

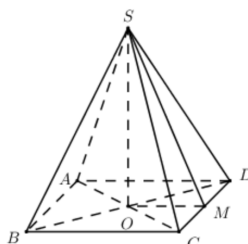
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1: Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98 m và cạnh đáy 180 m. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy?



Lời giải



Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ như hình vẽ, $O = AC \cap BD$, M là trung điểm của DC .

Khi đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ là $[S, CD, O]$.

Ta có $SM \perp CD$ và $OM \perp CD$, suy ra \widehat{SMO} là góc phẳng nhị diện $[S, CD, O]$.

Xét tam giác SMO ta có $OM = \frac{BC}{2} = 90$ (m)

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{98}{90} = \frac{49}{45} \Rightarrow \widehat{SMO} = 47,4^\circ.$$

Câu 2: Hai mái nhà trong hình bên dưới là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8$ m; $OA = 2,8$ m; $OB = 4$ m.



- a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
- c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là 0,5 m. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

Lời giải

- a) Vì hai mái nhà là hai hình chữ nhật nên góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà trong hình là góc \widehat{AOB}

Áp dụng định lý Cosin trong tam giác AOB ta có:

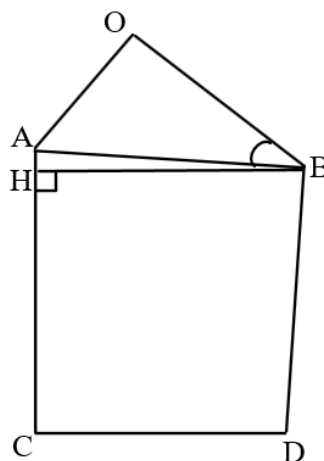
$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{2,8^2 + 4^2 - 4,8^2}{2 \cdot 2,8 \cdot 4} = \frac{1}{28} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 88^\circ$$

- b) Gọi đường giao giữa hai mái (đường nóc) là OO' .

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} OO' \perp OA \\ OO' \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow OO' \perp (OAB)$$

Mà OO' song song với mặt đất và không nằm trong mặt đất nên mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng.

- c)



Góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất là góc \widehat{OBH}

$$\widehat{OBH} = \widehat{OBA} + \widehat{ABH}$$

Áp dụng định lý Cosin trong tam giác AOB ta có:

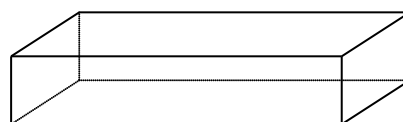
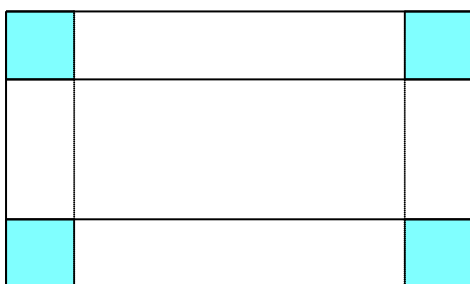
$$\cos \widehat{OBA} = \frac{BA^2 + BO^2 - OA^2}{2BA \cdot BO} = \frac{4,8^2 + 4^2 - 2,8^2}{2 \cdot 4,8 \cdot 4} = \frac{13}{16} \Rightarrow \widehat{OBA} \approx 36^\circ.$$

$$\Delta ABH \text{ vuông tại } H \text{ có: } \sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \frac{0,5}{4,8} = \frac{5}{48} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 6^\circ.$$

Do đó $\widehat{OBH} = \widehat{OBA} + \widehat{ABH} \approx 42^\circ$.

Góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất khoảng 42° .

Câu 3: Từ một tấm bìa hình chữ nhật, tại bốn góc bạn Minh cắt bỏ đi bốn hình vuông có cùng kích thước rồi gấp tấm bìa lại để được một chiếc hộp không nắp. Chiếc hộp Minh tạo được là hình gì?



Lời giải

Sau khi Minh cắt bỏ đi bốn hình vuông có cùng kích thước rồi gấp tấm bìa lại thì ta có các mặt của chiếc hộp là hình chữ nhật, đồng thời các cạnh bên vuông góc với đáy. Do đó chiếc hộp Minh tạo được là một hình hộp chữ nhật không nắp.

Câu 4: Nhân dịp sinh nhật Phương được tặng một khối Rubic là khối tứ diện đều có các cạnh bằng 7 cm . Tính tổng diện tích các mặt bên của khối Rubic đó.

Lời giải

Gọi S_1 là diện tích mỗi mặt bên của khối Rubic.

$$\text{Ta có } S_1 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2).$$

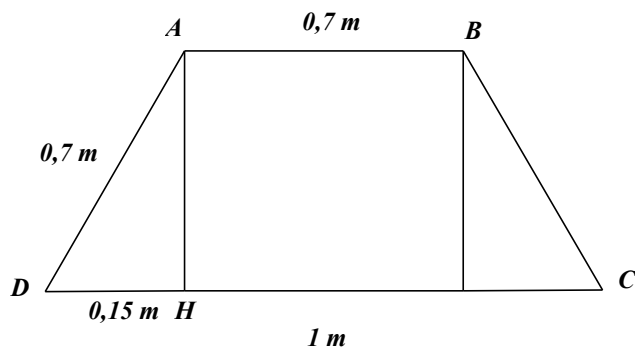
Do khối Rubic là khối tứ diện đều nên có tổng diện tích các mặt bên là:

$$S_p = 4S_1 = 4 \cdot \frac{49\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3} (\text{cm}^2).$$

Câu 5: Một người cần sơn các mặt của một cái bục (trừ đáy lớn) để đặt một bức tượng. Bục có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn 1 m , cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng $0,7\text{ m}$. Tính tổng diện tích cần sơn.

Lời giải

Xét một mặt của hình chóp cụt tứ giác đều giả sử là hình thang cân $ABCD$, chiều cao AH ta có:



$$DH = 0,15(m).$$

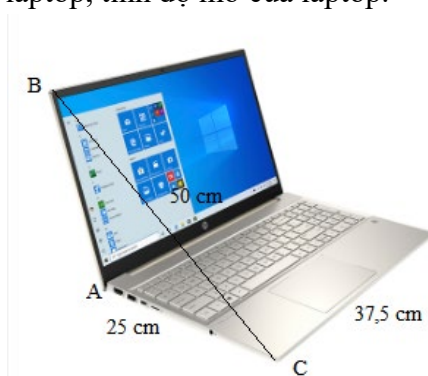
$$AH = \sqrt{0,7^2 - 0,15^2} = \frac{\sqrt{187}}{20}(m).$$

Diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = \frac{(1+0,7) \cdot \sqrt{187}}{2 \cdot 20} = \frac{17\sqrt{187}}{400}(m^2)$.

Diện tích mặt đáy nhỏ là $0,7^2 = 0,49(m^2)$.

Tổng diện tích cần sơn là: $\frac{17\sqrt{187}}{400} \cdot 4 + 0,49 \approx 2,81(m^2)$.

Câu 6: Trong hình dưới đây, chiếc laptop được mở gập nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của laptop, tính độ mở của laptop.



Lời giải

Tam giác ABC cân tại A . Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC có



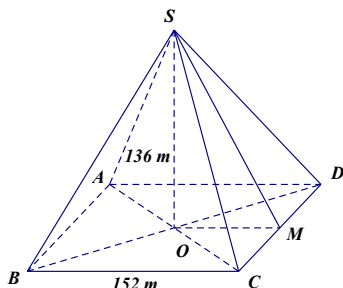
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{25^2 + 25^2 - 40^2}{2 \cdot 25 \cdot 25} = -\frac{7}{25}$$

Vậy độ mở của laptop là $\widehat{BAC} \approx 106,26^\circ$.

Câu 7: Kim tự tháp Khafre ở Ai cập có dạng là một khối chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy khoảng $152m$ và chiều cao khoảng $136m$. Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp.

Lời giải

Giả sử kim tự tháp là khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đường cao SO , M là trung điểm của CD .



Ta có $OM \perp CD$
 $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp SM$

Khi đó $((SCD), (ABCD)) = \widehat{SMO}$.

Trong tam giác vuông SOM có $OM = 76(m)$, suy ra

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{136}{76} = \frac{34}{19} \Rightarrow \widehat{SMO} \approx 60,8^\circ.$$

b. Phần trắc nghiệm

Câu 8: Hai vách ngăn bàn làm việc trong hình dưới đây cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Số đo của các góc nhị diện là



- A. 180° . B. 90° . C. 45° . D. 135° .

Lời giải

Do hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau nên các góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng đó là các góc vuông vì vậy chúng có số đo bằng 90° .

Câu 9: Nhân dịp tết trung thu, Mai làm tặng em một chiếc đèn lồng trung thu hình lăng trụ ngũ giác đều có các cạnh đáy bằng $10cm$, cạnh bên bằng $30cm$. Tổng diện tích giấy màu cần sử dụng để dán các mặt bên của chiếc đèn lồng là

- A. $300cm^2$. B. $400cm^2$. C. $1500cm^2$. D. $200cm^2$.

Lời giải

Diện tích mỗi mặt của chiếc đèn lồng là $10.30 = 300(cm^2)$.

Do chiếc đèn lồng là hình lăng trụ ngũ giác đều nên có tổng diện tích các mặt bên là $5.300 = 1500(cm^2)$.

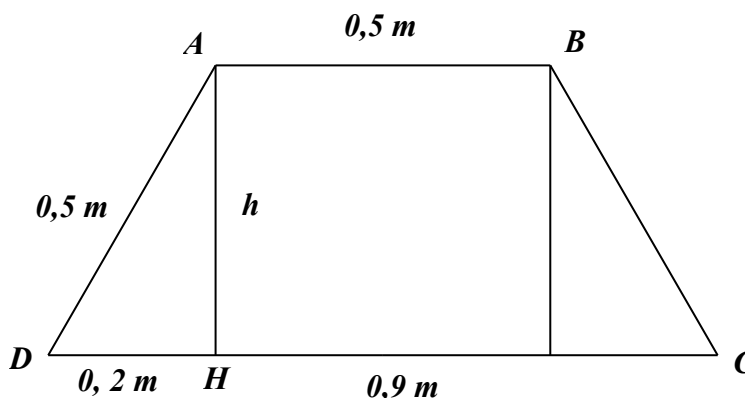
Vậy diện tích giấy màu cần sử dụng để dán các mặt bên của chiếc đèn lồng là $1500(\text{cm}^2)$.

Câu 10: Một người cần sơn các mặt của một cái bục (trừ đáy lớn) để đặt một bức tượng. Bục có dạng hình chóp cụt ngũ giác đều có cạnh đáy lớn $0,9\text{m}$, cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng $0,5\text{m}$. Tính (gần đúng) tổng diện tích cần sơn.

- A. $2,03\text{m}^2$. B. $2,34\text{m}^2$. C. $1,81\text{m}^2$. D. $1,6\text{m}^2$.

Lời giải

Xét một mặt của hình chóp cụt tứ giác đều, giả sử là hình thang cân $ABCD$, chiều cao AH ta có:

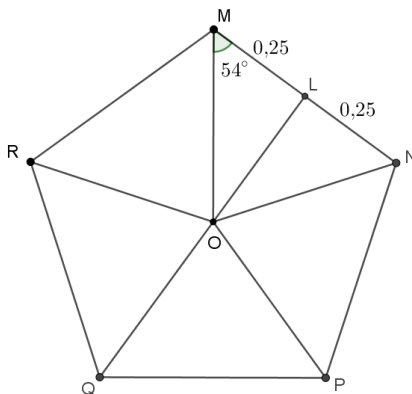


$$DH = 0,2(m)$$

$$AH = \sqrt{0,5^2 - 0,2^2} = \frac{\sqrt{21}}{10}(m).$$

Diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = \frac{(0,5 + 0,9) \cdot \sqrt{21}}{2 \cdot 10} = \frac{7\sqrt{21}}{100}(m^2)$.

Giả sử đáy nhỏ là ngũ giác đều $MNPQR$. Gọi O là tâm của ngũ giác đều, L là trung điểm MN .



