'}\right].\overrightarrow{MM_0}\right|}{\left|\left[\vec{u};\vec{u'}\right]\right|}$$

V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG; VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.

1. *Vị trí tương đối của đường thẳng và đường thẳng*

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng (Δ) và (Δ') biết rằng:

Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=x_0+u_1t \\ y=y_0+u_2t \\ z=z_0+u_3t \end{cases}$

Δ' đi qua điểm $M_0'(x_0';y_0';z_0')$ và có VTCP $\overrightarrow{u'}=(u_1';u_2';u_3') \Rightarrow \Delta': \begin{cases} x=x_0'+u_1't' \\ y=y_0'+u_2't' \\ z=z_0'+u_3't' \end{cases}$

Cách 1:

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_0+u_1t=x_0'+u_1't' \\ y_0+u_2t=y_0'+u_2't' \\ z_0+u_3t=z_0'+u_3't' \end{cases}$ (ẩn t,t') (1).

a) $\Delta//\Delta' \Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm và hai vectơ $\vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$ cùng phương.

b) Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm và hai vectơ $\vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$ không cùng phương.

c) Δ và Δ' trùng nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có vô số nghiệm.

d) Δ và Δ' cắt nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có đúng một nghiệm.

Cách 2:

a) $\Delta//\Delta' \Leftrightarrow \vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$ cùng phương và $M_0 \notin \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=\vec{0} \\ \left[\vec{u},\overrightarrow{M_0M_0'}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$

b) Δ và Δ' trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$ cùng phương và $M_0 \in \Delta' \Leftrightarrow \left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=\left[\vec{u},\overrightarrow{M_0M_0'}\right]=\vec{0}$.

c) Δ và Δ' cắt nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{u},\overrightarrow{u'}$ không cùng phương và ba vectơ $\vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{M_0M_0'}$ đồng phẳng.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\neq\vec{0} \\ \left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}=0 \end{cases}$$

d) Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$ không cùng phương và $\vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{M_0M_0'}$ không đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\neq 0.$$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x=x_0+u_1t \\ y=y_0+u_2t \\ z=z_0+u_3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Gọi $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT của mặt phẳng (α) và $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ là VTCP của đường thẳng Δ .

Cách 1:

Xét phương trình: $A(x_0+u_1t)+B(y_0+u_2t)+C(z_0+u_3t)=0$ (t là ẩn) (2)

a) Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì Δ và (α) không có điểm chung $\Leftrightarrow \Delta//(\alpha)$.

b) Nếu phương trình (2) có đúng một nghiệm $t=t_0$ thì đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α) tại điểm $N(x_0+u_1t_0;y_0+u_2t_0;z_0+u_3t_0)$.

c) Nếu phương trình (2) có vô số nghiệm thì Δ thuộc $(\alpha) \Leftrightarrow \Delta // (\alpha)$.

Cách 2:

a) Δ cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u} \neq 0$

b) $\Delta // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ M \in \Delta \Rightarrow M \notin (\alpha) \end{cases}$

c) Δ thuộc $(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ M \in \Delta \Rightarrow M \in (\alpha) \end{cases}$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm trên mặt phẳng (Oxy). Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x - 2y + 5 = 0$ và $(Q): x - 2y - 3z + 20 = 0$. Hỏi chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà lên nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu?

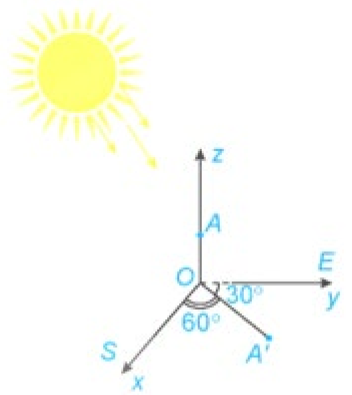
Lời giải

Những điểm thuộc đường nóc nhà có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x - 2y - 3z + 20 = 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất chọn $x = -5 \Rightarrow y = 0$. Thay vào phương trình còn lại ta được $z = 5$.

Vậy điểm $A(-5;0;5)$ là một điểm thuộc đường nóc nhà. Khi đó chiều cao cần tìm của của ngôi nhà là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Oxy) và bằng 5 mét.

Câu 2: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6 m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại ví trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời, bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột 3 m về hướng $S60^o E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60^o tạo với hướng đông góc 30^o) (hình bên dưới). Chọn hệ trục Oxyz có gốc tọa độ là O, tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Tính góc tạo bởi đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét với mặt đất.



Lời giải

Gọi A (đỉnh cột) và A' (bóng của đỉnh cột).

Ta có: $A(0;0;6)$.

Hoành độ của điểm A' là $x=3.\cos 60^o=\dfrac{3}{2}$.

Tung độ của điểm A' là $y=3.\cos 30^o=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $A'\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua $A(0;0;6)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{AA'}=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2};-6\right)=\dfrac{3}{2}\left(1;\sqrt{3};-4\right)$.

Phương trình đường thẳng tia nắng có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(1;\sqrt{3};-4\right)$.

Mặt đất là mặt phẳng (Oxy) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$.

Gọi α là góc giữa phương trình đường thẳng tia nắng với mặt phẳng (Oxy).

Ta có: $\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{u};\vec{n}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1+3+16}.\sqrt{1}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$\Leftrightarrow \alpha\approx 63^\circ$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(11;4;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;-4;0)$ với tốc độ là $5\,m/s$ (Đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét); giả sử sau $t(s)$ kể từ lúc xuất phát $(t\geq 0)$, cabin đến điểm M; Một người đứng tại điểm O quan sát cabin chạy trên cáp treo, sau thời gian bao nhiêu thì khoảng cách giữa người quan sát và cabin gần nhau nhất?

Lời giải

Do tốc độ của cabin là $5\,m/s$ nên độ dài $AM=\left|\overrightarrow{AM}\right|=5t\,(m)$; Do hai véc tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}$ cùng phương nên $\overrightarrow{AM}=k.\vec{u}$ với k là số thực dương nào đó. Suy ra: $\left|\overrightarrow{AM}\right|=k\left|\vec{u}\right|=k\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}=5k$.

Suy ra $t=k$, vì thế $\overrightarrow{AM}=k.\vec{u}=t\vec{u}=(-3t;-4t;0)$. Giả sử điểm $M(x;y;z)$ nên $\overrightarrow{AM}=(x-11;y-4;z)$

Ta có $\begin{cases}x-11=-3t\\y-4=-4t\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=11-3t\\y=4-4t\\z=0\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$. Hay $M(11-3t;4-4t;0)$

Khoảng cách giữa người quan sát và cabin bằng độ dài đoạn

$$OM=\sqrt{(11-3t)^2+(4-4t)^2+0^2}=\sqrt{25t^2-98t+137}$$

Khoảng cách gần nhất khi tam thức bậc hai $25t^2-98t+137$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi $t=\frac{49}{25}=1{,}96$ (s)

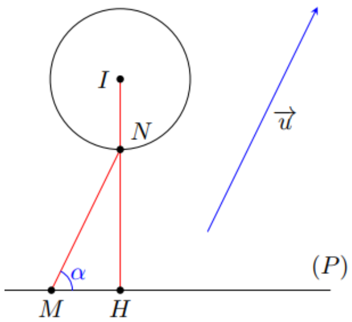
Đáp số: $t=1{,}96$ (s).

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki – lô - mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64;128;64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không quá 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1458=0$ sao cho hai máy bay M,N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M,N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa nên N thuộc khối cầu (S) có tâm $I(-64;128;64)$, bán kính $R=500$.

Ta có $d(I,(P))=\frac{|x_I-2y_I+2z_I-1458|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=550>R$ nên (P) và (S) không giao nhau.



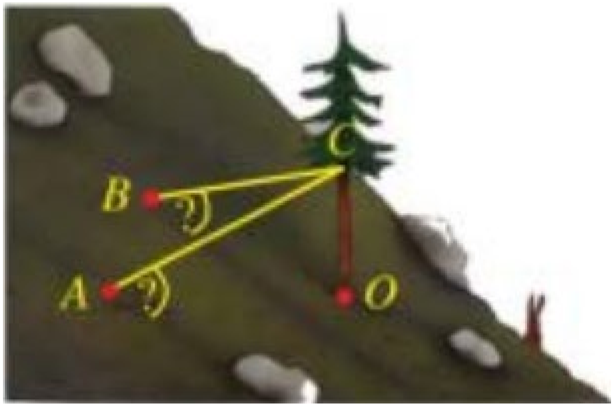
Gọi α là góc tạo bởi MN và mặt phẳng (P).

Gọi H là hình chiếu của N lên mặt phẳng (P).

Mặt khác $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u}=(1;1;1)$ và $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$ suy ra $\sin\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_P}|}{|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{n_P}|}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Khi đó $MN=\frac{NH}{\sin\alpha}\geq\frac{NH_{\min}}{\sin\alpha}=\frac{d(I,(P))-R}{\sin\alpha}=\frac{550-500}{\frac{1}{3\sqrt{3}}}=150\sqrt{3}\approx 260$

Câu 5: Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0;0;0)$, $A(5;-3;1)$, $B(-3;-4;2)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0;0;5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA}=(5;-3;1)$, $\overrightarrow{OB}=(-3;-4;2)$ nên $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & 1\\-4 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}5 & -3\\-3 & -4\end{vmatrix}\right)$.

$=(-2;-13;-11)$

Suy ra vectơ $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(-2;-13;-11)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (OAB).

Mặt khác $\overrightarrow{CA}=(5;-3;-4)$ nên ta có

$$\sin\left(CA,(OAB)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{CA},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CA}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{|5.(-2)+(-3).(-13)+(-4).(-11)|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+(-4)^2}.\sqrt{(-2)^2+(-13)^2+(-11)^2}}=\frac{73}{70\sqrt{3}}$$

Suy ra $\left(CA,(OAB)\right)\approx 37^\circ$. Vậy góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi khoảng 37°.

Câu 6: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$. Biết tọa độ du khách khi ở độ cao 12 mét là $(a;b;c)$. Tính $P=5a+b+c$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(18;25;-5)$.

Phương trình tham số chứa đường zipline là $d:\begin{cases}x=3+18t\\y=2,5+25t\\z=15-5t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$.

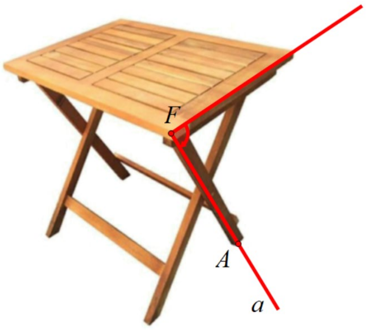
Gọi $C(x_C;y_C;12)$ là tọa độ của du khách đang ở độ cao 12 mét.

Ta có $C\in d$ và $z_C=12$ khi đó $12=15-5t\Rightarrow t=\dfrac{3}{5}$.

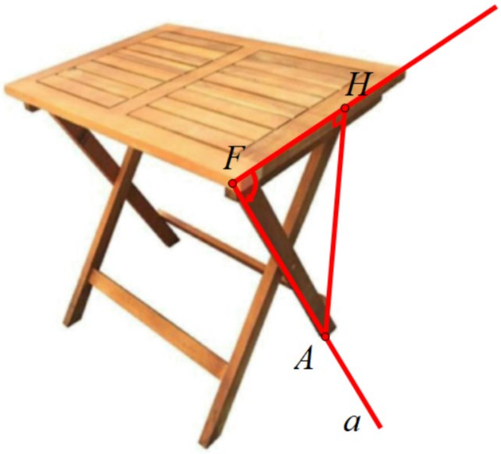
$x_C=3+18.\dfrac{3}{5}=\dfrac{69}{5}$; $y_C=2,5+25.\dfrac{3}{5}=17,5$.

Vậy tọa độ của du khách là $C\left(\dfrac{69}{5};17,5;12\right)$. Khi đó $P=5a+b+c=5.\dfrac{69}{5}+18+12=98,5$.

Câu 7: Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ Oxyz. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng $a:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{4}$ cắt mặt bàn $(P):x+y-2z+6=0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA=40\sqrt{3}\,cm$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là:



Lời giải



Đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;4)$.

Mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;-2)$.

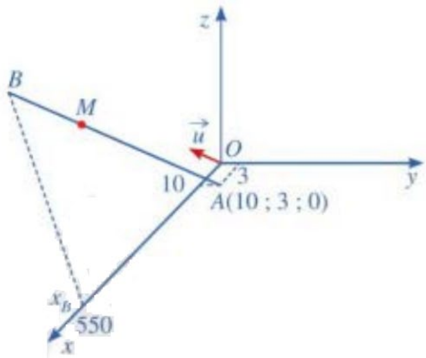
$\sin(\Delta,(P)) = \left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right| = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sin\varphi$ (vì hai góc phụ nhau)

Độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là khoảng cách từ chân bàn A đến mặt phẳng (P)

Suy ra $d(A,(P)) = AH = FA.\sin\varphi = 40\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{3}} = 40\,cm$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một Cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ kết thúc tại điểm B có hoành độ $x_B = 550$ chuyển động đều theo đường cáp có Vecto chỉ phương là $\vec{u} = (2;-2;1)$ (Hình bên dưới). Tính độ dài đường cáp AB?

(Nguồn: https://shutterstock.com)



Lời giải

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(10;3;0)$ và nhận $\vec{u} = (2;-2;1)$ là vecto chỉ phương có phương trình là: $\frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$.

Ta có $B(550; y_B; z_B)$ nằm trên đường thẳng AB. Theo giả thiết ta có $x_B = 550 \Rightarrow \frac{550-10}{2} = \frac{y_B - 3}{-2} = \frac{z_B}{1} \Rightarrow \begin{cases} y_B = -537 \\ z_B = 270 \end{cases}$.

