

ĐẦU TƯ BỞI
NHÓM NC MATH

2025

**TỔNG HỢP 100 BÀI TOÁN
THỰC TẾ VỀ HÀM SỐ BẬC HAI
ĐÁP ÁN + LỜI GIẢI**

Liên hệ: 0399653362

Mục lục

1	Tổng hợp 100 bài toán	2
2	Hướng dẫn giải hàm số bậc hai	30
2.1	Giải phương trình bậc hai	30
2.2	Giải bất phương trình bậc hai	37
2.3	Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của hàm số bậc hai và đỉnh parabol	41
3	Đáp án và lời giải	47
3.1	Bảng đáp án	47
3.2	Lời giải chi tiết	48

1 Tổng hợp 100 bài toán

Bài 1. Một công viên hình chữ nhật có chu vi bằng $156m$ và diện tích bằng $1512 m^2$. Người ta cần xây dựng một cái cổng có chiều rộng bằng $\frac{1}{3}$ chiều rộng của công viên. Hỏi chiều rộng của cổng là bao nhiêu mét?

Bài 2. Một công viên hình chữ nhật có chu vi bằng $120 m$ và diện tích bằng $875 m^2$. Người ta cần trồng một hàng cây dọc theo chiều dài của công viên và khoảng cách giữa 2 cây ít nhất là $2 m$. Biết rằng diện tích trồng cây là không đáng kể. Hỏi có thể trồng nhiều nhất bao nhiêu cây xanh?

Bài 3. Một bác nông dân có một khu đất hình chữ nhật với chu vi là $180 m$. Bác dự định làm lối đi xung quanh rộng $2 m$ và phần còn lại để trồng quýt. Biết rằng mỗi cây quýt cần $1,2 m^2$ đất. Hỏi có thể trồng nhiều nhất bao nhiêu cây quýt?

Bài 4. Một bác nông dân muốn xây dựng một khu vườn trồng cam có dạng hình chữ nhật với chu vi mong muốn bằng $52 m$. Biết rằng mỗi cây cam cần $1,5 m^2$ đất để trồng. Hỏi bác nông dân có thể trồng nhiều nhất bao nhiêu cây cam?

Bài 5. Một cửa hàng bán giày nhập một đôi với giá là 40 nghìn đồng. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x nghìn đồng thì ước tính mỗi tháng khách hàng sẽ mua $120 - x$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày với giá bao nhiêu nghìn đồng thì thu được tiền lãi nhiều nhất?

Bài 6. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1

triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới cho mỗi chiếc xe là bao nhiêu triệu đồng để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Bài 7. Một khách sạn có 50 phòng, người ta tính rằng nếu mỗi phòng cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày thì tất cả các phòng đều hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 nghìn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi người quản lý phải quyết định giá phòng là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Bài 8. Anh nông dân có sẵn 64 mét hàng rào ở nhà. Anh dự định dùng toàn bộ số hàng rào này để xây một khu vườn hình chữ nhật nhằm trồng hoa vạn thọ phục vụ dịp Tết. Tuy nhiên, anh đang phân vân không biết nên chọn chiều rộng a mét và chiều dài b mét như thế nào để diện tích khu vườn là lớn nhất.

Ngoài ra, sau khi trồng xong, anh muốn bán số hoa đã trồng. Giả sử giá bán mỗi chậu hoa (tính theo nghìn đồng) phụ thuộc vào thời điểm ngày bao nhiêu trong tháng 1 dương lịch cận Tết và được mô tả bởi hàm số:

$$F(x) = -0,1x^2 + 4x + 10 \quad 1 \leq x \leq 30$$

Trong đó: x là ngày trong tháng 1 dương lịch.

Biết rằng để thu được lợi nhuận cao nhất, anh đã bán số hoa đã trồng vào ngày c trong tháng 1. Tính tổng $S = a + b + c$.

Bài 9. Công ty A chuyên sản xuất một loại sản phẩm và ước tính rằng với x sản phẩm được sản xuất trong một tháng thì tổng chi phí sẽ là $C(x) = 3x^2 + 72x - 9789$ (nghìn đồng). Khi bán x sản phẩm thì giá của mỗi sản phẩm được công ty bán ra là $R(x) = 180 - 3x$ (nghìn đồng). Tính số sản phẩm công ty A cần sản xuất trong một tháng để thu về lợi nhuận cao nhất? (giả sử công ty này sẽ bán hết được số sản phẩm mà mình đã làm ra).

Bài 10. Một xưởng sản xuất dự định sản xuất tối đa 200 sản phẩm. Nếu sản

xuất và bán được x sản phẩm ($1 \leq x \leq 200$), doanh thu thu được là:

$$R(x) = -x^2 + 300x \text{ (nghìn đồng)}$$

Chi phí sản xuất cho x sản phẩm là:

$$C(x) = 50x + 2000 \text{ (nghìn đồng)}$$

Hỏi xưởng cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Bài 11. Một xưởng sản xuất tối đa 150 sản phẩm. Nếu sản xuất và bán được x sản phẩm ($1 \leq x \leq 150$), doanh thu trung bình cho một sản phẩm thu được khi bán hết x sản phẩm:

$$R(x) = -x + 200 \text{ (nghìn đồng)}$$

Chi phí sản xuất trung bình cho một sản phẩm khi bán x sản phẩm là:

$$C(x) = 50 + \frac{1000}{x} \text{ (nghìn đồng)}$$

Hỏi xưởng cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Bài 12. Một cửa hàng bán ô tô với giá mỗi ô tô là 100 triệu đồng. Với giá bán này, cửa hàng bán được khoảng 25 ô tô. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 20 triệu đồng thì số ô tô bán ra tăng thêm 25 chiếc. Xác định giá bán ô tô (triệu đồng) để cửa hàng thu được lợi nhuận nhiều nhất, biết rằng giá mua về của mỗi ô tô là 50 triệu đồng.

Bài 13. Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để

tăng người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tour 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tour là bao nhiêu nghìn đồng để doanh thu từ tour xuyên Việt là lớn nhất?

Bài 14. Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với vận tốc, khi $v = 10 \text{ km/h}$ thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất (đơn vị km/h)?

Bài 15. Một doanh nghiệp sản xuất và bán một loại sản phẩm với giá 45 nghìn đồng cho mỗi sản phẩm, với giá bán này khách hàng sẽ mua 60 sản phẩm mỗi tháng. Doanh nghiệp dự định tăng giá bán và họ ước tính rằng nếu tăng giá bán lên 2 nghìn đồng thì mỗi tháng sẽ bán được ít hơn 6 sản phẩm. Biết rằng chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 27 nghìn đồng. Hỏi doanh nghiệp phải bán với giá bao nhiêu để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Bài 16. Một cửa hàng bán vải với giá bán mỗi kg là 50 nghìn đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4 nghìn đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50 kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30 nghìn đồng.