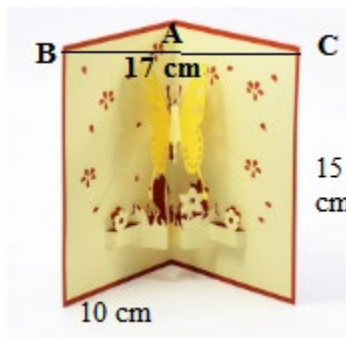
Ta có

$$S_{MNPQR} = 5S_{MON} = \frac{5}{2} \cdot OL \cdot MN = \frac{5}{4} \cdot \tan 54^\circ \cdot 0,5^2 = \frac{5 \tan 54^\circ}{16}(m^2).$$

Suy ra tổng diện tích cần sơn là

$$5S_{ABCD} + S_{MNPQR} = \frac{7\sqrt{21}}{20} + \frac{5 \tan 54^\circ}{16} \approx 2,03(m^2).$$

Câu 11: Trong hình dưới đây, tâm thiệp được mở gợn nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của tâm thiệp, tính (gần đúng) độ mở của tâm thiệp.



- A. $35,73^\circ$. B. $61,16^\circ$. C. $83,11^\circ$. D. $116,42^\circ$.

Lời giải

Tam giác ABC cân tại A . Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC có

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{10^2 + 10^2 - 17^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = -\frac{89}{200}.$$

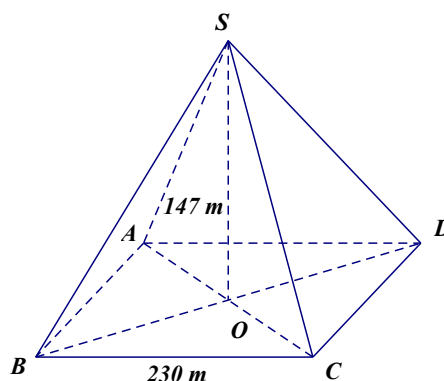
Vậy độ mở của tấm thiệp là $\widehat{BAC} \approx 116,42^\circ$.

Câu 12: Đại kim tự tháp Giza ở Ai cập có dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy khoảng $230m$ và chiều cao khoảng $147m$. Tính (gần đúng) độ dài cạnh bên của kim tự tháp.

- A. $252,4$. B. $272,96m$. C. $219,22m$. D. $227,96m$.

Lời giải

Giả sử kim tự tháp là khối chóp tứ giác đều $SABCD$, đường cao SO .

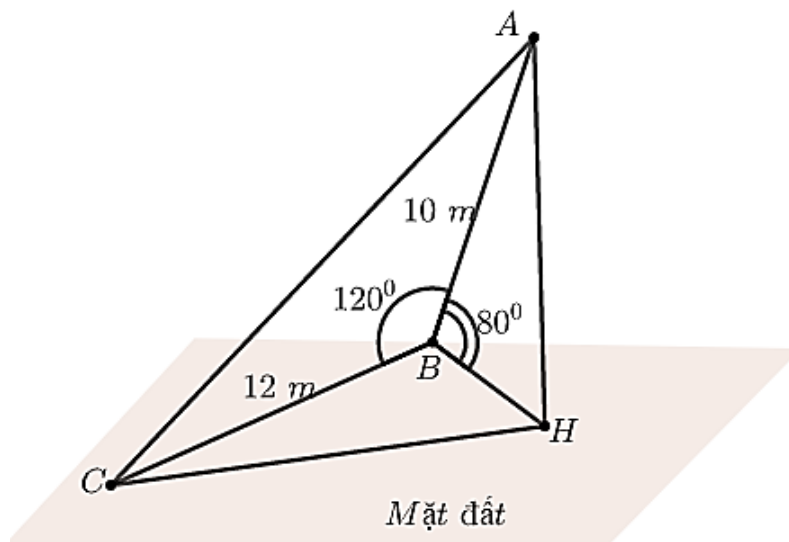


Ta có $AC = \sqrt{230^2 + 230^2} = 230\sqrt{2}m \Rightarrow OC = \frac{AC}{2} = 115\sqrt{2}(m)$.

Xét tam giác vuông SOC , có $SC = \sqrt{OC^2 + SO^2} = \sqrt{115^2 \cdot 2 + 147^2} \approx 219,22(m)$.

Câu 13: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng $10m$ và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $12m$ và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất $\Rightarrow AH$ vuông góc với mặt đất.

Vì góc giữa AB và mặt đất là 80° nên $\widehat{ABH} = 80^\circ$.

Vì AH vuông góc với mặt đất nên $AH \perp BH$

$$\Rightarrow AH = AB \cdot \sin 80^\circ = 10 \cdot \sin 80^\circ$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{91}$$

Vì H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất nên góc giữa AC và mặt đất là \widehat{ACH}

Vì AH vuông góc với mặt đất nên $AH \perp HC$

$$\Rightarrow \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{10 \cdot \sin 80^\circ}{2\sqrt{91}} \Rightarrow \widehat{ACH} \approx 31^\circ 4'$$

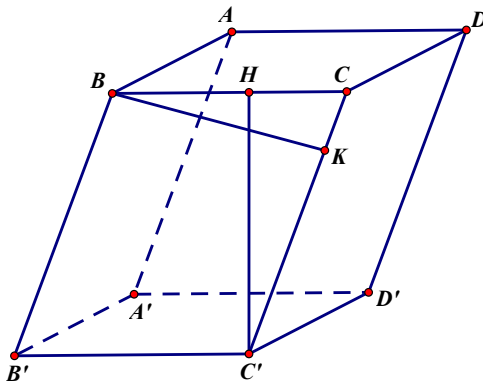
Vậy góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên khoảng $31^\circ 4'$.

Câu 14: Tòa nhà Puerta de Europa ở Tây Ban Nha có hình dạng là một khối hộp xiên. Sử dụng công cụ đo đạc của phần mềm Google Earth Pro đo được chiều cao tòa nhà là 115m, đáy tòa nhà là một hình vuông có cạnh bằng 35m, chiều dài cạnh bên bằng 117m. Biết rằng có hai mặt bên vuông góc với mặt đất, tính khoảng cách giữa hai mặt bên còn lại (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Gọi hình hộp là $ABCD.A'B'C'D'$ với các mặt bên $BCC'B'$ và $ADD'A'$ vuông góc với đáy, ta cần tính khoảng cách giữa các mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$.



Theo giả thiết $(BCC'B') \perp (ABCD)$; $(BCC'B') \cap (ABCD) = BC$, mà $CD \perp BC$ nên suy ra $CD \perp (BCC'B')$. Từ đó ta có $(BCC'B') \perp (CDD'C')$.

Kẻ $BK \perp CC'$; $C'H \perp BC \Rightarrow BK \perp (CDD'C')$; $C'H \perp (ABCD)$. Theo giả thiết $BC = 35$; $CC' = 117$; $C'H = 115$. Vậy

$$d((ABB'A'); (CDD'C')) = d(B; (CDD'C')) = BK = \frac{BC \cdot C'H}{CC'} = 34,4 \text{ (m)}$$

Câu 15: Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là 100%, tương ứng với góc 90° (độ dốc 10% tương ứng với góc 9°). Giả sử có hai điểm A, B nằm ở độ cao lần lượt là 200m và 220m so với mực nước biển và đoạn dốc AB dài 120m. Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

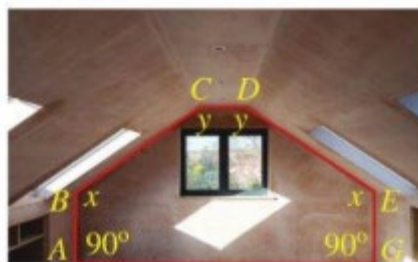
Bài giải



Ta có AB là chiều dài con dốc. Gọi AE là độ cao của điểm A so với mực nước biển, BD là độ cao của điểm B so với mực nước biển, BC là chiều cao của con dốc, độ dốc là góc \widehat{BAC} .

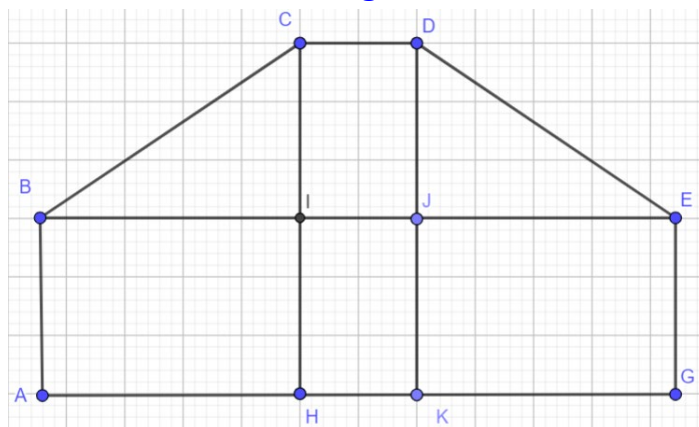
Ta có: $AE = 200\text{m}$, $BD = 220\text{m}$, $AB = 120\text{m}$. Vì $AEDC$ là hình chữ nhật nên $AE = CD = 200 \Rightarrow BC = 220 - 200 = 20$

Vì tam giác ABC vuông tại C nên $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \Rightarrow \widehat{BAC} = 9^\circ 35' 38,65''$



Hình 43

Bài giải



Kẻ $CH \perp AG$ ($H \in AG$), $DK \perp AG$ ($K \in AG$)

Gọi $I = BE \cap CH$, $J = BE \cap DK$. Vì $ABEG$ là hình chữ nhật nên $BE = AB = 12$ (m).

Do $CDKH$, $CDJI$ là hình chữ nhật nên $IH = JK = AB = 2$ (m).

$AH = GK = BI = EJ = \frac{AG - HK}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5,5$ (m). Khoảng cách từ C và D đến AG là

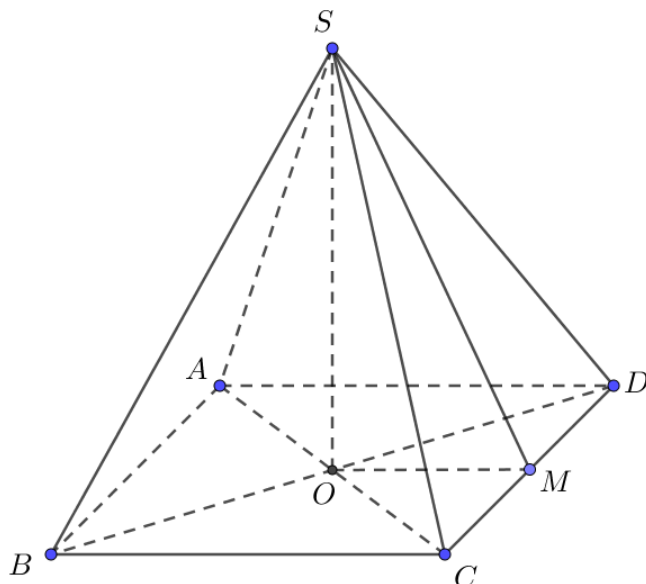
4m nên $CI = CH - IH = 2$. Xét tam giác BCI vuông tại I có

$$\tan \widehat{CBI} = \frac{CI}{BI} = \frac{2}{5,5} = \frac{4}{11} \Rightarrow \widehat{CBI} = 19^{\circ}58'59,18''. \text{ Vậy } x = 90^{\circ} + 19^{\circ}58'59,18'' = 109^{\circ}58'59,18'',$$

$$y = 180^{\circ} - 19^{\circ}58'59,18'' = 160^{\circ}1'0,82''$$

Câu 18: Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21,6m và cạnh đáy dài 34m. Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của hình chóp

Lời giải



Gọi $S.ABCD$ là hình chóp biểu diễn cho kim tự tháp ta có

$$AB = BC = CD = DA = 34m, SO = 21,6m$$

Ta có $ABCD$ là hình vuông có AC là đường chéo nên $AC = AB\sqrt{2} = 34\sqrt{2}m$,
 $OC = \frac{1}{2}AC = 17\sqrt{2}m$

Ta có ΔSOC vuông tại O ta có $SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \frac{\sqrt{26114}}{5}m$

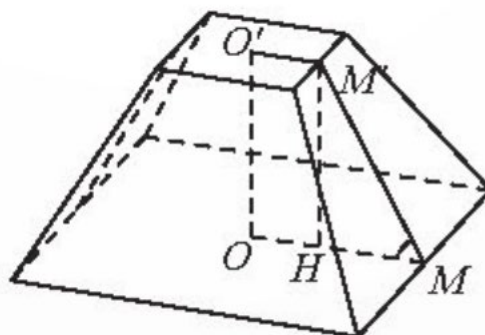
Gọi M là trung điểm CD . Ta có OM là đường trung bình của tam giác BCD nên
 $OM = \frac{BC}{2} = 17m$

Tam giác SOM vuông tại O có $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{18889}}{5}m$

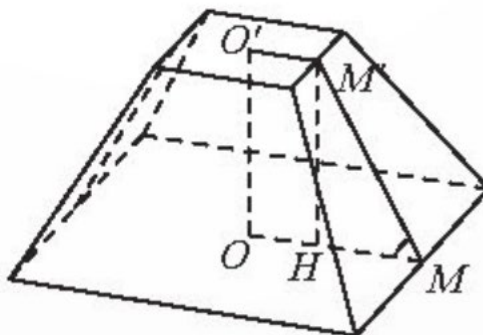
Diện tích xung quanh của hình chóp là

$$S_{xq} = 4S_{\Delta SCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} SM \cdot CD = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{18889}}{5} \cdot 34 = \frac{68\sqrt{18889}}{5} (m^2)$$

Câu 19: Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có hai cạnh đáy là $14m$ và $10m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm (Hình 10).



