CHƯƠNG

VI

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI: XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

I LÝ THUYẾT.

I. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố B khi biến cố A đã xảy ra được gọi là **xác suất của B với điều kiện A**. Kí hiệu là $P(B|A)$.

II. CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Cho A và B là hai biến cố, trong đó $P(B)>0$. Khi đó $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Chú ý 1:

1. Ta cũng ký hiệu biến cố giao của hai biến cố A và B là AB.

2. Trong thực tế, người ta thường dùng tỉ lệ phần trăm để mô tả xác suất. Chẳng hạn, phát biểu "Khả năng xảy ra một sự kiện là 20%" cũng có nghĩa là "Xác suất xảy ra sự kiện đó là 0,2", phát biểu "Tỉ lệ phế phẩm của một lô hàng là 5%" cũng có nghĩa là "Nếu chọn ra ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng, xác suất sản phẩm đó là phế phẩm là 0,05".

Chú ý 2:

1. Từ công thức xác suất có điều kiện, với $P(B)>0$, ta có $P(AB)=P(B).P(A|B)$.

2. Trong trường hợp tổng quát, người ta chứng minh được rằng với A, B là hai biến cố bất kì thì $P(AB)=P(B).P(A|B)$. Công thức trên gọi là ***công thức nhân xác suất*** cho hai biến cố.

Chú ý 3:

1. Với mọi biến cố A và B, trong đó $P(B)>0$, ta có $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

2. Với A và B là hai biến cố độc lập, trong đó $0<P(B)<1$, người ta chứng minh được rằng

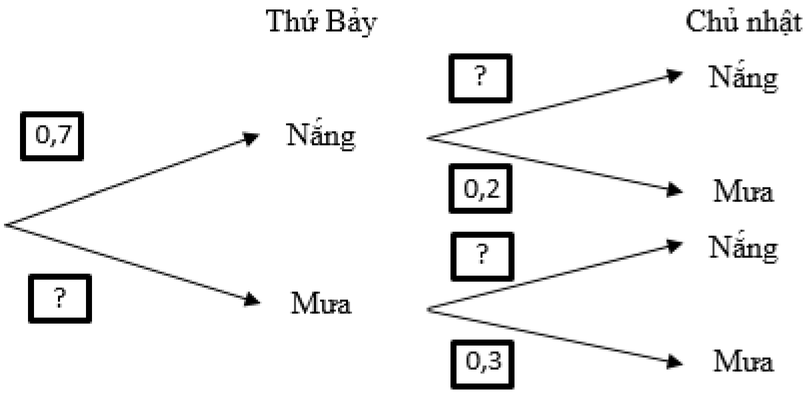
$$P(A|B)=P(A|\overline{B})=P(A).$$

Từ đẳng thức trên, ta thấy khi A và B độc lập thì việc biến cố B xảy ra hay không xảy ra không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố A.

III. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

Bạn Việt chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7.

Hãy tìm các giá trị thích hợp thay vào $\boxed{?}$ ở sơ đồ hình cây sau:



Hướng dẫn:

Ở, gọi A là biến cố "Ngày thứ Bảy trời nắng" và B là biến cố "Ngày Chủ nhật trời mưa".

Ta có $P(A)=0,7$; $P(B|A)=0,2$; $P(B|\overline{A})=0,3$.

Do đó $P(\overline{A})=1-P(A)=0,3$; $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=0,8$; $P(\overline{B}|\overline{A})=1-P(B|\overline{A})=0,7$.

Áp dụng công thức nhân xác suất, ta có xác suất trời nắng vào thứ Bảy và trời mưa vào Chủ nhật là

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0,7.0.2=0,14$$

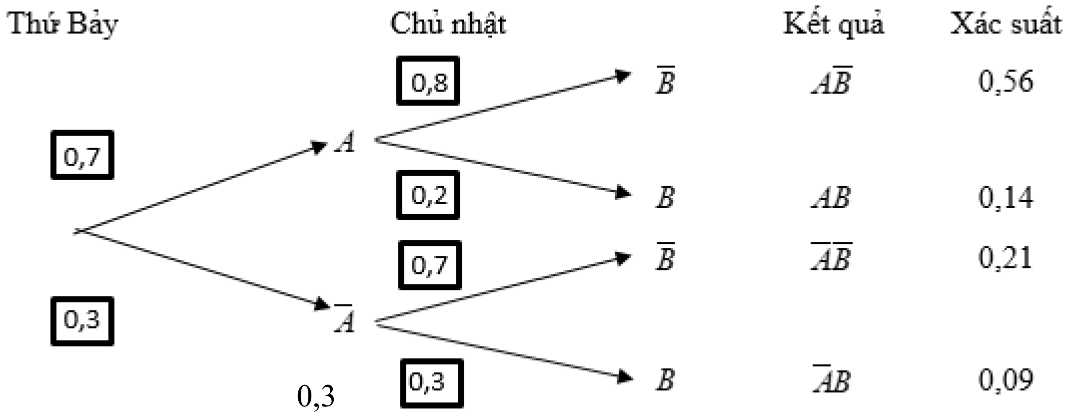
Tương tự, ta có

$$P(A\overline{B})=P(A).P(\overline{B}|A)=0,7.0,8=0,56;$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,3.0,3=0,09;$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}).P(\overline{B}|\overline{A})=0,3.0,7=0,21.$$

Ta có thể biểu diễn các kết quả trên theo sơ đồ cây như sau:



Nhận xét: Trên sơ đồ hình cây:

- Xác suất của các nhánh trong sơ đồ hình cây từ đỉnh thứ hai là xác suất có điều kiện.
- Xác suất xảy ra của mỗi kết quả bằng tích các xác suất trên các nhánh của cây đi đến kết quả đó.

Ví dụ: Ở một sân bay, người ta sử dụng một loại máy soi tự động phát hiện hàng cấm trong hành lí kí gửi. Máy phát chuông cảnh báo với 95% các kiện hành lí có chứa hàng cấm và 2% các kiện hành lí không chứa hàng cấm. Tỉ lệ các kiện hành lí có chứa hàng cấm là 0,1%.

Chọn ngẫu nhiên một kiện hành lí để soi bằng máy trên. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

M: "Kiện hành lí có chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo";

N: "Kiện hành lí không chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo".

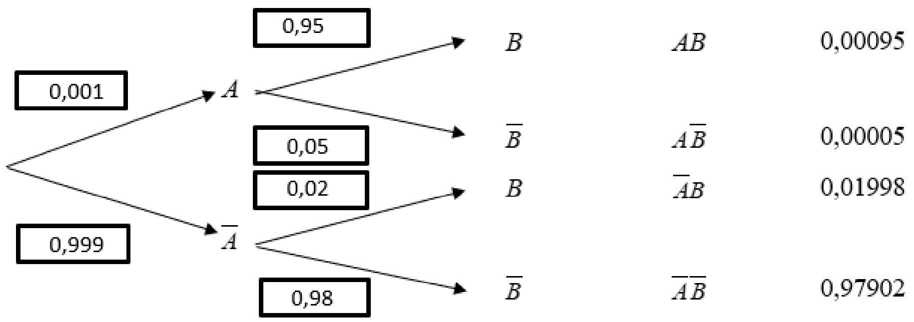
Giải

Gọi A là biến cố "Kiện hành lí có chứa hàng cấm" và B là biến cố "Máy phát chuông cảnh báo". Ta có

$$P\left(B|A\right)=0,95\,;\; P\left(B|\overline{A}\right)=0,02\,;\; P\left(A\right)=0,001\,.$$

Do đó $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=0,999$; $P\left(\overline{B}|A\right)=1-P\left(B|A\right)=0,05$; $P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)=1-P\left(B|\overline{A}\right)=0,98$.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Do $M=AB$ nên $P\left(M\right)=P\left(AB\right)=0,00095$.

Do $N=\overline{A}B$ nên $P\left(N\right)=P\left(\overline{A}B\right)=0,01998$.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Thư viện trường THPT Chuyên Quốc Học có 60% tổng số sách là sách Văn học, 18% tổng số sách là sách tiểu thuyết và là sách Văn học. Chọn ngẫu nhiên một cuốn sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách tiểu thuyết, biết rằng đó là quyển sách về Văn học.

Câu 2: Kết quả khảo sát những bệnh nhân là học sinh bị tai nạn xe máy điện về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 60%.

Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%.

Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là 15%.

Hỏi theo kết quả điều tra trên, việc đội mũ bảo hiểm đúng cách đối với học sinh khi di chuyển bằng xe máy điện sẽ làm giảm khả năng bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn bao nhiêu lần?

Câu 3: Một cửa hàng thời trang ước lượng rằng có 86% khách hàng đến cửa hàng mua quần áo là phụ nữ, và có 25% số khách mua hàng là phụ nữ cần nhân viên tư vấn. Biết một người mua quần áo là phụ nữ, tính xác suất người đó cần nhân viên tư vấn.

Câu 4: Một công ty xây dựng đấu thầu hai dự án độc lập. Khả năng thắng của dự án thứ nhất là $0,5$ và dự án thứ hai là $0,6$. Tính xác suất để công ty thắng thầu dự án thứ hai biết công ty thắng thầu dự án thứ nhất.

Câu 5: Cầu thủ X có tỷ lệ sút penalty không dẫn đến bàn thắng là 25% và tỷ lệ sút penalty bị thủ môn cản phá là 20%. Cầu thủ X sút penalty 1 lần. Tính xác suất để thủ môn cản được cú sút của cầu thủ X, biết rằng cầu thủ X sút không dẫn đến bàn thắng.

Câu 6: Kết quả khảo sát về điểm số của học sinh về mối liên hệ giữa việc thức dậy sớm học bài buổi sáng và bài kiểm tra đạt điểm giỏi cho thấy.

Tỉ lệ học sinh đặt điểm giỏi là 10%.

Tỉ lệ học sinh thức dậy sớm để học bài là 30%.

Tỉ lệ học sinh thức đạt điểm giỏi và dậy sớm học bài là 20%.

Hỏi theo kết quả điều tra trên, việc thức dậy sớm để học bài sẽ làm tăng kết quả đạt điểm giỏi nên bao nhiêu lần?

Câu 7: Trong một xưởng sản xuất có 800 bóng đèn, qua kiểm nghiệm chất lượng người ta thấy trong đó có 750 bóng đèn tốt và 50 bóng đèn kém không đạt chất lượng. Các bóng đèn tốt có 3 màu: đỏ, trắng, xanh và số bóng đèn màu đỏ chiếm 40%. Chọn ra ngẫu nhiên một bóng trong 800 bóng đèn. Xác suất để bóng đèn được chọn có màu đỏ, biết rằng bóng đèn đó tốt là?

Câu 8: Một lô các sản phẩm do hai nhà máy sản xuất, biết rằng số sản phẩm của nhà máy thứ nhất gấp ba lần số sản phẩm của nhà máy thứ hai. Tỉ lệ sản phẩm tốt của nhà mấy thứ nhất là $0,8$ và nhà mấy thứ hai là $0,7$. Lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là tốt.

Câu 9: Tỉ lệ người nghiện thuốc lá ở một vùng là 30%. Biết tỉ lệ viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là $a\%$ còn người không nghiện là 40%. Gặp ngẫu nhiên một người trong vùng thì xác suất để người đó nghiện thuốc và bị viêm họng bằng $0,21$; xác suất để người đó không nghiện thuốc và bị viêm họng là $b\%$. Tính $a+b$.

Câu 10: Có 1 kho bia kém chất lượng chứa các thùng giống nhau (24 lon/thùng) gồm 3 loại: loại I để lẫn mỗi thùng 5 lon quá hạn sử dụng, loại II để lẫn mỗi thùng 3 lon quá hạn và loại III để lẫn mỗi thùng có 4 lon quá hạn. Biết số lượng thùng loại I gấp 2 lần số lượng thùng loại II và số thùng loại II gấp 3 lần thùng

loại III. Chọn ngẫu nhiên 1 thùng từ trong kho, từ đó chọn ngẫu nhiên 10 lon. Tính xác suất để lấy được 2 lon quá hạn sử dụng. (làm tròn đến kết quả phần chục).

Câu 11: Một xạ thủ bắn hai viên đạn vào một bia. Xác suất bắn viên thứ nhất trúng là 0,7. Nếu bắn trúng viên thứ nhất thì khả năng bắn trúng viên thứ hai là 0,8, nhưng nếu bắn trượt viên thứ nhất khả năng bắn trúng viên thứ hai là 0,2. Tính xác suất bắn trúng viên thứ nhất biết rằng viên thứ hai bắn trúng. (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*

Câu 12: Một công ty bảo hiểm nhận thấy có 52% số người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông và có $41,6\%$ số người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông trên 45 tuổi. Biết một người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông, tính xác suất người đó trên 45 tuổi.

Câu 13: Lớp 12A1 có 48 bạn đều giỏi ít nhất một trong hai môn Toán và Lý, trong đó có 36 bạn giỏi Toán, 24 bạn giỏi Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 bạn. Xác suất chọn được bạn giỏi Toán, biết bạn đó giỏi Lý là bao nhiêu?

Câu 14: Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 18 học sinh thích môn Tin học, 30 học sinh thích môn Tiếng Anh, 15 học sinh không thích môn nào trong hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xác suất chọn được học sinh thích môn Tin học, biết học sinh đó thích môn Tiếng Anh, là bao nhiêu?

Câu 15: Một lô sản phẩm có 15 sản phẩm, trong đó có 7 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phầm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm lấy được đều có chất lượng thấp.

Câu 16: Trong một ngày bất kì, xác suất để bạn Nam ăn bữa trưa (được chuẩn bị sẵn) là $0,5$ và em gái của bạn Nam ăn bữa trưa là $0,6$. Biết rằng xác suất em gái Nam ăn bữa trưa khi Nam ăn bữa trưa là $0,9$. Tính xác suất để ít nhất một trong hai người ăn bữa trưa. *(Kết quả tính biểu diễn dưới dạng phần trăm)*

Câu 17: Bạn Minh làm hai bài tập kế tiếp. Xác suất Minh làm đúng bài thứ nhất là 0,7. Nếu Minh làm đúng bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,8 nhưng nếu Minh làm sai bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,2. Tính xác suất để Minh làm đúng bài thứ nhất biết rằng Minh làm đúng bài thứ hai (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 18: Một lớp có 16 học sinh nữ, còn lại là học sinh nam. Trong giờ giáo dục thể chất thầy giáo khảo sát kết quả rèn luyện thể lực của học sinh bằng cách bốc thăm trong danh sách lớp để chọn hai bạn chạy tiếp sức. Biết xác suất để chọn được hai bạn tham gia khảo sát đều là nữ bằng $\frac{15}{62}$. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?

Câu 19: Trong một cộng đồng X có tỉ lệ mắc ung thư là $0,02$. Biết rằng xác suất xét nghiệm dương tính là $0,95$ nếu người đó mắc ung thư và $0,03$ nếu người đó không mắc ung thư. Tính xác suất khi chọn ngẫu nhiên một người trong cộng đồng X bị ung thư nếu người này cho kết quả xét nghiệm dương tính. *(Kết quả tính biểu diễn dưới dạng phần trăm, làm tròn đến chữ số hàng chục sau dấu thập phân)*

Câu 20: Trong cộng đồng, tỉ lệ tự nhiên của các nhóm máu O, A, B, AB lần lượt là $33,7\%, 37,5\%$, $20,9\%$ và $7,9\%$. Lấy ngẫu nhiên một người cần máu và 1 người hiến máu. Hỏi xác suất có thể thực hiện truyền máu là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 21: Một siêu thị tổ chức chương trình tri ân khách hàng, trong hộp bốc thăm trúng thưởng có 100 phiếu, trong đó có 2 phiếu trúng thưởng có ghi " Chúc mừng bạn trúng thưởng 1 chiếc Iphone 15 promax". Khách hàng được chọn lên rút thăm lần lượt 2 phiếu. Gọi A là biến cố " phiếu thăm đầu trúng thưởng" và B " Phiếu thăm thứ hai trúng thưởng".

a) $P(A)=\frac{1}{50}$.

b) $P(B|A)=\frac{1}{100}$.

c) $P(\overline{B}|A)=\frac{99}{100}$.

d) Xác suất để cả hai phiếu đều trúng thưởng bằng $\frac{50}{99}$.

Câu 22: Lớp 12A2 có 45 học sinh, trong đó có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Tổng kết cuối năm lớp có 30 học sinh đạt loại giỏi gồm 18 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp 12A2.

a) Số học sinh nữ không đạt loại giỏi là 8.

b) Xác suất chọn được một học sinh nam là $\frac{5}{9}$.

c) Xác suất chọn được một học sinh nam đạt loại giỏi là $\frac{18}{25}$.

d) Xác suất để học sinh được chọn là học sinh giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ là $\frac{2}{5}$.

Câu 23: Một công ty đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của các dự án lần lượt là $0,4$ và $0,5$. Khả năng thắng thầu của 2 dự án là $0,3$. Gọi A và B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) A và B là hai biến cố độc lập.

b) Xác suất để công ty thắng đúng dự án 1 là $0,3$.

c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 là $0,75$.

d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 là $0,25$.