Bài 17. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4 \text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km . Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5 km/h (như hình vẽ).

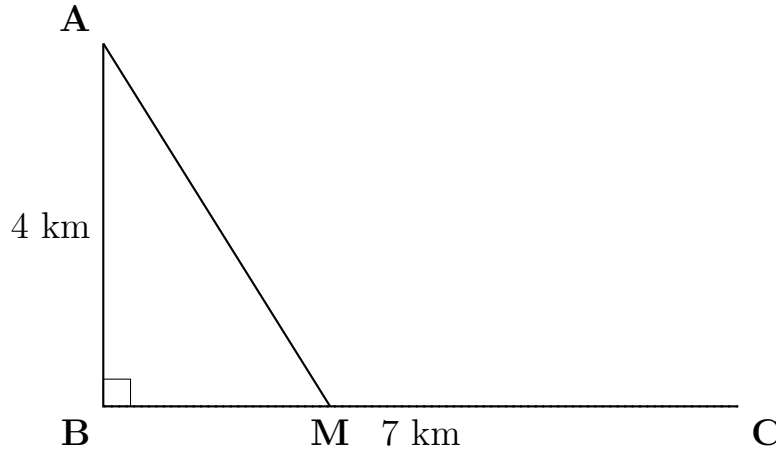
a) Tính khoảng cách từ vị trí B đến M, biết thời gian người đó đi từ A đến C là 148 phút.

b) Vì lý do an toàn, người canh hải đăng chỉ được phép chèo thuyền từ 6h sáng đến 18h tối. Giả sử hàm $F(x)$ miêu tả phần trăm lượng mưa tại thời điểm

x (giờ) trong ngày với $6 \leq x \leq 18, x \in \mathbb{Z}$, được miêu tả bởi hàm số :

$$F(x) = 0,2x^2 - 2,4x + 17,2$$

Hãy xác định thời điểm an toàn nhất để người canh hải đăng có thể bắt đầu chèo thuyền, sao cho phần trăm lượng mưa thấp nhất.



Bài 18. Một người nông dân muốn làm một khu vườn trồng rau bắp cải xanh. Anh ta có 100 mét hàng rào và muốn dựng hàng rào bao quanh một khu vườn hình chữ nhật, trong đó một cạnh vườn nằm sát một bức tường có sẵn nên không cần rào phía đó.

- Diện tích lớn nhất của khu vườn có thể đạt được là bao nhiêu?
- Giả sử mức độ phát triển của rau bắp cải xanh (tính theo phần trăm) sau x ngày được cho bởi hàm số:

$$F(x) = \frac{17}{1400}x^2 + \frac{37}{140}x + \frac{8}{7}$$

Tìm số ngày cần thiết để rau có thể thu hoạch, biết rằng rau được thu hoạch khi mức độ phát triển đạt 100%.

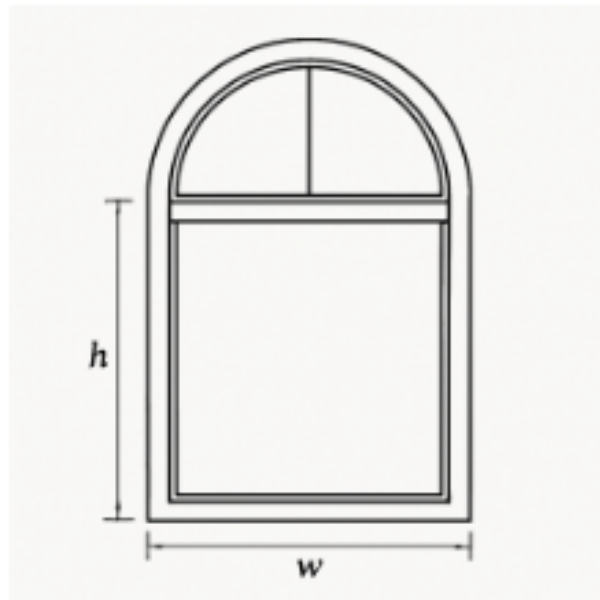
- Sau khi thu hoạch, người nông dân muốn giữ lại một phần rau để sử dụng. Mức độ hư hại của rau theo thời gian được mô tả bởi hàm số:

$$G(x) = 3,5x^2 - 5,5x + 5$$

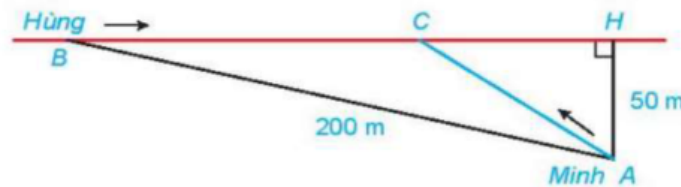
Tìm số ngày tối đa mà rau vẫn còn dùng được, biết rằng nếu mức độ hư hại vượt quá 40% thì rau không còn sử dụng được nữa.

Bài 19. Một kiến trúc sư muốn thiết kế một cửa sổ có hình dạng là một hình chữ nhật ở dưới và một nửa hình tròn ở trên (nửa hình tròn có đường kính trùng với cạnh trên của hình chữ nhật). Tổng chu vi của cửa sổ là 10 mét.

- a) Hãy xác định kích thước của hình chữ nhật (chiều rộng và chiều cao) để diện tích của cửa sổ là lớn nhất (làm tròn đến hàng đơn vị).
- b) Với kích thước cửa sổ đã tìm được ở câu a, người kiến trúc sư dự định sử dụng: gỗ để làm phần khung bao quanh cửa sổ (viên ngoài), sử dụng kính thường cho phần hình chữ nhật bên dưới, và sử dụng kính mờ cho phần nửa hình tròn phía trên để hạn chế ánh sáng gay gắt chiếu vào nhà. Biết rằng chi phí làm khung cửa là 500.000 đồng/m² (tính theo diện tích bao quanh – tức là phần viên), chi phí lắp kính thường là 700.000 đồng/m², và chi phí lắp kính mờ là 1.200.000 đồng/m². Hãy tính tổng chi phí (đơn vị triệu đồng và làm tròn 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy) mà người kiến trúc sư cần để làm cửa sổ theo thiết kế như trên.



Bài 20. Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50 m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B , cách mình một đoạn 200 m , thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là 5 km/h , vận tốc xe đạp của Hùng là 15 km/h . Hãy xác định vị trí C trên lề đường sao cho hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài 21. Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày sẽ giảm 9 thùng. Để

giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất đạt cực đại.