Lời giải



Gọi O, O', M, M' lần lượt là tâm hai đáy và trung điểm hai cạnh đáy lớn và đáy nhỏ tương ứng.

Vẽ đường cao $M'H$ của hình thang vuông $OMM'O'$.

Ta có: $\widehat{MM'O'} = 135^\circ$, $\widehat{M'MO} = 45^\circ$

$$OO' = HM = (OM - O'M') \cdot \tan \widehat{M'MO} = (7 - 5) \cdot \tan 45^\circ = 2.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (14^2 + 14 \cdot 10 + 10^2) \approx 290,7 (\text{m}^3).$$

Vậy cần phải di chuyển ra khỏi hầm khoảng $290,7 (\text{m}^3)$.

Câu 20: Trong xây dựng, **độ dốc** của mái nhà là một yếu tố quan trọng cần tính toán. vì **độ dốc mái ngói** hợp lý sẽ giúp quá trình thoát nước diễn ra nhanh chóng, hạn chế tình trạng tù đọng nước, ẩm mốc và bong tróc lớp sơn tường, do đó, việc thiết kế mái đúng tiêu chuẩn về **độ dốc** sẽ giúp tăng tuổi thọ của ngôi nhà. Ngoài ra, **độ dốc** còn đem lại tính thẩm mỹ cho ngôi nhà. **Độ dốc** của mái nhà là tang của góc tạo bởi mái nhà với mặt phẳng nằm ngang.

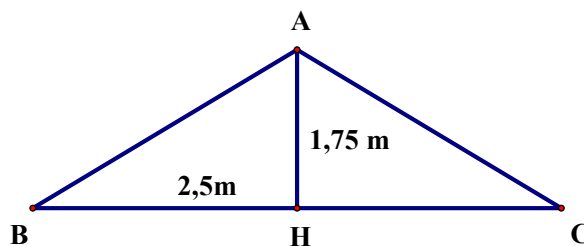


Một mái nhà (hình vẽ) có bề rộng mặt tiền là 5 m (tính từ mép ngói bên này đến mép ngói bên kia) và có chiều cao $1,75\text{ m}$. Tính **độ dốc** của mái nhà trên.

Lời giải

Gọi $\triangle ABC$ là mặt cắt ngang của mái nhà, A là điểm cao nhất của mái ngói và B, C là hai mép mái ngói. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng đáy nằm ngang (chứa 2 mép ngói)

Ta có: $BC = 5\text{ m}$, H là trung điểm của $BC \Rightarrow BH = 2,5\text{ m}$. $AH = 1,75\text{ m}$.



BH là hình chiếu của mái nhà AB lên mặt phẳng nằm ngang. Góc tạo bởi mái nhà với mặt phẳng nằm ngang là \widehat{ABH} .

Độ dốc của mái nhà là: $\tan(\widehat{ABH}) = \frac{AH}{BH} = \frac{1,75}{2,5} = \frac{7}{10}$.

Vậy **độ dốc** của mái nhà là $\frac{7}{10}$.

Câu 21: Tripod là dạng chân đỡ máy ảnh có 3 chân trụ (như hình vẽ), hỗ trợ trong việc cân bằng máy ảnh, máy quay, điện thoại trong việc quay phim, chụp ảnh chuyên nghiệp khi sử dụng trên

những địa hình không cân bằng hay phục vụ cho chụp ảnh, quay hình trong thời gian dài, chụp ảnh phong cảnh, chụp hình tập thể, ...



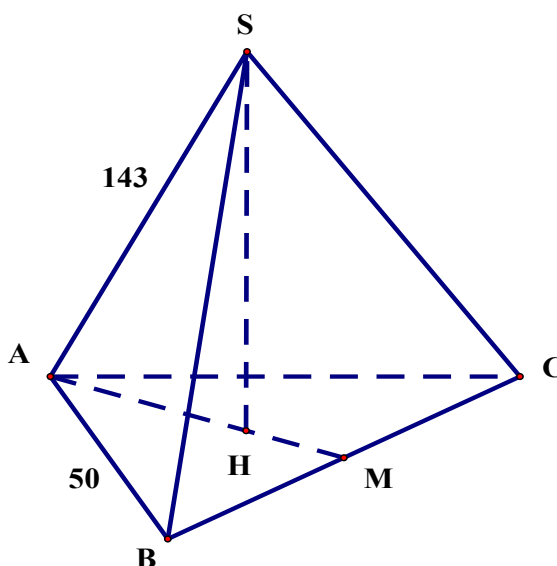
Tính chiều cao và góc tạo bởi 1 chân của 1 tripod với mặt đất, biết rằng 3 chân của tripod đang mở ra sao cho ba chân cách đều nhau 1 khoảng 50 cm và các chân của tripod dài 143 cm .

Lời giải

Gọi điểm tiếp xúc 3 chân của tripod với mặt đất là A, B, C và 3 chân của tripod là SA, SB, SC .

Ta có $\triangle ABC$ đều cạnh 50 cm , $SA = SB = SC = 143\text{ cm}$. Hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) , M là trung điểm của BC .



$$\text{Ta có: } AM = \frac{50\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}. \quad AG = \frac{2}{3} AM = \frac{50\sqrt{3}}{3}.$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{143^2 - \left(\frac{50\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 140(\text{cm}).$$

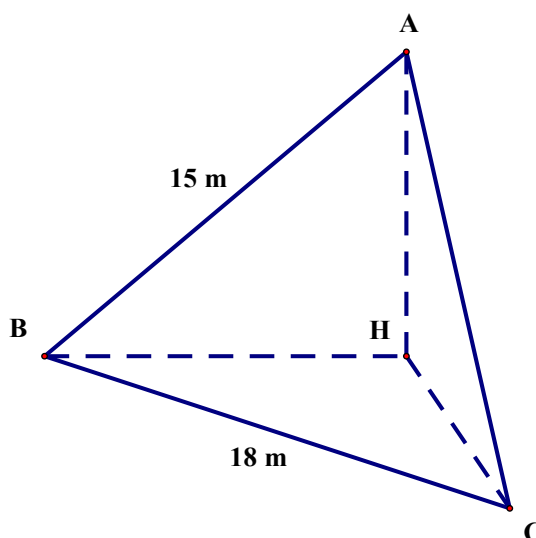
Ta có: AH là hình chiếu vuông góc của SA lên $(ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA; AH)$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H , ta có: $\cos(\widehat{SAH}) = \frac{AH}{SA} = \frac{50\sqrt{3}}{429} \Rightarrow \widehat{SAH} \approx 78^\circ$.

Vậy tripod cao $1,4m$ và góc tạo bởi 1 chân của tripod với mặt đất là 78° .

Câu 22: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng $15m$ và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm, dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $18m$ và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất, $\Rightarrow BH$ là hình chiếu vuông góc của AB lên mặt đất, suy ra góc giữa cột AB với mặt đất là $\widehat{ABH} = 80^\circ$. Khi đó,
 $AH = AB \cdot \sin \widehat{ABH} = 15 \cdot \sin 80^\circ$.

Đường thẳng chứa tia sáng mặt trời là AC , HC là hình chiếu vuông góc của AC lên mặt đất, góc tạo bởi mặt đất với tia sáng mặt trời là \widehat{ACH} .

Áp dụng định lí hàm côsin, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos 120^\circ = 819.$$

$$\Rightarrow AC = 3\sqrt{91}.$$

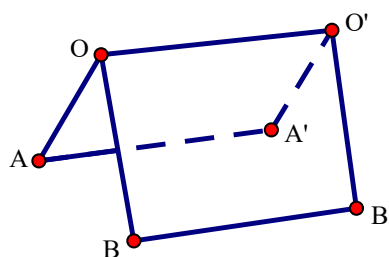
Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có: $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{15 \cdot \sin 80^\circ}{3\sqrt{91}} \Rightarrow \widehat{C} \approx 31^\circ$.

Vậy góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời là 31° .

Câu 23: Hai mái nhà trong hình bên là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 3,8m$; $OA = 2,2m$; $OB = 3m$. Tính số đo góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mái nhà.



Lời giải



Giả sử hai mái ngói là hai hình chữ nhật $OAA'O'$ và $OBB'O'$. Khi đó

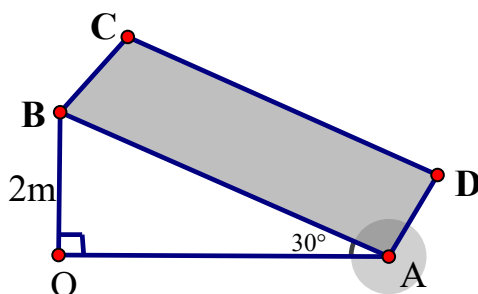
$$\begin{cases} (OAA'O') \cap (OBB'O') = OO' \\ OA \perp OO', OA \subset (OAA'O') \\ OB \perp OO', OB \subset (OBB'O') \end{cases} \text{ nên } \widehat{AOB} \text{ là góc phẳng nhị diện } [A, OO', B].$$

Áp dụng hệ quả định lý cosin cho tam giác OAB ta được:

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = \frac{2,2^2 + 3^2 - 3,8^2}{2.2.2,3} = -\frac{1}{22} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 92^\circ 36'.$$

Câu 24: Một tấm ván hình chữ nhật có chiều dài gấp ba chiều rộng được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật khối hố sâu $2m$; chiều dài của tấm ván được đặt theo chiều dài của con dốc. Tính diện tích của tấm ván cần dùng biết rằng để có thể kéo vật lên thuận lợi thì số đo của góc phẳng nhị diện tạo bởi tấm ván và mặt nền của hố là 30° .

Lời giải



Giả sử sau khi đặt tấm ván $ABCD$ xuống hồ rồi dùng một mặt phẳng vuông góc với tấm ván và cắt tấm ván theo chiều dài của nó ta được mặt cắt của hồ là tam giác vuông OAB như hình vẽ.