Câu 24: Một công ty đấu thầu hai dự án. Khả năng thắng thầu các dự án lần lượt là $0,4$ và $0,5$. Khả năng thắng thầu cả hai dự án là $0,3$. Gọi A,B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) Hai biến cố A và B độc lập.

b) Biết công ty thắng thầu dự án 1, thì xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là: 0,75

c) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, thì xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là: $\frac{2}{3}$

d) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là: 0,3

Câu 25: Một công ty đấu thầu hai dự án. Xác suất thắng thầu cả hai dự án là $0,3$. Xác suất thắng thầu của dự án 1 là $0,4$ và dự án 2 là $0,5$. Gọi A,B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) A,B là hai biến cố độc lập.

b) Xác suất để công ty thắng thầu ít nhất một dự án là $0,6$.

c) Nếu công ty thắng thầu dự án 1, thì xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là $0,75$.

d) Xác suất thắng thầu đúng 1 dự án là $0,2$.

Câu 26: Một công ty kim cương thống kê có 60% người mua kim cương là nam, có 40% số người mua kim cương là nam trên 50 tuổi và 30% số người mua kim cương là nữ trên 50 tuổi (giả sử chỉ có 2 giới tính nam và nữ).

a) Xác suất một người nữ mua kim cương của công ty trên là $0,4$.

b) Biết một người mua kim cương là nam, xác suất người đó trên 50 tuổi là $\frac{1}{3}$.

c) Biết một người mua kim cương là nữ, xác suất người đó trên 50 tuổi là $\frac{3}{4}$.

d)Trong số những người mua kim cương tại công ty này thì tỉ lệ người trên 50 tuổi trong số những người nam cao hơn tỉ lệ người trên 50 tuổi trong số những người nữ là 2 lần.

Câu 27: Bạn Lan chuẩn bị đi thăm nhà ngoại tại một thành phố A trong hai ngày thứ sáu và thứ bảy. Tại thành phố này mỗi ngày chỉ có nắng hoặc sương mù, nếu một ngày là nắng thì khả năng ngày tiếp theo có sương mù là 30 %, nếu một ngày ngày là sương mù thì khả năng ngày tiếp theo có sương mù là 40%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ sáu là $0,8$.

a) Xác suất trời sẽ có sương mù vào ngày thứ sáu là $0,2$.

b) Xác suất trời sẽ có sương mù vào cả hai ngày là $0,32$.

c) Xác suất trời sẽ có nắng vào cả hai ngày là $0,16$.

d) Xác suất trời sẽ có sương mù vào ngày thứ sáu và có nắng vào ngày thứ bảy là $0,12$.

Câu 28: Một hộp chứa 4 quả bóng màu đỏ và 6 quả bóng màu xanh. Lấy từ hộp hai lần liên tiếp mỗi lần 1 quả bóng. Gọi A là biến cố "Lần 2 lấy được quả màu xanh"; B là biến cố " Lần 1 lấy được quả bóng màu đỏ". Khi đó

a) Xác suất xảy ra biến cố B là: $P(B)=\frac{2}{5}$.

b) Xác suất xảy ra biến cố A khi B xảy ra là: $P(A\setminus B)=\frac{3}{5}$.

c) Xác suất xảy ra biến cố A khi B không xảy ra là: $P(A\setminus \overline{B})=\frac{5}{9}$.

d) Xác suất xảy ra cả biến cố A và B là: $P(AB)=\frac{4}{15}$.

Câu 29: Một nhóm học sinh gồm 12 nam và 13 nữ đi tham quan Công viên nước Hạ Long, tới lúc tham gia trò chơi mỗi học sinh chọn một trong hai trò chơi là Sóng thần hoặc Đảo hải tặc. Xác suất chọn trò chơi Sóng thần của mỗi học sinh nam là $0,6$ và của mỗi học sinh nữ là $0,3$. Chọn ngẫu nhiên một bạn của nhóm. Xét tính đúng, sai của mỗi khẳng định sau?

a) Xác suất để bạn được chọn là nam là $0,48$.

b) Xác suất để bạn được chọn là nữ là $0,5$.

c) Xác suất để bạn được chọn là nam và tham gia trò chơi Đảo hải tặc là $0,195$.

d) Xác suất để bạn được chọn là nữ và tham gia trò chơi Sóng thần là $0,156$.

Câu 30: Ở cửa ra vào của nhà sách Hàn Thuyên có một thiết bị cảnh báo hàng hóa chưa được thanh toán khi qua cửa. Thiết bị phát chuông cảnh báo với 99% các hàng hóa ra cửa mà chưa thanh toán và $0,1\%$ các hàng hóa đã thanh toán. Tỷ lệ hàng hóa qua cửa không được thanh toán là $0,1\%$. Chọn ngẫu nhiên một hàng hóa khi đi qua cửa. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

a) Xác suất để hàng qua cửa đã thanh toán là $99,9\%$.

b) Xác suất để hàng qua cửa chưa thanh toán và thiết bị phát chuông cảnh báo là 1%.

c) Xác suất để hàng qua cửa đã thanh toán và thiết bị phát chuông cảnh báo là $0,1\%$.

d) Xác suất để hàng qua cửa chưa thanh toán và thiết bị không phát chuông cảnh báo là $0,001\%$

.

Câu 31: Một công ty đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của các dự án lần lượt là $0,4$ và $0,5$. Khả năng thắng thầu cả 2 dự án là $0,3$. Gọi A,B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) A và B độc lập.

b) $P\left(A\overline{B}\right)=0,2$.

c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là $0,75$.

d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là $\frac{1}{3}$.

CHƯƠNG VI

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI: XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

I LÝ THUYẾT.

I. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố B khi biến cố A đã xảy ra được gọi là **xác suất của B với điều kiện A**. Kí hiệu là $P(B|A)$.

II. CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Cho A và B là hai biến cố, trong đó $P(B)>0$. Khi đó $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Chú ý 1:

1. Ta cũng ký hiệu biến cố giao của hai biến cố A và B là AB.

2. Trong thực tế, người ta thường dùng tỉ lệ phần trăm để mô tả xác suất. Chẳng hạn, phát biểu "Khả năng xảy ra một sự kiện là 20%" cũng có nghĩa là "Xác suất xảy ra sự kiện đó là 0,2", phát biểu "Tỉ lệ phế phẩm của một lô hàng là 5%" cũng có nghĩa là "Nếu chọn ra ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng, xác suất sản phẩm đó là phế phẩm là 0,05".

Chú ý 2:

1. Từ công thức xác suất có điều kiện, với $P(B)>0$, ta có $P(AB)=P(B).P(A|B)$.

2. Trong trường hợp tổng quát, người ta chứng minh được rằng với A, B là hai biến cố bất kì thì $P(AB)=P(B).P(A|B)$. Công thức trên gọi là ***công thức nhân xác suất*** cho hai biến cố.

Chú ý 3:

1. Với mọi biến cố A và B, trong đó $P(B)>0$, ta có $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

2. Với A và B là hai biến cố độc lập, trong đó $0<P(B)<1$, người ta chứng minh được rằng

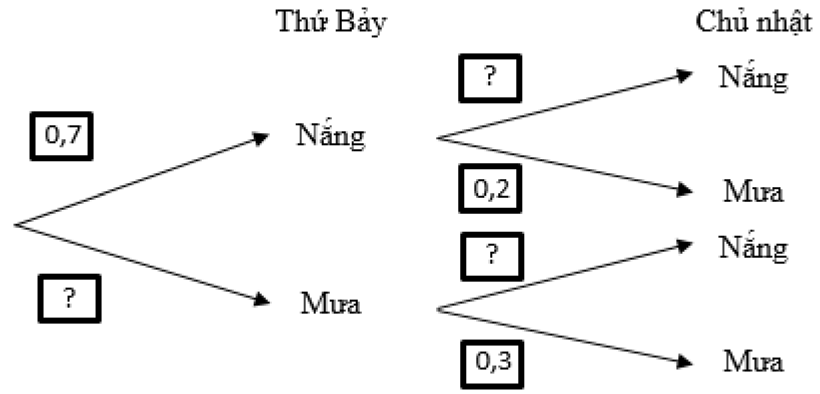
$$P(A|B)=P(A|\overline{B})=P(A).$$

Từ đẳng thức trên, ta thấy khi A và B độc lập thì việc biến cố B xảy ra hay không xảy ra không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố A.

III. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

Bạn Việt chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7.

Hãy tìm các giá trị thích hợp thay vào $\boxed{?}$ ở sơ đồ hình cây sau:



Hướng dẫn:

Ở, gọi A là biến cố "Ngày thứ Bảy trời nắng" và B là biến cố "Ngày Chủ nhật trời mưa".

Ta có $P(A)=0,7$; $P(B|A)=0,2$; $P(B|\overline{A})=0,3$.

Do đó $P(\overline{A})=1-P(A)=0,3$; $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=0,8$; $P(\overline{B}|\overline{A})=1-P(B|\overline{A})=0,7$.

Áp dụng công thức nhân xác suất, ta có xác suất trời nắng vào thứ Bảy và trời mưa vào Chủ nhật là

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0,7.0.2=0,14$$

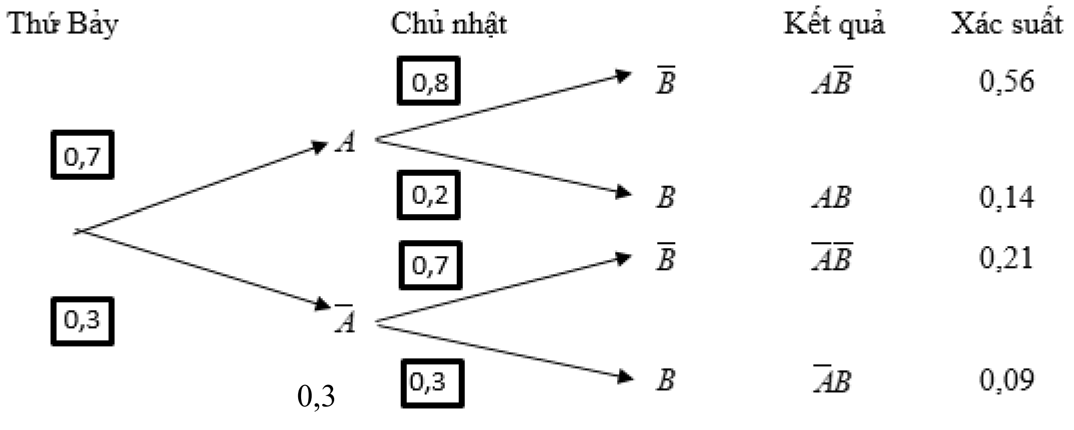
Tương tự, ta có

$$P(A\overline{B})=P(A).P(\overline{B}|A)=0,7.0,8=0,56;$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,3.0,3=0,09;$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}).P(\overline{B}|\overline{A})=0,3.0,7=0,21.$$

Ta có thể biểu diễn các kết quả trên theo sơ đồ cây như sau:



Nhận xét: Trên sơ đồ hình cây:

- Xác suất của các nhánh trong sơ đồ hình cây từ đỉnh thứ hai là xác suất có điều kiện.
- Xác suất xảy ra của mỗi kết quả bằng tích các xác suất trên các nhánh của cây đi đến kết quả đó.

Ví dụ: Ở một sân bay, người ta sử dụng một loại máy soi tự động phát hiện hàng cấm trong hành lí kí gửi. Máy phát chuông cảnh báo với 95% các kiện hành lí có chứa hàng cấm và 2% các kiện hành lí không chứa hàng cấm. Tỉ lệ các kiện hành lí có chứa hàng cấm là 0,1%.

Chọn ngẫu nhiên một kiện hành lí để soi bằng máy trên. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

M: "Kiện hành lí có chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo";

N: “Kiện hành lí không chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo”.

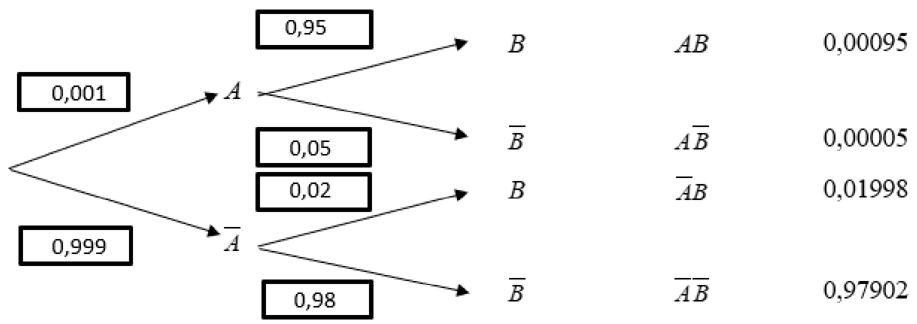
Giải

Gọi A là biến cố “Kiện hành lí có chứa hàng cấm” và B là biến cố “Máy phát chuông cảnh báo”. Ta có

$$P\left(B\middle|A\right)=0,95\,;\ P\left(B\middle|\overline{A}\right)=0,02\,;\ P\left(A\right)=0,001\,.$$

Do đó $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=0,999\,;\ P\left(\overline{B}\middle|A\right)=1-P\left(B\middle|A\right)=0,05\,;\ P\left(\overline{B}\middle|\overline{A}\right)=1-P\left(B\middle|\overline{A}\right)=0,98\,.$

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Do $M=AB$ nên $P\left(M\right)=P\left(AB\right)=0,00095\,.$

Do $N=\overline{A}B$ nên $P\left(N\right)=P\left(\overline{A}B\right)=0,01998\,.$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Thư viện trường THPT Chuyên Quốc Học có 60% tổng số sách là sách Văn học, 18% tổng số sách là sách tiểu thuyết và là sách Văn học. Chọn ngẫu nhiên một cuốn sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách tiểu thuyết, biết rằng đó là quyển sách về Văn học.

Lời giải

Gọi A là biến cố “Sách được chọn là sách tiểu thuyết”,

B là biến cố “Sách được chọn là quyển sách về Văn học”.

AB là biến cố “Sách được chọn là sách Văn học và là sách tiểu thuyết”

Theo đề ta có $P\left(A\right)=0,18;\ P\left(B\right)=0,6;\ P\left(AB\right)=P\left(A\right)=0,18\,.$

$$P\left(A\middle|B\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0,18}{0,6}=\frac{3}{10}$$

Vậy xác suất để quyển sách được chọn là sách tiểu thuyết, biết rằng đó là quyển sách về Văn hoc là $\frac{3}{10}$.

Câu 2: Kết quả khảo sát những bệnh nhân là học sinh bị tai nạn xe máy điện về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 60%.

Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%.

Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là 15%.

Hỏi theo kết quả điều tra trên, việc đội mũ bảo hiểm đúng cách đối với học sinh khi di chuyển bằng xe máy điện sẽ làm giảm khả năng bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn bao nhiêu lần?

Lời giải

Gọi A là biến cố “ Bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn ”.

B : " Bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách ".

AB : " Bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn và đội mũ bảo hiểm đúng cách ".

Theo đề ra ta có $P(AB)=15\%=0,15$

$P(B)=90\%=0,9$

$P(A)=60\%=0,6$

Xác suất để HS bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn, biết HS đó đã đội mũ bảo hiểm đúng cách là

$$\Rightarrow P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0,15}{0,9}=\frac{1}{6}$$

Vậy việc đội mũ bảo hiểm đúng cách đối với học sinh khi di chuyển bằng xe máy điện sẽ làm giảm khả năng bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn số lần là $\frac{0,6}{\frac{1}{6}}=3,6$ lần.

Câu 3: Một cửa hàng thời trang ước lượng rằng có 86% khách hàng đến cửa hàng mua quần áo là phụ nữ, và có 25% số khách mua hàng là phụ nữ cần nhân viên tư vấn. Biết một người mua quần áo là phụ nữ, tính xác suất người đó cần nhân viên tư vấn.

Lời giải

Gọi A là biến cố " người mua hàng là phụ nữ"

B là biến cố " người mua hàng cần nhân viên tư vấn ", ta cần tính $P(B\,|\,A)$

$P(A)=0,86$; $P(AB)=0,25$

Vậy $P(B\,|\,A)=\frac{0,25}{0,86}=\frac{25}{86}$.

Câu 4: Một công ty xây dựng đấu thầu hai dự án độc lập. Khả năng thắng của dự án thứ nhất là $0,5$ và dự án thứ hai là $0,6$. Tính xác suất để công ty thắng thầu dự án thứ hai biết công ty thắng thầu dự án thứ nhất.

Lời giải

Gọi A là biến cố ''Công ty thắng thầu dự án thứ nhất''. Ta có $P(A)=0,5$.

Gọi B là biến cố ''Công ty thắng thầu dự án thứ hai''. Ta có $P(B)=0,6$.

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên ta có $P(B\setminus A)=P(B)=0,6$.

Vậy xác suất để công ty thắng thầu dự án thứ hai biết công ty thắng thầu dự án thứ nhất là $0,6$.

Câu 5: Cầu thủ X có tỷ lệ sút penalty không dẫn đến bàn thắng là 25% và tỷ lệ sút penalty bị thủ môn cản phá là 20%. Cầu thủ X sút penalty 1 lần. Tính xác suất để thủ môn cản được cú sút của cầu thủ X, biết rằng cầu thủ X sút không dẫn đến bàn thắng.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Cầu thủ X sút penalty không dẫn đến bàn thắng" và B là biến cố "Cầu thủ X sút penalty bị thủ môn cản phá".

Ta có $P(A)=0,25$ và $P(B)=0,2$.

Ta có $B\subset A$ nên $P(BA)=P(B)=0,2$.

Vậy $P(B\,|\,A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{0,2}{0,25}=0,8$.

Câu 6: Kết quả khảo sát về điểm số của học sinh về mối liên hệ giữa việc thức dậy sớm học bài buổi sáng và bài kiểm tra đạt điểm giỏi cho thấy.

Tỉ lệ học sinh đặt điểm giỏi là 10%.

Tỉ lệ học sinh thức dậy sớm để học bài là 30%.