Bài 22. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều cho người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Công ty đó có thu nhập cao nhất là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 23. Một cửa hàng bán bưởi với giá mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán (nghìn đồng) để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

Bài 24. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy, mỗi máy có thể sản xuất được 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 (nghìn đồng/h). Số máy công ty nên sử dụng để chi phí hoạt động là thấp nhất.

Bài 25. Một xưởng mộc dùng gỗ gụ để sản xuất 5 chiếc bàn mỗi ngày. Chi phí chõ mỗi lần vận chuyển nguyên liệu là 5000 USD, chi phí để lưu trữ một đơn vị nguyên liệu là 10 USD mỗi ngày, trong đó một đơn vị là lượng nguyên liệu cần thiết để sản xuất một chiếc bàn. Hỏi mỗi lần xưởng mộc nên đặt mua bao nhiêu đơn vị nguyên liệu để chi phí trung bình hàng ngày (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí lưu trữ) trong chu kỳ sản xuất giữa các lần giao hàng ít nhất?

Bài 26. Một vận động viên ném tạ đang cầm quả tạ cách mặt đất 160 cm. Biết rằng quả tạ bay theo đường parabol: $y = -x^2 + 4x + 160$, trong đó x là thời gian tính bằng giây sau khi ném, y là độ cao tính bằng cm so với mặt đất. Hỏi độ cao lớn nhất mà quả tạ đạt được so với mặt đất là bao nhiêu cen-ti-mét?

Bài 27. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 140 m và diện tích bằng 1200 m². Người ta muốn trồng một hàng cam dọc theo chiều rộng của mảnh vườn, trong đó khoảng cách giữa hai cây cam liên tiếp ít nhất là 3 m. Biết rằng diện tích chiếm chỗ của cây cam là không đáng kể. Hỏi có thể trồng nhiều nhất bao nhiêu cây cam trong hàng?

Bài 28. Một bác nông dân có 120 m hàng rào đang muốn xây dựng một nông trại có diện tích lớn nhất. Hỏi bác nông dân có thể xây dựng được nông trại có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m²?

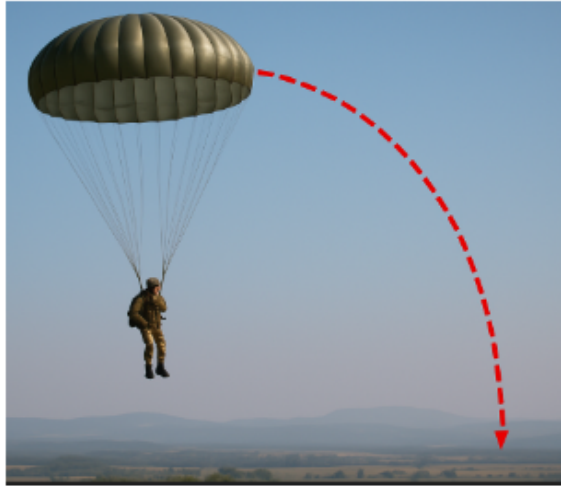
Bài 29. Quãng đường đi của một vật rơi tự do không vận tốc đầu cho bởi công thức $y = \frac{1}{2}gt^2$ (trong đó g là gia tốc trọng trường $g = 10 \text{ m/s}^2$, t (giây) là thời gian rơi tự do, S (mét) là quãng đường rơi tự do). Một vận động viên nhảy dù, nhảy khỏi máy bay ở độ cao 3200 mét (vận tốc ban đầu không đáng kể, bỏ qua các lực cản).

a) Hỏi sau thời gian bao nhiêu giây, vận động viên phải mở dù để khoảng cách đến mặt đất là 1200 mét?

b) Giả sử sau khi bung dù, độ cao (tính bằng mét) của một vận động viên so với mặt đất được cho bởi hàm

$$h(t) = -t^2 - 10t + 1200$$

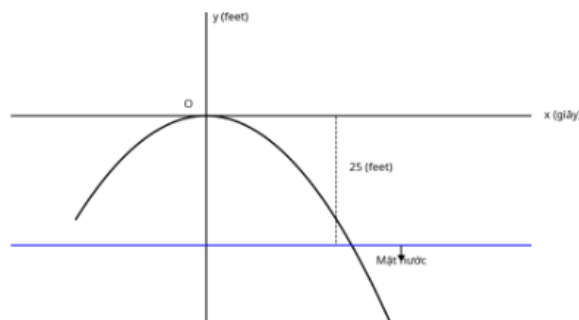
trong đó t (giây) là thời gian kể từ lúc bắt đầu bung dù. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ lúc bung dù thì người vận động viên tiếp đất?



Bài 30. Cá heo có thể nhảy cao tới 25 feet và thực hiện các thủ thuật như nhảy qua vòng, lộn nhào trong không trung. Giả sử quỹ đạo nhảy của cá heo là parabol $y = ax^2$, với gốc tọa độ là vị trí cao nhất mà cá heo đạt được, cách mặt nước 25 feet, trong đó y được tính theo đơn vị feet và x được tính theo đơn vị giây. Biết rằng sau 2 giây kể từ vị trí cao nhất đó, cá heo rơi chạm mặt nước.

a) Tìm a ?

b) Tìm vị trí feet cá heo rơi sau 1,5 giây kể từ vị trí cao nhất? (làm tròn đến chữ số phần trăm thứ hai).



Bài 31: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đô la. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đô la thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

Bài 32. Một doang nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Bài 33. Công ty A chuyên sản xuất một loại sản phẩm và ước tính rằng với q sản phẩm được sản xuất trong một tháng thì tổng chi phí sẽ là $C(q) = 3q^2 + 72q - 9789$ (đơn vị tiền tệ). Giá của mỗi sản phẩm được công ty bán với giá $R(q) = 180 - 3q$. Tính số sản phẩm công ty A cần sản xuất trong một tháng (giả sử công ty này sẽ bán hết được số sản phẩm mà mình làm ra) để thu về lợi nhuận cao nhất?

Bài 34. Một bạn đi xe máy về quê cách nhà 120 km. Bạn dự định đi với vận tốc x km/h, nhưng không muốn thời gian đi quá 2 giờ rưỡi và cũng không muốn chạy nhanh hơn 80 km/h vì sợ nguy hiểm. Giả sử a là vận tốc nhỏ nhất và b là vận tốc lớn nhất có thể đạt được? Tính $2a + 3b$?

Bài 35. Một nông dân muốn làm chuồng trại hình chữ nhật có diện tích ít nhất 200 m^2 , chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Hỏi chiều rộng ít nhất cần làm là bao nhiêu?

Bài 36. Một cửa hàng chạy quảng cáo, lợi nhuận (triệu đồng) theo công

thức:

$$L(x) = -x^2 + 12x - 20$$

với x là số triệu đồng chi cho quảng cáo. Hỏi cửa hàng cần chi ít nhất bao nhiêu tiền quảng cáo để lợi nhuận đạt ít nhất 16 triệu đồng?