Khi đó góc phẳng nhị diện tạo bởi tấm ván và mặt nền của hồ là góc \widehat{OAB} , theo đề $\widehat{OAB} = 30^\circ$,

$$OB = 2(\text{m}). \text{ Do đó } AB = \frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4(\text{m}).$$

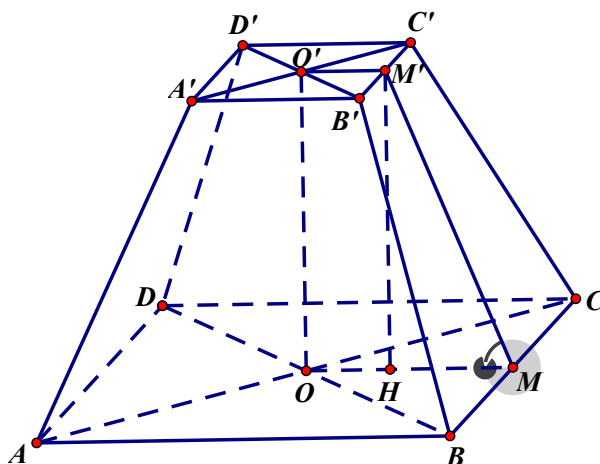
Do đó diện tích tấm ván bằng $4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}(\text{m}^2)$.

Câu 25: Hình bên là hình chụp đền Kukulcan, là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là $55,3(\text{m})$, chiều cao là $24(\text{m})$, góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α . Tính thể tích của phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) biết rằng $\tan \alpha = \frac{320}{211}$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải



Giả sử khối chóp cụt tứ giác đều cần tính thể tích là $ABCD.A'B'C'D'$ có O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$ như hình vẽ; H là hình chiếu vuông góc của M' lên OM .

Khi đó góc phẳng nhị diện của mặt bên $BCC'B'$ và mặt đáy $ABCD$ là góc $\widehat{M'MH} = \alpha$.

$$\text{Ta có } \tan \widehat{M'MH} = \frac{M'H}{MH} \Rightarrow \frac{24}{MH} = \frac{320}{211} \Rightarrow MH = \frac{24 \cdot 211}{320} = \frac{633}{40}.$$

$$\Rightarrow A'B' = 2 \cdot O'M' = 2(OM - HM) = 55,3 - \frac{633}{20} = \frac{473}{20} = 23,65.$$

Do đó thể tích phần thân đèn bằng

$$V = \frac{OO'}{3} (AB^2 + A'B'^2 + AB \cdot A'B') = \frac{24}{3} (55,3^2 + 23,65^2 + 55,3 \cdot 23,65) = 39402,06 (m^3).$$

Câu 26: Hiện nay quy định cầu thang cho người khuyết tật dùng xe lăn có độ dốc không lớn hơn 1:10 (tỷ lệ chiều cao trên đáy cầu thang). Để phù hợp với tiêu chuẩn ấy thì đáy cầu thang có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu khi biết chiều cao của cầu thang là 0.35m?



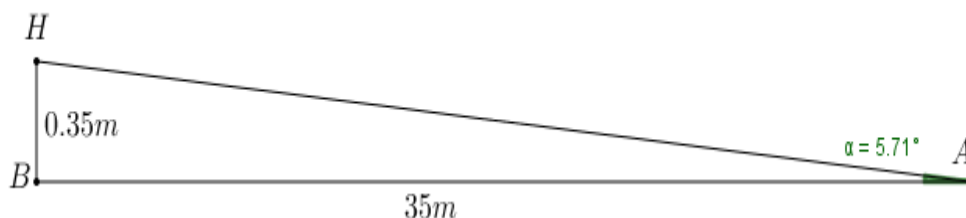
A. 25(m).

B. 35(m).

C. 45(m).

D. 50(m).

Lời giải



Ta có $\frac{BH}{BA} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{0.35}{BA} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow BA \geq 35$, nên chiều dài tối thiểu của đáy cầu thang là 35(m).

Câu 27: Ở các thành phố lớn, để giảm tình trạng tắc nghẽn giao thông và nhằm đảm bảo an toàn thì ở các ngã tư người ta thường xây dựng các cầu vượt dành cho người đi bộ. Hỏi những phương tiện tham gia giao thông phải có chiều cao như thế nào để di chuyển an toàn bên dưới cầu vượt. Biết rằng đường dẫn lên cầu dài 12 mét và hợp với đường một góc 30° .

- A.** dưới 6 mét. **B.** dưới 7m. **C.** dưới 12m. **D.** dưới 13m.

Lời giải



Khoảng cách từ mặt đường đến cầu vượt là: $BH = AB \cdot \sin 30^\circ = 6(m)$

Vậy những phương tiện tham gia giao thông chiều cao phải nhỏ hơn 6 mét.

Câu 28: Anh Hùng muốn xây 1 nhà kho lợp mái tôn như hình vẽ sau:



Biết góc nhị diện tạo bởi 2 mái nhà bằng 120° , 2 mái nhà là 2 hình chữ nhật bằng nhau, chiều rộng và chiều dài ngôi nhà lần lượt là 4m và 6m. Phần dư ra của mái tôn so với ngôi nhà mỗi chiều là 30cm. Bên thi công báo đơn giá lợp mái với anh Hùng là 740.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền làm mái nhà kho của anh Hùng gần nhất với đáp án nào sau đây?

- A.** 12 triệu đồng. **B.** 13 triệu đồng **C.** 10 triệu đồng. **D.** 15 triệu đồng.

Lời giải



Theo giả thiết: $BC = m$, $EF = 6.6m$, $AF = 30cm = 0.3m$, $FG = AB + 0.3$ (m), $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AB = AC$

$$\text{Khi đó ta có: } BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2 \cdot \cos \widehat{BAC} = 3AB^2 \Rightarrow AB = \frac{BC\sqrt{3}}{3} \approx 2.31(m)$$

$$\Rightarrow FG \approx 2.31 + 0.3 = 2.61(m); EF = 6.6(m) \Rightarrow S_{EFGH} \approx 6.6 \times 2.61 \approx 17.23(m^2)$$

Vậy giá thành để làm mái tôn nhà kho của anh Hùng là: $17.23 \times 740000 = 12750200$ (đồng)

Câu 1. Một thùng hình hộp chữ nhật có 0,5m ; chiều rộng là 0,4m ; chiều cao là 3dm . Hỏi cần phải mua bao nhiêu lít dầu để đổ đầy thùng?

Lời giải

Chiều dài là $0,5m = 5dm$; chiều rộng là $0,4m = 4dm$; chiều cao là 3dm

Thể tích thùng hộp chữ nhật là : $V = 5.4.3 = 60dm^3 = 60$ lít

\Rightarrow Cần phải mua 60 lít dầu để đổ đầy thùng.

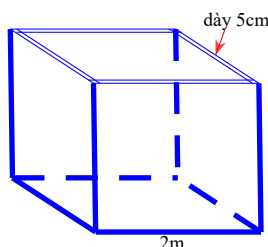
Câu 2. Một hộp đựng thực phẩm có dạng hình lập phương và có diện tích toàn phần bằng $150 cm^2$. Tính thể tích của khối hộp.

Lời giải

Diện tích toàn phần hình lập phương là $S = 6a^2 = 150 \Rightarrow a = 5$.

Suy ra thể tích $V = 125cm^3$.

Câu 3. Người ta xây một cái bể đựng nước không có nắp là một hình lập phương với cạnh đo phía ngoài bằng 2m. Bề dày của đáy bằng bề dày các mặt bên bằng 5cm (hình vẽ). Hỏi bể chứa được tối đa bao nhiêu lít nước?



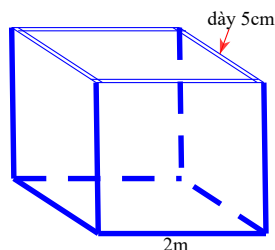
Lời giải

Cạnh hình lập phương đo phía ngoài bằng $2m = 200cm$

Chiều dài cạnh thực tế = chiều rộng cạnh thực tế = $200 - 5 - 5 = 190cm$

Chiều cao thực tế = $200 - 5 = 195cm$

Thể tích thực chứa nước là: $190.190.195 = 7039500cm^3$



Câu 4. Trường THPT Bùi Thị Xuân ở TP. Hồ Chí Minh chuẩn bị xây dựng một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật cho học sinh với kích thước như sau: chiều rộng là $6m$, chiều dài $12,5m$, chiều sâu $2m$. Sức chứa trung bình $0,5m^3$ / người (Tính theo diện tích mặt đáy).

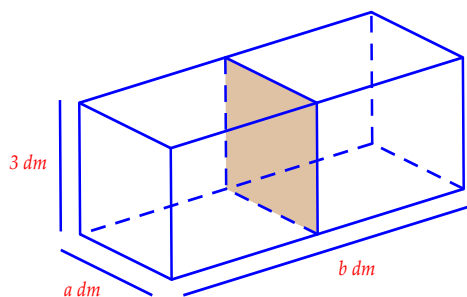
- Hồ bơi có sức chứa tối đa bao nhiêu người?
- Tính thể tích của hồ bơi? Lúc này người ta bơm vào hồ 120000 lít nước. Tính khoảng cách của mực nước so với mặt hồ? ($1m^3 = 1000$ lít).

Lời giải

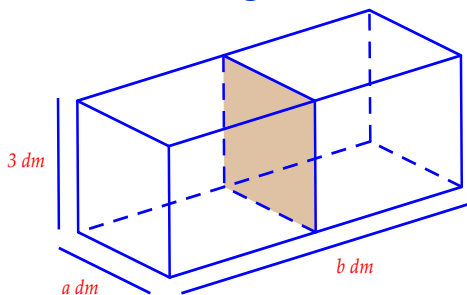
- Sức chứa tối đa: $6.12,5 : 0,5 = 150$ (người)
- Thể tích hồ: $6.12,5.2 = 150(m^3)$. Khoảng cách: $(150 - 120) : 75 = 0,4(m)$

Câu 5. Người ta thiết kế một bể cá dạng hình hộp chữ nhật bằng kính không có nắp với thể tích $72 dm^3$ và có chiều cao bằng $3 dm$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) như hình vẽ

Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bể dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



Lời giải



Có thể tích: $V = 72 \Leftrightarrow 3.ab = 72 \Leftrightarrow a = \frac{24}{b}$ (1)

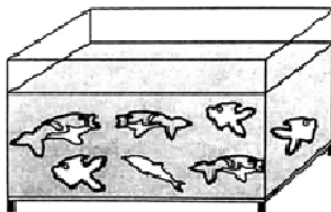
Bể cá tốn ít nguyên liệu nhất nghĩa là diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có diện tích toàn phần của bể cá là: $S_p = 3.3a + ab + 2.b3 = \frac{216}{b} + 6b + 24.$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM (Côsi): $S_p = \frac{216}{b} + 6b + 24 \geq 2\sqrt{\frac{216}{b}.6b} + 24 = 96.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{216}{b} = 6b \Leftrightarrow b = 6(b > 0).$ Từ (1), ta suy ra: $a = 4.$

Câu 6. Một bể kính nuôi cá giống có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 100 cm, chiều rộng 50 cm, chiều cao 60 cm. Mực nước trong bể cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao bể. Tính thể tích nước trong bể đó. (độ dày kính không đáng kể). Công thức tính thể tích nước trong bể là $V = S.h$ với S là diện tích mặt đáy bể và h là chiều cao mực nước trong bể.



Lời giải

Chiều cao mực nước trong bể: $h = \frac{3}{4} \cdot 60 = 45$ (cm)

Thể tích nước trong bể là: $V = 100.50.45 = 225000$ (cm³)

Câu 7. Một hộ gia đình cần xây dựng một bể chứa nước, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 24 (m³). Tỷ số giữa chiều cao của bể và chiều rộng bằng 4. Biết rằng bể chỉ có các mặt bên và mặt đáy (không có mặt trên). Chiều dài của đáy bể bằng bao nhiêu để xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Lời giải

Gọi chiều cao, chiều rộng, chiều dài của bể lần lượt là h, x, y (m) (Điều kiện: $h, x, y > 0$)

$$\text{Theo đề Câu ta có } \begin{cases} \frac{h}{x} = 4 \\ xyh = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4x \\ y = \frac{6}{x^2} \end{cases}$$

Tổng diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của bể là $S = xy + 2xh + 2yh = 8x^2 + \frac{54}{x}$

Ta đi tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Cách 1 : Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương:

Ta có $S = 8x^2 + \frac{27}{x} + \frac{27}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{27}{x} \cdot \frac{27}{x}} = 54$. Dấu '=' xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 54 khi $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{8}{3}$.