Tỉ lệ học sinh thức đạt điểm giỏi và dậy sớm học bài là 20%.

Hỏi theo kết quả điều tra trên, việc thức dậy sớm để học bài sẽ làm tăng kết quả đạt điểm giỏi nên bao nhiêu lần?

Lời giải

Gọi A là biến cố " Học sinh đạt điểm giỏi ".

B : "Học sinh thức dậy sớm để học bài".

AB : "Học sinh thức đạt điểm giỏi và dậy sớm học bài".

Theo đề ra ta có $P(AB)=20\%=0,2$.

$P(B)=30\%=0,3$.

$P(A)=10\%=0,1$.

Xác suất để HS đạt điểm giỏi, biết HS đó đã dậy sớm học bài là

$$\Rightarrow P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0,2}{0,3}=\frac{2}{3}$$

Vậy thói quen thức dậy sớm để học bài sẽ làm tăng kết quả đạt điểm giỏi nên số lần là $\dfrac{\frac{2}{3}}{0,1}=\dfrac{20}{3}\approx 6,67$ lần.

Câu 7: Trong một xưởng sản xuất có 800 bóng đèn, qua kiểm nghiệm chất lượng người ta thấy trong đó có 750 bóng đèn tốt và 50 bóng đèn kém không đạt chất lượng. Các bóng đèn tốt có 3 màu: đỏ, trắng, xanh và số bóng đèn màu đỏ chiếm 40%. Chọn ra ngẫu nhiên một bóng trong 800 bóng đèn. Xác suất để bóng đèn được chọn có màu đỏ, biết rằng bóng đèn đó tốt là?

Lời giải

Xét các biến cố sau:

A:" Bóng được chọn có màu đỏ."

B:" Bóng được chọn là bóng tốt."

Số bóng đèn tốt có màu đỏ là: $750.40\%=300$ bóng.

Số bóng đèn tốt là: 750 bóng.

Do đó, xác suất để bóng đèn được chọn có màu đỏ, biết rằng bóng đèn đó tốt là:

$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{300}{750}=\frac{2}{5}.$$

Câu 8: Một lô các sản phẩm do hai nhà máy sản xuất, biết rằng số sản phẩm của nhà máy thứ nhất gấp ba lần số sản phẩm của nhà máy thứ hai. Tỉ lệ sản phẩm tốt của nhà mấy thứ nhất là $0,8$ và nhà mấy thứ hai là $0,7$. Lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là tốt.

Lời giải

Gọi A là biến cố " Lấy được sản phẩm tốt "

B_i là biến cố " Sản phẩm lấy ra từ nhà máy thứ i sản xuất ", với $i=1;2$

Ta có: $P(B_1)=\dfrac{3}{4}$; $P(B_2)=\dfrac{1}{4}$

$$P(A)=P(B_1).P(A/B_1)+P(B_2).P(A/B_2)=\frac{3}{4}.0,8+\frac{1}{4}.0,7=0,775$$

Câu 9: Tỉ lệ người nghiện thuốc lá ở một vùng là 30%. Biết tỉ lệ viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là $a\%$ còn người không nghiện là 40%. Gặp ngẫu nhiên một người trong vùng thì xác suất để người đó nghiện thuốc và bị viêm họng bằng $0,21$; xác suất để người đó không nghiện thuốc và bị viêm họng là $b\%$. Tính $a+b$.

Lời giải

Gọi A: " Người nghiện thuốc lá"

B: " Người bị viêm họng"

Khi đó: AB: "Người nghiện thuốc và bị viêm họng"

$\overline{A}B$: "Người không nghiện thuốc và bị viêm họng"

Theo đề bài ta có $P(A)=30\%$; $P(B\mid A)=a\%$ và $P(AB)=0,21$ nên theo công thức xác suất có điều kiện ta được: $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\Leftrightarrow a\%=\dfrac{0,21}{30\%}=70\%$.

Tương tự: $P(\overline{A})=1-30\%=70\%$; $P(B\mid \overline{A})=40\%$ và $P(\overline{A}B)=b\%$ nên theo công thức xác suất có điều kiện ta được: $P(B\mid \overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}\Leftrightarrow 40\%=\dfrac{b\%}{70\%}\Leftrightarrow b\%=28\%$.

Vậy $a+b=98$.

Câu 10: Có 1 kho bia kém chất lượng chứa các thùng giống nhau (24 lon/thùng) gồm 3 loại: loại I để lẫn mỗi thùng 5 lon quá hạn sử dụng, loại II để lẫn mỗi thùng 3 lon quá hạn và loại III để lẫn mỗi thùng có 4 lon quá hạn. Biết số lượng thùng loại I gấp 2 lần số lượng thùng loại II và số thùng loại II gấp 3 lần thùng
loại III. Chọn ngẫu nhiên 1 thùng từ trong kho, từ đó chọn ngẫu nhiên 10 lon. Tính xác suất để lấy được 2 lon quá hạn sử dụng. (làm tròn đến kết quả phần chục).

Lời giải

Gọi A_i là biến cố chọn được thùng loại i. ($i=I,II,III$)

B là biến cố chọn được 10 sản phẩm trong đó có 2 lon quá hạn từ thùng được chọn ra.

Gọi số thùng loại III là x thùng ($x>0$).

Do đó số thùng loại I và loại II lần lượt là $6x;\ 3x$.

Từ đó, ta có $P(A_1)=\dfrac{6}{10};P(A_2)=\dfrac{3}{10};P(A_3)=\dfrac{1}{10}$

Xác suất để chọn được 2 lon quá hạn là:

$P(B)=P(A_1).P(B\mid A_1)+P(A_2).P(B\mid A_2)+P(A_3).P(B\mid A_3)$

$=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{C_5^2C_{19}^8}{C_{24}^{10}}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{C_3^2C_{21}^8}{C_{24}^{10}}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{C_4^2C_{20}^8}{C_{24}^{10}}=0,4$

Câu 11: Một xạ thủ bắn hai viên đạn vào một bia. Xác suất bắn viên thứ nhất trúng là 0,7. Nếu bắn trúng viên thứ nhất thì khả năng bắn trúng viên thứ hai là 0,8, nhưng nếu bắn trượt viên thứ nhất khả năng bắn trúng viên thứ hai là 0,2. Tính xác suất bắn trúng viên thứ nhất biết rằng viên thứ hai bắn trúng. *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*

Lời giải

Gọi A là biến cố bắn viên thứ nhất trúng

Gọi B là biến cố bắn viên thứ hai trúng

$A\cup B$ là biến cố bắn trúng ít nhất 1 viên

Ta có

$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(\overline{A\cup B})=1-\mathrm{P}(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\mathrm{P}(\overline{A}).\mathrm{P}(\overline{B}/\overline{A})=1-0,3.0,8=0,76$

Xác suất bắn trúng cả hai viên bi là

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B/A)=0,7.0,8$

Ta có

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\Rightarrow 0,76=0,7+\mathrm{P}(B)-0,7.0,8$

$\Rightarrow \mathrm{P}(B)=0,62$

Xác suất viên thứ nhất trúng khi viên thứ hai bắn trúng là

$\mathrm{P}(A/B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B/A)}{\mathrm{P}(B)}=0,903$.

Câu 12: Một công ty bảo hiểm nhận thấy có 52% số người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông và có $41,6\%$ số người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông trên 45 tuổi. Biết một người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông, tính xác suất người đó trên 45 tuổi.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông",

B là biến cố "Người mua bảo hiểm ô tô trên 45 tuổi".

Ta cần tính $P(B|A)$.

Do có 52% người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông nên $P(A)=0,52$.

Do có $41,6\%$ số người mua bảo hiểm ô tô là đàn ông trên 45 tuổi nên $P(AB)=0,416$.

Vậy $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,416}{0,52}=0,8$.

Câu 13: Lớp 12A1 có 48 bạn đều giỏi ít nhất một trong hai môn Toán và Lý, trong đó có 36 bạn giỏi Toán, 24 bạn giỏi Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 bạn. Xác suất chọn được bạn giỏi Toán, biết bạn đó giỏi Lý là bao nhiêu?

Lời giải

Xét các biến cố: A: "Chọn được bạn giỏi Toán";

B: "Chọn được bạn giỏi Lý".

Khi đó, $P(A)=\dfrac{36}{48}=0,75$; $P(B)=\dfrac{24}{48}=0,5$; $P(A\cup B)=1$.

Suy ra $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,75+0,5-1=0,25$.

Vậy $P(A|B)=\dfrac{0,25}{0,5}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 14: Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 18 học sinh thích môn Tin học, 30 học sinh thích môn Tiếng Anh, 15 học sinh không thích môn nào trong hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xác suất chọn được học sinh thích môn Tin học, biết học sinh đó thích môn Tiếng Anh, là bao nhiêu?

Lời giải

Xét các biến cố: A: "Chọn được học sinh thích môn Tin học";

B: "Chọn được học sinh thích môn Tiếng Anh".

Khi đó, $P(A)=\dfrac{18}{40}=\dfrac{9}{20}$; $P(B)=\dfrac{25}{40}=\dfrac{3}{4}$; $P(A\cup B)=1-\dfrac{15}{40}=\dfrac{5}{8}$.

Suy ra $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\dfrac{9}{20}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{8}=\dfrac{23}{40}$.

Vậy $P(A|B)=\dfrac{\frac{23}{40}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{23}{30}$.

Câu 15: Một lô sản phẩm có 15 sản phẩm, trong đó có 7 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phầm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm lấy được đều có chất lượng thấp.

Lời giải

Xét các biến cố:

A: ‘‘Lần thứ nhất lấy ra được sản phẩm có chất lượng thấp’’

B: ‘‘Lần thứ hai lấy ra được sản phẩm có chất lượng thấp’’

C: ‘‘Cả hai lần đều lấy ra được sản phẩm có chất lượng thấp’’

Khi đó, xác suất cần tìm là xác suất có điều kiện $P(B\mid A)$ và $P(C)=P(B\cap A)$

Ta có $P(A)=\dfrac{7}{15};P(B\mid A)=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}$. Suy ra $P(C)=P(B\cap A)=P(A).P(B\mid A)=\dfrac{7}{15}.\dfrac{3}{7}=0,2$.

Câu 16: Trong một ngày bất kì, xác suất để bạn Nam ăn bữa trưa (được chuẩn bị sẵn) là $0,5$ và em gái của bạn Nam ăn bữa trưa là $0,6$. Biết rằng xác suất em gái Nam ăn bữa trưa khi Nam ăn bữa trưa là $0,9$. Tính xác suất để ít nhất một trong hai người ăn bữa trưa. *(Kết quả tính biểu diễn dưới dạng phần trăm)*

Lời giải

Gọi A là biến cố Nam ăn bữa trưa, B là biến cố em gái Nam ăn bữa trưa.

Khi đó

+ $A\cap B$ là biến cố cả hai người đều ăn bữa trưa,

+ $A\cup B$ là biến cố có ít nhất một trong hai người ăn bữa trưa.

Mặt khác

+ $P(B\mid A)$ là xác suất em gái Nam ăn bữa trưa khi Nam ăn bữa trưa.

Ta có $P(A)=0,5$, $P(B)=0,6$ và $P(B\mid A)=0,9$.

Lúc này ta có

$P(B\cap A)=P(B\mid A).P(A)=0,9\times 0,5=0,45$

suy ra

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,65=65\%$

Vậy xác suất để ít một trong hai người ăn bữa trưa là 65%.

Câu 17: Bạn Minh làm hai bài tập kế tiếp. Xác suất Minh làm đúng bài thứ nhất là 0,7. Nếu Minh làm đúng bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,8 nhưng nếu Minh làm sai bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,2. Tính xác suất để Minh làm đúng bài thứ nhất biết rằng Minh làm đúng bài thứ hai (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Gọi A là biến cố: “Minh làm đúng bài thứ nhất”, theo đề bài ta có $P(A)=0,7$.

Gọi B là biến cố: “Minh làm đúng bài thứ hai”, theo đề bài ta có $P(B/A)=0,8;P\left(B/\overline{A}\right)=0,2$.

Gọi C là biến cố “Minh làm đúng bài thứ nhất biết rằng Minh làm đúng bài thứ hai”, ta có

$P(C)=P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(BA)}{P(B)}=\dfrac{P(B/A).P(A)}{P(B)}$.

Theo đề bài ta có $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(B/A).P(A)$.

Mặt khác $P(A\cup B)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{B}/\overline{A}).P(\overline{A})=1-0,8.0,3=0,76$.

$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(B/A).P(A)=0,76-0,7+0,8.0,7=0,62$.

Vậy $P(C)=\dfrac{P(B/A).P(A)}{P(B)}=\dfrac{0,8.0,7}{0,62}=\dfrac{28}{31}\approx 0,9$.

Câu 18: Một lớp có 16 học sinh nữ, còn lại là học sinh nam. Trong giờ giáo dục thể chất thầy giáo khảo sát kết quả rèn luyện thể lực của học sinh bằng cách bốc thăm trong danh sách lớp để chọn hai bạn chạy tiếp sức. Biết xác suất để chọn được hai bạn tham gia khảo sát đều là nữ bằng $\dfrac{15}{62}$. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Lần thứ nhất chọn được bạn nữ"
Gọi B là biến cố: "Lần thứ hai chọn được bạn nữ"
Gọi C là biến cố: "Chọn được hai bạn tham gia khảo sát đều là nữ"

Theo đề bài ta có $C=AB\Rightarrow P(C)=P(AB)=\dfrac{15}{62}$.

Gọi số học sinh của lớp là $x, x\in\mathbb{N}, x>16$.

Theo đề bài ta có: $P(A)=\dfrac{16}{x}, P(B/A)=\dfrac{15}{x-1}$.

Do $P(AB)=P(BA)=P(B/A).P(A)\Leftrightarrow \dfrac{15}{62}=\dfrac{16}{x}.\dfrac{15}{x-1}\Leftrightarrow x^2-x-992=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=32\\x=-31\end{array}\right.$.

Vậy số học sinh của lớp là 32 học sinh.

Câu 19: Trong một cộng đồng X có tỉ lệ mắc ung thư là $0,02$. Biết rằng xác suất xét nghiệm dương tính là $0,95$ nếu người đó mắc ung thư và $0,03$ nếu người đó không mắc ung thư. Tính xác suất khi chọn ngẫu nhiên một người trong cộng đồng X bị ung thư nếu người này cho kết quả xét nghiệm dương tính. *(Kết quả tính biểu diễn dưới dạng phần trăm, làm tròn đến chữ số hàng chục sau dấu thập phân)*

Lời giải

Gọi A là biến cố người được chọn bị ung thư, B là biến cố người được chọn cho kết quả dương tính.

Khi đó

+ $B\cap A$ là biến cố người được chọn có kết quả xét nghiệm dương tính và bị ung thư,

+ $B\cap\overline{A}$ là biến cố người được chọn có kết quả xét nghiệm dương tính và không bị ung thư.

Mặt khác

+ $P(B|A)$ là xác suất người được chọn có kết quả dương tính khi người được chọn bị ung thư,

+ $P(B|\overline{A})$ là xác suất người được chọn có kết quả dương tính khi người được chọn không bị ung thư.

Ta có $P(A)=0,02$, $P(B|A)=0,95$ và $P(B|\overline{A})=0,03$.

Lúc này ta có

$P(B\cap A)=P(B|A)P(A)=0,95.0,02=0,019$

và

$P(B\cap\overline{A})=P(B|\overline{A})P(\overline{A})=0,03.0,98=0,0294$

suy ra $P(B)=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)=0,0484=4,84\%$.

Do đó

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,019}{0,0484}\approx 0,393=39,3\%.$$

Câu 20: Trong cộng đồng, tỉ lệ tự nhiên của các nhóm máu O, A, B, AB lần lượt là $33,7\%, 37,5\%$,$20,9\%$ và $7,9\%$. Lấy ngẫu nhiên một người cần máu và 1 người hiến máu. Hỏi xác suất có thể thực hiện truyền máu là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Gọi H là biến cố có thể thực hiện truyền máu.

Gọi O là biến cố người nhận có nhóm máu O. Khi đó, người hiến chỉ có thể có nhóm máu O.

$\Rightarrow P(H|O)=0,337$

Gọi A là biến cố người nhận có nhóm máu A. Khi đó, người hiến có thể có nhóm máu O và A.

$\Rightarrow P(H|A)=0,337+0,375$

Gọi B là biến cố người nhận có nhóm máu B. Khi đó, người hiến có thể có nhóm máu O và B.

$\Rightarrow P(H|B)=0,337+0,209$

Gọi C là biến cố người nhận có nhóm máu AB. Khi đó, người hiến có thể có nhóm máu O, A, B và AB.

$\Rightarrow P(H|C)=0,337+0,375+0,209+0,079=1$

$$\begin{aligned}P(H)&=P(O).P(H|O)+P(A).P(H|A)+P(B).P(H|B)+P(C).P(H|C)\\&=0,337.0,337+0,375(0,337+0,375)+0,209(0,337+0,209)+0,079.1\\&=0,573683\end{aligned}$$

Vậy xác suất có thể truyền máu là là $0,57$.

Câu 21: Một siêu thị tổ chức chương trình tri ân khách hàng, trong hộp bốc thăm trúng thưởng có 100 phiếu, trong đó có 2 phiếu trúng thưởng có ghi “ Chúc mứng bạn trúng thưởng 1 chiếc Iphone 15 promax”. Khách hàng được chọn lên rút thăm lần lượt 2 phiếu. Gọi A là biến cố “ phiếu thăm đầu trúng thưởng” và B “ Phiếu thăm thứ hai trúng thưởng”.

a) $P(A)=\dfrac{1}{50}$.

b) $P(B\mid A)=\dfrac{1}{100}$.

c) $P\left(\overline{B}\mid A\right)=\dfrac{99}{100}$.

d) Xác suất để cả hai phiếu đều trúng thưởng bằng $\dfrac{50}{99}$.