Bài 37. Hai người cùng làm một công việc, người thứ nhất làm trong x giờ, người thứ hai làm nhanh hơn người thứ nhất 2 giờ. Biết tổng thời gian cả hai làm không quá 15 giờ. Hỏi x có thể nhận giá trị nào?

Bài 38. Một xưởng sản xuất bánh xe yêu cầu bán kính bánh xe không vượt quá 50 cm và diện tích mặt cắt ngang của bánh xe ít nhất là 1200 cm^2 . Biết:

$$S = \pi r^2$$

Hỏi bán kính r cần thỏa mãn điều kiện nào?

Bài 39. Một người muốn làm hồ cá hình chữ nhật sát tường nhà (1 cạnh không cần rào), có tổng chiều dài rào không quá 20 m, với chiều dài x m, chiều rộng y m. Hỏi kích thước hồ cá thế nào để diện tích lớn nhất.

Bài 40. Năng suất của một máy khi chạy liên tục x giờ/ngày được cho bởi:

$$N(x) = -x^2 + 12x$$

Nhà máy chỉ cho phép chạy máy tối đa 10 giờ/ngày. Hỏi nên chạy máy bao nhiêu giờ để năng suất đạt lớn nhất.

Bài 41. Chi phí mỗi ngày của công ty vận tải theo công thức:

$$C(x) = x^2 - 20x + 150$$

với x là số chuyến xe/ngày. Hỏi công ty nên chạy bao nhiêu chuyến/ngày để chi phí thấp nhất.

Bài 42. Một cửa hàng có doanh thu (triệu đồng) phụ thuộc số triệu đồng chi cho quảng cáo x theo công thức:

$$R(x) = -2x^2 + 16x + 40$$

Hỏi nên chi bao nhiêu tiền quảng cáo để doanh thu lớn nhất, và giá trị doanh thu lớn nhất.

Bài 43. Một xưởng sản xuất có năng suất (sản phẩm/ngày) theo công thức:

$$P(x) = -3x^2 + 30x - 20$$

với x là số giờ làm thêm trong ngày, không quá 8 giờ/ngày. Hỏi nên làm thêm bao nhiêu giờ để năng suất đạt lớn nhất, và năng suất lớn nhất là bao nhiêu.

Bài 44. Một công ty vận tải có chi phí mỗi ngày (triệu đồng) phụ thuộc số chuyến xe x chạy mỗi ngày:

$$C(x) = x^2 - 12x + 50$$

Hỏi công ty nên chạy bao nhiêu chuyến/ngày để chi phí thấp nhất, và chi phí thấp nhất là bao nhiêu.

Bài 45. Một cửa hàng sản xuất một loại sản phẩm, chi phí sản xuất (triệu đồng) theo công thức:

$$S(x) = 2x^2 - 20x + 60$$

với x là số sản phẩm (chục chiếc) sản xuất mỗi ngày. Hỏi nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi ngày để chi phí thấp nhất.

Bài 46. Chi phí bảo trì máy móc một nhà xưởng (triệu đồng) mỗi tháng được cho bởi:

$$B(x) = x^2 - 8x + 30$$

với x là số lần bảo trì trong tháng. Hỏi tần suất bảo trì thế nào để chi phí thấp nhất.

Bài 47. Một công ty tổ chức sự kiện, chi phí thuê nhân sự (triệu đồng) theo công thức:

$$T(x) = 0.5x^2 - 6x + 40$$

với x là số nhân sự thuê. Hỏi nên thuê bao nhiêu nhân sự để chi phí thấp nhất.

Bài 48. Chi phí vận hành một dây chuyền sản xuất được tính theo:

$$V(x) = 3x^2 - 24x + 80$$

với x là số giờ vận hành mỗi ngày. Hỏi nên vận hành bao nhiêu giờ mỗi ngày để chi phí vận hành nhỏ nhất.

Bài 49. Một cửa hàng muốn đóng gói 100 sản phẩm vào các hộp, mỗi hộp đựng x sản phẩm. Chi phí đóng gói cho mỗi hộp là 5000 đồng, chi phí bảo quản mỗi sản phẩm trong hộp là $200x$ đồng. Hỏi nên đóng mỗi hộp bao nhiêu sản phẩm để tổng chi phí nhỏ nhất.

Bài 50. Một công ty vận tải dự định thuê x chuyến xe tải/ngày để vận chuyển 200 tấn hàng. Mỗi chuyến chở được y tấn hàng. Biết chi phí thuê mỗi xe là 1 triệu đồng, chi phí bốc dỡ hàng là y^2 nghìn đồng/tấn. Hỏi nên thuê bao nhiêu chuyến/ngày để tổng chi phí nhỏ nhất.

Bài 51. Một công ty sản xuất mặt hàng với chi phí (triệu đồng) theo công thức:

$$C(x) = x^2 - 18x + 160$$

và yêu cầu sản xuất ít nhất 5 đơn vị/ngày, nhiều nhất 15 đơn vị/ngày. Hỏi công ty nên sản xuất bao nhiêu đơn vị để chi phí thấp nhất.

Bài 52. Một bồn chứa hình trụ không nắp, thể tích 500 lít, cần thiết kế sao cho diện tích vật liệu làm bồn nhỏ nhất. Biết $V = \pi r^2 h$. Hỏi bán kính r cần chọn để diện tích nhỏ nhất.

Bài 53. Một nông trại xây dựng một khu đất hình chữ nhật sát bờ sông, với một cạnh không cần rào. Biết có 200 m rào, hỏi kích thước khu đất thế nào để diện tích lớn nhất.

Bài 54. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 10 m. Nếu diện tích mảnh đất là 600 m^2 , hãy tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

Bài 55. Một vật được thả từ độ cao h m so với mặt đất. Biết rằng quãng đường rơi sau t giây được tính theo công thức:

$$s = 5t^2$$

Nếu vật chạm đất sau 4 giây, hãy tìm độ cao h .

Bài 56. Tổng hai số là 20, tích của chúng là 96. Hãy tìm hai số đó.

Bài 57. Một người đi bộ quãng đường 12 km với vận tốc x km/h, sau đó đi xe đạp quãng đường 18 km với vận tốc nhanh hơn vận tốc đi bộ 9 km/h. Biết tổng thời gian đi là 3 giờ, hãy tính vận tốc đi bộ.

Bài 58. Một công ty dự kiến sản xuất x sản phẩm với chi phí sản xuất (triệu đồng) được cho bởi:

$$C = 0.5x^2 - 10x + 60$$

Hỏi với chi phí tối đa 80 triệu đồng, công ty có thể sản xuất nhiều nhất bao nhiêu sản phẩm.