Nên $B(550;-537;270)$. Vậy $AB = \sqrt{(550-10)^2 + (-537-3)^2 + (270-0)^2} = 810$

Câu 9: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, sàn nhà của một công trình thuộc mặt phẳng Oxy, tay vịn của lan can cầu thang là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(5;1;9)$ và $B(2;1;12)$. Góc tạo bởi tay vịn của lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Mặt phẳng Oxy có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;0;3)$ là một vectơ chỉ phương

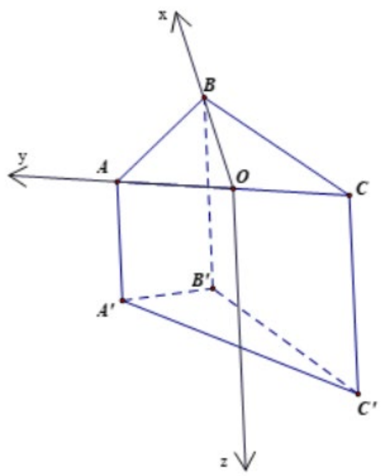
Ta có: $\sin\left(AB,(Oxy)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\vec{k}\right)\right|=\dfrac{|-3.0+0.0+3.1|}{\sqrt{(-3)^2+0^2+3^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Suy ra $\left(AB,(Oxy)\right)=45^0$

Vậy góc tạo bởi tay vịn lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng 45^0.

Câu 10: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 6 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 2 m; 3 m; 4 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

Lời giải



Gọi ba điểm trên mặt nước lần lượt là *A, B, C* và ba điểm tương ứng dưới đáy bể là A',B',C' sao cho $AA'=2,BB'=3,CC'=4$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó O là trung điểm A**C.**

Ta có $A(0;3;0),B\left(3\sqrt{3};0;0\right),C(0;-3;0),A'(0;3;2),B'\left(3\sqrt{3};0;3\right),C'(0;-3;4)$.

Khi đó $\overrightarrow{A'B'}=\left(3\sqrt{3};-3;1\right),\overrightarrow{A'C'}=(0;-6;2)$, suy ra $\left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right]=\left(0;-6\sqrt{3};-18\sqrt{3}\right)$.

Do đó mặt phẳng đáy bể có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;1;3)$.

Mặt phẳng nằm ngang (mặt nước) chính là mặt phẳng $(Oxy):z=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Do đó $\cos\left((A'B'C'),(Oxy)\right)=\dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}=\dfrac{|0.0+1.0+1.3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\left((A'B'C'),(Oxy)\right)\approx18,4^\circ$.

Câu 11: Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$. Sàn nhà của công trình thuộc mặt phẳng (Oxz), đường ống thoát nước thẳng và đi qua hai điểm $A(1;2;3),B(-1;4;-2)$. Tính góc tạo bởi đường ống thoát nước và mặt sàn.

Lời giải

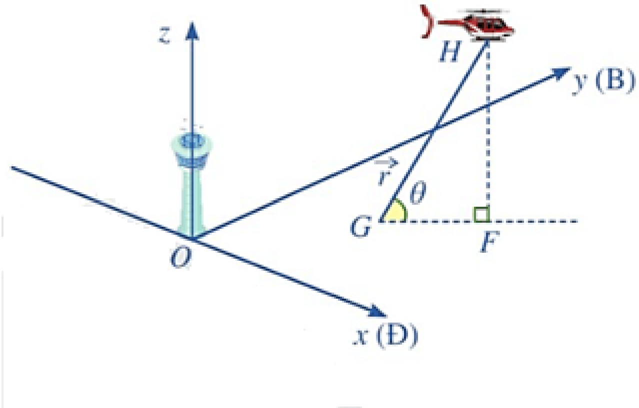
Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-5)$.

Ta có $\sin(AB,(Oxz))=\dfrac{|0.(-2)+1.2+0.(-5)|}{\sqrt{2^2+2^2+5^2}}=\dfrac{2\sqrt{33}}{33}\Rightarrow(AB,(Oxz))\approx 20,4°$.

Vậy góc giữa đường ống thoát nước và mặt sàn là khoảng $20,4°$.

Câu 12: *Hình bên dưới* minh hoạ đường bay của một chiếc trực thăng *H* cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục toạ độ *Oxyz* có gốc toạ độ *O* là chân tháp điều khiển của sân bay; trục *Ox* là hướng đông (Đ), trục *Oy* là hướng bắc (B) và trục *Oz* là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét.



Trực thăng cất cánh từ điểm G. Vectơ $\vec{r}$ chỉ vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh $(t\geq 0)$ có toạ độ là: $\vec{r}=(1+t;0,5+2t;2t)$.

a) Tìm góc θ mà đường bay tạo với phương ngang.

b) Lập phương trình đường thẳng GF, trong đó F là hình chiếu của điểm H lên mặt phẳng (Oxy).

c) Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km. Tìm toạ độ điểm mà máy bay trực thăng bắt đầu đi vào đám mây.

d) Giả sử một đỉnh núi nằm ở điểm $M(5;4,5;3)$. Tìm giá trị của t khi HM vuông góc với đường bay GH. Tìm khoảng cách từ máy bay trực thăng đến đỉnh núi tại thời điểm đó.

Lời giải

a) Ta có góc θ mà đường bay tạo với phương ngang chính là góc giữa đường thẳng GH và mặt phẳng (Oxy).

Tại thời điểm $t=0$ thì $\overrightarrow{r_0}=(1;0,5;0)$. Trực thăng cất cánh từ điểm G nên $G(1;0,5;0)$.

Tại thời điểm $t=1$, trực thăng bay đến vị trí K thuộc đường thẳng GH với $K(2;2,5;2)$.

Đường thẳng GH có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{GK}=(1;2;2)$ và mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có $\sin\left(GH,(Oxy)\right)=\dfrac{\left|1.0+2.0+2.1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\dfrac{2}{3}$

Suy ra $\left(GH,(Oxy)\right)\approx 42^0$. Vậy $\theta\approx 42^0$.

b) Gọi K' là hình chiếu của điểm K lên mặt phẳng (Oxy). Khi đó $K'(2;2,5;0)$.

Vì F là hình chiếu của điểm H lên mặt phẳng (Oxy) nên $K'\in GF$.

Do đó đường thẳng GF có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{GK'}=(1;2;0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng GF là $\begin{cases}x=1+t'\\ y=0,5+2t'\\ z=0\end{cases}$ (t' là tham số).

c) Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km, tức là vị trí điểm mà trực thăng bắt đầu đi vào đám mây có cao độ $z=2$, khi đó $2t=2$, suy ra $t=1$.

Vậy tọa độ điểm mà trực thăng bắt đầu đi vào đám mây là $(2;2,5;2)$.

d) Ta có $H(1+t;0,5+2t;2t)$. Khi đó, $\overrightarrow{HM}=(4-t;4-2t;3-2t)$. Đường thẳng GH có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{GK}=(1;2;2)$

HM vuông góc với đường bay GH khi $\overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{GK}\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{GK}=0$

$\Leftrightarrow(4-t).1+(4-2t).2+(3-2t).2=0\Leftrightarrow t=2$.

Vậy $t=2$ thì HM vuông góc với đường bay GH.

Khi đó, khoảng cách từ đỉnh núi đến máy bay trực thăng là

$HM=\sqrt{(4-2)^2+(4-2.2)^2+(3-2.2)^2}=\sqrt{5}$ (km).

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trị trí $A(3,5;-2;0,4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3,5;5,5;0)$ trên đường băng EG (Hình 37).

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

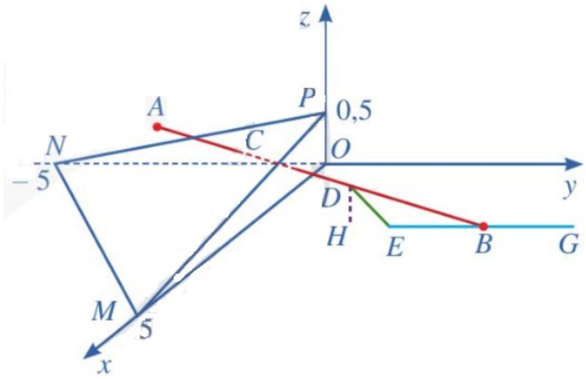
b) Hãy cho biết góc trượt (góc giữa đường thẳng bay AB và mặt phẳng nằm ngang (Oxy)) có nằm trong phạm vi cho phép từ $2,5°$ đến $3,5°$ hay không?

c) Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5;0;0)$, $N(0;-5;0)$, $P(0;0;0,5)$. Tìm tọa độ của điểm C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.

d) Tìm tọa độ của điểm D trên đoạn thẳng AB là vị trí mà máy bay ở độ cao 120 m.

e) Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu $E(3,5;6,5;0)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Hỏi sau khi ra khỏi đám mây, người phi công có đạt được quy định an toàn đó hay không? Biết rằng tầm nhìn của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m

(*Nguồn: R.Larson and* **B.** *Edwards, Calculus 10e Cengage, 2014*).



Lời giải

a) Đường thẳng AB đi qua điểm $A(3,5;-2;0,4)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(0;7,5;-0,4)$ làm vectơ chỉ phương, có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x=3,5 \\ y=-2+7,5t \\ z=0,4-0,4t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

b) Mặt phẳng nằm ngang (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có $\sin\left(AB,(Oxy)\right)=\dfrac{|0.0+7,5.0+(-0,4).1|}{\sqrt{0^2+(7,5)^2+(-0,4)^2}}\approx 0,053$.

Suy ra $AB,(Oxy)\approx 3^\circ \in (2,5^\circ;3,5^\circ)$.

Vậy góc trượt nằm trong phạm vi cho phép.

c) Ta có: $\overrightarrow{MN}=(-5;-5;0)$, $\overrightarrow{MP}=(-5;0;0,5)$.

Xét $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(-2,5;2,5;-25)$.

Khi đó $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) hay chính là mặt phẳng (α).

Phương trình mặt phẳng (α) là: $-2,5(x-5)+2,5(y-0)-25(z-0)=0$

$\Leftrightarrow x-y+10z-5=0$.

Vì C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh nên C là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (α).

Vì $C\in AB$ nên gọi tọa độ điểm $C(3,5;-2+7,5t;0,4-0,4t)$.

Lại có $C\in(\alpha)$ nên ta có: $3,5-(-2+7,5t)+10(0,4-0,4t)-5=0 \Rightarrow t=\dfrac{9}{23}$.

Vậy $C\left(3,5;\dfrac{43}{46};\dfrac{28}{115}\right)$.

d) Vì $D\in AB$ nên gọi tọa độ điểm D là $C(3,5;-2+7,5t';0,4-0,4t')$.

D là vị trí mà máy bay ở độ cao 120 m, tức là khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 120 m tức là bằng $0,12$ km.

Ta có $d\left(D,(Oxy)\right)=\dfrac{|0,4-0,4t'|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=|0,4-0,4t'|$.

Khi đó, $|0,4-0,4t'|=0,12 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0,4-0,4t'=0,12 \\ 0,4-0,4t'=-0,12 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t'=0,7 \\ t'=1,3 \end{array}\right.$.

Với $t'=0,7$ ta có $D(3,5;3,25;0,12)$.

Với $t'=1,3$ ta có $D(3,5;7,75;-0,12)$.

e) Ta có: $DE=\sqrt{(3,5-3,5)^2+(4,5-3,25)^2+(0-0,12)^2} \approx 1,256$ km.

Vì tầm nhìn xa của phi công sau khi ra khỏi đám mây là $900\,\text{m}=0,9\,\text{km}<1,256\,\text{km}$ nên người phi công đó không đạt được quy định an toàn bay.

CHƯƠNG V

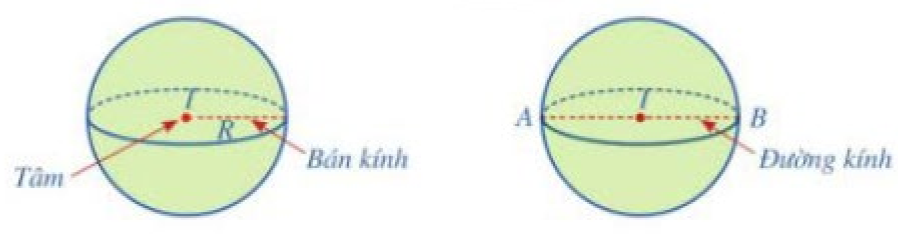
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

I LÝ THUYẾT.

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT CẦU

Cho trước điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng bằng R.



Nhận xét:

• Điểm M thuộc mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM = R$.

• Điểm M nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM < R$.

• Điểm M nằm ngoài mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM > R$.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Ta có thể viết phương trình đó về dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $d=a^2+b^2+c^2-R^2$.

Vậy mỗi mặt cầu đều có phương trình dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Ngược lại, xét phương trình có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2+b^2+c^2-d>0$. Ngoài ra, nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;2;1)$ và được thiết kế bán kinh phủ sóng $5000m$.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian?

b) Nhà bạn Diệp Chi, và Tuệ Nhi có vị trí tọa độ lần lượt là $A(3;2;-1)$ và $B(4;-3;5)$. Hỏi Diệp Chi và Tuệ Nhi dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$

b) Do $IA=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2+((-1)-1)^2}=\sqrt{8}<5$ nên điểm $A(2;3;-1)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy bạn Diệp Chi có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

$IB=\sqrt{(4-1)^2+((-3)-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{50}>5$ nên điểm $B(4;-3;5)$ nằm ngoài mặt cầu đó.

Vậy bạn Tuệ Nhi không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian?