Lời giải

a) Đúng

Khi khách hàng rút thăm lần đầu thì trong hộp 100 phiếu trong đó có 2 phiếu trúng thưởng nên $P(A)=\dfrac{2}{100}=\dfrac{1}{50}$. Mệnh đề đúng.

b) Sai

Khi biến cố A đã xảy ra thì trong hộp còn 99 phiếu trong đó có 1 phiếu trúng thưởng. Do đó: $P(B\mid A)=\dfrac{1}{99}$. Mệnh đề sai.

c) Sai

$P\left(\overline{B} \mid A\right) = 1 - P\left(B \mid A\right) = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$. Mệnh đề sai.

d) Sai

Gọi C là biến cố " cả 2 phiếu đều trúng thưởng".

Vậy $P\left(C\right) = P\left(A\right).P\left(B \mid A\right) = \frac{1}{50}.\frac{1}{99} = \frac{1}{4950}$. Mệnh đề sai.

Câu 22: Lớp $12A2$ có 45 học sinh, trong đó có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Tổng kết cuối năm lớp có 30 học sinh đạt loại giỏi gồm 18 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp $12A2$.

a) Số học sinh nữ không đạt loại giỏi là 8.

b) Xác suất chọn được một học sinh nam là $\frac{5}{9}$.

c) Xác suất chọn được một học sinh nam đạt loại giỏi là $\frac{18}{25}$.

d) Xác suất để học sinh được chọn là học sinh giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ là $\frac{2}{5}$.

Lời giải

a) Đúng

Lớp có 20 học sinh nữ trong đó18 bạn đạt loại giỏi nên số bạn không đạt loại giỏi là:

$20 - 12 = 8$ học sinh.

b) Đúng

Lớp có 25 học sinh nam nên xác suất chọn được một học sinh nam là $\frac{5}{9}$.

c) Sai

Số học sinh nam đạt loại giỏi là 18. Do đó Xác suất chọn được một học sinh nam đạt loại giỏi là: $\frac{18}{45} = \frac{2}{5}$.

d) Sai

Xét hai biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn ra là học sinh giỏi."

B: "Học sinh được chọn ra là học sinh nữ."

Vì có 12 học sinh nữ đạt loại giỏi nên: $P\left(A \cap B\right) = \frac{12}{45}$.

Do có 20 học sinh nữ nên: $P\left(B\right) = \frac{20}{45}$.

Vậy xác suất để học sinh được chọn là học sinh giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ là:

$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{3}{5}$.

Câu 23: Một công ty đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của các dự án lần lượt là $0,4$ và $0,5$. Khả năng thắng thầu của 2 dự án là $0,3$. Gọi A và B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) A và B là hai biến cố độc lập.

b) Xác suất để công ty thắng đúng dự án 1 là $0,3$.

c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 là $0,75$.

d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 là $0,25$.

Lời giải

a) Sai

Vì $0,3 \neq 0,4 \times 0,5 \Rightarrow P(AB) \neq P(A).P(B)$ nên A và B là hai biến cố không độc lập.

b) Đúng

Gọi B_1 là biến cố thắng thầu đúng 1 dự án.

$P(B_1) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$

$= P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = 0,3$

c) Đúng

Gọi C_1 là biến cố "thắng dự án 2 biết thắng dự án 1".

$$P(C_1) = P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0,75.$$

d) Sai

Gọi D_1 là biến cố "thắng dự án 2 biết không thắng dự án 1".

$$P(D_1) = P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{1}{3}.$$

Câu 24: Một công ty đấu thầu hai dự án. Khả năng thắng thầu các dự án lần lượt là $0,4$ và $0,5$. Khả năng thắng thầu cả hai dự án là $0,3$. Gọi A, B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) Hai biến cố A và B độc lập.

b) Biết công ty thắng thầu dự án 1, thì xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là: 0,75

c) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, thì xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là: $\frac{2}{3}$

d) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là: 0,3

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d)Đúng

a) Ta có $P(A).P(B) = 0,4.0,5 = 0,2 \neq 0,3 = P(AB)$.

b) Xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 khi đã biết thắng dự án 1 là $P(B \setminus A)$

Ta có $P(B \setminus A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0,3}{0,4} = 0,75$.

c) Xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 khi đã biết điều kiện không thắng dự án 1 là:

$$P(B \setminus \overline{A}) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$$

Vì hai biến cố $\overline{A}B$ và $A\overline{B}$ xung khắc nhau và $\overline{A}B \cup A\overline{B} = B$ nên theo tính chất của xác suất ta có

$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$.

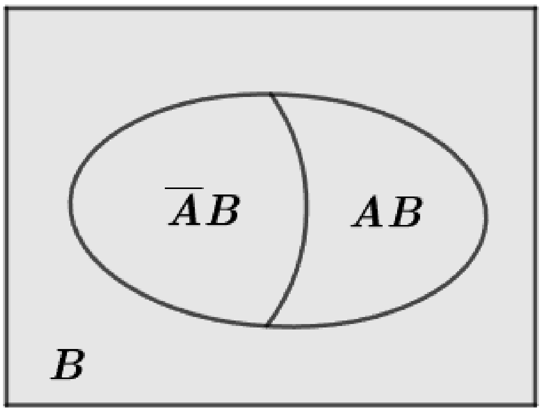
Suy ra $P(B \setminus \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \dfrac{0,5 - 0,3}{1 - 0,4} = \dfrac{1}{3}$.

d) Xác suất để công ty thắng thầu đúng 1 dự án là $P\left(A\overline{B}+\overline{A}B\right)$

Vì hai biến cố $\overline{A}B$ và $A\overline{B}$ xung khắc nhau nên $P\left(A\overline{B}+\overline{A}B\right)=P\left(A\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}B\right)$.

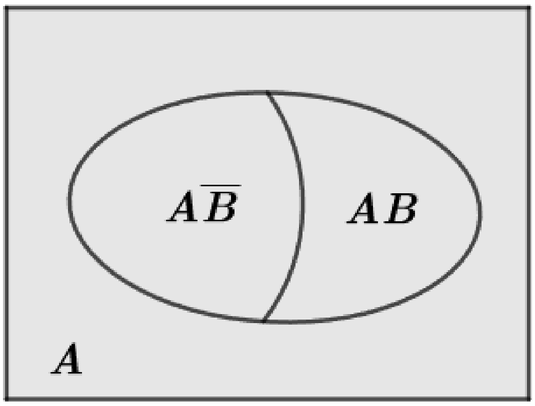
Vì hai biến cố $\overline{A}B$ và AB xung khắc nhau và $\overline{A}B\cup AB=B$ nên theo tính chất của xác suất ta có

$P\left(\overline{A}B\right)=P\left(B\right)-P\left(AB\right) \quad \left(1\right)$.



Vì hai biến cố $A\overline{B}$ và AB xung khắc nhau và $A\overline{B}\cup AB=A$ nên theo tính chất của xác suất ta có

$P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right)-P\left(AB\right) \quad \left(2\right)$.



Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta được như sau:

$P\left(A\overline{B}+\overline{A}B\right)=P\left(A\right)-P\left(AB\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$

$=P\left(A\right)+P\left(B\right)-2P\left(AB\right)=0,4+0,5-2.0,3=0,3.$

Câu 25: Một công ty đấu thầu hai dự án. Xác suất thắng thầu cả hai dự án là $0,3$. Xác suất thắng thầu của dự án 1 là $0,4$ và dự án 2 là $0,5$. Gọi A,B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) A,B là hai biến cố độc lập.

b) Xác suất để công ty thắng thầu ít nhất một dự án là $0,6$.

c) Nếu công ty thắng thầu dự án 1, thì xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là $0,75$.

d) Xác suất thắng thầu đúng 1 dự án là $0,2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có $P\left(A\right)=0,4$, $P\left(B\right)=0,5$, $P\left(AB\right)=0,3$.

$\Rightarrow P(AB) \neq P(A).P(B)$. Do đó A, B là hai biến cố không độc lập.

b) Xác suất để công ty thắng thầu ít nhất một dự án là

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,4 + 0,5 - 0,3 = 0,6$.

c) Ta có $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0,3}{0,4} = 0,75$.

d) Gọi D là biến cố công ty thắng thầu đúng 1 dự án, ta có $P(D) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$.

Lại có:

$P(A.\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0,4 - 0,3 = 0,1$.

$P(\overline{A}.B) = P(B) - P(AB) = 0,5 - 0,3 = 0,2$.

$\Rightarrow P(D) = 0,1 + 0,2 - 0,3$.

Câu 26: Một công ty kim cương thống kê có 60% người mua kim cương là nam, có 40% số người mua kim cương là nam trên 50 tuổi và 30% số người mua kim cương là nữ trên 50 tuổi (giả sử chỉ có 2 giới tính nam và nữ).

a) Xác suất một người nữ mua kim cương của công ty trên là $0,4$.

b) Biết một người mua kim cương là nam, xác suất người đó trên 50 tuổi là $\dfrac{1}{3}$.

c) Biết một người mua kim cương là nữ, xác suất người đó trên 50 tuổi là $\dfrac{3}{4}$.

d)Trong số những người mua kim cương tại công ty này thì tỉ lệ người trên 50 tuổi trong số những người nam cao hơn tỉ lệ người trên 50 tuổi trong số những người nữ là 2 lần.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Gọi A là biến cố: "người mua kim cương là nam" suy ra $P(A) = 0,6$.

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "người mua kim cương là nữ " suy ra $P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$.

b) Gọi B là biến cố: "người mua kim cương trên 50 tuổi".

Có 40% số người mua kim cương là nam trên 50 tuổi suy ra $P(AB) = 0,4$.

Theo yêu cầu của đề bài ta cần tính : $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0,4}{0,6} = \dfrac{2}{3}$.

c) Có 30% số người mua kim cương là nữ trên 50 tuổi suy ra $P(\overline{A}B) = 0,3$.

Theo yêu cầu của đề bài ta cần tính : $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,3}{0,4} = \dfrac{3}{4}$.

d) Dựa vào kết quả ở câu b) và câu c) ta thấy $\dfrac{P(B \mid \overline{A})}{P(B \mid A)} = \dfrac{9}{8}$.

Vậy tỉ lệ người mua trên 50 tuổi trong số những người nữ cao hơn người nam gấp 1,125 lần.

Câu 27: Bạn Lan chuẩn bị đi thăm nhà ngoại tại một thành phố A trong hai ngày thứ sáu và thứ bảy. Tại thành phố này mỗi ngày chỉ có nắng hoặc sương mù, nếu một ngày là nắng thì khả năng ngày tiếp theo có sương mù là 30 %, nếu một ngày ngày là sương mù thì khả năng ngày tiếp theo có sương mù là 40%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ sáu là $0,8$.

a) Xác suất trời sẽ có sương mù vào ngày thứ sáu là $0,2$.

b) Xác suất trời sẽ có sương mù vào cả hai ngày là $0,32$.

c) Xác suất trời sẽ có nắng vào cả hai ngày là $0,16$.

d) Xác suất trời sẽ có sương mù vào ngày thứ sáu và có nắng vào ngày thứ bảy là $0,12$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Gọi A là biến cố: "ngày thứ sáu trời nắng" suy ra $P(A)=0,8$.

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "ngày thứ sáu trời có sương mù " suy ra $P(\overline{A})=1-0,8=0,2$.

b) Gọi B là biến cố: "ngày thứ bảy trời có sương mù".

Theo đề $P(B\,|\,\overline{A})=0,4$.

Xác suất trời sẽ có sương mù vào cả hai ngày là $P(\overline{A}B)=P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A})=0,2.0,4=0,08$.

c) $P(B\,|\,A)=0,3 \Rightarrow P(\overline{B}\,|\,A)=1-P(B\,|\,A)=0,7$.

Xác suất trời sẽ có nắng vào cả hai ngày là $P(A\overline{B})=P(A).P(\overline{B}\,|\,A)=0,8.0,7=0,56$.

d) $P(B\,|\,\overline{A})=0,4 \Rightarrow P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=1-P(B\,|\,\overline{A})=0,6$.

Xác suất trời sẽ có sương mù vào ngày thứ sáu và có nắng vào ngày thứ bảy là

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}).P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=0,2.0,6=0,12$.

Câu 28: Một hộp chứa 4 quả bóng màu đỏ và 6 quả bóng màu xanh. Lấy từ hộp hai lần liên tiếp mỗi lần 1 quả bóng. Gọi A là biến cố "Lần 2 lấy được quả màu xanh"; B là biến cố " Lần 1 lấy được quả bóng màu đỏ". Khi đó

a) Xác suất xảy ra biến cố B là: $P(B)=\dfrac{2}{5}$.

b) Xác suất xảy ra biến cố A khi B xảy ra là: $P(A\backslash B)=\dfrac{3}{5}$.

c) Xác suất xảy ra biến cố A khi B không xảy ra là: $P\left(A\backslash\overline{B}\right)=\dfrac{5}{9}$.

d) Xác suất xảy ra cả biến cố A và B là: $P(AB)=\dfrac{4}{15}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

b) Lần 1 lấy được quả bóng màu đỏ nên số bóng còn lại là 9 nên $n(\Omega)=9$. Do có 6 quả bóng màu xanh và lần 1 lấy được quả bóng đỏ nên số phần tử thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=6$

$P(A\backslash B)=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$.

c) Do biến cố B không xảy ra tức là lần 1 lấy 1 quả màu xanh nên số bóng còn lại là 5 quả xanh và 4 quả đỏ. Do đó $P\left(A\backslash\overline{B}\right)=\dfrac{5}{9}$.

d) Ta có $P(AB)=P(B).P(A\backslash B)=\dfrac{2}{5}.\dfrac{6}{9}=\dfrac{4}{15}$.

Chú ý: Không thể tính theo công thức $P(AB)=P(A).P(B\backslash A)$.

Câu 29: Một nhóm học sinh gồm 12 nam và 13 nữ đi tham quan Công viên nước Hạ Long, tới lúc tham gia trò chơi mỗi học sinh chọn một trong hai trò chơi là Sóng thần hoặc Đảo hải tặc. Xác suất chọn trò chơi Sóng thần của mỗi học sinh nam là $0,6$ và của mỗi học sinh nữ là $0,3$. Chọn ngẫu nhiên một bạn của nhóm. Xét tính đúng, sai của mỗi khẳng định sau?

a) Xác suất để bạn được chọn là nam là $0,48$.

b) Xác suất để bạn được chọn là nữ là $0,5$.

c) Xác suất để bạn được chọn là nam và tham gia trò chơi Đảo hải tặc là $0,195$.

d) Xác suất để bạn được chọn là nữ và tham gia trò chơi Sóng thần là $0,156$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

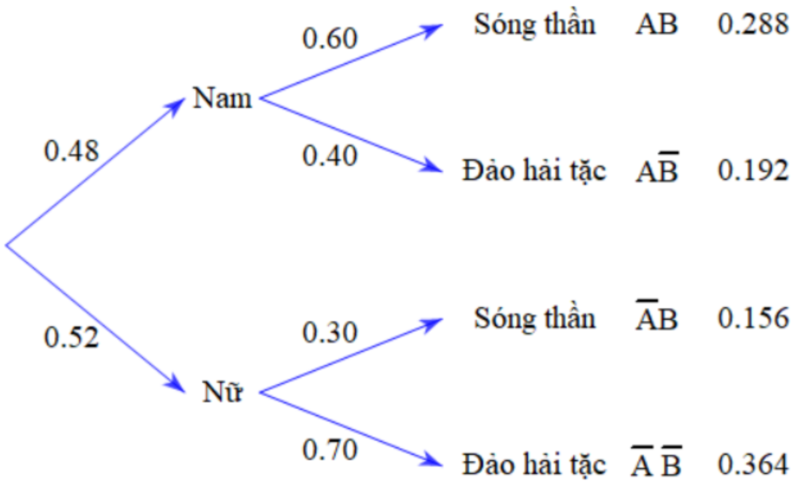
Gọi A là biến cố "chọn được bạn nam" và B là biến cố "chọn được bạn tham gia trò chơi Sóng thần".

Nhóm có 12 nam và 13 nữ nên xác suất để chọn được một bạn nam là $\frac{12}{25}=0,48$.

Nhóm có 12 nam và 13 nữ nên xác suất để chọn được một bạn nữ là $\frac{13}{25}=0,52$.

Ta có $P(A)=\frac{12}{25}=0,48$ và $P(B|A)=0,6$ và $P(B|\overline{A})=0,3$.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Xác suất để bạn được chọn là nam và tham gia trò chơi Đảo hải tặc là $P(A\overline{B})=0,192$.

Xác suất để bạn được chọn là nữ và tham gia trò chơi Sóng thần $P(\overline{A}B)=0,156$.

Câu 30: Ở cửa ra vào của nhà sách Hàn Thuyên có một thiết bị cảnh báo hàng hóa chưa được thanh toán khi qua cửa. Thiết bị phát chuông cảnh báo với 99% các hàng hóa ra cửa mà chưa thanh toán và $0,1\%$ các hàng hóa đã thanh toán. Tỷ lệ hàng hóa qua cửa không được thanh toán là $0,1\%$. Chọn ngẫu nhiên một hàng hóa khi đi qua cửa. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

a) Xác suất để hàng qua cửa đã thanh toán là $99,9\%$.

b) Xác suất để hàng qua cửa chưa thanh toán và thiết bị phát chuông cảnh báo là 1%.

c) Xác suất để hàng qua cửa đã thanh toán và thiết bị phát chuông cảnh báo là $0,1\%$.

d) Xác suất để hàng qua cửa chưa thanh toán và thiết bị không phát chuông cảnh báo là $0,001\%$.