Cách 2 : Xét hàm số $S = 8x^2 + \frac{54}{x}, x > 0$.

$$S' = 16x - \frac{54}{x^2}; S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Ta có bảng biến thiên :

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
S'	-	0	+
S	$+\infty$	54	$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{8}{3}$.

Vậy khi chiều dài của bể bằng $\frac{8}{3}$ m thì ta xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Câu 8. Nhà bạn An muốn đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được $400000(\text{cm}^3)$ nước. Biết rằng chiều cao của bể gấp 2 lần chiều rộng của bể. Xác định diện tích đáy của bể cá để tiết kiệm nguyên liệu nhất.

Lời giải

Gọi a, b, c lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của khối hộp chữ nhật ($a, b, c > 0$)

Theo giả thiết ta có $V = abc = 400000$ và $c = 2a \Rightarrow 2a^2b = 400000 \Rightarrow ab = \frac{200000}{a}$

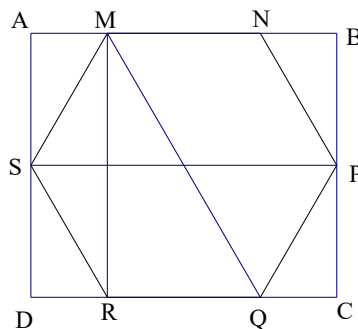
Ta có tổng diện tích xung quanh và diện tích 1 mặt đáy của bể cá là

$$S = ab + 2ac + 2bc = ab + 4a^2 + 4ab = 5 \cdot \frac{200000}{a} + 4a^2 = \frac{1000000}{a} + 4a^2 = 4 \left(\frac{250000}{a} + a^2 \right)$$

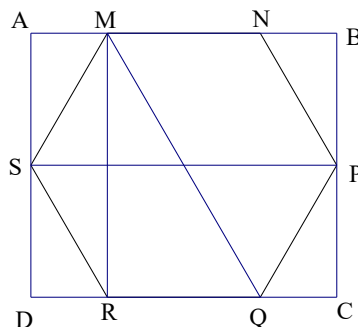
$$S = 4 \left(\frac{125000}{a} + \frac{125000}{a} + a^2 \right) \geq 4 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{125000}{a} \cdot \frac{125000}{a} \cdot a^2} = 30000$$

Suy ra S đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{125000}{a} = a^2 \Leftrightarrow a = 50 \Rightarrow S_{\text{đáy}} = ab = \frac{200000}{a} = 4000(\text{cm}^2)$

Câu 9. Cho một cây nến hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là 15cm và 5cm. Người ta xếp cây nến trên vào trong một hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho cây nến nằm khít trong hộp (có đáy tiếp xúc như hình vẽ). Tính thể tích của chiếc hộp đó.



Lời giải



Ta có $AM = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = 10, AD = 5\sqrt{3}, S_{ABCD} = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2, V = S_{ABCD} \cdot h = 750\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Câu 10. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$, đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/ m^2 . Tính chi phí thuê nhân công thấp nhất.

Lời giải

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x(m)$ và $h(m)$ là chiều cao bể. Bể có

thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3 \Leftrightarrow 2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$.

Diện tích cần xây là: $S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x \frac{250}{3x^2} + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$.

Xét hàm $S(x) = \frac{500}{x} + 2x^2, (x > 0) \Rightarrow S'(x) = \frac{-500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Lập bảng biến thiên suy ra $S_{\min} = S(5) = 150$.

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min} = 150$.

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là: $150.500000 = 75000000$ đồng.

Câu 11. Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (nắp trên), có đáy là một hình vuông. Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể và thể tích của hộp là 4 dm^3 .

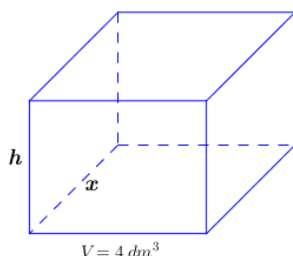
Lời giải

Gọi $x, y (x, y > 0)$ lần lượt là độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình hộp.

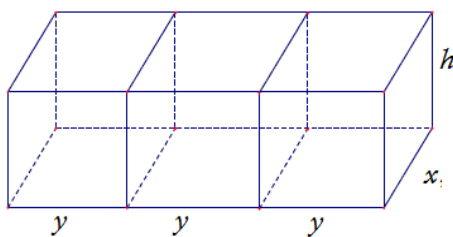
Thể tích khối hộp là $V = x^2y \Leftrightarrow 4 = x^2y \Leftrightarrow y = \frac{4}{x^2}$

Diện tích cần mạ vàng $S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{64}$

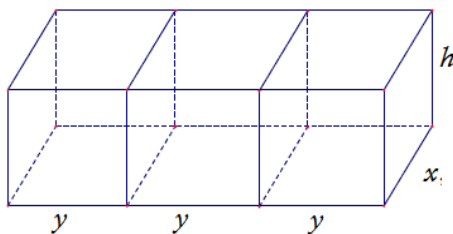
S đạt giá trị nhỏ nhất khi chỉ khi $x^2 = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$.



Câu 12. Một người xây nhà kho hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152 m^2 , với x, y lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao h cố định ($x, y, h > 0$). Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà kho thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).



Lời giải



Cách 1: Theo giả thiết, ta có $x.3y = 1152 \Rightarrow y = \frac{384}{x}$.

Để tiết kiệm chi phí nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

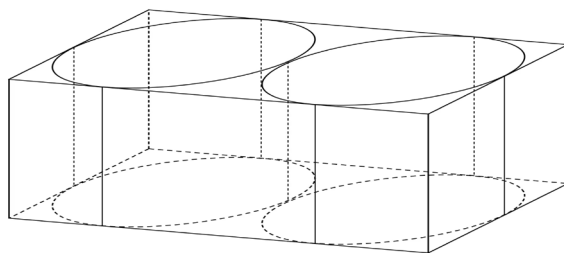
Ta có $S_{\text{tp}} = 4xh + 6yh + 3xy = 4xh + 6 \cdot \frac{384}{x} h + 1152 = 4h \left(x + \frac{576}{x} \right) + 1152$.

Vì h không đổi nên S_p nhỏ nhất khi $f(x) = x + \frac{576}{x}$ (với $x > 0$) nhỏ nhất.

Khảo sát $f(x) = x + \frac{576}{x}$ với $x > 0$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 24 \Rightarrow y = 16$.

Cách 2: BĐT AM-GM (Côsi): $x + \frac{576}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{576}{x}} = 48$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{576}{x} \Rightarrow x = 24$.

Câu 13. Bạn An làm hai cái bánh là hai khối trụ bằng nhau có tổng thể tích bằng $144\pi \text{ cm}^3$ và dùng giấy carton làm một cái hộp hình hộp chữ nhật (có đủ 6 mặt) để đựng vừa khít hai cái bánh như hình vẽ. Tính diện tích nhỏ nhất của giấy carton dùng trong việc nêu trên.



Lời giải

- ♦ Gọi bán kính của hình trụ là r (với $r > 0$), chiều cao của khối trụ là h (với $h > 0$). Chiều rộng của đáy hình hộp chữ nhật là $2r$, chiều dài của đáy hình hộp chữ nhật là $4r$.
- ♦ Tổng thể tích hai khối trụ bằng $144\pi \text{ cm}^3$. Thể tích khối trụ bằng $\pi r^2 h = 72\pi (\text{cm}^3)$.

Chiều cao của khối trụ là $h = \frac{72}{r^2}$. Chiều cao của hình hộp chữ nhật là $\frac{72}{r^2}$.

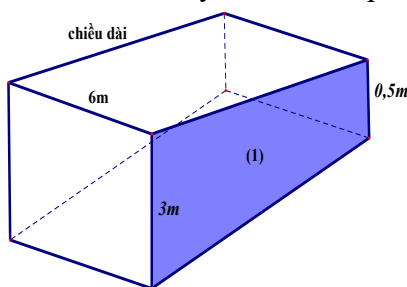
- ♦ Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là:

$$2\left(2r \cdot 4r + 4r \cdot \frac{72}{r^2} + \frac{72}{r^2} \cdot 2r\right) = 2\left(8r^2 + \frac{288}{r} + \frac{144}{r}\right) = 16\left(r^2 + \frac{54}{r}\right).$$

Ta có $r^2 + \frac{54}{r} = r^2 + \frac{27}{r} + \frac{27}{r} \geq 3\sqrt{r^2 \cdot \frac{27}{r} \cdot \frac{27}{r}} = 27$.

- ♦ Vậy diện tích nhỏ nhất của giấy carton cần dùng là $16 \cdot 27 = 432 (\text{cm}^2)$.

Câu 14. Một hồ bơi có dạng là một lăng trụ đứng tứ giác với đáy là hình thang vuông (mặt bên (1) của hồ bơi là 1 đáy của lăng trụ) và các kích thước như đã cho (xem hình vẽ). Biết rằng người ta dùng một máy bơm với lưu lượng là $42 \text{ m}^3 / \text{phút}$ và sẽ bơm đầy hồ mất 25 phút. Tính chiều dài của hồ.

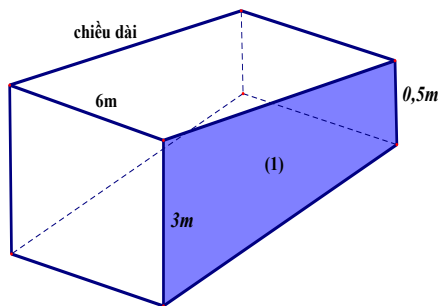


Lời giải

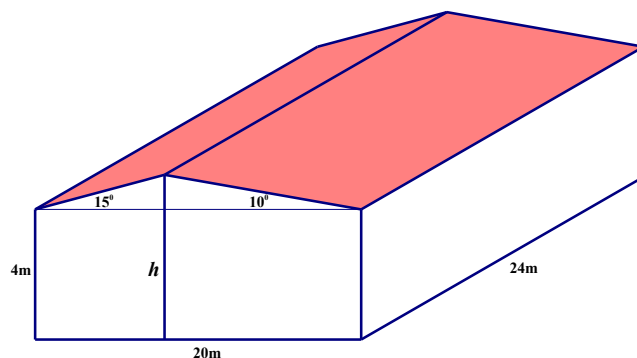
Thể tích của hồ : $42 \cdot 25 = 1050 \text{ m}^3$

Diện tích đáy lăng trụ là: $1050 : 6 = 175 \text{ m}^2$

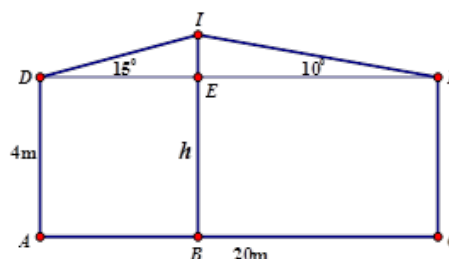
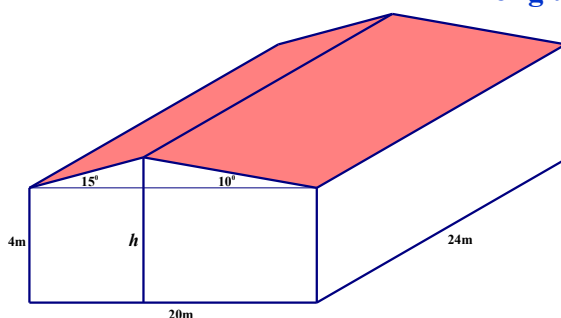
Chiều dài hồ bơi : $175 : (3 + 0,5) \cdot 2 = 100 \text{ m}$



Câu 15. Một nhà xưởng với số liệu ghi trên hình (biết h là chiều cao từ mặt đất tới nóc nhà). Tính chiều cao h của nhà (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