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi hai chiếc máy bay đó có bị rađa phát hiện hay không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian là:

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=250000$

b) Có: $IM=\sqrt{(-200+2)^2+(100-1)^2+(-250+1)^2}\approx 333,2<500$ nên điểm $M(-200;100;-250)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Mỹ có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

Có: $IN=\sqrt{(350+2)^2+((-100)-1)^2+(300+1)^2}\approx 474<500$ nên điểm $N(350;-100;300)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Anh có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

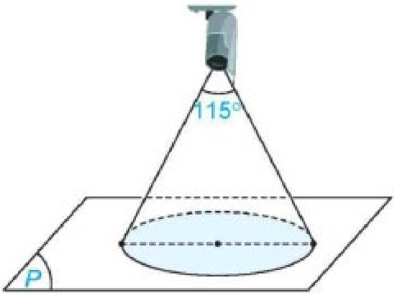
HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$, bán kính bằng $50(m)$ và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Chiều cao của vòm là bao nhiêu? (biết đơn vị của hệ trục tọa độ là mét)

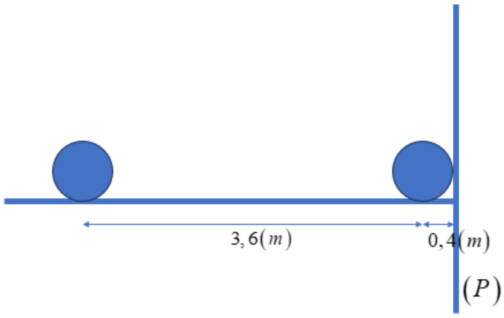
Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), người ta đặt một trạm thu phát sóng điện thoại được đặt ở vị trí $A(-1;2;-3)$. Biết rằng trạm thu phát sóng được thiết kế với bán kính là 4 km, viết phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2;1;-4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là $3\,km$. Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2;-1;3), B(0;1;-4), C(-2;1;-3), D(0;1;-3)$, $E(-4;-2;1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

Câu 4: Góc quan sát ngang của một camera là $115°$. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(4;2;3)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-3=0$. Biết vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn. Tính diện tích của vùng quan sát đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, một quả cầu có tâm đặt tại điểm $I(0;3;0)$ đang chuyển động thẳng đều theo phương vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-9=0$ với vận tốc $0,002(m/s)$. Sau 30 phút thì quả cầu tiếp xúc với mặt mặt phẳng (P). Biết đơn vị của hệ trục tọa độ $Oxyz$ là mét. Bán kính của mặt cầu là



Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí I. Biết ngọn hải đăng đó được thiết kế với đường kính phủ sáng là 6 km. Giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí I. Hỏi vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng cách I một đoạn bằng bao nhiêu?

Câu 7: Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2$ m. Phương trình của mặt cầu là

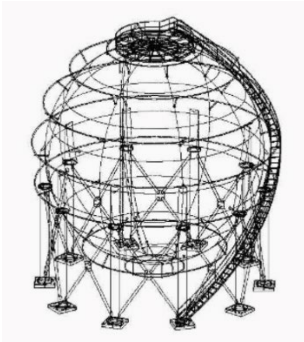
Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$. Biết ngọn hải đăng đó được thiết kế với đường kính phủ sáng là 8 km. Phương trình mặt cầu để mô tả vùng phủ sáng của ngọn hải đăng là

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng $\mathrm{O}xy$. Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $\mathrm{I}(12;20;50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là

Câu 10: Một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I(2;-1;1)$ được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km. Một người dùng điện thoại đang ở vị trí $M(0;1;2)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng này hay không?

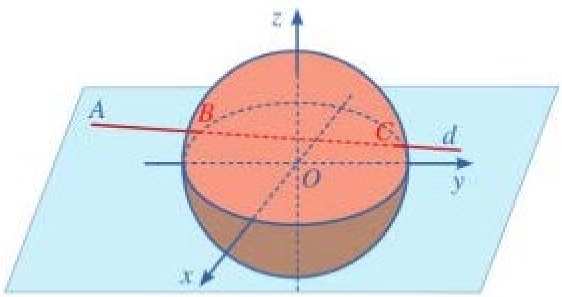
Câu 11: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là km), bốn chiếc máy bay ở bốn hướng khác nhau khi vừa bay vào vùng phủ sóng của một chiếc ra đa thì trên ra đa ngay lập tức báo tín hiệu phát hiện mục tiêu. Tại thời điểm ra đa phát hiện mục tiêu thì 4 chiếc máy bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $A(30;25;33), B(14;1;49), C(40;-29;1), D(0;31;41)$. Phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng của ra đa trong không gian là

Câu 12: Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết tâm mặt cầu có tọa độ $I(2;3;4)$ và mặt cầu tiếp xúc với nắp đậy là mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-7;0;4)$, $B\left(-\frac{2}{3};0;\sqrt{7}\right)$, $C\left(-\sqrt{2}+1;0;-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ như hình vẽ. Đường kính của bồn chứa khí hóa lỏng bằng bao nhiêu?



Câu 13: Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian $\mathrm{O}xyz$ (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15;1;6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA, với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Câu 14: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí A, chuyển động theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-200+80t \\ z=10 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Khoảng cách giữa vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa là bao nhiêu?



Câu 15: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I\left(-1;2;3\right)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$. Phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng là:

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là kilômét, một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I\left(-3;2;7\right)$, trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km. Người dùng điện thoại ở điểm nào có thể sử dụng dịch vụ của trạm này?

A. $A\left(2;3;4\right)$. **B.** $B\left(-2;1;8\right)$.

C. $C\left(1;1;1\right)$. **D.** $D\left(-3;-1;3\right)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1;5;5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1;5;5)$ đến vị trí $A(7;14;11)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

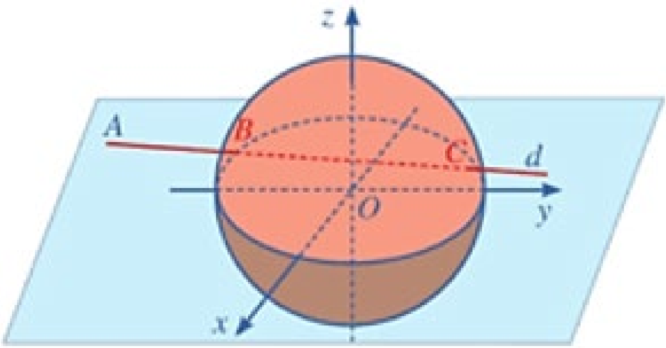
A. $M(3;8;7)$. **B.** $N(0;4;8)$. **C.** $P(7;3;0)$. **D.** $Q(7;11;3)$.

Câu 18: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I\left(2;-1;-3\right)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$. Điểm nào sau đây nằm trong vùng phủ sóng của rađa?

A. $N\left(500;200;100\right)$. **B.** $P\left(-300;250;400\right)$.

C. $M\left(200;-100;-230\right)$. **D.** $Q\left(120;-200;-500\right)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O\left(0;0;0\right)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1km$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát $417\,km$ sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A\left(-688;-185;8\right)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(91;75;0\right)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Hãy xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.



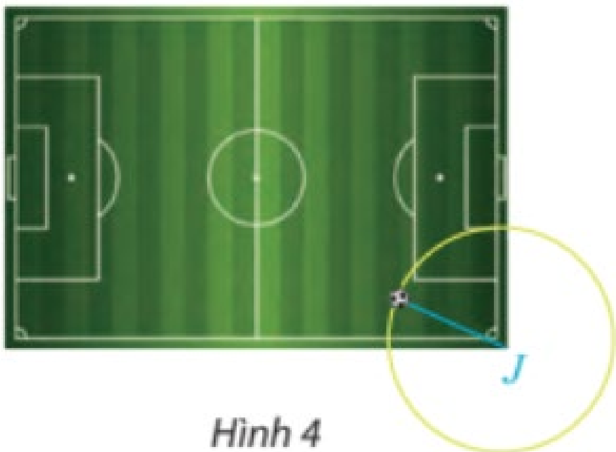
Câu 20: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, toạ độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm toạ độ. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0;4;5)$, $B(-3;-1;3)$, $C(-2;8;9)$, $D(-7;2;-3)$. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến điểm M biết rằng khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA=3$, $MB=5$, $MC=9$, $MD=10$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Câu 21: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được một khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ.

Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Bốn vệ tinh được đặt tại các điểm $A(9;-2;7)$, $B(1;4;8)$, $C(7;-3;-5)$, $D(-4;-11;12)$. Một con tàu đang ở vị trí điểm $M(x;y;z)$ mà khoảng cách từ nó đến các vệ tinh lần lượt là $MA=\sqrt{58}, MB=\sqrt{83}$, $MC=\sqrt{173}, MD=\sqrt{97}$. Khi đó tổng bình phương tọa độ điểm M là

Câu 22: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ toạ độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu (S): $(x-22)^2+(y-4)^2+(z-13)^2=194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:

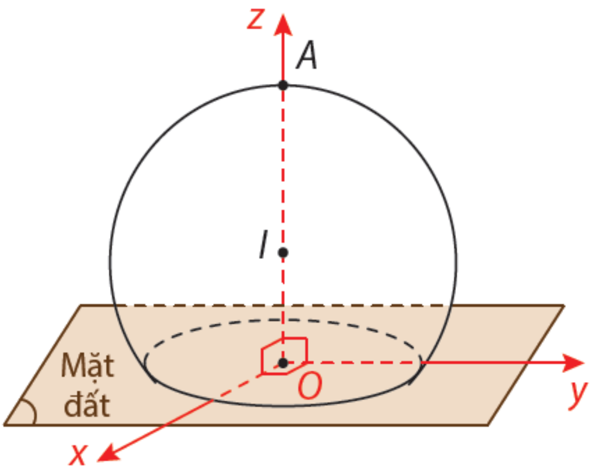


Hình 4

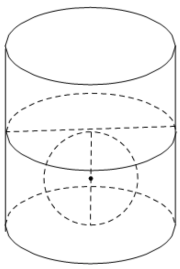
Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=16$ tại $M\left(\frac{10}{9};-\frac{25}{9};\frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là $4\,km$. Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21;35;50)$ đến vị trí $D(5121;658;0)$ hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

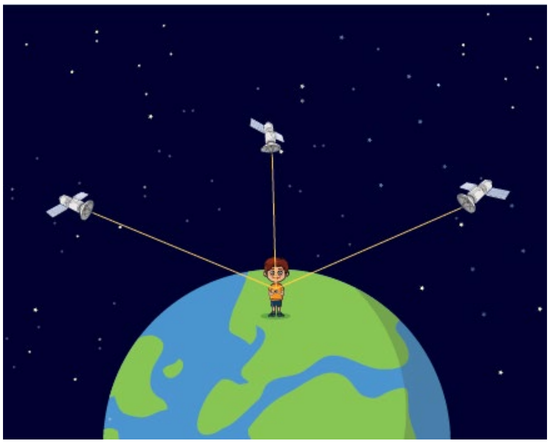
Câu 25: Ericsson Globe (Thuỵ Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020),với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ *Oxyz* bởi một mặt cầu có tâm *I*, đường kính 110 m và *OA* = 85 m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.



Câu 26: Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn $4,5\,cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên bi đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng. Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,cm$. Bán kính của viên bi đó bằng?



Câu 27: Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4.10^6 m$. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An $3.10^6 m$, vệ tinh thứ hai đang cách An $4.10^6 m$ và vệ tinh thứ ba đang cách An $5.10^6 m$. Biết rằng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất (1 đơn vị $=10^6 m$), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì toạ độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4;4;6)$, $I_2(8;4;3)$ và $I_3(4;9;3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn An (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 28: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng $11\ (m)$. Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.

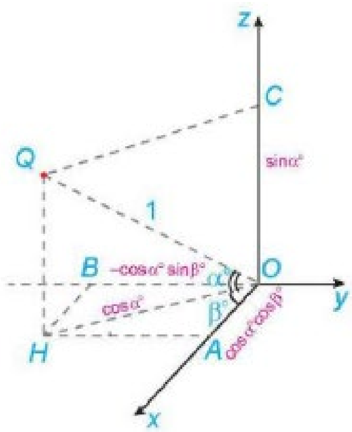
Câu 29: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có ranh giới của vùng phủ sóng là hình cầu (S) đường kính AB biết $A(1;3;-2), B(3;-1;0)$.

a) Viết phương trình mặt cầu (S).

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để một người dùng điện thoại di động tại điểm $C(m+2;m;m)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

c) Người dùng điện thoại di động tại điểm $D(n;n+3;n-1), n\in\mathbb{R}$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không?

Câu 30: Xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm trái đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực bắc N, tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, một đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6 371 km trong thực tế. Biết rằng điểm M có vĩ độ và kinh độ tương ứng là $\alpha° N, \beta° W\ (0<\alpha<90, 0<\beta<180)$ thì có tọa độ là $M(\cos\alpha°\cos\beta°; -\cos\alpha°\sin\beta°; \sin\alpha°)$. Giả sử một trạm phát sóng trên mặt đất được đặt ở vị trí $10° N, 20° W$ và một máy thu được đặt tại vị trí $80° N, 70° W$. Biết rằng trạm phát sóng có bán kính phủ sóng là 8 272 km, hỏi máy thu có thu được tín hiệu của trạm phát sóng không (các phép tính được làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư sau dấu phẩy)?



Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(1;2;4)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $4\,km$.