Lời giải

a) Đúng	**b) Sai**	**c) Đúng**	**d) Đúng**

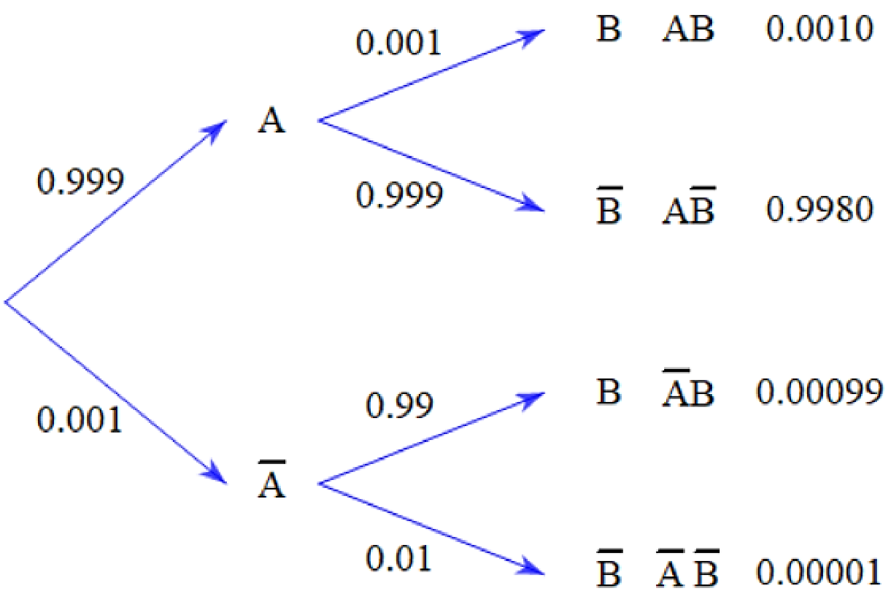
Gọi A là biến cố "Hàng qua cửa đã được thanh toán" và B là biến cố "Thiết bị phát chuông cảnh báo".

Tỷ lệ hàng qua cửa không được thanh toán là $0,1\%$ tức là $P\left(\overline{A}\right)=0,1\%$ suy ra $P\left(A\right)=100\%-0,1\%=99,9\%$.

Ta có $P\left(B\,|\,A\right)=0,1\%$ và $P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=99\%$;

$P\left(\overline{B}\,|\,A\right)=100\%-P\left(B\,|\,A\right)=99,9\%$; $P\left(\overline{B}\,|\,\overline{A}\right)=100\%-P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=1\%$.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Từ đây ta có:

Xác suất để hàng qua cửa đã thanh toán là $99,9\%$.

Xác suất để hàng qua cửa chưa thanh toán và thiết bị phát chuông cảnh báo là $P\left(\overline{A}B\right)=0,099\%$

Xác suất để hàng hóa qua cửa đã thanh toán và thiết bị phát chuông cảnh báo là $P\left(\overline{A}B\right)=0,1\%$

Xác suất để hàng qua cửa chưa thanh toán và thiết bị không phát chuông cảnh báo là $P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=0,001\%$.

Câu 31: Một công ty đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của các dự án lần lượt là $0,4$ và $0,5$. Khả năng thắng thầu cả 2 dự án là $0,3$. Gọi A,B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) A và B độc lập.

b) $P\left(A\overline{B}\right)=0,2$.

c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là $0,75$.

d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là $\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Sai

Ta có $P(A)=0,4;P(B)=0,5;P(AB)=0,3\Rightarrow P(AB)\neq P(A).P(B)$ nên A,B không độc lập (phụ thuộc).

b) Sai

Ta có $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0,1$

c) Đúng

Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0,3}{0,4}=0,75$

d) Đúng

Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là $P(B\mid \overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{0,5-0,3}{1-0,4}=\dfrac{1}{3}$.

CHƯƠNG VI
XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI: CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

I. LÝ THUYẾT.

I. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN

Cho hai biến cố A và B với $0<P(B)<1$. Khi đó công thức

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

gọi là **công thức xác suất toàn phần.**

Chú ý: Công thức xác suất từng phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

II. CÔNG THỨC BAYES

Giả sử A và B là hai biến có ngẫu nhiên thỏa mãn $P(A)>0$ và $0<P(B)<1$. Khi đó công thức

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

gọi là công thức **Bayes.**

Chú ý:

a) Công thức Bayes vẫn đúng với biến cố B bất kì.

b) Với $P(A)>0$, công thức $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$ cũng được gọi là công thức **Bayes.**

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Được biết có 5% đàn ông bị mù màu, và $0,25\%$ phụ nữ bị mù màu. *Giả sử số đàn ông bằng số phụ nữ. Chon một người bị mù màu. Xác suất để người đó là đàn ông là bao nhiêu?*

(Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005)

Câu 2: Một công ty du lịch bố trí chỗ nghỉ cho đoàn khách tại ba khách sạn A,B,C theo tỉ lệ 20%, 50 %, 30%. Tỉ lệ hỏng điều hòa ở ba khách sạn lần lượt là 5%, 4%, 8%. Tính xác suất để:

a) Một khách ở khách sạn A, biết khách đó ở phòng điều hòa bị hỏng.

b) Một khách ở khách sạn C, biết khách đó ở phòng điều hòa không bị hỏng.

(kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 3: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Thừa Thiên Huế nghiện thuốc lá là 20% ; tỉ lệ người bệnh bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70% , trong số người không nghiện thuốc lá là 15% . Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh Thừa Thiên Huế thì khả năng mà người đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %.

Câu 4: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Thừa Thiên Huế nghiện thuốc lá là 20% ; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70% , trong số người không nghiện thuốc là 15% . Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh Thừa Thiên Huế thì xác suất mà người đó nghiện thuốc lá khi biết mình bị bệnh phổi là

Câu 5: Được biết có 5% đàn ông bị mù màu và $0,25\%$ phụ nữ bị mù màu. Giả sử số đàn ông bằng số phụ nữ. Chọn ngẫu nhiên một người bị mù màu. Xác suất để người được chọn là đàn ông bằng bao nhiêu?

Câu 6: Người ta điều tra thấy ở một địa phương nọ có 3% tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe. Người ta nhận thấy khi tài xế lái xe gây ra tai nạn thì có 21% là do tài xế sử dụng điện thoại. Hỏi việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên bao nhiêu lần?

Câu 7: Một công ty một ngày sản xuất được 850 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm không đạt chất lượng. Lần lượt lấy ra ngẫu nhiên không hoàn lại 2 sản phẩm để kiểm tra. Xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng là

Câu 8: Trong trò chơi hái hoa có thưởng của lớp 10A, cô giáo treo 10 bông hoa trên cành cây, trong đó có 5 bông hoa chứa phiếu có thưởng. Bạn Việt hái một bông hoa đầu tiên sau đó bạn Nam hái bông hoa thứ hai. Tính xác suất bạn Nam hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng.

Câu 9: Vào mỗi buổi sáng ở tuyến phố X, xác suất xảy ra tắc đường khi trời mưa và không mưa lần lượt là $0,6$ và $0,3$. Xác suất có mưa vào một buổi sáng là $0,1$. Tính xác suất để sáng đó tuyến phố H bị tắc đường.

Câu 10: Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 11: Trong một đợt nghiên cứu tỷ lệ ung thư do hút thuốc lá gây nên, người ta thấy rằng tại tỉnh Hà Nam tỉ lệ người dân của tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh ung thư trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất người đó nghiện thuốc lá là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 12: Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Hãy tính tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng.

Câu 13: Một chuỗi của hàng sơn kinh doanh sơn mủ và sơn nước. Dựa trên doanh số bán hàng trong một thời gian dài, xác suất để khách hàng sẽ mua sơn mủ là $0,75$. Trong số những người mua sơn mủ, 60% cũng mua con lăn. Nhưng chỉ có 30% người mua sơn nước mua con lăn. Một người vào cửa hàng đó để mua hàng. Tính xác suất người đó mua con lăn.

Câu 14: Một xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus và cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus. Biết rằng tỉ lệ người nhiễm Covid – 19 trong một cộng đồng nào đó là 1%. Một người trong cộng đồng đó cho kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để người đó thực sự bị nhiễm virus có dạng $\frac{a}{b}$ (Phân số tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

Câu 15: Một kho hàng do hai nhà máy sản xuất. Biết tỉ lệ sản phẩm đóng góp của nhà máy một bằng $\frac{1}{3}$ sản phẩm đóng góp của nhà máy hai và tỉ lệ phế phẩm do nhà máy một, nhà máy hai sản xuất lần lượt là $0,1\%$ và $0,2\%$. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm thì thấy nó là phế phẩm. Biết xác suất để phế phẩm đó do nhà máy hai sản xuất là $\frac{a}{b}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b$.

Câu 16: Một nhà máy lắp ráp nhận được các chi tiết do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 65% chi tiết, máy thứ hai cung cấp 35% chi tiết. Khoảng 80% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 85% chi tiết do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ nhà máy một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất (***kết quả làm tròn đến hàng phần trăm***).

Câu 17: Một căn bệnh có 2% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người được chuẩn đoán kiểm tra và kết quả dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là . *(kết quả làm tròn đến hàng phần mười).*

Câu 18: Một loại linh kiện do hai nhà máy số I và số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy số I và II lần lượt là: 1% và 2%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 60 sản phẩm của nhà máy số I và 100 sản phẩm của nhà máy số II, một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó. Xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt là

Câu 19: Tỉ lệ phế phẩm của một công ty là 10%. Trước khi đưa ra thị trường, các sản phẩm được kiểm tra bằng máy nhằm loại bỏ phế phẩm. Xác suất để máy nhận biết đúng chính phẩm là 95%, nhận biết đúng phế phẩm là 90%.

a) Tỉ lệ sản phẩm bị kết luận sai là

b) Tỉ lệ phế phế phẩm của công ty trên thị trường là

Câu 20: Một bệnh viện sử dụng một xét nghiệm để phát hiện một loại bệnh với độ chính xác là 95% (nghĩa là 95% bệnh nhân mắc bệnh sẽ có kết quả dương tính). Xét nghiệm này cũng có tỷ lệ dương tính giả là 2% (nghĩa là 2% bệnh nhân không mắc bệnh cũng có kết quả dương tính). Biết rằng 1% dân số thực sự mắc bệnh này. Nếu một người nhận kết quả xét nghiệm dương tính, xác suất thực sự người đó mắc bệnh là bao nhiêu?

Câu 21: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các loại xạ thủ loại I là 0,9 và loại II là 0,7. Chọn ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.

Câu 22: Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất $0,95$ và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất $0,01$. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Câu 23: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh X nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X, xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là

Câu 24: Một căn bệnh X có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh X, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?

Câu 25: Số khán giả đến xem buổi biểu diễn âm nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,85; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,45. Dự báo thời tiết cho thấy nếu xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,6. Tính xác suất để nhà tổ chức sự kiện bán hết vé.

Câu 26: Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong đó nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu?*(làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm)*

Câu 27: Một loại linh kiện do hai nhà máy I, II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của nhà máy I, II lần lượt là : $0,04; 0,03$. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy I và 120 sản phẩm của nhà máy II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện của lô hàng đó. Giả sử linh kiện được chọn là phế phẩm. Tính xác suất linh kiện này thuộc nhà máy I .*(làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).*

Câu 28: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ loại I và loại II lần lượt là $0,9$ và $0,7$. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ đó bắn trúng đích, tính xác suất để xạ thủ đó là xạ thủ loại I?

Câu 29: Lớp $10A$ có tỉ lệ học sinh học giỏi môn Toán là 20%. Tỉ lệ học sinh học giỏi môn Anh Văn trong số học sinh học giỏi môn Toán là 70%, trong số học sinh không giỏi môn Toán là 15%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp $10A$ tham dự trại hè toàn quốc tại Nha Trang.

a) Tính xác suất học sinh được chọn giỏi môn Anh Văn.

b) Tính xác suất học sinh được chọn học giỏi cả môn Toán và môn Anh Văn.

Câu 30: Có hai đội thi đấu môn Bóng bàn. Đội I có 6 vận động viên, đội II có 8 vận động viên. Xác suất đạt huy chương đồng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là $0,8$ và $0,65$. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên.

a) Xác suất để vận động viên này thuộc đội I là $0,8$.

b) Xác suất để vận động viên được chọn đạt huy chương đồng là $\frac{5}{7}$.

c) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương đồng. Xác suất để vận động viên đó thuộc đội II là $0,48$.

d) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương đồng. Xác suất để vận động viên đó thuộc đội I là là $\frac{12}{25}$.

Câu 31: Khảo sát dân cư của thành phố Huế cho thấy có 1% dân số mắc căn bệnh lạ. Các nhà khoa học đã tìm ra một phương pháp xét nghiệm để chẩn đoán căn bệnh này. Tuy nhiên, xét nghiệm có sai số nên khi xét nghiệm 96% người bị bệnh có kết quả dương tính và 92% người không bị bệnh có kết quả âm tính. Một người đi xét nghiệm. Gọi A là biến cố người được xét nghiệm bị bệnh còn B là biến cố người được xét nghiệm có kết quả xét nghiệm dương tính. Khi đó:

a) $P\left(A\,|\,B\right)=\dfrac{P\left(B\right).P\left(B\,|\,A\right)}{P\left(A\right)}$.

b) Xác suất để người đi xét nghiệm bị bệnh là 1%.

c) Xác suất để người đó có kết quả dương tính khi người đó không bị bệnh là 8%.

d) Một người đi xét nghiệm và có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để người đó bị bệnh lớn hơn xác suất để người đó không bị bệnh.

Câu 32: Một công ty có hai chi nhánh. Sản phẩm của chi nhánh I chiếm 60% còn chi nhánh II chiếm 40% tổng sản phẩm của công ty. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của chi nhánh I chiếm 1% còn của chi nhánh II chiếm 2% tổng sản phẩm công ty. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của công ty. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Xác suất để sản phẩm của chi nhánh I được chọn là $0,4$.

b) Xác suất để lấy ra sản phẩm bị lỗi ở chi nhánh II là $0,02$.

c) Xác suất lấy ra sản phẩm bị lỗi là $0,015$.

d) Biết rằng sản phẩm bị lỗi. Xác suất sản phẩm đó do chi nhánh I sản xuất là $\dfrac{4}{7}$.

Câu 33: Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b. Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%.

a) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb là $0,5$.

b) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb là $0,5$.

c) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố là $0,6$.

d) Xác suất để cây con có kiểu gene bb là $0,49$.

Câu 34: Một căn bệnh có 2% dân số mắc phải. Một phương án chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương án này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với những người không mắc bệnh, phương pháp này chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp.

a) Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra là 0,01.

b) Xác suất kết quả dương tính nếu có người đó mắc bệnh là 0,99.

c) Xác suất của biến cố "Kết quả kiểm tra người đó là dương tính (bị bệnh)" là 0,0198.

d) Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là 0,699 (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Câu 35: Trong một khu bảo tồn động vật hoang dã, người ta đang nghiên cứu 600 con vật, trong đó có 360 con báo đốm và 240 con sư tử. Sau khi thống kê, người ta thấy: có 60% số báo đốm đã được tiêm phòng và 45% số sư tử đã được tiêm phòng.

a) Số con báo đốm đã được tiêm phòng là 216 con.

b) Số con sư tử chưa được tiêm phòng là 108 con.

c) Chọn ra ngẫu nhiên một con vật trong số đó. Xác suất để chọn ra được một con sư tử đã được tiêm phòng là $0,4$.

d) Chọn ra ngẫu nhiên một con vật trong số đó. Xác suất để chọn ra được một con vật chưa được tiêm phòng là $0,46$.

Câu 36: Hai công nhân cần phải hoàn thành số sản phẩm nhất định. Công nhân thứ nhất phải làm 45% số sản phẩm, công nhân thứ hai phải làm 55% số sản phẩm. Khả năng xảy ra sai sót của công nhân thứ nhất là 3% và của công nhân thứ hai là 1%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Gọi A là biến cố "Sản phẩm được chọn là của công nhân thứ nhất", B là biến cố "Sản phẩm được chọn bị lỗi".

a) $P\left(A\right)=0,5$

b) Xác suất sản phẩm được chọn là sản phẩm bị lỗi của công nhân thứ nhất là $P\left(B\,|\,A\right)=0,03$.

c) $P\left(B\right)=0,02.$

d) Xác suất để sản phẩm được chọn là sản phẩm của công nhân thứ nhất bị lỗi là $P\left(A\,|\,B\right)=\dfrac{27}{38}$

.

Câu 37: Chạy Marathon là môn thể thao mà tại đó, người chơi sẽ hoàn thành quãng đường 42,195 km trong khoảng thời gian nhất định. FM sub 4 là thành tích dành cho những người chơi hoàn thành quãng đường Marathon dưới 4 giờ.

Trong CLB AKR, tỷ lệ thành viên nam là 72%, tỷ lệ thành viên nữ là 28%. Đối với nam, tỷ lệ VĐV hoàn thành Marathon sub 4 là 32%; đối với nữ tỷ lệ VĐV hoàn thành sub 4 là 3%. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên từ CLB AKR:

a) Khi VĐV được chọn là nam, xác suất để VĐV này chưa hoàn thành sub 4 cự ly Marathon là 68%.

b) Xác suất để thành viên được chọn đã hoàn thành sub 4 là 22%.

c) Xác suất để thành viên được chọn là nữ đã hoàn thành sub 4 là 2%.

d) Biết rằng VĐV được chọn đã hoàn thành sub 4, xác suất để VĐV đó là nam bằng 96%.