Bài 59. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 8 m, diện tích không nhỏ hơn 240 m^2 . Hỏi chiều rộng ít nhất là bao nhiêu để thoả điều kiện.

Bài 60. Một người dự định đi quãng đường 60 km, nếu tăng vận tốc lên 10 km/h thì thời gian đi sẽ ít hơn 1 giờ. Hỏi vận tốc ban đầu ít nhất là bao nhiêu để đảm bảo không đi quá 4 giờ.

Bài 61. Một học sinh muốn làm một thùng hình hộp chữ nhật không nắp với thể tích ít nhất 2000 cm^3 , đáy hình vuông, chiều cao ít hơn cạnh đáy 2 cm. Hỏi cạnh đáy ít nhất là bao nhiêu.

Bài 62. Một công ty có thể sản xuất tối đa 500 sản phẩm mỗi ngày, chi phí sản xuất mỗi sản phẩm được cho bởi:

$$C(x) = 0.01x^2 - 3x + 500$$

Hỏi số sản phẩm tối đa có thể sản xuất trong ngày để chi phí không vượt quá 1000 triệu đồng.

Bài 63. Một công ty tổ chức sự kiện, thuê x nhân sự với chi phí mỗi người 1 triệu đồng, chi phí khác là $100x^2$ nghìn đồng. Tổng chi phí không vượt quá 50 triệu đồng. Hỏi số nhân sự tối đa có thể thuê.

Bài 64. Một công ty vận tải dự định thuê x chuyến xe/ngày với chi phí thuê mỗi xe là 2 triệu đồng, lợi nhuận thu được khi thuê x xe là:

$$L(x) = -x^2 + 20x$$

Hỏi công ty nên thuê bao nhiêu xe để lợi nhuận lớn nhất.

Bài 65. Một hình chữ nhật có chu vi 40 m, hãy tìm chiều dài và chiều rộng để diện tích lớn nhất.

Bài 66. Một công ty có doanh thu khi bán x sản phẩm được tính:

$$R(x) = -5x^2 + 100x$$

Hỏi công ty cần bán bao nhiêu sản phẩm để doanh thu lớn nhất.

Bài 67. Một người muốn rào một mảnh đất hình chữ nhật cạnh sát bờ sông (1 cạnh không cần rào) với chiều dài x m, chiều rộng y m, biết có 60 m rào. Hỏi kích thước để diện tích lớn nhất.

Bài 68. Một cửa hàng bán sản phẩm với lợi nhuận (nghìn đồng):

$$P(x) = -2x^2 + 40x$$

với x là số sản phẩm bán. Hỏi số sản phẩm cần bán để lợi nhuận lớn nhất.

Bài 69. Chi phí sản xuất sản phẩm (triệu đồng):

$$C(x) = x^2 - 10x + 50$$

Hỏi số sản phẩm cần sản xuất để chi phí nhỏ nhất.

Bài 70. Một công ty thuê xe với chi phí:

$$T(x) = 0.5x^2 - 5x + 40$$

với x là số chuyến/ngày. Hỏi số chuyến để chi phí thuê nhỏ nhất.

Bài 71. Một công ty có chi phí bảo trì (triệu đồng):

$$B(x) = 2x^2 - 16x + 80$$

với x là số ngày bảo trì. Hỏi số ngày bảo trì để chi phí nhỏ nhất.

Bài 72. Một nhà máy vận hành dây chuyền với chi phí:

$$V(x) = 3x^2 - 30x + 100$$

với x là số giờ vận hành. Hỏi số giờ vận hành để chi phí nhỏ nhất.

Bài 73. Chi phí sản xuất theo công thức:

$$S(x) = 0.2x^2 - 4x + 60$$

Hỏi số sản phẩm cần sản xuất để chi phí nhỏ nhất.

Bài 74. Một cửa hàng bán sản phẩm với giá 10 USD. Với giá bán này, cửa hàng bán được khoảng 25 sản phẩm. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 2 USD thì số sản phẩm tăng lên 25 sản phẩm. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận nhiều nhất, biết rằng giá mua về của một sản phẩm là 5 USD.

Bài 75. Một công ty du lịch dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?

Bài 76. Một sân vận động có sức chứa là 55.000 khán giả. Với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình là 27.000 người. Qua khảo sát, người

ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm 10 nghìn đồng thì sẽ có thêm 3.000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để thu được lợi nhuận là cao nhất.

Bài 77. Theo thống kê tại một nhà máy Z, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 công nhân đi làm và mỗi công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm đi 5 sản phẩm / 1 công nhân / 1 giờ (và như vậy, nếu giảm thời gian làm việc 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có thêm 1 công nhân đi làm đồng thời năng suất lao động tăng 5 sản phẩm / 1 công nhân / 1 giờ). Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là:

$$P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4},$$

với x là thời gian làm việc trong 1 tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần đạt cực đại?

Bài 78. Khối lượng q (kg) của một loại xoài mà cửa hàng bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo hàm cầu:

$$p = 50 - \frac{1}{4}q.$$

Hãy tính toán các yêu cầu sau:

- Để doanh thu lớn nhất thì cửa hàng nên bán bao nhiêu kg xoài.
- Nhận thấy khi bán hàng càng nhiều thì doanh thu cửa hàng càng sụt giảm, cửa hàng quyết định điều chỉnh giá bán như sau: Giữ nguyên mức giá $p = 50 - \frac{1}{4}q$ khi bán được hết 120 kg xoài. Sau đó, mỗi kg xoài được bán với giá 15 nghìn đồng cho đến khi hết hàng.

Khi đó, doanh thu của cửa hàng khi bán được q (kg) xoài ($q > 120$) là: $a + bq$ (nghìn đồng). Hãy xác định các giá trị a , b , và tính doanh thu của cửa hàng khi bán được 500 kg xoài.

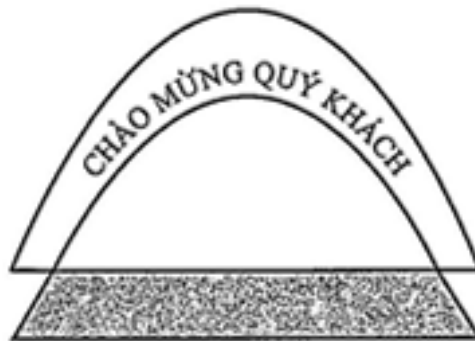
Bài 79. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1500 chiếc sạc dự phòng mỗi tháng với giá 320 nghìn một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 10 nghìn đồng, số lượng sạc dự phòng bán ra sẽ tăng thêm 100 sạc dự phòng mỗi tháng. Chi phí hàng tháng được tính theo hàm:

$$C(x) = 20000 - 10x \quad (\text{nghìn đồng}),$$

trong đó x là số sạc dự phòng bán ra trong một tháng. Phải bán được bao nhiêu sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận là lớn nhất?