Lời giải

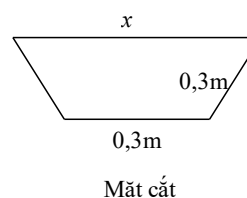
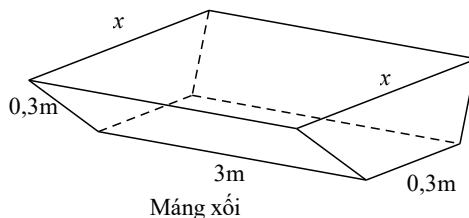
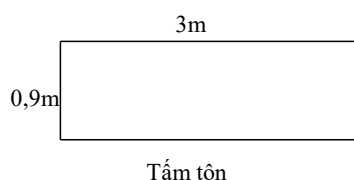


$$\triangle IEF : \hat{E} = 90^\circ \Rightarrow EF = IE \cdot \cot 10^\circ$$

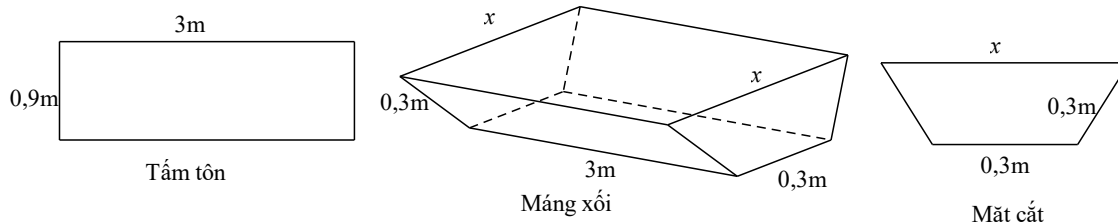
$$\triangle IED : \hat{E} = 90^\circ \Rightarrow DE = IE \cdot \cot 15^\circ \Rightarrow IE \cdot (\cot 15^\circ + \cot 10^\circ) = 20 \Rightarrow IE \approx 2,13 \text{ m}$$

Chiều cao của nhà là: $h = 4 + EI = 6,13 \text{ (m)}$.

Câu 16. Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9\text{m} \times 3\text{m}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới, biết mặt cắt của máng xối là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ không có nắp đậy phía trên. Hỏi $x \text{ (m)}$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



Lời giải



Ta có máng xối là một hình lăng trụ, có chiều cao bằng $3m$ không đổi và đáy là một hình thang cân nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích đáy lớn nhất.

$$\text{Ta có diện tích đáy: } S = \frac{1}{2}(x + 0,3) \sqrt{0,3^2 - \left(\frac{x - 0,3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{(x + 0,3)^3 (0,9 - x)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(x + 0,3)^3 (3 \cdot 0,9 - 3x) \leq \left(\frac{3x + 3 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,9 - 3x}{4}\right)^4 = (0,9)^4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x + 0,3 = 3 \cdot 0,9 - 3x \Rightarrow x = 0,6$.

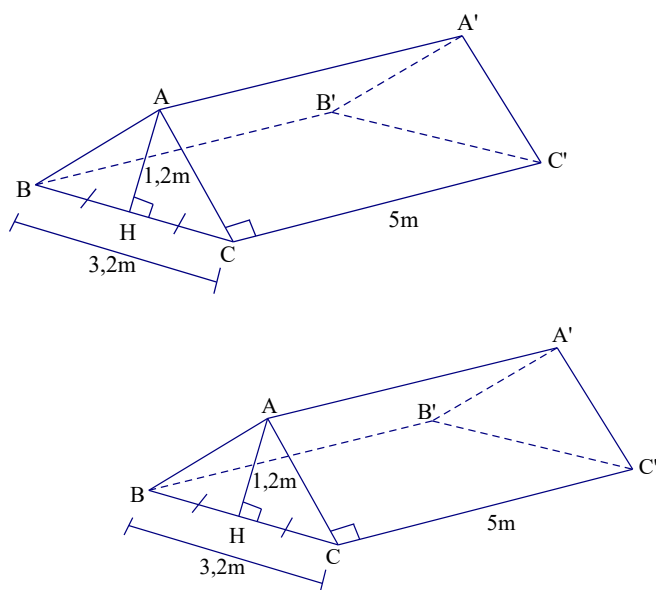
Câu 17. Một cái lều ở trại ở khu du lịch có dạng lăng trụ đứng tam giác có các kích thước trên hình:

$$AH = 1,2m; BC = 3,2m; CC' = 5m.$$

a) Tính thể tích khoảng không gian ở bên trong lều.

b) Cần phải có ít nhất bao nhiêu m^2 vải bạt để dựng lều đó? (Không tính các mép và nếp gấp của lều)

Lời giải



a) Diện tích đáy (tam giác): $S = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 1,2 = 1,92(m^2)$

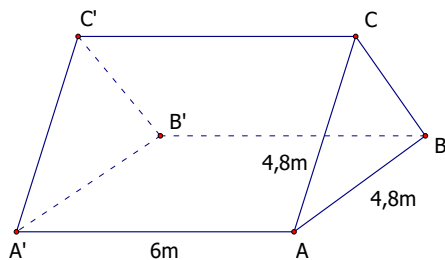
Thể tích khoảng không ở bên trong lều $V = S \cdot h = 1,92 \cdot 5 = 9,6(m^3)$

b) Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông AHC , ta tính được $AC = 2m$

Số m^2 vải bạt ít nhất cần có : $2 \cdot (1,92 + 2 \cdot 5) = 23,84m^2$

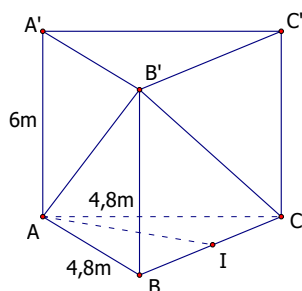
Câu 18. Có một cái lều có dạng hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy.

Biết các cạnh $AB = AC = 4,8m; BC = 4m, AA' = 6m$.



- a) Tính góc giữa 2 đường thẳng AA' và BC ; $A'B'$ và AC .
 b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$.

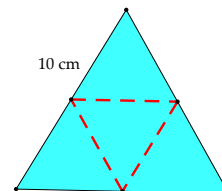
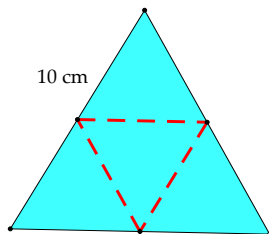
Lời giải



- a) Vì $AA' \perp (ABC) \Rightarrow BC \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow (AA', BC) = 90^\circ$
 Vì $A'B' // AB \Rightarrow (A'B', AC) = (AB, AC) = 49,2^\circ$
 b) Gọi I là trung điểm. Có $AI \perp BC, AI \perp BB' \Rightarrow AI \perp (BB'C'C)$
 Do đó hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$ là tam giác $BB'I$ có diện tích: $S_{\Delta BB'I} = \frac{1}{2} \cdot BB' \cdot BI = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6 \text{ m}^2$

Câu 19. Người ta cắt miếng bìa hình tam giác đều cạnh bằng 10cm như hình bên và gấp theo các đường kẻ, sau đó dán các mép lại để được hình tứ diện đều. Tính thể tích của khối tứ diện tạo thành.

Lời giải



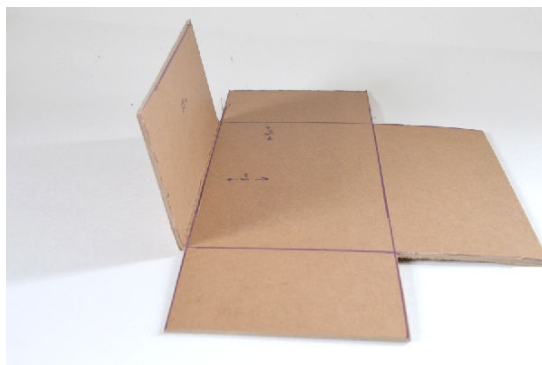
Tứ diện đều tạo thành là tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 5cm .

Diện tích đáy là $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

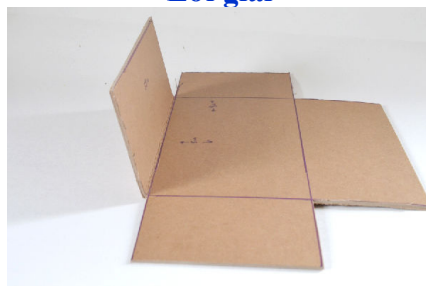
Đường cao $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$, với H là tâm đáy. Thể tích

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{12} \text{ cm}^3$.

Câu 20. Từ một miếng giấy carton hình chữ nhật có chiều rộng 30cm , chiều dài 40cm . Người ta cắt ở 4 góc hình chữ nhật 4 hình vuông có cạnh bằng 5cm rồi gấp lại thành hình hộp chữ nhật không nắp (hình vẽ). Tính thể tích của hình hộp tạo thành.



Lời giải



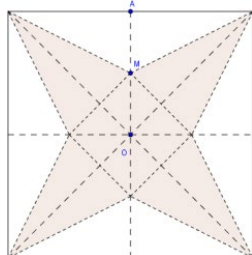
Sau khi cắt và lấy ra 4 hình vuông ở 4 góc và gấp lại, ta được đáy của hình hộp là một hình chữ nhật có kích thước là 20 cm và 30 cm, chiều cao của hình hộp là 5cm.

Do đó thể tích của hình hộp là: $V = 20.30.5 = 3000cm^3$.

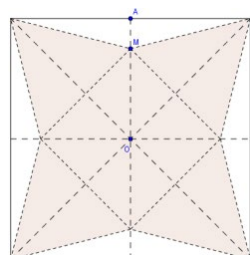
Câu 21. Hai miếng giấy hình vuông bằng nhau được hai bạn Hà và Nội cắt ra và tạo thành một hình chóp tứ giác đều như sau.

Hà: Cắt bỏ miếng giấy như **Hình 1** (với M là trung điểm OA) rồi tạo thành một hình chóp tứ giác đều.

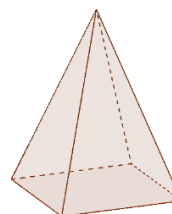
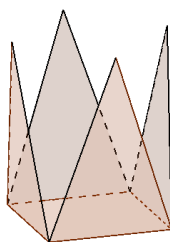
Nội: Cắt bỏ miếng giấy như **Hình 2** (với M nằm trên OA thỏa $OM = 3MA$) rồi tạo thành một hình chóp tứ giác đều.



Hình 1



Hình 2



Gọi V_1 là thể tích khối chóp của Hà, V_2 là thể tích khối chóp của Nội. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải

Gọi cạnh hình vuông là 8 .

Hình 1: Cạnh đáy của khối chóp đều là $2\sqrt{2}$.

$$OI = \frac{1}{4}OS = \frac{1}{4}.4\sqrt{2} = \sqrt{2}; \quad IS = \frac{3}{4}OS = \frac{3}{4}.4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

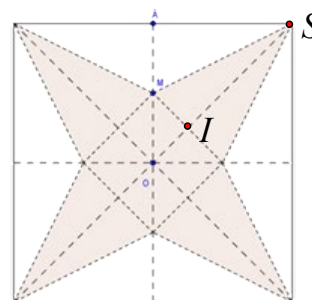
Đường cao khối chóp

$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = 4.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^2.4 = \frac{32}{3}.$$

Hình 2: Cạnh đáy của khối chóp đều là $\frac{3}{4}.4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

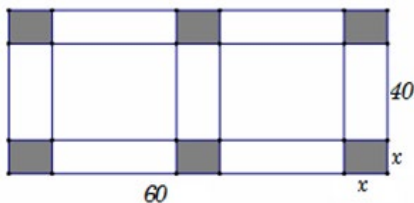
$$OI = \frac{3}{8}OS = \frac{3}{8}.4\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}; \quad IS = \frac{5}{8}OS = \frac{5}{8}.4\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$



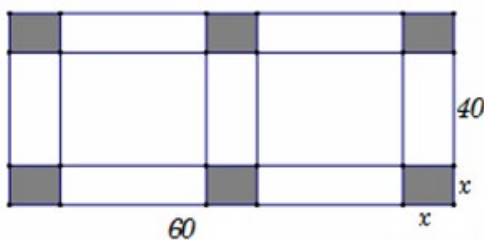
Đường cao khối chóp $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $V_2 = \frac{1}{3}(3\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{32}{3}}{12\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Câu 22. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có chiều dài là 60cm và chiều rộng là 40cm. Người ta cắt 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm bìa lại để được một hộp chữ nhật có nắp. Tìm x để khối hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải



Các kích thước khối hộp lần lượt là: $\frac{60-3x}{2}$; $40-2x$; x .