Câu 38: Một cửa hàng chỉ bán hai loại điện thoại là Samsung và Iphone. Tỷ lệ khách hàng mua điện thoại Samsung là 75%. Trong số các khách hàng mua điện thoại Samsung thì có 60% mua kèm ốp điện thoại. Tỷ lệ khách hàng mua điện thoại Iphone kèm ốp điện thoại trong số những khách hàng mua điện thoại Iphone là 30%.

a) Xác suất một khách hàng mua điện thoại Samsung là $0,75$.

b) Xác suất để một khách hàng mua điện thoại Iphone là $0,15$.

c) Xác suất để một khách hàng mua ốp điện thoại biết rằng khách hàng đó đã mua điện thoại Samsung là $0,6$, xác suất để một khách hàng mua ốp điện thoại biết rằng khách hàng đó đã mua Iphone là $0,3$.

d) Xác suất một khách hàng mua điện thoại kèm ốp là $0,525$.

Câu 39: Một căn bệnh có 2% dân số mắc phải. Một phương pháp chẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 97%. Lấy một người đi kiểm tra.

a) Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra là $0,02$.

b) Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $0,99$.

c) Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là: $0,01$.

d) Biết rằng đã có kết quả chuẩn đoán là dương tính, xác suất để người đó thực sự bị bệnh là $0,25$

Câu 40: Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ và tỉ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp

a) Xác suất nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ là $0,061$.

b) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Xác suất nhân viên đó là nam là $\frac{55}{118}$.

c) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Xác suất nhân viên đó là nữ là $\frac{63}{118}$

d) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Khi đó nhân viên đó là nam nhiều hơn là nữ.

Câu 41: Giả sử bệnh hiểm nghèo X có tỉ lệ nhiễm bệnh là $0,5\%$, xét nghiệm loại bệnh này có tỉ lệ dương tính giả là 4%. Khi xét nghiệm cho một người, ta gọi A là biến cố "Người được chọn không nhiễm bệnh" và B là biến cố "người được chọn có phản ứng dương tính".

a) Người được chọn không nhiễm bệnh có tỉ lệ $P(A)=0,995$

b) Tỉ lệ người không nhiễm bệnh trong số những người có phản ứng dương tính là $P(B\,|\,A)=0,04$.

c) Tỉ lệ người nhiễm bệnh trong số những người có phản ứng dương tính là $P(B\,|\,\overline{A})=0,005$.

d) Khả năng nhiễm bệnh của một người có phản ứng dương tính là $P(\overline{A}\,|\,B)=\frac{25}{224}$.

CHƯƠNG VI

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI: CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

I. LÝ THUYẾT.

I. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN

Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$. Khi đó công thức

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})$$

gọi là **công thức xác suất toàn phần.**

Chú ý: Công thức xác suất từng phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

II. CÔNG THỨC BAYES

Giả sử A và B là hai biến có ngẫu nhiên thỏa mãn $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$. Khi đó công thức

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})}$$

gọi là công thức **Bayes.**

Chú ý:

a) Công thức Bayes vẫn đúng với biến cố B bất kì.

b) Với $P(A) > 0$, công thức $P(B \mid A) = \dfrac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)}$ cũng được gọi là công thức **Bayes.**

HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Được biết có 5% đàn ông bị mù màu, và $0,25\%$ phụ nữ bị mù màu. *Giả sử số đàn ông bằng số phụ nữ. Chon một người bị mù màu. Xác suất để người đó là đàn ông là bao nhiêu?*

(Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005)

Lời giải

Gọi A là biến cố người được chọn là đàn ông, B là biến cố người được chọn mù màu.

Theo đề bài ra ta có $P(B|A) = 0,05; P(B|\overline{A}) = 0,0025$.

Vì số đàn ông bằng số phụ nữ nên ta có $P(A) = P(\overline{A}) = 0,5$.

Áp dụng công thức Bayes ta có xác suất để chọn được một người đàn ông mù màu là

$$P\left(A\middle|B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B\middle|A\right)}{P\left(A\right).P\left(B\middle|A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B\middle|\overline{A}\right)}=\frac{0,5.0,05}{0,5.0,05+0,5.0,0025}=\frac{20}{21}.$$

Câu 2: Một công ty du lịch bố trí chỗ nghỉ cho đoàn khách tại ba khách sạn A,B,C theo tỉ lệ 20%, 50%, 30%. Tỉ lệ hỏng điều hòa ở ba khách sạn lần lượt là 5%, 4%, 8%. Tính xác suất để:

a) Một khách ở khách sạn A, biết khách đó ở phòng điều hòa bị hỏng.

b) Một khách ở khách sạn C, biết khách đó ở phòng điều hòa không bị hỏng.

(kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Gọi biến cố H: "Khách nghỉ ở phòng có điều hòa bị hỏng"

A: "Khách nghỉ tại khách sạn A"

B: "Khách nghỉ tại khách sạn B"

C: "Khách nghỉ tại khách sạn C"

Theo bài ra ta có: $P\left(A\right)=0,2$; $P\left(B\right)=0,5$; $P\left(C\right)=0,3$.

$P\left(H\mid A\right)=0,05$; $P\left(H\mid B\right)=0,04$; $P\left(H\mid C\right)=0,08$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P\left(H\right)=P\left(A\right).P\left(H\mid A\right)+P\left(B\right).P\left(H\mid B\right)+P\left(C\right).P\left(H\mid C\right)$

$=0,2.0,05+0,5.0,04+0,3.0,08$

$=0,054$.

a) Áp dụng công thức Bayes, xác suất để một khách ở khách sạn A, biết khách đó ở phòng điều hòa bị hỏng là:

$$P\left(A\mid H\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(H\mid A\right)}{P\left(H\right)}=\frac{0,2.0,05}{0,054}=\frac{5}{27}\simeq 0,19.$$

b) Áp dụng công thức Bayes, xác suất để một khách ở khách sạn C, biết khách đó ở phòng điều hòa không bị hỏng là:

$$P\left(C\mid \overline{H}\right)=\frac{P\left(C\right).P\left(\overline{H}\mid C\right)}{P\left(\overline{H}\right)}=\frac{0,3.\left(1-0,08\right)}{1-0,054}=\frac{138}{473}\simeq 0,29.$$

Câu 3: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Thừa Thiên Huế nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bệnh bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh Thừa Thiên Huế thì khả năng mà người đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %.

Lời giải

Gọi A là biến cố " người nghiện thuốc lá", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "người không nghiện thuốc lá"

Gọi B là biến cố " người bị bệnh phổi"

Để người mà ta gặp bị bệnh phổi thì người đó nghiện thuốc lá hoặc không nghiện thuốc lá

Ta cần tính $P(B)$

Với $P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})$

Ta có:

$$P(A)=0.2$$
$$P(B\mid A)=0.7$$
$$P(\overline{A})=0.8$$
$$P(B\mid\overline{A})=0.15$$

Vậy $P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid\overline{A})=0.26$

Do đó, tỉ lệ người mắc bệnh phổi của tỉnh Bắc Ninh là 26%

Câu 4: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Thừa Thiên Huế nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc là 15%. Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh Thừa Thiên Huế thì xác suất mà người đó nghiện thuốc lá khi biết mình bị bệnh phổi là

Lời giải

Gọi A là biến cố: "người nghiện thuốc lá"

B là biến cố: "người bị bệnh phổi"

Ta có: $P(A)=0,2$; $P(B|A)=0,7$; $P(\overline{A})=0,8$; $P(B|\overline{A})=0,15$.

Xác suất mà người đó nghiện thuốc lá khi biết mình bị bệnh phổi là $P(A|B)$

Áp dụng công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}$

Suy ra $P(A|B)=\dfrac{0,2.0,7}{0,2.0,7+0,8.0,15}=\dfrac{7}{13}$.

Câu 5: Được biết có 5% đàn ông bị mù màu và $0,25\%$ phụ nữ bị mù màu. Giả sử số đàn ông bằng số phụ nữ. Chọn ngẫu nhiên một người bị mù màu. Xác suất để người được chọn là đàn ông bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố: "người được chọn là đàn ông"

B là biến cố: "người được chọn bị mù màu"

Theo bài ra ta có: $P(B|A)=0,05$; $P(B|\overline{A})=0,0025$.

Vì số đàn ông bằng số phụ nữ nên ta có $P(A)=0,5; P(\overline{A})=0,5$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}$

Suy ra $P(A|B)=\dfrac{0,5.0,05}{0,5.0,05+0,5.0,0025}=\dfrac{20}{21}$.

Câu 6: Người ta điều tra thấy ở một địa phương nọ có 3% tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe. Người ta nhận thấy khi tài xế lái xe gây ra tai nạn thì có 21% là do tài xế sử dụng điện thoại. Hỏi việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên bao nhiêu lần?

Lời giải

Ta gọi A là biến cố "Tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe", B là biến cố "Tài xế lái xe gây tai nạn".

Khi đó $P(A)=3\%=0,03, P(A\mid B)=21\%=0,21$.

Theo công thức Bayes: $P(B\mid A)=\dfrac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}\Rightarrow\dfrac{P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{P(A\mid B)}{P(A)}=\dfrac{0,21}{0,03}=7$.

Vậy việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên 7 lần.

Câu 7: Một công ty một ngày sản xuất được 850 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm không đạt chất lượng. Lần lượt lấy ra ngẫu nhiên không hoàn lại 2 sản phẩm để kiểm tra. Xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng là

Lời giải

Gọi A_1, A_2 lần lượt là các biến cố sản phẩm thứ nhất, sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng.

Nếu sản phẩm thứ nhất không đạt chất lượng thì còn 49 sản phẩm không đạt chất lượng trong tổng số 849 sản phẩm nên $P\left(A_2 \mid A_1\right)=\dfrac{49}{849}$.

Ta có $P\left(A_1\right)=\dfrac{50}{850}$, $P\left(\overline{A_1}\right)=\dfrac{800}{850}$ và $P\left(A_2 \mid \overline{A_1}\right)=\dfrac{50}{849}$

Xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng là

$$P\left(A_2\right)=P\left(A_1\right).P\left(A_2 \mid A_1\right)+P\left(\overline{A_1}\right).P\left(A_2 \mid \overline{A_1}\right)=\frac{50}{850}.\frac{49}{849}+\frac{800}{850}.\frac{50}{849}=\frac{1}{17}.$$

Câu 8: Trong trò chơi hái hoa có thưởng của lớp 10A, cô giáo treo 10 bông hoa trên cành cây, trong đó có 5 bông hoa chứa phiếu có thưởng. Bạn Việt hái một bông hoa đầu tiên sau đó bạn Nam hái bông hoa thứ hai. Tính xác suất bạn Nam hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Bông hoa bạn Nam hái được chứa phiếu có thưởng", B là biến cố "Bông hoa bạn Việt hái được chứa phiếu có thưởng".

Ta có $P\left(B\right)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$; $P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)=\dfrac{1}{2}$, $P\left(A \mid B\right)=\dfrac{4}{9}$; $P\left(A \mid \overline{B}\right)=\dfrac{5}{9}$.

Xác suất bạn Nam hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng là

$$P\left(A\right)=P\left(B\right).P\left(A \mid B\right)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A \mid \overline{B}\right)=\frac{1}{2}.\frac{4}{9}+\frac{1}{2}.\frac{5}{9}=\frac{1}{2}.$$

Câu 9: Vào mỗi buổi sáng ở tuyến phố X, xác suất xảy ra tắc đường khi trời mưa và không mưa lần lượt là $0,6$ và $0,3$. Xác suất có mưa vào một buổi sáng là $0,1$. Tính xác suất để sáng đó tuyến phố H bị tắc đường.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Tuyến phố X bị tắc đường" và B là biến cố "Buổi sáng đó có mưa"

Theo đề ta có: $P\left(B\right)=0,1; P\left(A \mid B\right)=0,6$; $P(A \mid \overline{B})=0,3$

Suy ra $P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)=0,9$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P\left(A\right)=P\left(B\right).P\left(A \mid B\right)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A \mid \overline{B}\right)=0,1.0,6+0,9.0,3=0,33.$$

Câu 10: Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Xét các biến cố:

A: "Chọn được người không bị bệnh tiểu đường";

B: "Chọn được người cao tuổi là nam";

$\overline{B}$: "Chọn được người cao tuổi là nữ".

Từ giả thiết, ta có: $\mathrm{P}(B)=\dfrac{260}{500}=0,52$; $\mathrm{P}(A\mid B)=1-0,4=0,6$;

$\mathrm{P}(\overline{B})=\dfrac{240}{500}=0,48$; $\mathrm{P}(A\mid\overline{B})=1-0,55=0,45$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A\mid B)+\mathrm{P}(\overline{B})\cdot\mathrm{P}(A\mid\overline{B})=0,52\cdot 0,6+0,48\cdot 0,45=0,528\approx 0,53$.

Vậy xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là $0,53$.

Câu 11: Trong một đợt nghiên cứu tỷ lệ ung thư do hút thuốc lá gây nên, người ta thấy rằng tại tỉnh Hà Nam tỉ lệ người dân của tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh ung thư trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất người đó nghiện thuốc lá là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi A là biến cố "người nghiện thuốc lá", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "người không nghiện thuốc lá"

Gọi B là biến cố "người bị bệnh ung thư"

Theo giả thiết ta có:

$P(A)=0,2\Rightarrow P(\overline{A})=0,8$

$P(B\mid A)=0,7$

$P(B\mid\overline{A})=0,15$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid\overline{A})=0,2.0,7+0,8.0,15=0,26$

Xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh ung thư là $P(A\mid B)$

Theo công thức Bayes, ta có

$$P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0,2.0,7}{0,26}=\frac{7}{13}\approx 0,54.$$

Như vậy khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất (làm tròn đến hàng phần trăm) người đó nghiện thuốc lá là $0,54$.

Câu 12: Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Hãy tính tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng.

Lời giải

Gọi A là biến cố "bóng đạt chuẩn sau khi qua kiểm tra chất lượng"

B là biến cố "sản phẩm đạt tiêu chuẩn".

Theo bài ra ta có: $P(B)=0,8$; $P(\overline{B})=1-0,8=0,2$

Do tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 nên $P(A\mid B)=0,9$.

Tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95 nên $P(A\mid\overline{B})=1-0,95=0,05$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid\overline{B})=0,8.0,9+0,2.0,05=0,73$.

Câu 13: Một chuỗi của hàng sơn kinh doanh sơn mủ và sơn nước. Dựa trên doanh số bán hàng trong một thời gian dài, xác suất để khách hàng sẽ mua sơn mủ là $0,75$. Trong số những người mua sơn mủ, 60% cũng mua con lăn. Nhưng chỉ có 30% người mua sơn nước mua con lăn. Một người vào cửa hàng đó để mua hàng. Tính xác suất người đó mua con lăn.

Lời giải

Đáp số: Xác suất người đó mua được con lăn là $0,525$.

Gọi A là biến cố: " người đó mua con lăn".

B là biến cố: " người đó mua hộp sơn mủ".

Khi đó $\overline{B}$ là biến cố: " người đó mua hộp sơn nước".

Ta có: $P(B)=0,75$; $P(\overline{B})=0,25$; $P(A|B)=0,6$; $P(A|\overline{B})=0,3$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có xác suất người đó mua con lăn là:

$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})$

$P(A)=0,75.0,6+0,25.0,3=0,525$

Câu 14: Một xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus và cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus. Biết rằng tỉ lệ người nhiễm Covid – 19 trong một cộng đồng nào đó là 1%. Một người trong cộng đồng đó cho kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để người đó thực sự bị nhiễm virus có dạng $\frac{a}{b}$ (Phân số tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Người đó bị nhiễm Virus".

B là biến cố "Người đó cho kết quả dương tính".

Xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus $P(B|A)=0,9$.

Xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus, nên cho kết quả dương tính với 20% các trường hợp không thực sự nhiễm virus $P(B|\overline{A})=0,2$

$P(A)=0,01 \Rightarrow P(\overline{A})=0,99$

Do đó xác suất để người đó cho kết quả dương tính là:

$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,01.0,9+0,99.0,2=0,207$

Xác suất để người nhiễm virus cho kết quả dương tính là:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{0,01.0,9}{0,207}=\frac{1}{23}$$

Vậy $a=1,b=23 \Rightarrow a+b=24$.

Câu 15: Một kho hàng do hai nhà máy sản xuất. Biết tỉ lệ sản phẩm đóng góp của nhà máy một bằng $\frac{1}{3}$ sản phẩm đóng góp của nhà máy hai và tỉ lệ phế phẩm do nhà máy một, nhà máy hai sản xuất lần lượt là $0,1\%$ và $0,2\%$. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm thì thấy nó là phế phẩm. Biết xác suất để phế phẩm đó do nhà máy hai sản xuất là $\frac{a}{b}$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: " Sản phẩm được chọn là phế phẩm".

B là biến cố: "Sản phẩm được chọn thuộc nhà máy một".

Khi đó $\overline{B}$ là biến cố: "Sản phẩm được chọn thuộc nhà máy hai".