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$.

b) Bạn An có vị trí tọa độ là $A(-1;0;0)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) Bạn Bình có vị trí tọa độ là $B(2;0;2)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) Giả sử bạn An đến nhà bạn Bình theo con đường là một đường thẳng. Bạn An có thể bắt được sóng trạm này khi đi được $2,38\,km$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(2;1;-3)$. Trạm thu phát được thiết kế bán kính phủ sóng là $3\,km$.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.

b) Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0;1;-2)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6;-3;-1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) Có một người đi từ vị trí $I(2;1;-3)$ đến vị trí $B(6;-3;-1)$ theo một đường thẳng, vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này là $C(x;y;z)$ với $x+y+z=-1$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên trục là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (hình vẽ dưới đây) được đặt ở vị trí $I(-4;2;5)$. Biết rằng trạm phát sóng được thiết kế với bán kính phủ sóng là 4 km.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là:

$$(x+4)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=16$$

b) Điểm $A(3;5;-6)$ nằm phía trong mặt cầu đó.

c) Nếu người dùng đứng ở vị trí điểm $B(-2;3;0)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng này.

d) Nếu người dùng đứng ở vị trí điểm $M(-4;6;2)$ thì quãng đường ngắn nhất người đó phải di chuyển để đến được vị trí có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng là 1 km.

Câu 34: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(-3;5;2)$được thiết kế với bán kính phủ sóng 4 km, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km.

a) Phương trình mặt cầu (S)để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+3)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=16$

b) Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là 8 km.

c) Người dùng điện thoại ở vị trí A có toạ độ $(-3;4;1)$không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Trong điều kiện giao thông thuận lợi, khoảng cách ngắn nhất để người B ở toạ độ $(8;6;2)$ di chuyển tới vùng phủ sóng là $11,05$ km.

Câu 35: Một tháp kiểm soát không lưu ở sân bay cao 109 m đặt một đài kiểm soát không lưu ở độ cao 105 m. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 450 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy)trùng với mặt đất sao cho trục Ox là hướng tây, trục Oy là hướng nam và trục Ozlà trục thẳng đứng (*Hình bên dưới*), đơn vị trên mỗi trục là kilômét.

(Nguồn: https://znews.vn/)

Một máy bay đang ở vị trí A cách mặt đất 8 km, cách 268 km về phía đông, 185 km về phía nam so với tháp kiểm soát không lưu và đang chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(82;76;0)$ hướng về đài kiểm soát không lưu.

a) Đài kiểm soát không lưu có toạ độ là $(0;0;0)$.

b) Vị trí A có toạ độ là $(-268;185;8)$

c) Đài kiểm soát không lưu có phát hiện được máy bay tại vị trí A.

d) Khoảng cách gần nhất giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu là $217,96$ km.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(-2;1;3)$. Ngọn hải đăng được thiết kế bán kính phủ sáng là $5\,km$.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.

b) Người đi biển đứng ở vị trí $A(2;3;1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Người đi biển đứng ở vị trí $B(-2;-5;6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Một người đi biển đang ở vị trí $C(5;3;-2)$. Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng là 73.

Câu 37: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình minh hoạ). Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Ta xét ví một ví dụ cụ thể sau: Cho bốn vệ tinh $\mathrm{A}(1;-1;2),\mathrm{B}(2;1;3);\mathrm{C}(-1;4;0);\mathrm{D}(2;3;1)$.

Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Một chiếc máy bay quân sự đang ở vị trí M với $MA=3; MB=\sqrt{5}; MC=\sqrt{26}; MD=\sqrt{5}$.

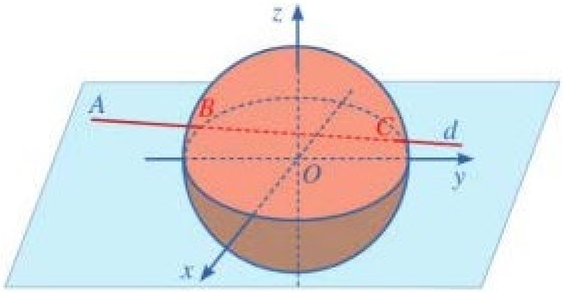
a) Mặt cầu tâm A đi qua điểm M có bán kính là 3.

b) Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$.

c) Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và $S(B,MB)$ là $x+2y+z-6=0$.

d) Tọa độ của máy bay quân sự là $M(x;y;z)$ với $x+y+z=3$.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí $A(-800;-40;10)$, chuyển động theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-200+80t \\ z=10 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=600^2$.

b) Giả sử $B(-1000+100b;-200+80b;10)$ là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa. Khi đó $b\in[4;5]$.

c) Giả sử $C(-1000+100c;-200+80c;10)$ là vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa. Khi đó $c\in[8;9]$.

d) Khoảng cách ngắn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm) giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu là $250,51km$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), Một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt ở tại vị trí $I(2;0;0)$ .Vùng phủ sóng của trạm có bán kính bằng 2 km. Hai người bạn Mai và Nga cùng sử dụng điện thoại. Bạn Mai dùng điện thoại tại vị trí $M(2;1;1)$, bạn Nga dùng điện thoại tại vị trí $N(1;2;2)$.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x-2)^2+y^2+z^2=2$

b) Bạn Mai có thể sử dụng được dịch vụ của trạm phát sóng trên.

c) Hai bạn Mai và Nga liên lạc được với nhau.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga di chuyển tới vùng phủ sóng của trạm là $1(km)$.

Câu 40: Một sân khấu đã được thiết lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) để đạo diễn có thể sắp đặt ánh sáng và xác định vị trí của các diễn viên. Người đạo diễn đặt một đèn chiếu sáng ở vị trí $I(1;2;3)$ tạo ra một vùng sáng là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ bán kính $10(m)$.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=100$.

b) Diễn viên A đang đứng trên sân khấu ở vị trí $A(3;4;5)$ để chuẩn bị biểu diễn. Khi đó diễn viên A đang được đèn chiếu sáng.

c) Diễn viên B luôn đứng yên ở vị trí $B(10;11;12)$. Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B bằng $5m$.

d) Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$, còn diễn viên C có nhiệm vụ di chuyển xung quanh rìa của vùng chiếu sáng. Tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất là $11(m)$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngon hải đăng được đặt ở vị trí $I(20;35;60)$, biết rằng ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$$(x-20)^2+(y-35)^2+(z-60)^2=4^2.$$

b) Điểm $B(-290;-165;3660)$ nằm phía trong mặt cầu đó.

c) Nếu người đi biển ở vị trí $C(541;137;-690)$ thì không thể nhìn được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí điểm $I(20;35;60)$ đến vị trí $D(4020;35;3060)$. Vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng ID sao cho người đi biển vẫn còn nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng là $M(-3180;35;2460)$.

Câu 42: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thoogns GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn vệ tinh $A(3;-1;6)$, $B(1;4;8)$, $C(7;9;6)$, $D(7;-15;18)$.

a) Phương trình mặt cầu tâm A bán kính bằng 6 có phương trình là:

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=36.$$

b) Nếu điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu tâm B bán kính bằng 7 thì tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=7$.

c) Khoảng cách từ điểm $N(2;-3;5)$ đến vệ tinh D là lớn nhất.

d) Biết khoảng cách từ điểm $M(x;y;z)$ đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Khi đó $x+y+z=4$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), tháp hải đăng Mũi Điện - Phú Yên (là nơi đón ánh bình minh đầu tiên trên đất liền Tổ Quốc), chân tháp được đặt vuông góc với mặt đất (chiều từ chân tháp lên đỉnh tháp cùng hướng với chiều dương của trục Oz) ở vị trí điểm $A(12.040.271;1.418.620;84)$. Ngọn đèn của hải đăng được đặt trên đỉnh của tháp hải đăng hình trụ cao 26 m so với mặt đất và sử dụng pin năng lượng mặt trời, có thể phát tín hiệu ánh sáng xa khoảng 27 hải lý tương đương 50 km.

a) Mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng có tâm $I(12.040.271;1.418.620;110)$ bán kính $R=50000(m)$.

b) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là
$(S):(x-12.040.271)^2+(y-1.418.620)^2+(z-84)^2=50.000^2$.

c) Người đi biển ở trên Cù lao Mái nhà tại vị trí $B(12.026.000;1.461.000;0)$ nhìn thấy ánh đèn của ngọn hải đăng.

d) Điểm cực đông của mũi Điện là điểm $C(12.040.452;1.418.462;0)$. Từ điểm C một chiếc tàu di chuyển trên mặt biển (mặt phẳng (Oxy)) theo hướng của vectơ đơn vị $\vec{i}$, để vẫn nhìn thấy ánh đèn của hải đăng thì khoảng cách tối đa tàu di chuyển là 50.000 mét.

CHƯƠNG V PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

I LÝ THUYẾT.

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT CẦU

Cho trước điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng bằng R.

Nhận xét:

• Điểm M thuộc mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM = R$.
• Điểm M nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM < R$.
• Điểm M nằm ngoài mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM > R$.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Ta có thể viết phương trình đó về dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $d=a^2+b^2+c^2-R^2$.

Vậy mỗi mặt cầu đều có phương trình dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Ngược lại, xét phương trình có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2+b^2+c^2-d>0$. Ngoài ra, nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;2;1)$ và được thiết kế bán kinh phủ sóng $5000m$.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian?

b) Nhà bạn Diệp Chi, và Tuệ Nhi có vị trí tọa độ lần lượt là $A(3;2;-1)$ và $B(4;-3;5)$. Hỏi Diệp Chi và Tuệ Nhi dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$

b) Do $IA=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2+((-1)-1)^2}=\sqrt{8}<5$ nên điểm $A(2;3;-1)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy bạn Diệp Chi có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

$IB=\sqrt{(4-1)^2+((-3)-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{50}>5$ nên điểm $B(4;-3;5)$ nằm ngoài mặt cầu đó.

Vậy bạn Tuệ Nhi không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian?

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi hai chiếc máy bay đó có bị rađa phát hiện hay không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian là:

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=250000$

b) Có: $IM=\sqrt{(-200+2)^2+(100-1)^2+(-250+1)^2}\approx 333,2<500$ nên điểm $M(-200;100;-250)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Mỹ có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

Có: $IN=\sqrt{(350+2)^2+((-100)-1)^2+(300+1)^2}\approx 474<500$ nên điểm $N(350;-100;300)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Anh có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$, bán kính bằng $50(m)$ và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Chiều cao của vòm là bao nhiêu? (biết đơn vị của hệ trục tọa độ là mét)

Lời giải

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là $20(m)$.

Vậy chiều cao của vòm là $20+50=70(m)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), người ta đặt một trạm thu phát sóng điện thoại được đặt ở vị trí $A(-1;2;-3)$. Biết rằng trạm thu phát sóng được thiết kế với bán kính là 4 km, viết phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian?

Lời giải

Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là:

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2;1;-4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là $3km$. Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2;-1;3), B(0;1;-4), C(-2;1;-3), D(0;1;-3)$, $E(-4;-2;1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

Lời giải

$IA=\sqrt{4^2+(-2)^2+7^2}=\sqrt{69}>3$.

$IB=\sqrt{2^2+0^2+0^2}=2<3$.

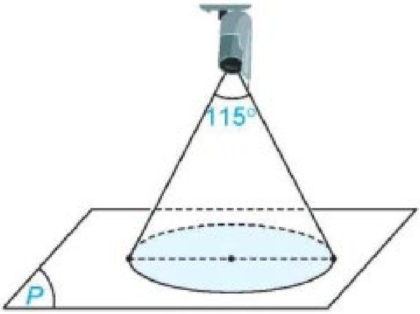
$IC=\sqrt{0^2+0^2+1^1}=1<3$.

$ID=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}<3$.

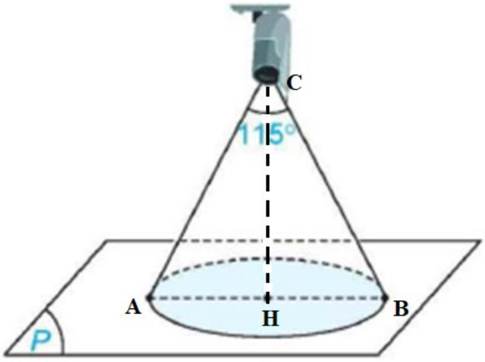
$IE=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}>3$.

Vậy có 3 người có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên

Câu 4: Góc quan sát ngang của một camera là $115°$. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(4;2;3)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-3=0$. Biết vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn. Tính diện tích của vùng quan sát đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải



Kẻ $CH \perp (P)$, ta có: $CH = d(C;(P)) = \dfrac{|2.4 - 1.2 + 2.3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3$.

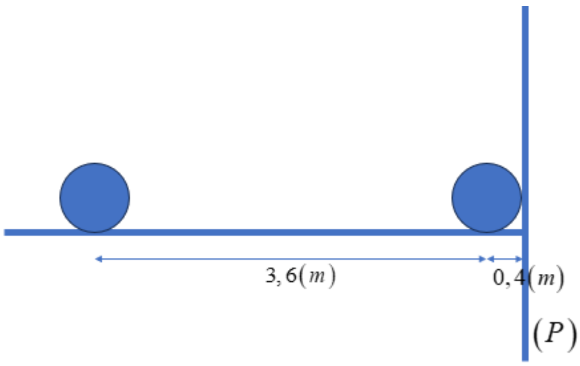
Do tam giác CAB cân tại C nên $\widehat{ACH} = 57,5°$.

Xét tam giác vuông CAH có $AH = CH.\tan\widehat{ACH} = 3.\tan 57,5° \approx 4,7091$.

Vậy diện tích của vùng quan sát được của camera là $S = \pi.r^2 \approx \pi.(4,7091)^2 \approx 69,7$ (đvdt).