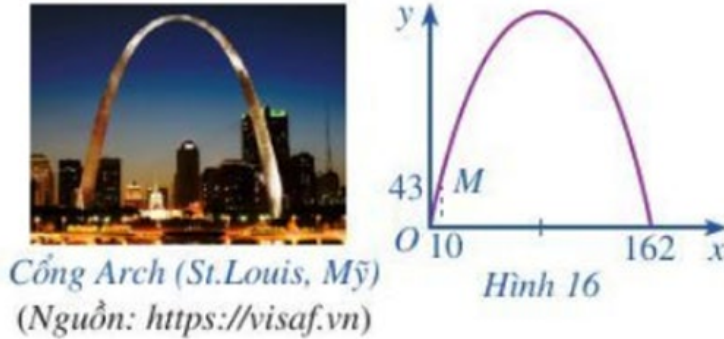
Bài 80. Một công ty du lịch bán tour du lịch cho một khách hàng với giá là x (đơn vị là triệu) thì thu được doanh thu được biểu diễn qua hàm $P(x) = -200x^2 + 550x$. Công ty phải bán giá tour cho một khách là bao nhiêu để đạt được doanh thu là lớn nhất.

Câu 81. Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là $4,5m$. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất (điểm H) là $1,8m$ và khoảng cách từ điểm H tới chân cổng gần nhất là $1m$. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó (tính theo đường viền trong) theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Câu 82. Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập

một hệ toạ độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như Hình 16 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có toạ độ $(162; 0)$. Biết một điểm M trên cổng có toạ độ là $(10; 43)$



Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Câu 83 Bố bạn Lan gửi 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $\%/x$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập với vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Tính số tiền cả vốn và lãi mà bố bạn Lan có được sau khi gửi tiết kiệm 2 tháng?

Câu 84. Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol (minh hoạ ở Hình 13) sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là $9m$ Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK = 1,6m$ và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK = 0,5m$. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Câu 85. Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau:

An nói: Tổ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng là 0,5 m là 2,93 m. Từ đó tổ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12 m .

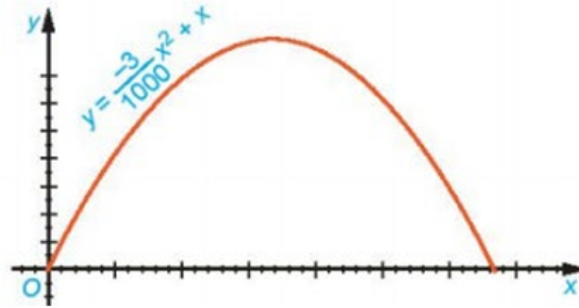


Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé.

Câu 86. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \frac{-3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất.



- Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay
- Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O . Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.

Câu 87. Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 m. Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng).

Câu 88. Bác Hùng dùng 200 m hàng rào dây thép gai để rào miếng đất đủ rộng thành một mảnh vườn hình chữ nhật.

- Tìm công thức tính diện tích $S(x)$ của mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng $x(m)$ của mảnh vườn đó.
- Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể rào được.

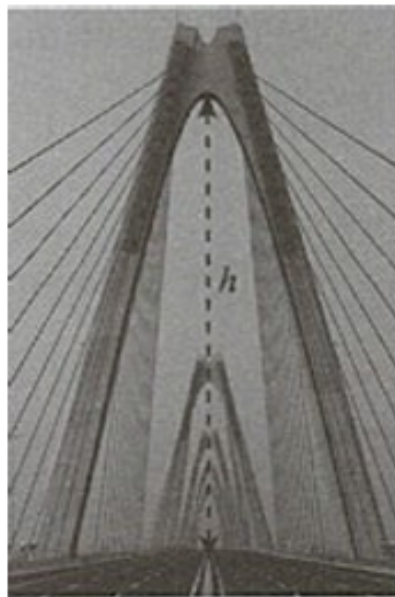
Câu 89. Một rạp chiếu phim có sức chứa 1000 người. Với giá vé là 40000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng

số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.

- Tìm công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là x nghìn đồng.
- Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất.

Câu 90. Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là chiếc cầu dây văng dài nhất Việt. Cầu có 5 trụ tháp chính kết nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mỹ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol.

- Giả sử rằng mặt trong của trụ cầu là một parabol như Hình 7. Khi không thể đo trực tiếp khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường, làm thế nào để ước tính độ cao này?

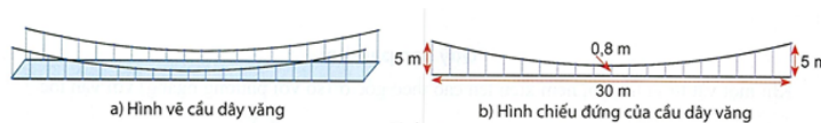


Hình 7. Cầu Nhật Tân

- Giả sử biết độ rộng của mặt đường khoảng 43 m. Một người đã dùng dây

dọi (không gian) gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất (khi lặng gió), sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là 1,87 m và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là 20 cm. Nếu dùng dữ liệu tự thu thập được và tính toán theo cách ở trên thì người này sẽ ước tính được độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là bao nhiêu?

Câu 91. Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.



Dựa vào bản vẽ ở Hình, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên. Biết:

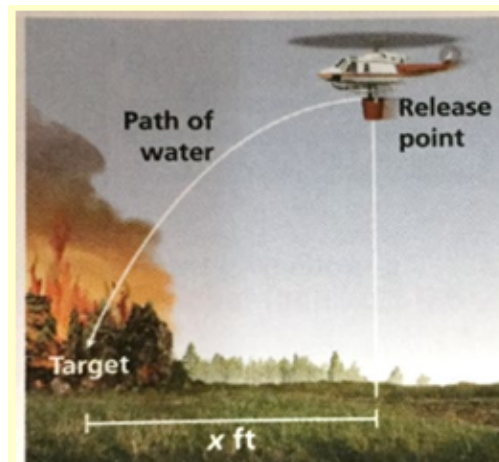
- Dây dài nhất là 5 m, dây ngắn nhất là 0,8 m. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.
- Nhịp cầu dài 30 m.
- Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.

Câu 92: Một vận động viên bóng chuyền đánh một quả bóng lên với vị trí ban đầu từ độ cao 4 ft (tính từ tay đánh bóng đến mặt đất). Tại thời điểm 0,5s trái bóng ở độ cao 10 ft và tại 1s thì trái bóng ở độ cao 8 ft



- a) Viết công thức tính độ cao quả bóng tính theo thời gian t (s) sau khi được đánh ra, biết công thức tính $h(t)$ là một hàm số bậc 2
- b) Độ cao lớn nhất quả bóng đạt được là bao nhiêu?
- c) Đối phương có bao nhiêu giây để chạy đến cứu quả bóng trước khi nó chạm đến mặt đất?