Khi đó $V_{\text{hộp}} = \left(\frac{60-3x}{2}\right)(40-2x)x = 3x^3 - 120x^2 + 1200x = f(x)$.

Khảo sát hàm $f(x)$ với $0 < x < 20$, ta được $f(x)$ lớn nhất khi $x = \frac{20}{3}$.

Câu 23. Bé An có một tấm bìa có chiều dài 20cm, chiều rộng 1cm. Bé muốn gấp một cái hộp nhỏ xinh để bỏ kẹp tóc tặng quà cho mẹ ngày 20 tháng 10. Anh trai bé đã chỉ cho bé hai cách gấp hộp. Cách thứ nhất là bé cuốn tấm bìa thành một cái hộp hình trụ không có 2 đáy có thể tích V_1 .

Cách thứ hai là bé gấp tấm bìa thành một hình hộp chữ nhật có thể tích V_2 có các kích thước như trên hình vẽ. Hãy tìm tỉ số thể tích của 2 hộp để biết được gấp theo cách nào sẽ có thể tích lớn hơn.



Lời giải

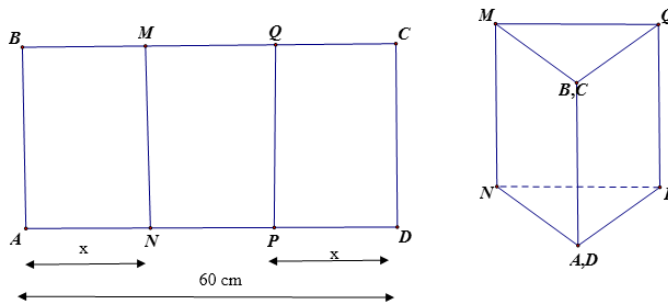
Chiều dài của tấm bìa là 20cm tức là chu vi đáy hộp hình trụ và hình hộp là 20cm. Do 2 khối có cùng chiều cao nên tỉ số thể tích sẽ tính theo tỉ số diện tích đáy của hai hình. Để tính được diện tích hình tròn đáy của khối hộp hình trụ ta phải tìm bán kính đáy.

Theo giả thiết chu vi cho là $20 = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{10}{\pi} \Rightarrow S_1 = \pi \cdot \frac{100}{\pi^2} = \frac{100}{\pi}$.

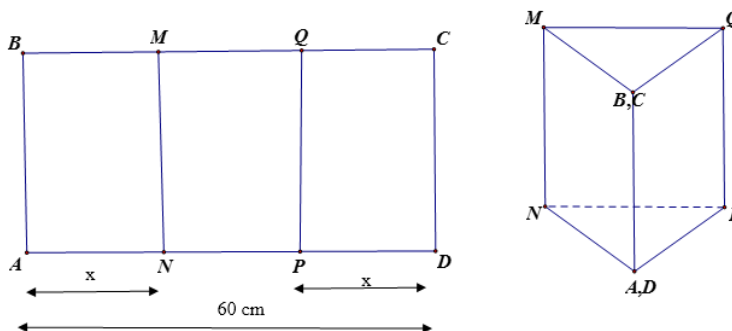
Diện tích đáy của hình hộp $S_2 = 5 \cdot 5 = 25$.

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{100}{\pi} : 25 = \frac{4}{\pi}$

Câu 24. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60$ cm. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau (như hình vẽ dưới đây) để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



Lời giải



Cách 1: $V = S.h$, trong đó $S = S_{\Delta}$ là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của khối lăng trụ. Vì chiều cao h không thay đổi nên để thể tích lớn nhất thì diện tích đáy phải lớn nhất. Diện tích tam giác đáy theo công thức Hêrông:

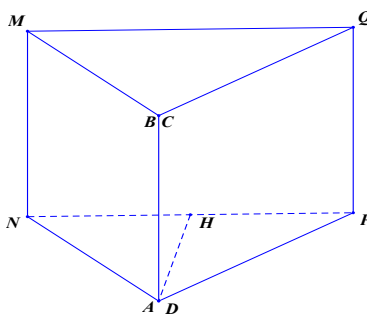
$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{30(30-x)(30-x)(30-60+2x)} \\ &= \sqrt{30(30-x)^2(2x-30)} \end{aligned}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{30(30-x)^2(2x-30)}$

$$y' = \frac{6x^2 - 300x + 3600}{2\sqrt{30(30-x)^2(2x-30)}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20(TM) \\ x = 30(L) \end{cases}$$

Cách 2:



Ta có $AN = x, (0 < x < 30)$ nên $PN = 60 - 2x$.

Gọi H là trung điểm của PN thì $HP = 30 - x$.

Xét tam giác vuông APH ta có $AH = \sqrt{AP^2 - HP^2} = \sqrt{x^2 - (30-x)^2} = \sqrt{60x-900}$ (điều kiện $x > 15$)

Diện tích tam giác APN là $S_{\Delta ANP} = \frac{1}{2} \cdot (60-2x) \cdot \sqrt{60x-900} = (60-2x) \cdot (\sqrt{15x-225}) = f(x)$,

Do chiều cao của khối lăng trụ không đổi nên thể tích khối lăng trụ lớn nhất khi $f(x)$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = (60-2x) \cdot (\sqrt{15x-225})$ trên khoảng $(15;30)$ ta có $f'(x) = \frac{-45(x-20)}{\sqrt{15x-225}}$.

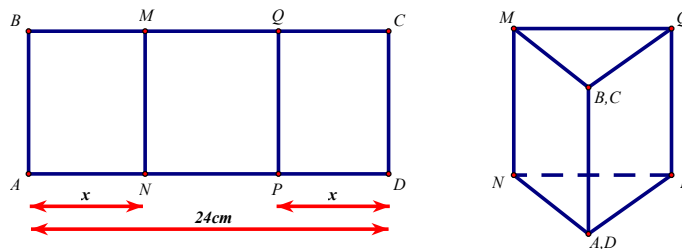
Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-45(x-20)}{\sqrt{15x-225}} = 0 \Leftrightarrow x = 20$.

Bảng biến thiên

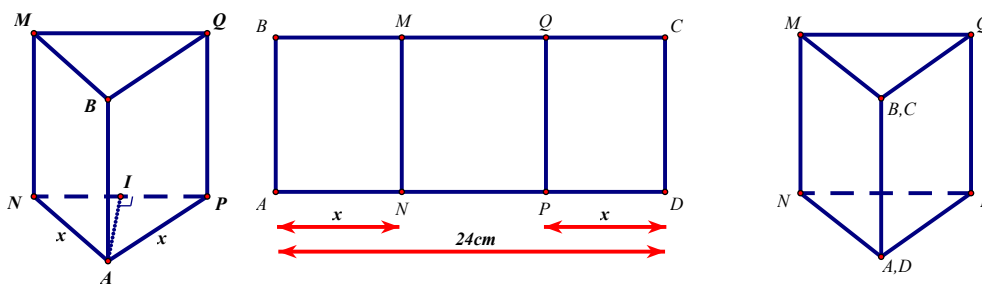
x	15	20	30		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	\nearrow	$100\sqrt{3}$	\searrow	0

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(15;30)} f(x) = 100\sqrt{3}$ khi $x = 20$.

Câu 25. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 24\text{cm}$. Ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh MN và QP vào phía trong đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



Lời giải



Gọi I là trung điểm $NP \Rightarrow IA$ đường cao của ΔANP cân tại A

$$\Rightarrow AI = \sqrt{x^2 - (12-x)^2} = \sqrt{24(x-6)}$$

$$\Rightarrow \text{diện tích đáy } S_{ANP} = \frac{1}{2} \cdot NP \cdot AI = \frac{1}{2} \cdot (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}, \text{ với } 6 \leq x \leq 12$$

$$\Rightarrow \text{thể tích khối lăng trụ là } V = S_{ANP} \cdot MN = \frac{a}{2} \cdot (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}$$

(đặt $MN = a$: hằng số dương)

• Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{2} \cdot (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}, (6 \leq x \leq 12)$:

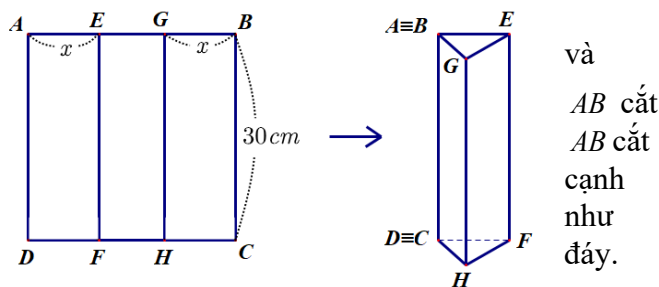
$$+y' = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{24(x-6)} + \frac{12(12-x)}{\sqrt{24(x-6)}} \right] = 6 \cdot \frac{-3x+24}{\sqrt{24(x-6)}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 8 \in (6;12)$$

+ Tính giá trị: $y(8) = 8\sqrt{3}, y(6) = 0, y(12) = 0$

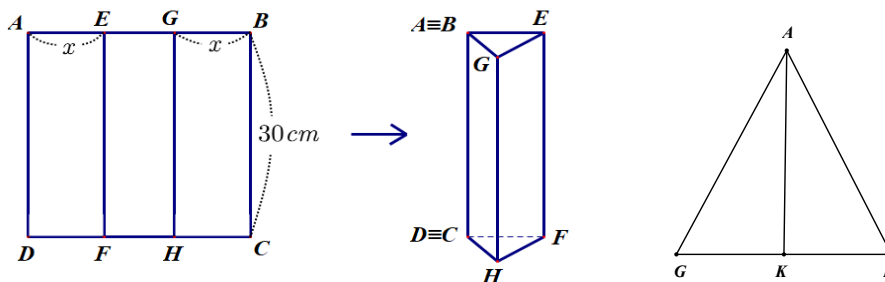
- Thể tích khối trụ lớn nhất khi $x = 8$.

Câu 26. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 30 cm .

Trên cạnh AB lấy hai điểm E, G sao cho $AE = GB = x(\text{cm})$ và điểm E nằm giữa điểm A và điểm G . Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với CD tại F ; qua G kẻ đường thẳng vuông góc với CD tại H . Người ta gấp hình vuông theo hai hình vẽ để tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết. Tìm x để thể tích hình lăng trụ lớn nhất.



Lời giải



Ta có $AE = GB = x$ ($0 < x < 15$) $\Rightarrow EG = 30 - 2x$.

Kẻ đường cao AK của $\triangle AGE$.

Vì $\triangle AGE$ cân tại A nên $KE = \frac{EG}{2} = \frac{30 - 2x}{2} = 15 - x$ (cm).

$\triangle AKE$ vuông tại $K \Rightarrow AE > KE \Rightarrow x > \frac{15}{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông AKE ta có

$$AK^2 + KE^2 = AE^2 \Leftrightarrow AK^2 = AE^2 - KE^2$$

$$\Leftrightarrow AK = \sqrt{AE^2 - KE^2} \Leftrightarrow AK = \sqrt{x^2 - (15 - x)^2} \Leftrightarrow AK = \sqrt{30x - 225}.$$

Diện tích đáy AGE là: $S_{AGE} = \frac{1}{2} AK \cdot GE = \frac{1}{2} \sqrt{30x - 225} \cdot (30 - 2x) = \sqrt{30x - 225} \cdot (15 - x)$ (cm^2).