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, một quả cầu có tâm đặt tại điểm $I(0;3;0)$ đang chuyển động thẳng đều theo phương vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 9 = 0$ với vận tốc $0,002(m/s)$. Sau 30 phút thì quả cầu tiếp xúc với mặt mặt phẳng (P). Biết đơn vị của hệ trục tọa độ $Oxyz$ là mét. Bán kính của mặt cầu là

Lời giải



Đổi: 30 phút $= 1800s$

Sau 30 phút, quả cầu di chuyển được một quãng bằng $1800.0,002 = 3,6(m)$.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) bằng $4(m)$.

Vậy bán kính của mặt cầu bằng $4 - 3,6 = 0,4(m)$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí I. Biết ngọn hải đăng đó được thiết kế với đường kính phủ sáng là 6 km. Giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí I. Hỏi vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng cách I một đoạn bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vùng phủ sáng của ngọn hải đăng là một mặt cầu có tâm I và bán kính $R=\frac{6}{2}=3$ km nên vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng cách I một đoạn 3 km.

Câu 7: Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2$ m. Phương trình của mặt cầu là

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(360;200;400)$ và bán kính $r=2$ nên có phương trình là

$(x-360)^2+(y-200)^2+(z-400)^2=4$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$. Biết ngọn hải đăng đó được thiết kế với đường kính phủ sáng là 8 km. Phương trình mặt cầu để mô tả vùng phủ sáng của ngọn hải đăng là

Lời giải

Vùng phủ sáng của ngọn hải đăng có bán kính là 4 km $=4000$ m.

Phương trình mặt cầu để mô tả vùng phủ sáng của ngọn hải đăng là

$(x-21)^2+(y-35)^2+(z-50)^2=4000^2$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng $\mathrm{Ox}y$. Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $\mathrm{I}(12;20;50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là

Lời giải

Do quả cầu nằm trên mặt sàn nhà đa năng nên mặt ngoài của quả cầu tiếp xúc với mặt phẳng $\mathrm{Ox}y$

Ta có: $d\left(I,(\mathrm{Ox}y)\right)=R=50$

Vậy mặt ngoài của quả cầu (S) có phương trình là $(x-12)^2+(y-20)^2+(z-50)^2=50^2$

Câu 10: Một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I(2;-1;1)$ được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km. Một người dùng điện thoại đang ở vị trí $M(0;1;2)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng này hay không?

Lời giải

Ta có phương trình mặt cầu mô tả ranh giới phủ sóng là:

$(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$.

$IM^2=(0-2)^2+(1+1)^2+(2-1)^2=9=R^2$.

Vậy người dùng điện thoại có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng này.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là km), bốn chiếc máy bay ở bốn hướng khác nhau khi vừa bay vào vùng phủ sóng của một chiếc ra đa thì trên ra đa ngay lập tức báo tín hiệu phát hiện mục tiêu. Tại thời điểm ra đa phát hiện mục tiêu thì 4 chiếc máy bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $A(30;25;33), B(14;1;49), C(40;-29;1), D(0;31;41)$. Phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng của ra đa trong không gian là

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$. Do (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình:

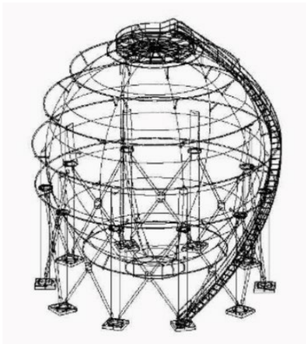
$$\begin{cases} 30^2+25^2+33^2-60a-50b-66c+d=0 \\ 14^2+1^2+49^2-28a-2b-98c+d=0 \\ 40^2+(-29)^2+1^2-80a+58b-2c+d=0 \\ 0^2+31^2+41^2-62b-82c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -60a-50b-66c+d=-2614 \\ -28a-2b-98c+d=-2598 \\ -80a+58b-2c+d=-2442 \\ -62b-82c+d=-2642 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=-2498 \end{cases}$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;1)$ và $R=\sqrt{0^2+1^2+1^2-(-2498)}=50$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=50^2$

hay $x^2+y^2+z^2-2y-2z-2498=0$.

Câu 12: Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3**D.** Cho biết tâm mặt cầu có tọa độ $I(2;3;4)$ và mặt cầu tiếp xúc với nắp đậy là mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-7;0;4)$, $B\left(-\frac{2}{3};0;\sqrt{7}\right)$, $C\left(-\sqrt{2}+1;0;-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ như hình vẽ. Đường kính của bồn chứa khí hóa lỏng bằng bao nhiêu?



Lời giải

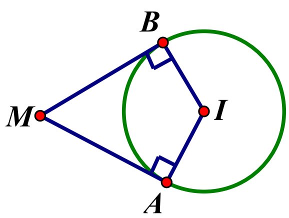
Vì ba điểm A, B, C đều có tung độ bằng 0 nên nắp đậy là mặt phẳng có phương trình $(P): y=0$.

$R=d(I,(P))=|3|=3$.

Đường kính của bồn chứa khí hóa lỏng là $2.3=6$.

Câu 13: Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian Oxyz (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15;1;6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA, với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Lời giải



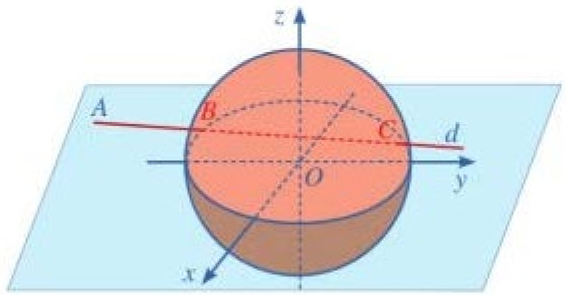
Bề mặt ngoài của quả bóng (S) là một mặt cầu có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=3$

Ta có: $MI=\sqrt{(1-15)^2+(1-1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{205}$

Suy ra $MA=\sqrt{MI^2-IA^2}=\sqrt{205-9}=\sqrt{196}=14$

Vậy $MA=14\,m$.

Câu 14: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí A, chuyển động theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-1000+100t\\y=-200+80t\\z=10\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Khoảng cách giữa vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có: Phương trình mặt cầu ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $(S): x^2+y^2+z^2=360000$.

Tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S).

Từ phương trình đường thẳng d và mặt cầu (S) ta có:

$(-1000+100t)^2+(-200+80t)^2+10^2=360000$

$\Leftrightarrow 164t^2-2320t+6801=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1160-\sqrt{230236}}{164}\approx 4{,}15 \\ t=\dfrac{1160+\sqrt{230236}}{164}\approx 10 \end{array}\right.$

+) $t=4{,}15$ suy ra $B(-585;\,132;\,10)$

+) $t=10$ suy ra $C(0;\,600;\,10)$

Khi đó, $\overrightarrow{BC}=(585;468;0)\Rightarrow BC\approx 749{,}17$.

Câu 15: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(-1;2;3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$. Phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng là:

Lời giải

Tâm mặt cầu có toạ độ $I(-1;2;3)$

Bán kính mặt cầu $R = 5000(m) = 5(km)$.

Vậy phương trình mặt cầu mô tả vùng phủ sóng của trạm phát sóng là:

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là kilômét, một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(-3;2;7)$, trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km. Người dùng điện thoại ở điểm nào có thể sử dụng dịch vụ của trạm này?

A. $A(2;3;4)$. **B.** $B(-2;1;8)$. **C.** $C(1;1;1)$. **D.** $D(-3;-1;3)$.

Lời giải

Ta có

$\overrightarrow{IA} = (5;1;-3)$ và $IA = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35} > R = 3$ nên điểm A nằm ngoài mặt cầu.

$\overrightarrow{IB} = (1;-1;1)$ và $IB = \sqrt{3} < R$ nên điểm B nằm trong mặt cầu.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1;5;5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 5 km.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1;5;5)$ đến vị trí $A(7;14;11)$.Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

A. $M(3;8;7)$. **B.** $N(0;4;8)$. **C.** $P(7;3;0)$. **D.** $Q(7;11;3)$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trong không gian là:

$(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 25$

Ta có $\overrightarrow{IM}(2;3;2)$; $\overrightarrow{IA}=(6;9;6)=3\overrightarrow{IM}$ và $IM=\sqrt{(3-1)^2+(8-5)^2+(7-5)^2}=\sqrt{17}<5$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển đi qua điểm M mà vẫn thuộc vùng phủ sáng.

Câu 18: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(2;-1;-3)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$. Điểm nào sau đây nằm trong vùng phủ sóng của rađa?

A. $N(500;200;100)$. **B.** $P(-300;250;400)$.

C. $M(200;-100;-230)$. **D.** $Q(120;-200;-500)$.

Lời giải

Vì vùng phát sóng của rađa là một mặt cầu có tâm $I(2;-1;-3)$ và bán kính $R=500$.

•Ta có: $IN=\sqrt{(500-2)^2+(200+1)^2+(100+3)^2}\approx 546,8>500$

Vì $IN>R$ nên điểm N nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm N nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm rađa này.

•Ta có: $IP=\sqrt{(-300-2)^2+(250+1)^2+(400+3)^2}\approx 562,7>500$

Vì $IP>R$ nên điểm P nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm P nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm rađa này.

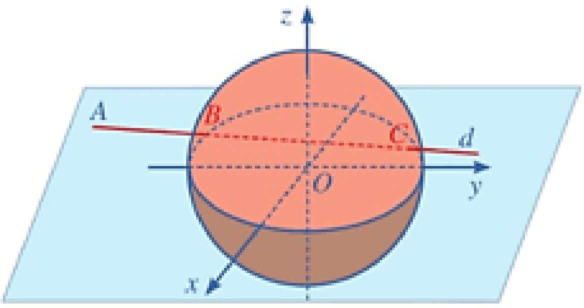
•Ta có: $IM=\sqrt{(200-2)^2+(-100+1)^2+(-230+3)^2}\approx 317,1<500$

Vì $IM<R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy điểm M nằm trong vùng phủ sóng của trạm rađa này.

•Ta có: $IQ=\sqrt{(120-2)^2+(-200+1)^2+(-500+3)^2}\approx 548,2>500$

Vì $IQ>R$ nên điểm Q nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm Q nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm rađa này.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1km$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát $417\,km$ sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Hãy xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.



Hình 44

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(-688;-185;8)$ và nhận $\vec{u}=(91;75;0)$ làm véctơ chỉ phương là $\begin{cases} x=-688+91t \\ y=-185+75t \\ z=8 \end{cases}$.

Gọi B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa. Vì $B\in d \Rightarrow B(-688+91t;-185+75t;8)$.

Vì B là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa nên $OB=417 \Leftrightarrow \sqrt{(-688+91t)^2+(-185+75t)^2+8^2}=417$

$\Leftrightarrow 13906t^2-152966t+333744=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=8 \end{array}\right.$

Với $t=3 \Rightarrow B(-415;40;8) \Rightarrow AB \approx 353,77\,km$

Với $t=8 \Rightarrow B(-88;415;8) \Rightarrow AB \approx 848,53\,km$

Do $353,77<848,53$ vị trí máy bay xuất hiện sớm nhất là $B(-415;40;8)$.

Câu 20: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, toạ độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm toạ độ. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0;4;5)$, $B(-3;-1;3)$, $C(-2;8;9)$, $D(-7;2;-3)$. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến điểm M biết rằng khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA=3$, $MB=5$, $MC=9$, $MD=10$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

$MA=3 \Rightarrow$ Điểm M thuộc mặt cầu tâm A, bán kính $R=3$ có phương trình $x^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9$.

$MB=5 \Rightarrow$ Điểm M thuộc mặt cầu tâm B, bán kính $R=5$ có phương trình $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$.

$MC=9 \Rightarrow$ Điểm M thuộc mặt cầu tâm C, bán kính $R=9$ có phương trình $(x+2)^2+(y-8)^2+(z-9)^2=81$.

$MD=10 \Rightarrow$ Điểm M thuộc mặt cầu tâm D, bán kính $R=10$ có phương trình $(x+7)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=100$.

Ta có M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh A,B,C,D.

Toạ độ M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9 \\ (x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25 \\ (x+2)^2+(y-8)^2+(z-9)^2=81 \\ (x+7)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=100 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $x=1, y=2, z=3 \Rightarrow M(1;2;3)$.

Khoảng cách từ gốc toạ độ O đến điểm M là $OM=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}\approx 3,742$.

Câu 21: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được một khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ.

Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Bốn vệ tinh được đặt tại các điểm $A(9;-2;7)$, $B(1;4;8)$, $C(7;-3;-5)$, $D(-4;-11;12)$. Một con tàu đang ở vị trí điểm $M(x;y;z)$ mà khoảng cách từ nó đến các vệ tinh lần lượt là $MA=\sqrt{58}, MB=\sqrt{83}$, $MC=\sqrt{173}, MD=\sqrt{97}$. Khi đó tổng bình phương tọa độ điểm M là

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(9-x;-2-y;7-z)$

$\Rightarrow MA=\sqrt{58} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-18x+4y-14z=-76 \, (1)$

$\overrightarrow{MB}=(1-x;4-y;8-z)$

$\Rightarrow MB=\sqrt{83} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-8y-16z=2 \;\; (2)$

$\overrightarrow{MC}=(7-x;-3-y;-5-z)$

$\Rightarrow MC=\sqrt{173} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-14x+6y+10z=90 \;\; (3)$

$\overrightarrow{MD}=(-4-x;-11-y;12-z)$

$\Rightarrow MD=\sqrt{97} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+8x+22y-24z=-184 \;\; (4)$

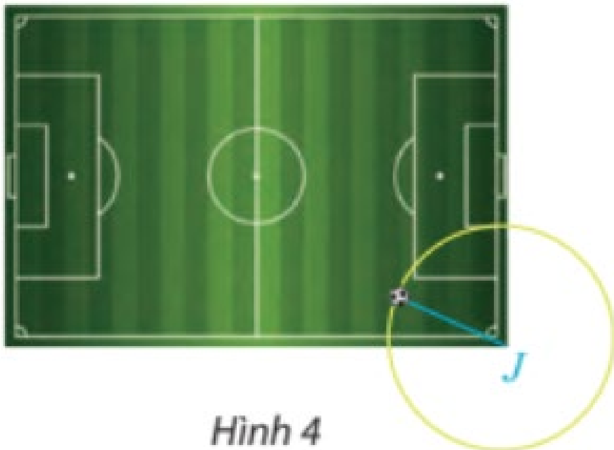
Từ (1), (2), (3), (4) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-18x+4y-14z=-76 \\ x^2+y^2+z^2-2x-8y-16z=2 \\ x^2+y^2+z^2-14x+6y+10z=90 \\ x^2+y^2+z^2+8x+22y-24z=-184 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16x+12y+2z=-78 \\ 12x-14y-26z=-88 \\ -22x-16y+34z=274 \\ x^2+y^2+z^2-18x+4y-14z=-76 (*) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}$ thỏa $(*)$.