Câu 93. Một máy bay trực thăng cứu hộ bay ở độ cao 500 (feet) so với mặt đất, đang chuẩn bị phun nước vào một đám cháy rừng từ trên không. Độ cao h (feet) của nước so với mặt đất tính theo thời gian t (s) kể từ lúc máy bay phun ra là một hàm số bậc 2. Tại thời điểm 5s sau nước phun thì tới được phía trên đám cháy đang bốc lửa cao 90m. Tính khoảng cách từ đám cháy đến máy bay theo phương ngang biết rằng khoảng cách theo phương ngang tính từ điểm cháy đến máy bay là $85x =$ (ft)



Câu 94: Công ty du lịch Saigon Tourist báo giá tiền chuyến đi tham quan Đà Lạt cho nhóm khách của Trường THPT Trường Trinh như sau:

- Nếu có dưới 40 khách thì giá vé là 500 000 đồng / 1 người.
- Nếu có nhiều hơn 40 khách thì cứ thêm một người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng / 1 người cho toàn bộ hành khách.
- Gọi x là số lượng khách từ người thứ 41 trở đi. Hãy biểu thị doanh thu của

công ty theo x .

- Số người của nhóm du lịch nhiều nhất là bao nhiêu để công ty không bị lỗ, biết chi phí của chuyến đi là **20.160.000 đồng**?

Câu 95. Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/ phút được xác định bởi hàm số: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$ Vậy sức mạnh lớn nhất của động cơ này đạt được là bao nhiêu? Khi đó, động cơ phải quay bao nhiêu vòng/ phút?



Câu 96. Cánh cổng của gia đình bạn An như hình vẽ. Bạn An muốn đo chiều cao của cái cổng, biết rằng bạn An chỉ được nhà sản xuất công bố một vài dữ liệu: Chiều rộng của cổng là 5m, vị trí thấp nhất của phần trên cổng cách mặt đất 3m và từ một điểm cách chân cổng 1m, người ta dùng thước đo được chiều cao là $\frac{91}{25}m$



Câu 97. Anh Tuấn muốn xây dựng một hố ga không có nắp dẹt dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 3200 cm^3 , tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng

của hồ ga bằng 2 cm. Xác định diện tích đáy của hồ ga để khi xây hồ ga tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

Câu 98. Nhà Lan muốn xây một hồ nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu.

Câu 99. Một ca sĩ có buổi biểu diễn âm nhạc có giá vé đã thông báo là 600 đô la thì sẽ có 1000 người đặt vé. Tuy nhiên sau khi đã có 1000 người đặt vé với giá 600 đô la thì quản lý kinh doanh của ca sĩ này nhận thấy, cứ mỗi 20 đô la giảm giá vé thì sẽ thu hút thêm 100 người mua vé nên ông quyết định mở ra một chương trình giảm giá vé. Tìm giá vé phù hợp để có được số tiền vé thu vào là cao nhất và số tiền đó là bao nhiêu (đơn vị là đô la)?

Bài 100. Một tạp chí được bán với giá 20 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức: $C(x) = 0,001x^2 - 2x + 1000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị nghìn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

1.
 - Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.
 - Tỷ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất.
2. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 90 triệu đồng nhận được từ quảng cáo và sự trợ giúp cho báo chí (Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết).
 - Chứng minh rằng số tiền lãi khi in x cuốn tạp chí là $L(x) = -0,001x^2 + 18x - 10000$.

- Hỏi in bao nhiêu cuốn thì có lãi.
- In bao nhiêu cuốn thì lãi nhiều nhất và tính số tiền lãi đó.

2 Hướng dẫn giải hàm số bậc hai

2.1 Giải phương trình bậc hai

Lịch sử phát triển phương trình bậc hai

- **Babylon (khoảng 2000 TCN):** Đã biết cách giải các phương trình dạng $ax^2 = b$, $ax^2 + bx = c$ bằng phương pháp hình học, sử dụng diện tích hình vuông, hình chữ nhật để biểu diễn.
- **Ai Cập cổ đại:** Biết cách giải phương trình dạng đơn giản thông qua các bài toán đo đạc đất đai, xây dựng bằng phương pháp xấp xỉ.
- **Hy Lạp cổ đại:** Các nhà toán học như Euclid, Diophantus phát triển phương pháp hình học để giải phương trình bậc hai, nghiên cứu nghiệm nguyên thông qua phân tích số học.
- **Ấn Độ (Bhaskara II, thế kỷ 12):** Bhaskara II đưa ra công thức nghiệm rõ ràng cho phương trình bậc hai, công thức này ngày nay còn được gọi là công thức Bhaskara.
- **Al-Khwarizmi (thế kỷ 9):** Trong cuốn “Al-jabr” của mình, ông đã mô tả chi tiết cách giải phương trình bậc hai bằng phương pháp hoàn thành bình phương, đặt nền móng cho tên gọi “Algebra” hiện nay.
- **Châu Âu thời Phục Hưng:** Các nhà toán học phương Tây hoàn thiện ký hiệu đại số, áp dụng công thức nghiệm phương trình bậc hai một cách hệ thống, thống nhất trong việc giảng dạy và nghiên cứu.
- **Hiện nay:** Công thức nghiệm phương trình bậc hai

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

trở thành một trong những công cụ cơ bản và quan trọng nhất trong Toán học, ứng dụng rộng rãi trong Vật lý, Kinh tế, Sinh học, Kỹ thuật, giúp giải quyết các bài toán tối ưu hoá, tính quỹ đạo, xác định cực trị, và mô phỏng nhiều bài toán thực tế.

Phương trình bậc hai có dạng tổng quát là:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Đi tìm lời giải cho phương trình bậc hai

Bước 1: Chia hai vế cho a , ta được phương trình mới có dạng

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (a \neq 0).$$

Bước 2: Cộng hai vế cho $\frac{b^2}{4a^2}$ ta được

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Bước 3: Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ ta được

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Bước 4: Chuyển vế rồi qui đồng mẫu ta được

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Bước 5: Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$ ta được

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Nhận xét: Điều kiện để có nghĩa là $\frac{\Delta}{4a^2} \geq 0$ hay $\Delta \geq 0$.

Bước 6: Xét $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, sau đó khai căn ta được hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nhận xét: Nếu $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ thì hai nghiệm trùng với nhau

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Công thức giải phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Đầu tiên, ta tính $\Delta = b^2 - 4ac$. Sau đó, xét ba trường hợp sau:

- Nếu $\Delta < 0$: Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta > 0$: Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta = 0$: Suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Giải phương trình bậc hai: $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Ta có:

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 4.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.2.4 = -23 < 0.$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình bậc hai: $2x^2 - 11x + 12 = 0$.