Vì tỉ lệ đóng góp của nhà máy một bằng $\frac{1}{3}$ sản phẩm đóng góp của nhà máy hai nên ta có: $P(B)=25\%=0,25$; $P(\overline{B})=75\%=0,75$; $P(A|B)=0,1\%=0,001$; $P(A|\overline{B})=0,2\%=0,002$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có xác suất chọn được phế phẩm là

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})$$

$$P(A)=0,25.0,001+0,75.0,002=\frac{7}{4000}.$$

Áp dụng công thức Bayes ta có: $P(\overline{B}|A)=\dfrac{P(\overline{B}).P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0,75.0,002}{\frac{7}{4000}}=\dfrac{6}{7}.$

Khi đó xác suất để phế phẩm đó do nhà máy hai sản xuất là $\frac{6}{7}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=7\end{cases}\Rightarrow T=6+2.7=20$

Câu 16: Một nhà máy lắp ráp nhận được các chi tiết do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 65% chi tiết, máy thứ hai cung cấp 35% chi tiết. Khoảng 80% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 85% chi tiết do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ nhà máy một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất (***kết quả làm tròn đến hàng phần trăm***).

Lời giải

Gọi: "A" là biến cố: "Chi tiết lấy từ dây chuyền đạt tiêu chuẩn"

"B_1" là biến cố: "Chi tiết do máy thứ nhất sản xuất"

"B_2" là biến cố: "Chi tiết do máy thứ hai sản xuất"

Ta cần tính xác suất: $P(B_1|A)$.

Theo công thức Bayes: $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1).P(A|B_1)}{P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)}$

Theo điều kiện bài toán: $P(B_1)=0,65$; $P(B_2)=0,35$; $P(A|B_1)=0,8$; $P(A|B_2)=0,85$

Vậy: $P(B_1|A)=\dfrac{(0,65).(0,8)}{(0,65).(0,8)+(0,35).(0,85)}\approx 0,64$

Câu 17: Một căn bệnh có 2% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người được chuẩn đoán kiểm tra và kết quả dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là ......%. *(kết quả làm tròn đến hàng phần mười).*

Lời giải

Gọi A là biến cố "Người đó mắc bệnh"

$\overline{A}$ là biến cố "Người đó không mắc bệnh"

Ta có A và $\overline{A}$ hợp thành một nhóm biến cố đầy đủ.

Gọi B là biến cố "Kết quả chuẩn đoán kiểm tra người đó là dương tính (bị bệnh)"

Ta cần tính $P(A|B)$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})$

Và công thức Bayes:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}$$

Theo đề bài ta có:

Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa chuẩn đoán kiểm tra: $P(A)=2\%=0,02$

Do đó xác suất để người đó không mắc bệnh khi chưa chuẩn đoán kiểm tra: $P(\overline{A})=1-0,02=0,98$

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $P(B|A)=99\%=0,99$

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là: $P(B|\overline{A})=1-0,99=0,01$

Thế số vào ta có:

$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,02.0,99+0,98.0,01=0,0296$

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{0,02.0,99}{0,0296}=\frac{99}{148}\approx 66,9\%$$

Xác suất để người đó thực sự bị bệnh nếu kết quả chuẩn đoán kiểm tra người đó dương tính là $66,9\%$.

Trả lời: Nếu một người được chuẩn đoán kiểm tra và kết quả dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là ...... $66,9\%$.

Câu 18: Một loại linh kiện do hai nhà máy số I và số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy số I và II lần lượt là: 1% và 2%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 60 sản phẩm của nhà máy số I và 100 sản phẩm của nhà máy số II, một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó.

Xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt là

Lời giải

a) Gọi A_1 là biến cố "chọn linh kiện của nhà máy số I"

A_2 là biến cố "chọn linh kiện của nhà máy số II"

Gọi B là biến cố "chọn được linh kiện phế phẩm" thì $\overline{B}$ là biến cố "chọn được linh kiện tốt".

Vì lô linh kiện để lẫn lộn 60 sản phẩm của nhà máy số I và 100 sản phẩm của nhà máy số II nên:

$$P(A_1)=\frac{60}{60+100}=37,5\%$$

$$P(A_2)=\frac{100}{60+100}=62,5\%$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$P(B)=P(A_1).P(B|A_1)+P(A_2).P(B|A_2)$

$P(B)=37,5\%.1\%+62,5\%.2\%=1,625\%$

$P(\overline{B})=1-P(B)=1-1,625\%=98,375\%$.

Câu 19: Tỉ lệ phế phẩm của một công ty là 10%. Trước khi đưa ra thị trường, các sản phẩm được kiểm tra bằng máy nhằm loại bỏ phế phẩm. Xác suất để máy nhận biết đúng chính phẩm là 95%, nhận biết đúng phế phẩm là 90%.

a) Tỉ lệ sản phẩm bị kết luận sai là

b) Tỉ lệ phế phế phẩm của công ty trên thị trường là

Lời giải

a) Ta xét hai biến cố sau:

A: "Sản phẩm được chọn ra là chính phẩm".

B: "Sản phẩm được kết luận đúng".

Vì tỉ lệ phế phẩm của một công ty là 10% nên $P\left(A\right)=0,9 \Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=0,1$.

Xác suất để máy nhận biết đúng chính phẩm chính là $P\left(B \mid A\right)=0,95$.

Xác suất để máy nhận biết đúng phế phẩm chính là $P\left(B \mid \overline{A}\right)=0,9$.

Vậy xác suất để máy nhận biết sai chính phẩm chính là $P\left(\overline{B} \mid A\right)=0,05$.

xác suất để máy nhận biết sai phế phẩm chính là $P\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right)=0,1$.

Tỉ lệ sản phẩm bị kết luận sai là

$$P\left(\overline{B}\right)=P\left(A\right).P\left(A \mid \overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(\overline{A} \mid \overline{B}\right)=0,9.0,05+0,1.0,1=0,055.$$

b) Ta xét biến cố sau:

C: "Sản phẩm của công ty trên thị trường".

Khi đó:

- Chính phẩm của công ty muốn ra thị trường chính là $P\left(C \mid A\right)=0,95$.

- Phế phẩm của công ty muốn ra thị trường chính là $P\left(C \mid \overline{A}\right)=0,1$.

Vậy tỉ lệ phế phẩm của công ty trên thị trường chính là $P\left(\overline{A} \mid C\right)$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P\left(\overline{A} \mid C\right)=\frac{P\left(\overline{A}\right).P\left(C \mid \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right).P\left(C \mid \overline{A}\right)+P\left(A\right).P\left(C \mid A\right)}=\frac{0,1.0,1}{0,1.0,1+0,9.0,95}=0,012.$$

Câu 20: Một bệnh viện sử dụng một xét nghiệm để phát hiện một loại bệnh với độ chính xác là 95% (nghĩa là 95% bệnh nhân mắc bệnh sẽ có kết quả dương tính). Xét nghiệm này cũng có tỷ lệ dương tính giả là 2% (nghĩa là 2% bệnh nhân không mắc bệnh cũng có kết quả dương tính). Biết rằng 1% dân số thực sự mắc bệnh này. Nếu một người nhận kết quả xét nghiệm dương tính, xác suất thực sự người đó mắc bệnh là bao nhiêu?

Lời giải

Để giải câu hỏi này, chúng ta sẽ sử dụng công thức Bayes.

Ta gọi:

Gọi B là biến cố người mắc bệnh, có $P\left(B\right)=1\%=0,01$.

$\overline{B}$ là biến cố người không mắc bệnh, có $P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)=1-0,01=0,99$.

Gọi D là biến cố người đó được xét nghiệm có kết quả dương tính. Khi đó

Xác suất xét nghiệm dương tính nếu mắc bệnh là $P(D|B)=95\%=0,95$.

Xác suất xét nghiệm dương tính nếu không mắc bệnh là $P(D|\overline{B})=2\%=0,02$.

Dùng công thức Bayes để tính xác suất mắc bệnh khi có kết quả xét nghiệm dương tính:

$$P(B|D)=\frac{P(B).P(D|B)}{P(D)}$$

$P(D)=P(B).P(D|B)+P(\overline{B}).P(D|\overline{B})=0,95.0,01+0,02.0,99=0,0293$.

Suy ra, $P(B|D)=\dfrac{0,95.0,01}{0,0293}\approx 0,3242$.

Vậy xác suất người đó thực sự mắc bệnh là khoảng 32%.

Câu 21: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các loại xạ thủ loại I là 0,9 và loại II là 0,7. Chọn ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Viên đạn trúng đích"

B là biến cố "Chọn xạ thủ loại I bắn".

$P(B)=\dfrac{2}{10}=0,2$, $\quad P(A|B)=0,9$

$P(\overline{B})=1-0,2=0,8$, $\quad P(A|\overline{B})=0,7$

Theo công thức xác suất thành phần ta có

$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0,2.0,9+0,8.0,7=0,74$.

Câu 22: Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất $0,95$ và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất $0,01$. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Thư được chọn là thư rác"

B là biến cố: "Thư được chọn là bị chặn".

Ta có $P(A)=3\%=0,03$;

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,03=0,97$; $P(B|A)=0,95$; $P(B|\overline{A})=0,01$.

Công thức Bayes, ta có

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\frac{0,03.0,95}{0,03.0,95+0,97.0,01}\approx 0,746.$$

Câu 23: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh X nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X, xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là

Lời giải

Gọi A là biến cố "người đó nghiện thuốc lá"; $\overline{A}$ là biến cố "người đó không nghiện thuốc lá"; B là biến cố "người đó bị bệnh phổi". Để người mà ta gặp bị bệnh phổi thì người đó nghiện thuốc lá hoặc không nghiện thuốc lá.

Ta có $P(A)=0,2$; $P(B|A)=0,7$; $P(\overline{A})=0,8$; $P(B|\overline{A})=0,15$.

$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})=0,2.0,7+0,8.0,15=0,26$.

Xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là $P(A\mid B)$.

Theo công thức Bayes ta có $P(A\mid B)=\dfrac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{0,2.0,7}{0,26}=\dfrac{7}{13}$.

Câu 24: Một căn bệnh X có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh X, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "người đó mắc bệnh", B là biến cố "kết quả kiểm tra người đó là dương tính (bị bệnh)"

Theo công thức Bayes ta có $P(A\mid B)=\dfrac{P(A).P(B\mid A)}{P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})}$.

Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra là $P(A)=1\%=0,01$. Do đó xác suất để người đó không mắc bệnh khi chưa kiểm tra là $P(\overline{A})=1-0,01=0,99$.

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là $P(B\mid A)=99\%=0,99$. Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là $P(B\mid \overline{A})=1-0,99=0,01$.

Xác suất để người đó thực sự bị bệnh là

$P(A\mid B)=\dfrac{P(A).P(B\mid A)}{P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})}=\dfrac{0,01.0,99}{0,01.0,99+0,99.0,01}=0,5$.

Câu 25: Số khán giả đến xem buổi biểu diễn âm nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,85; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,45. Dự báo thời tiết cho thấy nếu xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,6. Tính xác suất để nhà tổ chức sự kiện bán hết vé.

Lời giải

Xét hai biến cố *A*: " Nhà tổ chức sự kiện bán hết vé";

B: "Trời mưa vào buổi biểu diễn".

Khi đó, ta có $P(B)=0,6; P(\overline{B})=1-P(B)=0,4;\ P(A\mid B)=0,45; P(A\mid \overline{B})=0,85$.

Áp dụng công thức toàn phần, ta có

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid \overline{B})=0,6.0,45+0,4.0,85=0,61.$$

Câu 26: Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong đó nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu?(*làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm)*

Lời giải

Xét các biến cố:

A : " Chọn được người không bị tiểu đường''

B : " Chọn được người cao tuổi là nam"

$\overline{B}$: " Chọn được người cao tuổi là nữ "

Từ giải thuyết ta có $P(B)=\dfrac{260}{500}=0,52$; $P(A\,|\,B)=1-0,4=0,6$;

$P(\overline{B})=\dfrac{240}{500}=0,48$; $P(A\,|\,\overline{B})=1-0,55=0,45$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=0,52.0,6+0,48.0,45=0,528\approx 0,53$.

Câu 27: Một loại linh kiện do hai nhà máy I,II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của nhà máy I,II lần lượt là : $0,04;0,03$. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy I và 120 sản phẩm của nhà máy II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện của lô hàng đó. Giả sử linh kiện được chọn là phế phẩm. Tính xác suất linh kiện này thuộc nhà máy I.*(làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).*

Lời giải

Ta xét các biến cố

A: " Linh kiện được lấy ra là phế phẩm''

B: " Linh kiện lấy ra từ nhà máy I "

$\overline{B}$: " Linh kiện lấy ra từ nhà máy II "

Theo giả thuyết ta có $P(B)=\dfrac{80}{200}=0,4$; $P(\overline{B})=\dfrac{120}{200}=0,6$; $P(A\,|\,B)=0,04$; $P(A\,|\,\overline{B})=0,03$

Theo công thức toàn phần xác suất lấy linh kiện là phế phẩm là

$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=0,4.0,04+0,6.0,03=0,034$.

Mặt khác theo công thức Bayes xác suất linh kiện phế phẩm do nhà máy I sản xuất là:

$P(B\,|\,A)=\dfrac{P(B).P(A\,|\,B)}{P(A)}=\dfrac{0,4.0,04}{0,034}=\dfrac{8}{17}\approx 0,47$

Câu 28: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ loại I và loại II lần lượt là $0,9$ và $0,7$. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ đó bắn trúng đích, tính xác suất để xạ thủ đó là xạ thủ loại I?

Lời giải

Gọi A là biến cố " viên đạn trúng đích".

B_1 là biến cố " chọn xạ thủ loại I bắn".

B_2 là biến cố " chọn xạ thủ loại II bắn".

$P(B_1)=\dfrac{2}{10}=0,2$; $P(A|B_1)=0,9.$

$P(B_2)=\dfrac{8}{10}=0,8$; $P(A|B_2)=0,7.$

B_1, B_2 tạo thành họ đầy đủ các biến cố. Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)=0,2.0,9+0,8.0,7=0,74.$

Áp dụng công thức Bayes có:

$P(B_1|A)=\dfrac{P(A|B_1).P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{0,9.0,2}{0,74}=\dfrac{9}{37}\approx 0,24.$

Câu 29: Lớp $10A$ có tỉ lệ học sinh học giỏi môn Toán là 20%. Tỉ lệ học sinh học giỏi môn Anh Văn trong số học sinh học giỏi môn Toán là 70%, trong số học sinh không giỏi môn Toán là 15%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp $10A$ tham dự trại hè toàn quốc tại Nha Trang.

a) Tính xác suất học sinh được chọn giỏi môn Anh Văn.
b) Tính xác suất học sinh được chọn học giỏi cả môn Toán và môn Anh Văn.

Lời giải

Gọi A là biến cố: " Học sinh học giỏi môn Toán" suy ra
$\overline{A}$ là biến cố: "Học sinh không học giỏi môn Toán"
Gọi B là biến cố: "Học sinh học giỏi môn Anh Văn"
Để học sinh được chọn là học sinh giỏi môn Toán thì học sinh đó hoặc giỏi môn Anh Văn hoặc không giỏi môn Anh Văn.

Ta có $P(A)=0,2 \Rightarrow P(\overline{A})=0,8$

$P(B|A)=0,7$

$P(B|\overline{A})=0,15$

Vậy $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,2.0,7+0,8.0,15=0,26$

Xác suất học sinh được chọn giỏi môn Anh Văn là $0,26$.

b) Đáp số: $0,54$

Xác suất học sinh được chọn giỏi cả môn Toán và Anh Văn là $P(A|B)$

theo công thức Bayes ta có $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,2.0,7}{0,26}=\dfrac{7}{13}\simeq 0,54.$

Câu 30: Có hai đội thi đấu môn Bóng bàn. Đội I có 6 vận động viên, đội II có 8 vận động viên. Xác suất đạt huy chương đồng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là $0,8$ và $0,65$. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên.

a) Xác suất để vận động viên này thuộc đội I là $0,8$.

b) Xác suất để vận động viên được chọn đạt huy chương đồng là $\dfrac{5}{7}$.

c) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương đồng. Xác suất để vận động viên đó thuộc đội II là $0,48$.

d) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương đồng. Xác suất để vận động viên đó thuộc đội I là là $\dfrac{12}{25}$.

Lời giải

a) Sai.

Gọi A là biến cố: " Vận động viên được chọn thuộc đội I ".

Ta có $n(A)=6$, $n(\Omega)=14$.

Do đó $P(A)=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}\approx 0,4286$.

b) Đúng.

Ta có: $\overline{A}$ là biến cố: " Vận động viên được chọn thuộc đội II ". Suy ra $P(\overline{A})=\dfrac{4}{7}$.

B là biến cố: " Vận động viên được chọn đạt huy chương đồng".

Khi đó ta có: $P(B|A)=0,8$, $P(B|\overline{A})=0,65$.

Và $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})$

$P(B)=\frac{3}{7}.0,8+\frac{4}{7}.0,65=\frac{5}{7}$.

c) Sai.

Vì $P(\overline{A}\mid B)=\frac{P(\overline{A}).P(B\mid\overline{A})}{P(B)}$ nên $P(\overline{A}\mid B)=\frac{\frac{4}{7}.0,65}{\frac{5}{7}}=\frac{13}{25}=0,52$.

d) Đúng.

Vì $P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}$ nên $P(A\mid B)=\frac{\frac{3}{7}.0,8}{\frac{5}{7}}=\frac{12}{25}$.