Thể tích lăng trụ là $V = 30 \cdot \sqrt{30x - 225} \cdot (15 - x)$ (cm^3).

$$\begin{aligned} V &= 30 \cdot \sqrt{30x - 225} \cdot (15 - x) = 30 \cdot \sqrt{15 \cdot (2x - 15)} \cdot \sqrt{15 - x} \cdot \sqrt{15 - x} \\ &= 10 \cdot \sqrt{15} \cdot 3 \cdot \sqrt{2x - 15} \cdot \sqrt{15 - x} \cdot \sqrt{15 - x}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $2x - 15, 15 - x, 15 - x$ ta được

$$3 \cdot \sqrt{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \leq (2x - 15) + (15 - x) + (15 - x)$$

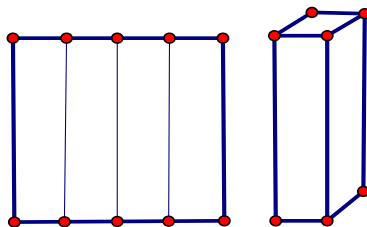
$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \leq 5 \Leftrightarrow (2x - 15)(15 - x)(15 - x) \leq 5^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \leq \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5} \Rightarrow V \leq 10 \cdot \sqrt{15} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5} \Rightarrow V \leq 750\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x - 15 = 15 - x \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy $x = 10$ thì thể tích lăng trụ lớn nhất.

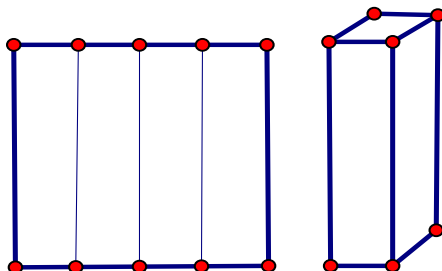
Câu 27. Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh là 4 cm , người ta gấp nó thành bốn phần đều nhau rồi dựng lên thành bốn mặt xung quanh của hình lăng trụ tứ giác đều như hình vẽ. Hỏi thể tích của khối lăng trụ này là bao nhiêu?



Lời giải

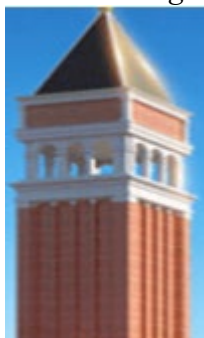
Đáy là hình vuông có cạnh bằng 1 nên diện tích đáy: $S = 1\text{cm}^2$.

Thể tích lăng trụ là: $V = h.S = 4\text{cm}^3$

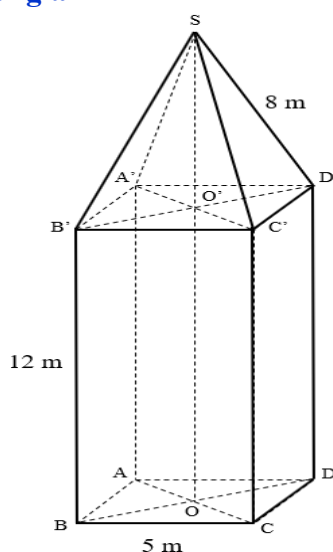
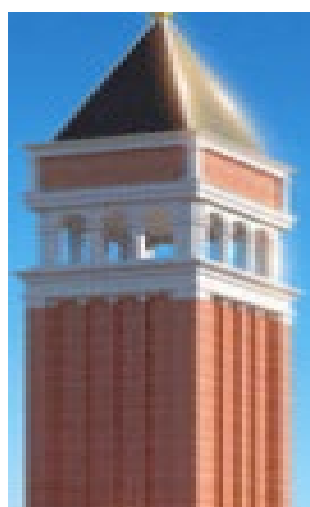


Câu 28. Một chiếc tháp có phần dưới có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh dài 5 m. chiều cao của hình hộp chữ nhật là 12 m. Phần trên của tháp có dạng hình chóp đều, các mặt bên là các tam giác cân chung đỉnh (hình vẽ). Mỗi cạnh bên của hình chóp dài 8 m.

- a) Tính theo mét chiều cao của tháp đồng hồ? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)
- b) Tính thể tích của tháp đồng hồ này? (Làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải



a) Xét hình vuông $A'B'C'D'$ có: $B'D' = \sqrt{B'C'^2 + C'D'^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow O'D' = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Chiều cao phần trên của tháp: $SO' = \sqrt{SD'^2 - O'D'^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{206}}{2}$

Chiều cao của tháp là: $12 + \frac{\sqrt{206}}{2} \approx 19,2m$

b) Thể tích phần dưới của tháp: $V_1 = S_{ABCD} \cdot OO' = 5^2 \cdot 12 = 300 (m^3)$

Thể tích phần trên của tháp: $V_2 = \frac{1}{3} S_{A'B'C'D'} \cdot SO' = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \frac{\sqrt{206}}{2} = \frac{25\sqrt{206}}{6} (m^3)$

Thể tích tháp: $V_1 + V_2 = 300 + \frac{25\sqrt{206}}{6} \approx 360 (m^3)$

Câu 29. Khi độ dài của hình lập phương tăng thêm 2 cm thì thể tích của nó tăng thêm 98 cm³. Tính độ dài cạnh của hình lập phương đã cho.

Lời giải

Gọi khối lập phương ban đầu có cạnh là a , khi đó thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Sau khi độ dài cạnh tăng thêm 2 cm thì khối lập phương có cạnh là $a + 2$,

khi đó thể tích khối lập phương là $V' = (a + 2)^3$.

Thể tích tăng thêm: $V' - V = 98 \Leftrightarrow (a + 2)^3 - a^3 = 98 \Rightarrow a = 3 (cm)$.

Câu 30. Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó tăng hay giảm bao nhiêu lần?

Lời giải

Ta có: $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S$, với h là chiều cao, S là diện tích đáy.

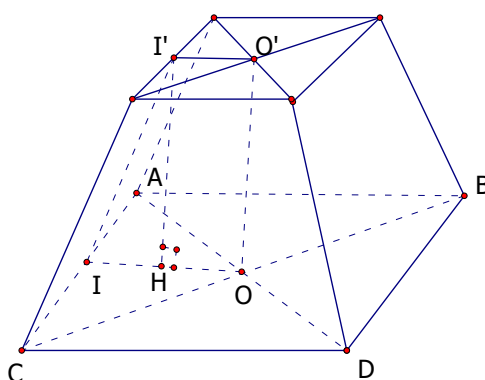
$S = \frac{x^2 a}{4 \tan\left(\frac{180^\circ}{a}\right)}$ với x là độ dài cạnh của đa giác đều, a là số đỉnh của đa giác đều.

Ycbt $\Leftrightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot nh \cdot \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 a}{4 \tan\left(\frac{180^\circ}{a}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot S = \frac{1}{n} \cdot V$. Thể tích của khối chóp đều giảm đi n lần.

Câu 31. Người ta dự định đào một hầm rượu có dạng hình chóp cụt đều cá hai cạnh đáy là 7m và 5m.

Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 120°. Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm

Lời giải



Gọi O, O', I, I' lần lượt là tâm hai đáy và trung điểm 2 cạnh đáy lớn và đáy nhỏ tương ứng.

Vẽ đường cao $I'H$ của hình thang vuông $OII'O'$. Ta có $\widehat{H'O'} = 120^\circ, \widehat{I'IO} = 60^\circ$

$$OO' = HI = (OI - O'I'), \tan \widehat{I'IO} = \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \right) \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

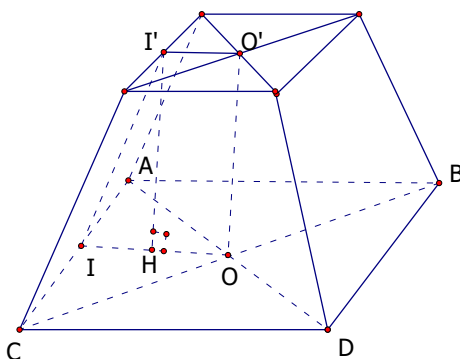
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + \sqrt{S \cdot S'} + S') = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (7^2 + \sqrt{7^2 \cdot 5^2} + 5^2) = \frac{109}{3} \cdot \sqrt{3}. \text{ hay } V \approx 62,93(m^3)$$

Vậy phải chuyển ra khỏi hầm khoảng $62,93(m^3)$ đất

Câu 32. Một chân cột bằng thép không rỉ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $4a$, cạnh đáy nhỏ bằng $2a$, chiều cao $h = 4a$ và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng a .

- Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.
- Tính thể tích chân cột nói trên theo a.

Lời giải



- Gọi O, O', I, I' lần lượt là tâm hai đáy và trung điểm 2 cạnh đáy lớn và đáy nhỏ tương ứng.

Ta có $\widehat{O'I'I}$ là góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy (đáy trên),

$\widehat{OII'}$ là góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy lớn (đáy dưới)

- Thể tích phần trụ rỗng bên trong hình chóp cụt $V_{trụ} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot a^2 \cdot 4a = 4\pi \cdot a^3$

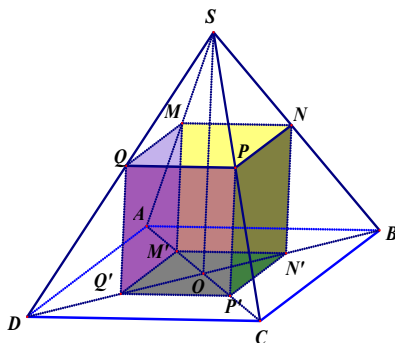
Thể tích khối chóp cụt:

$$V_{chopcut} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + \sqrt{S \cdot S'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot ((4a)^2 + \sqrt{(4a)^2 \cdot (2a)^2} + (2a)^2) = \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 28a^2 = \frac{112}{3} a^3$$

$$\text{Thể tích khối chân cột: } V_{chancot} = V_{chopcut} - V_{trụ} = \frac{112}{3} a^3 - 4\pi \cdot a^3 = \frac{(112 - 12\pi) \cdot a^3}{3}$$

Câu 33. Một ngôi nhà có dạng khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khối lăng trụ đứng $MNPQ.M'N'P'Q'$ bên trong khối chóp $S.ABCD$ sao cho M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh bên SA, SB, SC, SD và M', N', P', Q' thuộc đáy $(ABCD)$. Tính MN theo a để thể tích của khối lăng trụ $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Đặt $MN = x, 0 < x < a$.

Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow \frac{AM}{AS} = \frac{a-x}{a}$.

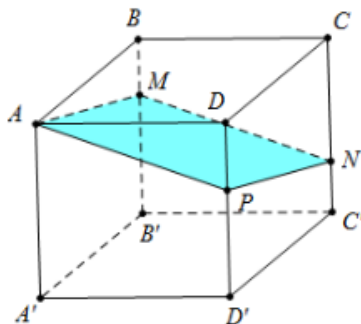
$$\frac{MM'}{SO} = \frac{AM}{AS} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MM' = \frac{a-x}{a} \cdot SO = \frac{a-x}{a} \cdot \sqrt{SA^2 - AO^2}$$

$$MM' = \frac{a-x}{a} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a-x}{\sqrt{2}}$$

$$V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = S_{MNPQ} \cdot MM' = MN^2 \cdot MM' = x^2 \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (a-x) \leq \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + a-x}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{2} = a-x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}a$ (tm).

Câu 34. Người ta cần cắt một khối lập phương thành hai khối đa diện bởi một mặt phẳng đi qua A (như hình vẽ) sao cho phần thể tích của khối đa diện chứa điểm B bằng một nửa thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{CN}{CC'}$.



Lời giải

Dựng hình như hình vẽ với $BM = AI = CK$. Đặt $AB = 1$

Khi đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 1$ theo GT suy ra $V_{ADP.BCNM} = \frac{1}{3}$

Để thấy $AINK$ là hình bình hành có đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Khi đó $AI = CK = KN \Rightarrow V_{I.AMN} = V_{K.MPN}$

Suy ra $V_{ADP.BCNM} = V_{IPKM.ADCB} = 1 \cdot CK$

Cho $V_{ADP.BCNM} = \frac{1}{3} \Rightarrow CK = \frac{1}{3} \Rightarrow CN = \frac{2}{3}$.