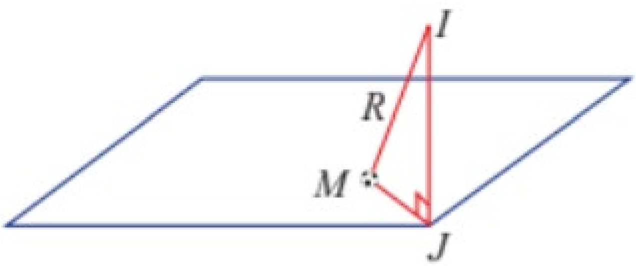
Vậy $T = x^2 + y^2 + z^2 = 78$.

Câu 22: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ toạ độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu (S): $(x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:



Hình 4

Lời giải



Mặt cầu (S) có phương trình

$(x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$

nên có tâm $I(22;4;13)$ và bán kính $R = \sqrt{194}$.

Trong không gian Oxyz, mặt sân có phương trình $z = 0$ trùng với mặt phẳng toạ độ (Oxy), suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(22;4;13)$ xuống mặt sân có toạ độ $J(22;4;0)$.

Trong tam giác vuông IJM, ta có $IJ = 13, IM = \text{R} = \sqrt{194}$, suy ra

$JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{194 - 169} = 5$

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là 5 m.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=16$ tại $M\left(\frac{10}{9};-\frac{25}{9};\frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$; $\overrightarrow{IM}=\left(-\frac{8}{9};-\frac{16}{9};\frac{16}{9}\right)=-\frac{8}{9}(1;2;-2)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) tại M nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x-\frac{10}{9}+2\left(y+\frac{25}{9}\right)-2\left(z-\frac{7}{9}\right)=0$ hay $(P):x+2y-2z+6=0$

.

Giả sử điểm $C(a;b;c)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C\in(P)$ và ba điểm A,B,C thẳng hàng, C nằm giữa A và B.

Do đó $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ với $k>0$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}=(a-3;b+2;c-1),\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-1)$.

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3=-k\\b+2=-3k\\c-1=-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-k\\b=-2-3k\\c=1-k\end{cases}\Rightarrow C(3-k;-2-3k;1-k).$$

$$C\in(P)\Rightarrow 3-k+2(-2-3k)-2(1-k)+6=0\Rightarrow k=\frac{3}{5}.$$

Suy ra $C\left(\frac{12}{5};-\frac{19}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Vậy tại vị trí C, độ cao của máy bay là $\frac{2}{5}$ km.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là $4km$. Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21;35;50)$ đến vị trí $D(5121;658;0)$ hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là: $(x-21)^2+(y-35)^2+(z-50)^2=4000^2$.

Ta có $\left|\overrightarrow{ID}\right| = \sqrt{26400629} > 4000$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu.

Đường thẳng ID đi qua điểm $I(21;35;50)$ và nhận $\overrightarrow{ID} = (5100;623;-50)$ làm véctơ chỉ phương

nên phương trình tham số của ID là $\begin{cases} x = 21 + 5100t \\ y = 35 + 623t \\ z = 50 - 50t \end{cases}$

Giả sử H là điểm cuối cùng trên ID sao cho người đi đường có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Khi đó $IH = R$.

Do $H \in ID \Rightarrow H(21 + 5100t; 35 + 623t; 50 - 50t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (5100t; 623t; -50t)$.

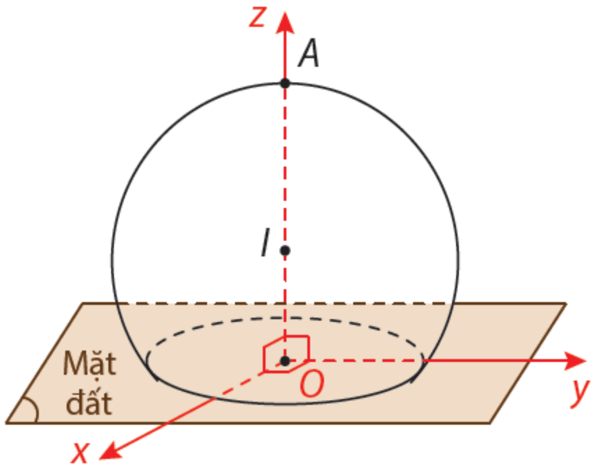
Do $IH = R \Rightarrow \sqrt{(5100t)^2 + (623t)^2 + (-50t)^2} = 4000 \Leftrightarrow \sqrt{26400629t^2} = 4000 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 0,78 \\ t \approx -0,78 \end{array}\right.$

Với $t \approx 0,78 \Rightarrow H(3999; 520,94; 11)$. Nhận thấy $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{ID}$ nên H thuộc đoạn thẳng ID.

Với $t \approx -0,78 \Rightarrow H(-3957; -450,94; 89)$. Nhận thấy $\overrightarrow{IH}$ không cùng hướng với $\overrightarrow{ID}$ nên H không thuộc đoạn thẳng ID.

Vậy vị trí cần tìm là $H(3999; 520,94; 11)$

Câu 25: Ericsson Globe (Thuỵ Điển) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020),với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ *Oxyz* bởi một mặt cầu có tâm *I*, đường kính 110 m và *OA* = 85 m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.



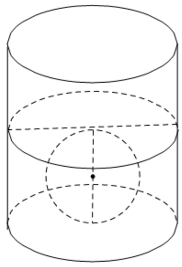
Lời giải

+) Theo giả thiết đường kính 110 m nên bán kính $R = 55\ m$.

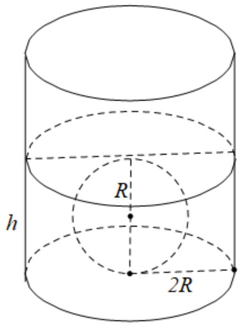
+)Ta có $OI = OA - IA = 85 - 55 = 30$ suy ra $I(0;0;30)$

+) Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + (z - 30)^2 = 55^2$

Câu 26: Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn $4,5\,cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên bi đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng. Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\,cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\,cm$. Bán kính của viên bi đó bằng?



Lời giải



Gọi r là bán kính của viên bi.

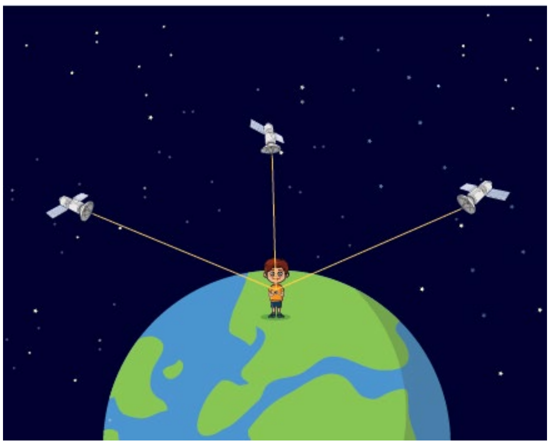
Thể tích viên bi là $V_{bi} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Phần thể tích nước dâng lên sau khi bỏ viên bi vào là $V = \pi.(5,4)^2.(2r - 4,5)$.

Vì thể tích nước dâng lên chính là thể tích của viên bi nên ta có $V_{bi} = V_n$.

Ta có phương trình $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi.(5,4)^2.(2r - 4,5) \overset{0<r<4,5}{\Leftrightarrow} r = 2,7$.

Câu 27: Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4.10^6 m$. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An $3.10^6 m$, vệ tinh thứ hai đang cách An $4.10^6 m$ và vệ tinh thứ ba đang cách An $5.10^6 m$. Biết rằng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất (1 đơn vị $=10^6 m$), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì toạ độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4;4;6)$, $I_2(8;4;3)$ và $I_3(4;9;3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn An (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

+) Gọi vị trí bạn An là $A\,(x;\,y;\,z)$ thì An chính là giao điểm của bốn mặt cầu: Trái Đất và ba mặt cầu tâm lần lượt I_1, I_2, I_3 có bán kính lần lượt là khoảng cách từ các vệ tinh đến An

+)Ta có phương trình mặt cầu của trái đất là $x^2 + y^2 + z^2 = 6,4^2 \approx 41$.

+)Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ nhất là $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=3^2=9$.

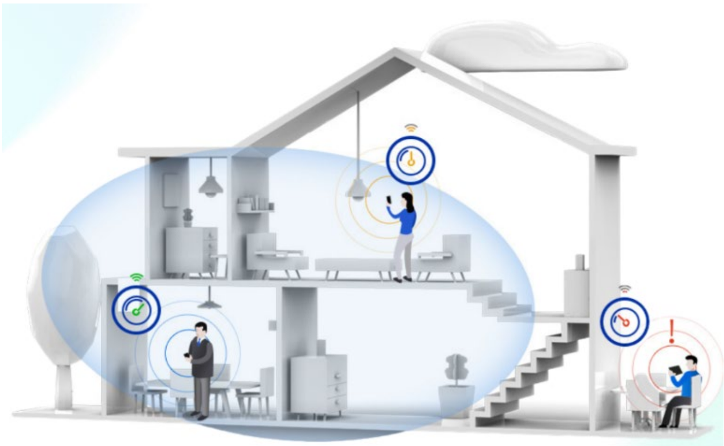
+)Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ hai là $(x-8)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4^2=16$.

+)Ta có phương trình mặt cầu của vệ tinh thứ ba là $(x-4)^2+(y-9)^2+(z-3)^2=5^2=25$.

+) Ta có hệ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6,4^2\approx 41 \\ (x-4)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=9 \\ (x-8)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16 \\ (x-4)^2+(y-9)^2+(z-3)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6,4^2\approx 41 \\ 8x+8y+12z=100 \\ 16x+8y+6z=114 \\ 8x+18y+6z=122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$

Vậy toạ độ bạn An là $A(4;4;3)$ với (1 đơn vị $=10^6 m$).

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng $11\ (m)$. Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.



Lời giải

Vùng phủ sóng của thiết bị đã cho là mặt cầu (S) tâm $A(3;1;1)$, bán kính $R=11$.

Ta có $AE=\sqrt{6^2+7^2+(m-1)^2}=\sqrt{m^2-2m+86}$,

Để điện thoại của người đó bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên thì $AE\le R \Leftrightarrow \sqrt{m^2-2m+86}\le 11 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+86\ge 0 \\ m^2-2m+86\le 121 \end{cases} \Leftrightarrow -5\le m\le 7$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-5;-4;-3;...;7\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có ranh giới của vùng phủ sóng là hình cầu (S) đường kính AB biết $A(1;3;-2), B(3;-1;0)$.

a) Viết phương trình mặt cầu (S).

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để một người dùng điện thoại di động tại điểm $C(m+2;m;m)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

c) Người dùng điện thoại di động tại điểm $D(n;n+3;n-1), n\in\mathbb{R}$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không?

Lời giải

a) Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu (S)

+) Theo giả thiết thì I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2;1;-1)$

+) $\overrightarrow{AB}=(2;-4;2)\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{6}\Rightarrow R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$.

b) Ta có $\overrightarrow{IC}=(m;m-1;m+1)\Rightarrow IC=\left|\overrightarrow{IC}\right|=\sqrt{3m^2+2}$. Để sử dụng được dịch vụ của trạm thì

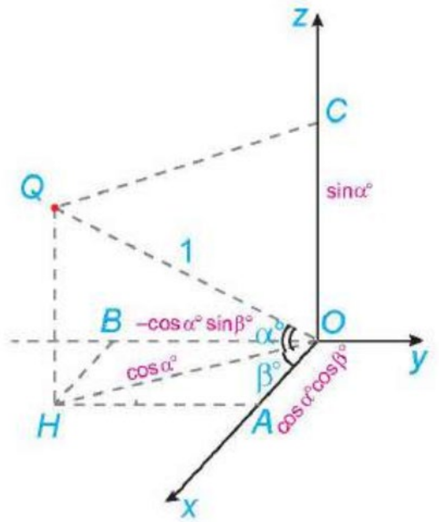
$$IC\le R\Leftrightarrow\sqrt{3m^2+2}\le\sqrt{6}\Leftrightarrow 3m^2\le 4\Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3}\le m\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta có $\overrightarrow{ID}=(n-2;n+2;n)\Rightarrow ID=\left|\overrightarrow{ID}\right|=\sqrt{3n^2+8}\ge\sqrt{8}$ với $\forall n\in\mathbb{R}\Rightarrow ID>R$ với $\forall n\in\mathbb{R}$

Vậy tại điểm D người dùng điện thoại di động sẽ không sử đụng được dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 30: Xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm trái đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực bắc N, tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, một đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6 371 km trong thực tế. Biết rằng điểm M có vĩ độ và kinh độ tương ứng là $\alpha°N, \beta°W\ (0<\alpha<90, 0<\beta<180)$ thì có tọa độ là $M(\cos\alpha°\cos\beta°;-\cos\alpha°\sin\beta°;\sin\alpha°)$. Giả sử một trạm phát sóng trên mặt đất được đặt ở vị trí $10°N, 20°W$ và một máy thu được đặt tại vị trí $80°N, 70°W$. Biết rằng trạm phát sóng có bán kính phủ sóng là 8 272 km, hỏi máy thu có thu được tín hiệu của trạm phát sóng không (các phép tính được làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư sau dấu phẩy)?