Câu 31: Khảo sát dân cư của thành phố Huế cho thấy có 1% dân số mắc căn bệnh lạ. Các nhà khoa học đã tìm ra một phương pháp xét nghiệm để chẩn đoán căn bệnh này. Tuy nhiên, xét nghiệm có sai số nên khi xét nghiệm 96% người bị bệnh có kết quả dương tính và 92% người không bị bệnh có kết quả âm tính. Một người đi xét nghiệm. Gọi A là biến cố người được xét nghiệm bị bệnh còn B là biến cố người được xét nghiệm có kết quả xét nghiệm dương tính. Khi đó:

a) $P(A\mid B)=\frac{P(B).P(B\mid A)}{P(A)}$.

b) Xác suất để người đi xét nghiệm bị bệnh là 1%.

c) Xác suất để người đó có kết quả dương tính khi người đó không bị bệnh là 8%.

d) Một người đi xét nghiệm và có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để người đó bị bệnh lớn hơn xác suất để người đó không bị bệnh.

Lời giải

a) Sai.

Theo công thức Bayes thì khẳng định này sai.

b) Đúng.

Kết quả khảo sát cho thấy có 1% dân số mắc căn bệnh Y nên khi một người đi xét nghiệm thì xác suất để người đó bị bệnh là 1%.

c) Đúng.

Ta có: $P(B\mid\overline{A})=1-P(\overline{B}\mid\overline{A})=1-92\%=8\%$.

d) Sai.

Theo giả thiết, ta có: $P(A)=1\%$; $P(B\mid A)=96\%$.

Do đó: $P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid\overline{A})}=\frac{1\%.96\%}{1\%.96\%+99\%.8\%}=\frac{4}{37}$.

Suy ra: $P(\overline{A}\mid B)=1-\frac{4}{37}=\frac{33}{37}>\frac{4}{37}$.

Câu 32: Một công ty có hai chi nhánh. Sản phẩm của chi nhánh I chiếm 60% còn chi nhánh II chiếm 40% tổng sản phẩm của công ty. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của chi nhánh I chiếm 1% còn của chi nhánh II chiếm 2% tổng sản phẩm công ty. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của công ty. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Xác suất để sản phẩm của chi nhánh I được chọn là $0,4$.

b) Xác suất để lấy ra sản phẩm bị lỗi ở chi nhánh II là $0,02$.

c) Xác suất lấy ra sản phẩm bị lỗi là $0,015$.

d) Biết rằng sản phẩm bị lỗi. Xác suất sản phẩm đó do chi nhánh I sản xuất là $\frac{4}{7}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: " Sản phẩm bị lỗi"

B là biến cố: " Sản phẩm lấy ra do chi nhánh I sản xuất"

Suy ra $\overline{B}$ là biến cố: " Sản phẩm lấy ra do chi nhánh II sản xuất"

a) Sai.

Do sản phẩm của chi nhánh I chiếm 60% tổng sản phẩm của công ty nên $P(B)=0,6$.

b) Đúng.

Do tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của chi nhánh II chiếm 2% tổng sản phẩm nên $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,02$.

c) Sai.

Ta có:

$P(B)=0,6$ và $P\left(\overline{B}\right)=0,4$

$P(A\,|\,B)=0,01$ và $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,02$.

Do đó xác suất để sản phẩm lấy ra bị lỗi là

$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,6.0,01+0,4.0,02=0,014$.

d) Sai.

Do sản phẩm lấy ra bị lỗi nên xác suất sản phẩm đó do chi nhánh I sản xuất là

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(B).P(A\,|\,B)}{P(A)}=\frac{0,6.0,01}{0,014}=\frac{3}{7}.$$

Câu 33: Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b. Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%.

a) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb là $0,5$.

b) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb là $0,5$.

c) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố là $0,6$.

d) Xác suất để cây con có kiểu gene bb là $0,49$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Cây bố có kiểu gene bb";

M là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây bố";

N là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây mẹ";

E là biến cố: "Cây con có kiểu gene bb".

Theo giả thiết, M và N độc lập nên $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(M)\cdot\mathrm{P}(N)$.

Ta áp dụng công thức xác suất toàn phần $\mathrm{P}(M)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(M\,|\,A)+\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\cdot\mathrm{P}\left(M\,|\,\overline{A}\right)$ (*).

Ta có $\mathrm{P}(A)=0,4;\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)=0,6$.

a) Sai.

$\mathrm{P}(M \mid A)$ là xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb. Do đó $\mathrm{P}(M \mid A) = 1$.

b) Đúng.

$\mathrm{P}(M \mid \overline{A})$ là xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb. Do đó $\mathrm{P}(M \mid \overline{A}) = \frac{1}{2}$.

c) Sai.

Thay vào $(*)$ ta được: $\mathrm{P}(M) = 0,4.1 + 0,6.\ 0,5 = 0,4 + 0,3 = 0,7$.

d) Đúng.

Tương tự tính được $\mathrm{P}(N) = 0,7$.

Vậy $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(M) \cdot \mathrm{P}(N) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$.

Từ kết quả trên suy ra trong một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây bố và cây mẹ mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%, thì tỉ lệ cây con có kiểu gene bb là khoảng 49%.

Câu 34: Một căn bệnh có 2% dân số mắc phải. Một phương án chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương án này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với những người không mắc bệnh, phương pháp này chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp.

a) Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra là 0,01.

b) Xác suất kết quả dương tính nếu có người đó mắc bệnh là 0,99.

c) Xác suất của biến cố "Kết quả kiểm tra người đó là dương tính (bị bệnh)" là 0,0198.

d) Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là 0,699 (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

a) Sai.

Xác suất người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra là 0,02.

b) Đúng.

c) Sai.

Gọi A là biến cố "Người đó mắc bệnh". Suy ra $P(A) = 0,02$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố "Người đó không mắc". $P(\overline{A}) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Gọi B là biến cố "Kết quả kiểm tra người đó là dương tính".

Khi đó xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $P(B \mid A) = 99\% = 0,99$.

Xác xuất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là: $P(B \mid \overline{A}) = 1 - \frac{99}{100} = 0,01$.

Áp dụng công thức xác suất toàn ta được xác suất của biến cố "Kết quả kiểm tra người đó là dương tính (bị bệnh)" là: $P(B) = P(A).P(B \mid A) + P(\overline{A}).P(B \mid \overline{A}) = 0,02.0,99 + 0,98.0,01 =$ $0,0296$.

d) Đúng.

Xác suất người đó bị mắc bệnh thực khi kiểm tra là dương tính là:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A).P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{0,02.0,99}{0,0296} \approx 0,669.$$

Câu 35: Trong một khu bảo tồn động vật hoang dã, người ta đang nghiên cứu 600 con vật, trong đó có 360 con báo đốm và 240 con sư tử. Sau khi thống kê, người ta thấy: có 60% số báo đốm đã được tiêm phòng và 45% số sư tử đã được tiêm phòng.

a) Số con báo đốm đã được tiêm phòng là 216 con.

b) Số con sư tử chưa được tiêm phòng là 108 con.

c) Chọn ra ngẫu nhiên một con vật trong số đó. Xác suất để chọn ra được một con sư tử đã được tiêm phòng là $0,4$.

d) Chọn ra ngẫu nhiên một con vật trong số đó. Xác suất để chọn ra được một con vật chưa được tiêm phòng là $0,46$.

Lời giải

a) Đúng.

Số con báo đốm đã được tiêm phòng là: $360.60\% = 216$ (con).

b) Sai.

Số con sư tử chưa được tiêm phòng là: $240.(100\% - 45\%) = 132$ (con).

c) Sai.

Xét các biến cố:

A: "Chon được 1 con sư tử"

B: "Chọn được 1 con vật đã tiêm phòng".

Số con sư tử đã được tiêm phòng là: $240.45\% = 108$ (con).

Tổng số con vật đã được tiêm phòng là: $216 + 108 = 324$ (con).

Xác suất để chọn ra được một con sư tử đã được tiêm phòng là $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{108}{324} = \dfrac{1}{3}$.

d) Đúng.

Dễ dàng tính được: $P(A) = \dfrac{240}{600} = \dfrac{2}{5}$; $P(B \mid A) = \dfrac{45}{100} = \dfrac{9}{20}$; $P(\overline{A}) = \dfrac{3}{5}$; $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{5}$

Theo công thức xác suất toàn phần ta có: $P(B) = P(A).P(B \mid A) + P(\overline{A}).P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{27}{50} = 0,54$.

Vậy xác suất để chọn được một con vật chưa tiêm phòng là $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,46$.

Câu 36: Hai công nhân cần phải hoàn thành số sản phẩm nhất định. Công nhân thứ nhất phải làm 45% số sản phẩm, công nhân thứ hai phải làm 55% số sản phẩm. Khả năng xảy ra sai sót của công nhân thứ nhất là 3% và của công nhân thứ hai là 1%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Gọi A là biến cố "Sản phẩm được chọn là của công nhân thứ nhất", B là biến cố "Sản phẩm được chọn bị lỗi".

a) $P(A) = 0,5$

b) Xác suất sản phẩm được chọn là sản phẩm bị lỗi của công nhân thứ nhất là $P(B \mid A) = 0,03$.

c) $P(B) = 0,02$.

d) Xác suất để sản phẩm được chọn là sản phẩm của công nhân thứ nhất bị lỗi là $P(A \mid B) = \dfrac{27}{38}$

.

Lời giải

a) Sai.

$P(A) = 0,45$

b) Đúng.

Do tỉ lệ sản phẩm lỗi của công nhân thứ nhất là 3% nên $P(B|A)=0,03$.

c) Sai.

$P(\overline{A})=1-P(A)=0,55.$

Do tỉ lệ sản phẩm của công nhân số hai là 1% nên $P(B|\overline{A})=0,01.$

Vậy $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0,45.0,03+0,55.0,01=0,019.$

d) Đúng.

Xác suất để sản phẩm được chọn là sản phẩm của công nhân thứ nhất bị lỗi là $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,45.0,03}{0,019}=\dfrac{27}{38}.$

Câu 37: Chạy Marathon là môn thể thao mà tại đó, người chơi sẽ hoàn thành quãng đường 42,195 km trong khoảng thời gian nhất định. FM sub 4 là thành tích dành cho những người chơi hoàn thành quãng đường Marathon dưới 4 giờ.

Trong CLB AKR, tỷ lệ thành viên nam là 72%, tỷ lệ thành viên nữ là 28%. Đối với nam, tỷ lệ VĐV hoàn thành Marathon sub 4 là 32%; đối với nữ tỷ lệ VĐV hoàn thành sub 4 là 3%. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên từ CLB AKR:

a) Khi VĐV được chọn là nam, xác suất để VĐV này chưa hoàn thành sub 4 cự ly Marathon là 68%.

b) Xác suất để thành viên được chọn đã hoàn thành sub 4 là 22%.

c) Xác suất để thành viên được chọn là nữ đã hoàn thành sub 4 là 2%.

d) Biết rằng VĐV được chọn đã hoàn thành sub 4, xác suất để VĐV đó là nam bằng 96%.

Lời giải

Gọi A là biến cố VĐV được chọn là nam.

Gọi B là biến cố VĐV được chọn đã hoàn thành cự ly Marathon sub 4.

a) Đúng.

Khi VĐV được chọn là nam, xác suất để VĐV này chưa hoàn thành sub 4 cự ly Marathon là:

$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-32\%=68\%$.

b) Sai.

Xác suất để VĐV được chọn đã hoàn thành sub 4 là:

$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,72.0,32+0,28.0,03\approx 0,24=24\%$.

c) Sai.

Xác suất để VĐV được chọn là nữ và đã hoàn thành sub 4 là:

$P(\overline{A}.B)=P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,28.0,03\approx 0,0084\approx 0,84\%$.

d) Đúng.

Biết VĐV đã hoàn thành sub 4, xác suất để VĐV đó là nam là:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{0,72.0,32}{0,72.0,32+0,28.0,03}\approx 0,96=96\%$$

Câu 38: Một cửa hàng chỉ bán hai loại điện thoại là Samsung và Iphone. Tỷ lệ khách hàng mua điện thoại Samsung là 75%. Trong số các khách hàng mua điện thoại Samsung thì có 60% mua kèm ốp điện thoại. Tỷ lệ khách hàng mua điện thoại Iphone kèm ốp điện thoại trong số những khách hàng mua điện thoại Iphone là 30%.

a) Xác suất một khách hàng mua điện thoại Samsung là $0,75$.

b) Xác suất để một khách hàng mua điện thoại Iphone là $0,15$.

c) Xác suất để một khách hàng mua ốp điện thoại biết rằng khách hàng đó đã mua điện thoại Samsung là $0,6$, xác suất để một khách hàng mua ốp điện thoại biết rằng khách hàng đó đã mua Iphone là $0,3$.

d) Xác suất một khách hàng mua điện thoại kèm ốp là $0,525$.

Lời giải

Gọi A là biến cố một khách hàng mua điện thoại kèm ốp, B là biến cố một khách hàng mua điện thoại Samsung

a) Đúng.

$P(B)=75\%=0.75$.

b) Sai.

Xác suất để một khách hàng mua điện thoại Iphone là $P\left(\overline{B}\right)=1-0,75=0,25$.

c) Đúng.

$P\left(A\middle|B\right)=60\%=0,6;P\left(A\middle|\overline{B}\right)=30\%=0,3$.

d) Đúng.

$P\left(A\right)=P\left(B\right)P\left(A\middle|B\right)+P\left(\overline{B}\right)P\left(A\middle|\overline{B}\right)$

$=0,75\cdot 0,6+0,25\cdot 0,3=0,525$.

Câu 39: Một căn bệnh có 2% dân số mắc phải. Một phương pháp chẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 97%. Lấy một người đi kiểm tra.

a) Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra là $0,02$.

b) Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $0,99$.

c) Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là: $0,01$.

d) Biết rằng đã có kết quả chuẩn đoán là dương tính, xác suất để người đó thực sự bị bệnh là $0,25$

Lời giải

a) Đúng.

Gọi A là biến cố "người đó mắc bệnh"

Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra: $P\left(A\right)=2\%=0,02$

b) Đúng

Gọi B là biến cố "kết quả kiểm tra người đó là dương tính"

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $P\left(B\mid A\right)=99\%=0,99$

c) Sai

Xác xuất kết quả âm tính nếu người đó không mắc bệnh là: $P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=97\%=0,97$.

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là: $P\left(B\mid\overline{A}\right)=1-P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=1-0,97=0,03$

d) Sai

Do đó xác suất để người đó không mắc bệnh khi chưa kiểm tra: $P\left(\overline{A}\right)=1-0,02=0,98$

Xác suất để người đó thực sự bị bệnh là

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B|A\right)}{P\left(A\right).P\left(B|A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B|\overline{A}\right)}=\frac{0,02.0,99}{0,02.0,99+0,98.0,03}=\frac{33}{82}\approx 0,402.$$

Câu 40: Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ và tỉ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp

a) Xác suất nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ là $0,061$.

b) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Xác suất nhân viên đó là nam là $\frac{55}{118}$.

c) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Xác suất nhân viên đó là nữ là $\frac{63}{118}$

d) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Khi đó nhân viên đó là nam nhiều hơn là nữ.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Nhân viên được chọn là nữ" và B là biến cố "Nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ".

Theo đề ta có $P\left(A\right)=0,45$; $P\left(B|A\right)=0,07$; $P\left(B|\overline{A}\right)=0,05$. Suy ra $P\left(\overline{A}\right)=0,55$

a) Sai.

Ta có $P\left(B\right)=P\left(A\right).P\left(B|A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B|\overline{A}\right)=0,45.0,07+0,55.0,05=0,059$.

b) Đúng

$$P\left(\overline{A}|B\right)=\frac{P\left(\overline{A}\right).P\left(B|\overline{A}\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0,55.0,05}{0,059}=\frac{55}{118}.$$

c) Đúng

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B|A\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0,45.0,07}{0,059}=\frac{63}{118}.$$

d) Sai

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B|A\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0,45.0,07}{0,059}=\frac{63}{118}$$

Do $P\left(A|B\right)=\frac{63}{118}>\frac{55}{118}=P\left(\overline{A}|B\right)$ nên nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ là nữ sẽ nhiều hơn là nam.

Câu 41: Giả sử bệnh hiểm nghèo X có tỉ lệ nhiễm bệnh là $0,5\%$, xét nghiệm loại bệnh này có tỉ lệ dương tính giả là 4%. Khi xét nghiệm cho một người, ta gọi A là biến cố "Người được chọn không nhiễm bệnh" và B là biến cố "người được chọn có phản ứng dương tính".

a) Người được chọn không nhiễm bệnh có tỉ lệ $P\left(A\right)=0,995$

b) Tỉ lệ người không nhiễm bệnh trong số những người có phản ứng dương tính là $P\left(B|A\right)=0,04$.

c) Tỉ lệ người nhiễm bệnh trong số những người có phản ứng dương tính là $P\left(B|\overline{A}\right)=0,005$.

d) Khả năng nhiễm bệnh của một người có phản ứng dương tính là $P\left(\overline{A} \mid B\right) = \dfrac{25}{224}$.

Lời giải

a) Đúng.

Người được chọn không mắc bệnh có tỉ lệ $P\left(A\right) = 1 - 0,5\% = 0,995$

b) Đúng.

Do trong số những người không mắc bệnh có 4% phản ứng dương tính nên $P\left(B \mid A\right) = 0,04$.

c) Sai.

Những người mắc bệnh đều có phản ứng dương tính nên $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 1$.

d) Đúng.

Khả năng mắc bệnh của một người có phản ứng dương tính là $P\left(\overline{A} \mid B\right) = \dfrac{P\left(\overline{A}\right)P\left(B \mid \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)P\left(B \mid \overline{A}\right) + P\left(A\right)P\left(B \mid A\right)} = \dfrac{0,005.1}{0,005.1 + 0,995.0,04} = \dfrac{25}{224}$.