Lời giải

Giả sử trạm phát sóng được đặt tại điểm P và máy thu được đặt tại điểm Q.

Khi đó:

$P(\cos 10°\cos 20°;-\cos 10°\sin 20°;\sin 10°)$ và $Q(\cos 80°\cos 70°;-\cos 80°\sin 70°;\sin 80°)$.

Suy ra

$\overrightarrow{OP}=\left(\cos10^\circ\cos20^\circ;-\cos10^\circ\sin20^\circ;\sin10^\circ\right)$; $\overrightarrow{OQ}=\left(\cos80^\circ\cos70^\circ;-\cos80^\circ\sin70^\circ;\sin80^\circ\right)$

.

Do đó

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}=\cos10^\circ\cos20^\circ\cos80^\circ\cos70^\circ+\cos10^\circ\sin20^\circ\cos80^\circ\sin70^\circ+\sin10^\circ\sin80^\circ$

$\approx0,2809$

Vì P và Q thuộc mặt đất nên $\left|\overrightarrow{OP}\right|=1$ và $\left|\overrightarrow{OQ}\right|=1$.

$\Rightarrow\cos\widehat{POQ}=\dfrac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|.\left|\overrightarrow{OQ}\right|}\approx0,2809\ \Rightarrow\widehat{POQ}\approx73,6861^\circ$.

Đường tròn tâm O, đi qua P,Q có bán kính bằng 1 và có chu vi là $2\pi\approx6,2832$, nên cung nhỏ $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn có độ dài xấp xỉ bằng $\dfrac{73,6861}{360}.6,2832\approx1,2861$.

Khoảng cách trên mặt đất giữa hai vị trí P,Q xấp xỉ bằng: $1,2861.6371=8193,7431$ km.

Mà trạm phát sóng có bán kính phủ sóng là 8 272 km nên máy thu có thu được tín hiệu của trạm phát sóng.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(1;2;4)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $4\,km$.

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$.

b) Bạn An có vị trí tọa độ là $A(-1;0;0)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) Bạn Bình có vị trí tọa độ là $B(2;0;2)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) Giả sử bạn An đến nhà bạn Bình theo con đường là một đường thẳng. Bạn An có thể bắt được sóng trạm này khi đi được $2,38\,km$.

Lời giải

a) **Sai**

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=16.$$

b) **Sai**

Ta có $IA=\sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{6}>4=R$ nên điểm A nằm ngoài mặt cầu. Vậy bạn An không sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) **Đúng**

Ta có $IA=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2+(2-4)^2}=3<4=R$ nên điểm B nằm trong mặt cầu. Vậy bạn Bình sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) **Sai**

Gọi giao điểm của đường AB và mặt cầu là M.

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=0 \\ z=\quad 2t. \end{cases}$

Khi đó tọa độ điểm $M(-1+3t;0;2t)$.

Mà $M\in(S)$ nên $(-1+3t-1)^2+(0-2)^2+(2t-4)^2=16 \Leftrightarrow 13t^2-28t+8=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{14\pm 2\sqrt{23}}{13}$.

Với $t=\dfrac{14+2\sqrt{23}}{13} \Rightarrow M\left(\dfrac{29+6\sqrt{23}}{13};0;\dfrac{28+4\sqrt{23}}{13}\right) \Rightarrow MA\approx 6,54 \Rightarrow MA>AB \Rightarrow M$ không thuộc đoạn AB.

Với $t=\dfrac{14-2\sqrt{33}}{13} \Rightarrow M\left(\dfrac{29-6\sqrt{23}}{13};0;\dfrac{28-4\sqrt{23}}{13}\right) \Rightarrow MA\approx 1,22 \Rightarrow MA<AB \Rightarrow M$ thuộc đoạn AB. Vậy khi bạn An đi được xấp xỉ $1,22\,km$ thì bạn An có thể bắt được sóng của trạm này.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(2;1;-3)$. Trạm thu phát được thiết kế bán kính phủ sóng là $3\,km$.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.

b) Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0;1;-2)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6;-3;-1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) Có một người đi từ vị trí $I(2;1;-3)$ đến vị trí $B(6;-3;-1)$ theo một đường thẳng, vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này là $C(x;y;z)$ với $x+y+z=-1$.

Lời giải

a) Đúng

Mặt cầu có tâm $I(2;1;-3)$ và bán kính $3km$ có phương trình là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.

b) Sai

Ta có $\overrightarrow{IA}(-2;0;1)$ nên $IA=\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}<3$

Vì $IA<R$ nên người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0;1;-2)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) Sai

Ta có $\overrightarrow{IB}(4;-4;2)$ nên $IB=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=6>3$. Vì $IB>R$ nên người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6;-3;-1)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) Sai

Theo phần c, vì $IB>R$ nên người đó đứng ở ngoài vùng phủ sóng. Giả sử đường thẳng IB cắt mặt cầu tại điểm C khi đó C là vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ. Khi đó $IC=\frac{1}{2}IB$ hay C là trung điểm của IB suy ra $C(4;-1;-2)$ nên $4-1-2=1$

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên trục là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (hình vẽ dưới đây) được đặt ở vị trí $I(-4;2;5)$. Biết rằng trạm phát sóng được thiết kế với bán kính phủ sóng là 4 km.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là:

$$(x+4)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=16$$

b) Điểm $A(3;5;-6)$ nằm phía trong mặt cầu đó.

c) Nếu người dùng đứng ở vị trí điểm $B(-2;3;0)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng này.

d) Nếu người dùng đứng ở vị trí điểm $M(-4;6;2)$ thì quãng đường ngắn nhất người đó phải di chuyển để đến được vị trí có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng là 1 km.

Lời giải

a) Đúng

Mặt cầu tâm $I\left(-4;2;5\right)$, bán kính $R=4$ có phương trình là:

$$\left(x+4\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-5\right)^2=16$$

b) Sai

Ta có: $IA=\sqrt{7^2+3^2+\left(-11\right)^2}=\sqrt{179}>R$. Vậy điểm A nằm phía ngoài mặt cầu đó.

c) Đúng

Ta có: $IB=\sqrt{2^2+1^2+\left(-5\right)^2}=\sqrt{30}>R$, từ đó suy ra nếu người dùng đứng ở vị trí điểm $B\left(-2;3;0\right)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng này.

d) Đúng

Với điểm $M\left(-4;6;2\right)$ ta có: $IM=\sqrt{0^2+4^2+\left(-3\right)^2}=5>R$

Quãng đường ngắn nhất mà người đứng ở điểm $M\left(-4;6;2\right)$ phải di chuyển để đến được vùng phủ sóng là đoạn thẳng MH, với H là giao điểm của đoạn thẳng MI với mặt cầu.
Khi đó, $MH=MI-R=5-4=1$ km.

Câu 34: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I\left(-3;5;2\right)$được thiết kế với bán kính phủ sóng 4 km, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km.

a) Phương trình mặt cầu $\left(S\right)$để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $\left(x+3\right)^2+\left(y-5\right)^2+\left(z+2\right)^2=16$

b) Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là 8 km.

c) Người dùng điện thoại ở vị trí A có toạ độ $\left(-3;4;1\right)$không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Trong điều kiện giao thông thuận lợi, khoảng cách ngắn nhất để người B ở toạ độ $\left(8;6;2\right)$ di chuyển tới vùng phủ sóng là $11,05$ km.

Lời giải

a) Sai.

Ta có, trạm thu phát sóng là tâm của vùng phủ sóng $I\left(-3;5;2\right)$, bán kính phủ sóng là $R=4$ nên phương trình mặt cầu$\left(S\right)$mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $\left(x+3\right)^2+\left(y-5\right)^2+\left(z-2\right)^2=16$

b) Đúng.

Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là đường kính của mặt cầu, tức là 8 km
.

c) Sai.

Ta có: $IA=\sqrt{\left(-3+3\right)^2+\left(4-5\right)^2+\left(1-2\right)^2}=\sqrt{2}<4$ nên điểm A nằm trong mặt cầu hay người dùng điện thoại ở vị trí A có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Sai.

Khoảng cách từ người B đến trạm thu phát sóng là:

$IB = \sqrt{(8+3)^2 + (6-5)^2 + (2-2)^2} \approx 11,05$.

Khoảng cách ngắn nhất để người đó di chuyển đến vùng phủ sóng là:
$11,05 - 4 = 7,05$ (km).

Câu 35: Một tháp kiểm soát không lưu ở sân bay cao 109 m đặt một đài kiểm soát không lưu ở độ cao 105 m. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 450 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox là hướng tây, trục Oy là hướng nam và trục Oz là trục thẳng đứng (*Hình bên dưới*), đơn vị trên mỗi trục là kilômét.

(Nguồn: https://znews.vn/)

Một máy bay đang ở vị trí A cách mặt đất 8 km, cách 268 km về phía đông, 185 km về phía nam so với tháp kiểm soát không lưu và đang chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (82;76;0)$ hướng về đài kiểm soát không lưu.

a) Đài kiểm soát không lưu có toạ độ là $(0;0;0)$.

b) Vị trí A có toạ độ là $(-268;185;8)$

c) Đài kiểm soát không lưu có phát hiện được máy bay tại vị trí A.

d) Khoảng cách gần nhất giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu là $217,96$ km.

Lời giải

a) Sai.

Gốc O trùng với vị trí chân tháp và đài kiểm soát không lưu được đặt ở độ cao 105 m nên có toạ độ là $(0;0;0,105)$

b) Đúng.

Hệ trục toạ độ $Oxyz$ có trục Ox là hướng tây, trục Oy là hướng nam và trục Oz là trục thẳng đứng và vị trí A cách mặt đất 8 km, cách 268 km về phía đông, 185 km về phía nam nên có toạ độ là $(-268;185;8)$.

c) Đúng.

Khoảng cách từ máy bay đến đài kiểm soát không lưu là:

$\sqrt{(0+268)^2 + (0-185)^2 + (0,105-8)^2} \approx 325,75$ (km).

Vì $325,75 < 450$ nên đài kiểm soát không lưu có phát hiện được máy bay tại vị trí A.

d) Sai.

Gọi $I(0;0;0,105)$ là vị trí đài kiểm soát không lưu.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = -268 + 82t \\ y = 185 + 76t \\ z = 8 \end{cases}$ (t là tham số)

Gọi M là vị trí mà máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất khi đó:

$\begin{cases} M \in d \\ IM \perp d \end{cases}$ hay $M(-268+82t;185+76t;8)$ và

$\overrightarrow{IM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (-268+82t).82 + (185+76t).76 + (8-0,105).0 = 0$

$\Leftrightarrow 12500t - 7916 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1979}{3125} \Rightarrow M(-216,07;233,13;8)$

Khoảng cách gần nhất giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu là:

$\sqrt{(-216,07)^2 + (233,13) + (8-0,105)^2} \approx 317,96$ (km).

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(-2;1;3)$. Ngọn hải đăng được thiết kế bán kính phủ sáng là $5\,km$.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.

b) Người đi biển đứng ở vị trí $A(2;3;1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Người đi biển đứng ở vị trí $B(-2;-5;6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Một người đi biển đang ở vị trí $C(5;3;-2)$. Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng là 73.

Lời giải

a) Đúng

Mặt cầu có tâm $I(-2;1;3)$ và bán kính $5\,km$ có phương trình là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$

.

b) Đúng

Ta có $\overrightarrow{IA}(4;2;-2)$ nên $IA = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} < 5$

Vì $IA < R$ nên người đi biển đứng ở vị trí $A(2;3;1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Đúng

Ta có $\overrightarrow{IB}(0;-6;3)$ nên $IB=\sqrt{0^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{45}>5$

Vì $IB>R$ nên người đi biển đứng ở vị trí $B(-2;-5;6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Sai

Ta có $\overrightarrow{IC}(7;2;-5)$ nên $IC=\sqrt{7^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{78}>5$ nên người đó đứng ở ngoài vùng phủ sáng. Giả sử đoạn thẳng IC cắt mặt cầu tại điểm D khi đó CD là khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

Ta có $CD=IC-R=\sqrt{78}-5$.

Câu 37: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình minh hoạ).

Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Ta xét ví một ví dụ cụ thể sau: Cho bốn vệ tinh $\mathrm{A}(1;-1;2),\mathrm{B}(2;1;3);\mathrm{C}(-1;4;0);\mathrm{D}(2;3;1)$. Một chiếc máy bay quân sự đang ở vị trí M với $MA=3;MB=\sqrt{5};MC=\sqrt{26};MD=\sqrt{5}$.

a) Mặt cầu tâm A đi qua điểm M có bán kính là 3.

b) Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$.

c) Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và $S(B,MB)$ là $x+2y+z-6=0$.

d) Tọa độ của máy bay quân sự là $M(x;y;z)$ với $x+y+z=3$.

Lời giải

a) Đúng

Mặt cầu có tâm A và đi qua điểm M có bán kính là $MA = 3$.

b) Đúng

Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$.

c) Đúng

- Phương trình mặt cầu (S_1) là $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0\ (1)$

- Phương trình mặt cầu $S(B,MB)$ là: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=5$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+9=0\ (2)$

- Lấy (1) trừ (2) ta được: $2x+4y+2z-12=0 \Leftrightarrow x+2y+z-6=0$

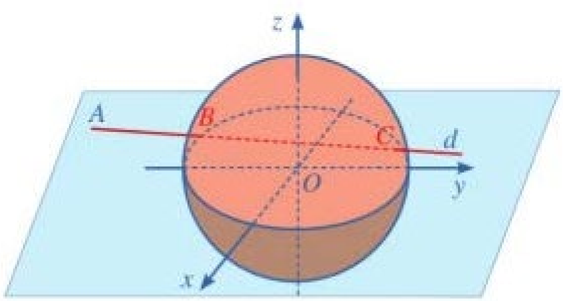
d) Sai

Vì $MA=3; MB=\sqrt{5}; MC=\sqrt{26}; MD=\sqrt{5}$ và $M(x;y;z)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9 & (1)\\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=5 & (2)\\ (x+1)^2+(y-4)^2+z^2=26 & (3)\\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=5 & (4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+4y+2z=12\\ -6x+6y-6z=-18\\ 6x-2y+2z=18\\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=1\\ z=1\end{cases}$$

Vậy $x+y+z=5$

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí $A(-800;-40;10)$, chuyển động theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-1000+100t\\ y=-200+80t\\ z=10\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=600^2$.

b) Giả sử $B\left(-1000+100b;-200+80b;10\right)$ là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa. Khi đó $b\in\left[4;5\right]$.

c) Giả sử $C\left(-1000+100c;-200+80c;10\right)$ là vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa. Khi đó $c\in\left[8;9\right]$.

d) Khoảng cách ngắn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm) giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu là $250,51\,km$.

Lời giải

a) **Đúng**

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $\left(S\right):x^2+y^2+z^2=600^2$.

b) **Đúng**

Ta có $OA=\sqrt{800^2+40^2+10^2}=30\sqrt{713}\approx 801,06\ km$.

Vì máy bay chuyển động theo đường thẳng d nên vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu $\left(S\right)$.

Gọi $M\left(-1000+100t;-200+80t;10\right)$ là giao điểm của d và $\left(S\right)$.

Khi đó

$$\left(-1000+100t\right)^2+\left(-200+80t\right)^2+10^2=600^2\Leftrightarrow 16400t^2-232000t+680100=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1\approx 10\\ t_2\approx 4,15.\end{array}\right.$$

Ta có

$t_1\approx 10\Rightarrow M_1\left(0;600;10\right)\Rightarrow M_1A=1024>OA\Rightarrow M_1\equiv C$.

$t_2\approx 4,15\Rightarrow M_2\left(-585;132;10\right)\Rightarrow M_2A\approx 275,33<OA\Rightarrow M_2\equiv B$.

Vậy $B\left(-1000+100b;-200+80b;10\right)$ là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và $b\approx 4,15$.

c) **Sai**

$C\left(-1000+100c;-200+80c;10\right)$ là vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa và $c\approx 10$.

d) **Sai**

Khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu là

$$OA-R=30\sqrt{713}-600\approx 201,06\ km.$$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), Một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt ở tại vị trí $I(2;0;0)$ .Vùng phủ sóng của trạm có bán kính bằng 2 km. Hai người bạn Mai và Nga cùng sử dụng điện thoại. Bạn Mai dùng điện thoại tại vị trí $M(2;1;1)$, bạn Nga dùng điện thoại tại vị trí $N(1;2;2)$.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x-2)^2+y^2+z^2=2$

b) Bạn Mai có thể sử dụng được dịch vụ của trạm phát sóng trên.

c) Hai bạn Mai và Nga liên lạc được với nhau.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga di chuyển tới vùng phủ sóng của trạm là $1(km)$.

Lời giải

a) Sai

Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x-2)^2+y^2+z^2=4$ nên câu a sai

b) Đúng

$IM=\sqrt{(2-2)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}<2$. Vậy câu b đúng

c) Sai

$IN=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2+(2-0)^2}=3>2$ nên bạn Nga đang đứng ở vị trí ngoài vùng phủ sóng. Do đó câu c sai

d) Đúng

Xét K là điểm bất kỳ thuộc vùng phủ sóng, khi đó K nằm trên khối cầu

Khoảng cách tính theo đường chim bay để bạn Nga đến vùng phủ sóng là NK

Ta có $NK \ge IN - IK \Leftrightarrow NK \ge 1$.Vậy khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga đến vùng phủ sóng là $1(km)$

Câu 40: Một sân khấu đã được thiết lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) để đạo diễn có thể sắp đặt ánh sáng và xác định vị trí của các diễn viên. Người đạo diễn đặt một đèn chiếu sáng ở vị trí $I(1;2;3)$ tạo ra một vùng sáng là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ bán kính $10(m)$.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=100$.

b) Diễn viên A đang đứng trên sân khấu ở vị trí $A(3;4;5)$ để chuẩn bị biểu diễn. Khi đó diễn viên A đang được đèn chiếu sáng.

c) Diễn viên B luôn đứng yên ở vị trí $B(10;11;12)$. Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B bằng $5m$.

d) Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$, còn diễn viên C có nhiệm vụ di chuyển xung quanh rìa của vùng chiếu sáng. Tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất là $11(m)$.

Lời giải

a) Đúng

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=100$.

b) Đúng

$IA=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{3}<10$

c) Sai

Ta có $IB=\sqrt{(10-1)^2+(11-2)^2+(12-3)^2}=9\sqrt{3}>10$ nên B ở ngoài vùng đèn chiếu sáng.

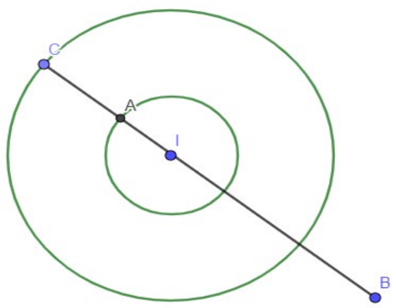
Diễn viên A biểu diễn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$ nên A nằm trên mặt cầu tâm I bán kính bằng 1

Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B khi I, A, B thẳng hàng và A nằm giữa I và **B.**

Khi đó $AB_{\min}=IB-1=9\sqrt{3}-1$

d) Sai

Diễn viên B đứng yên, diễn viên A, C cùng biểu diễn nên tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất khi A, C, B, I thẳng hàng sao cho I nằm giữa A và B; A nằm giữa C và I.



Khi đó: $(BA+BC)_{\max}=(IB+1)+(IB+10)=18\sqrt{3}+11$

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngon hải đăng được đặt ở vị trí $I(20;35;60)$, biết rằng ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$$(x-20)^2+(y-35)^2+(z-60)^2=4^2.$$

b) Điểm $B(-290;\,-165;\,3660)$ nằm phía trong mặt cầu đó.

c) Nếu người đi biển ở vị trí $C(541;137;-690)$ thì không thể nhìn được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí điểm $I(20;\,35;\,60)$ đến vị trí $D(4020;\,35;\,3060)$. Vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng ID sao cho người đi biển vẫn còn nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng là $M(-3180;35;2460)$.

Lời giải

a) Sai

Mặt cầu tâm $I(20;35;60)$, bán kính $R=4\,\text{km}=4000\,\text{m}$ có phương trình là:

$$(x-20)^2+(y-35)^2+(z-60)^2=4000^2$$

b) Đúng

Ta có: $IB=\sqrt{(-310)^2+(-200)^2+3600^2}\approx 3618,9<R$.

Do đó, điểm B nằm phía trong mặt cầu đó.

c) Sai

Với $C(541;137;-690)$, ta có: $IC=\sqrt{521^2+102^2+(-750)^2}\approx 918,9<R$.

Do đó, nếu người đi biển đứng ở vị trí $C(541;137;-690)$ thì vẫn nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Sai

Gọi $M(x;\,y;\,z)$ là điểm cuối cùng trên đoạn thẳng ID mà người đi biển vẫn còn nhìn thấy ánh sáng của ngon hải đăng. Khi đó, $IM=R=4000\,\text{m}$.

Ta có: $ID=\sqrt{4000^2+0^2+3000^2}=5000\,\text{m}$.

$\overrightarrow{IM}=(x-20;\,y-35;\,z-60)$; $\overrightarrow{ID}=(4000;\,0;\,3000)$.

Vì M thuộc đoạn thẳng ID và $\dfrac{IM}{ID}=\dfrac{4000}{5000}=\dfrac{4}{5}$ nên $\overrightarrow{IM}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{ID}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-20=\dfrac{4}{5}.4000 \\ y-35=\dfrac{4}{5}.0 \\ z-60=\dfrac{4}{5}.3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3220 \\ y=35 \\ z=2460 \end{cases} \Rightarrow M\left(3220;\,35;\,2460\right).$$

Câu 42: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thoogns GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn vệ tinh $A(3;-1;6)$, $B(1;4;8)$, $C(7;9;6)$, $D(7;-15;18)$.

a) Phương trình mặt cầu tâm A bán kính bằng 6 có phương trình là:

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=36.$$

b) Nếu điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu tâm B bán kính bằng 7 thì tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=7$.

c) Khoảng cách từ điểm $N(2;-3;5)$ đến vệ tinh D là lớn nhất.

d) Biết khoảng cách từ điểm $M(x;y;z)$ đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Khi đó $x+y+z=4$.

Lời giải

a) Đúng

Mặt cầu tâm $A(3;-1;6)$ bán kính bằng 6 có phương trình là: $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=36$

b) Sai

Mặt cầu tâm B bán kính bằng 7 có phương trình là: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=49$.

Do đó, nếu điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu tâm B bán kính bằng 7 thì tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=49$.

c) Đúng

Với bốn vệ tinh $A(3;-1;6)$, $B(1;4;8)$, $C(7;9;6)$, $D(7;-15;18)$ và một điểm $N(2;-3;5)$, ta có:

$NA=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$NB=\sqrt{1^2+(-7)^2+(-3)^2}=\sqrt{59}$

$NC=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2+(-1)^2}=\sqrt{170}$

$ND=\sqrt{(-5)^2+12^2+(-13)^2}=\sqrt{338}$

Vậy khoảng cách từ điểm $N(2;-3;5)$ đến vệ tinh D là lớn nhất.

d) Sai

Khoảng cách từ điểm $M(x;y;z)$ đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=36\\(x-1)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=49\\(x-7)^2+(y-9)^2+(z-6)^2=144\\(x-7)^2+(y+15)^2+(z-18)^2=576\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x+10y+4z=22\\8x+20y=12\\8x-28y+24z=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=2\end{cases}\Rightarrow M(-1;\,1;\,2)$$

Do đó, $x+y+z=2$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), tháp hải đăng Mũi Điện - Phú Yên (là nơi đón ánh bình minh đầu tiên trên đất liền Tổ Quốc), chân tháp được đặt vuông góc với mặt đất (chiều từ chân tháp lên đỉnh tháp cùng hướng với chiều dương của trục Oz) ở vị trí điểm $A(12.040.271;1.418.620;84)$. Ngọn đèn của hải đăng được đặt trên đỉnh của tháp hải đăng hình trụ cao 26 m so với mặt đất và sử dụng pin năng lượng mặt trời, có thể phát tín hiệu ánh sáng xa khoảng 27 hải lý tương đương 50 km.

a) Mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng có tâm $I(12.040.271;1.418.620;110)$ bán kính $R=50000(m)$.

b) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$(S):(x-12.040.271)^2+(y-1.418.620)^2+(z-84)^2=50.000^2$.

c) Người đi biển ở trên Cù lao Mái nhà tại vị trí $B(12.026.000;1.461.000;0)$ nhìn thấy ánh đèn của ngọn hải đăng.

d) Điểm cực đông của mũi Điện là điểm $C(12.040.452;1.418.462;0)$. Từ điểm C một chiếc tàu di chuyển trên mặt biển (mặt phẳng (Oxy)) theo hướng của vectơ đơn vị $\vec{i}$, để vẫn nhìn thấy ánh đèn của hải đăng thì khoảng cách tối đa tàu di chuyển là 50.000 mét.

Lời giải

a) Đúng

Khoảng cách từ tâm đèn đến mặt biển là $84+26=110\,m$.

Mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng có tâm $I(12.040.271;1.418.620;110)$, bán kính $R=50000(m)$.

b) Sai

Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$(S)\ (x-12.040.271)^2+(y-1.418.620)^2+(z-110)^2=50.000^2$.

c) Đúng

Ta có

$IB^2=(12.026.000-12.040.271)^2+(1.461.000-1.418.620)^2+(0-110)^2=1999.737.941<R^2$

Nên điểm B nằm trong mặt cầu (S). Vậy người đi biển nhìn thấy ánh đèn của ngọn hải đăng.

d) Sai

Đường thẳng Δ đi qua C và có vectơ chỉ phương là vectơ $\vec{i}=(1;0;0)$ có PTTS là

$$\begin{cases} x=12.040.452+t \\ y=1.418.462 \\ z=0 \end{cases}.$$

Tìm điểm N là giao điểm của Δ và mặt cầu (S):

$(12.040.452+t-12.040.271)^2+(1.418.462-1.418.620)^2+(0-110)^2=50.000^2$

$\Leftrightarrow (181+t)^2=2.499.962.936 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 49.818,6 \\ t\approx -50.180 \end{array}\right.$.

Do tàu chuyển động cùng hướng với hướng của vectơ đơn vị $\vec{i}$ nên $t>0 \Rightarrow t\approx 49.818,6$

$\Rightarrow N(12.090.270,6;1.418.620;0)\ \Rightarrow CN\approx 49.818,6\,m$.

Vậy tàu di chuyển tối đa 49.818 m để có thể nhìn thấy đèn của ngọn hải đăng.