Ta có:

$$a = 2, \quad b = -11, \quad c = 12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25 > 0.$$

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình bậc hai: $4x^2 - 24x + 36 = 0$.

Ta có:

$$a = 4, \quad b = -24, \quad c = 36$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 0.$$

Suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-24)}{2 \cdot 4} = 3.$$

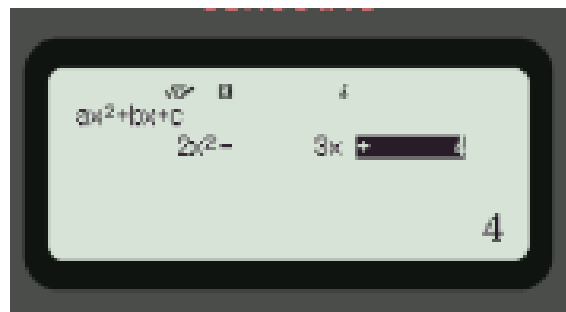
Hướng dẫn sử dụng Casio

Ví dụ 1. Giải phương trình bậc hai: $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

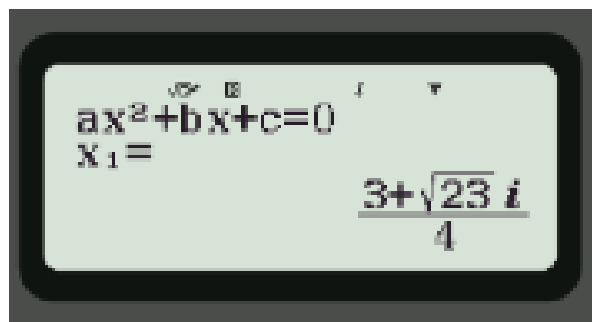
Bước 1: Bấm phím Menu + 9 + 2 + 2



Bước 2: Nhập phương trình bậc hai vào



Bước 3: Cuối cùng, bấm phím =



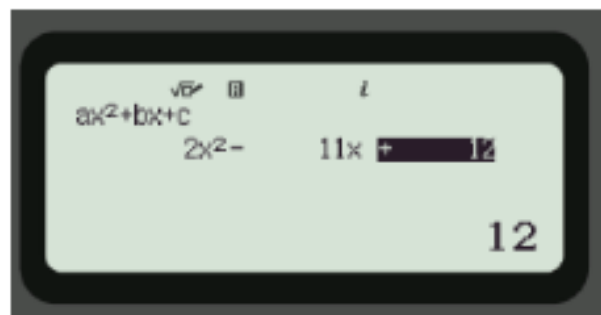
Lưu ý: Nếu đáp án có chữ i thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình bậc hai: $2x^2 - 11x + 12 = 0$.

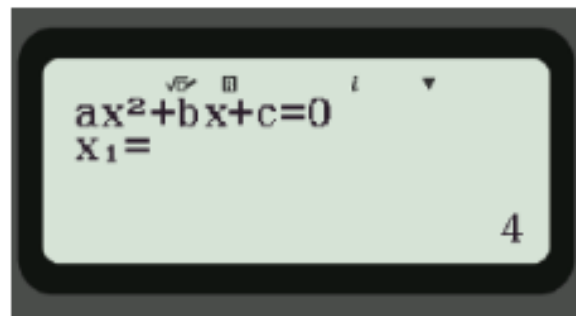
Bước 1: Bấm phím Menu + 9 + 2 + 2

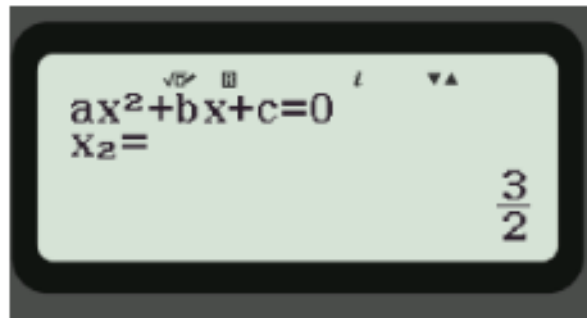


Bước 2: Nhập phương trình bậc hai vào



Cuối cùng, bấm phím = hai lần ta được hai nghiệm





2.2 Giải bất phương trình bậc hai

Lịch sử phát triển bất phương trình bậc hai

- **Thời Babylon (khoảng 2000 TCN):** Người Babylon đã biết giải các phương trình bậc hai trong các bài toán đo đạc đất đai, tính toán diện tích. Dù không viết dưới dạng bất phương trình, họ đã biết so sánh kết quả để tìm các giá trị thoả mãn lớn hơn hoặc nhỏ hơn một giá trị cho trước.
- **Hy Lạp cổ đại:** Euclid và các nhà toán học Hy Lạp sử dụng phương pháp hình học để giải các bài toán tối ưu, liên quan đến tìm diện tích lớn nhất hoặc nhỏ nhất, bản chất là giải các bất phương trình bậc hai dưới dạng hình học.
- **Ấn Độ:** Các nhà toán học Ấn Độ như Aryabhata và Bhaskara II (thế kỷ 12) đã phát triển các công thức nghiệm phương trình bậc hai, từ đó có thể xác định các giá trị của biến để bài toán hình học thoả mãn điều kiện cho trước, tương đương với bất phương trình bậc hai.
- **Al-Khwarizmi (thế kỷ 9):** Trong tác phẩm “Al-jabr”, Al-Khwarizmi đã giải các phương trình bậc hai bằng phương pháp hoàn thành bình phương, từ đó dẫn đến việc so sánh nghiệm với các giá trị cần tìm, đặt nền móng cho khái niệm bất phương trình.

- **Châu Âu thời Phục Hưng:** Khi ký hiệu đại số phát triển, các bất phương trình bậc hai bắt đầu được giải chính thức bằng công thức, và hình thành các quy tắc xét dấu tam thức bậc hai, ứng dụng trong tìm miền giá trị thoả mãn điều kiện bài toán.
- **Hiện đại:** Bất phương trình bậc hai trở thành công cụ quan trọng trong Toán học phổ thông, giúp giải quyết các bài toán tối ưu hoá, bài toán giới hạn điều kiện, bài toán tìm tập xác định của hàm số, cũng như ứng dụng trong vật lý, kỹ thuật và kinh tế.

Bất phương trình bậc hai có dạng tổng quát là:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (a \neq 0).$$

hoặc

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad (a \neq 0).$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (a \neq 0).$$

hoặc

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (a \neq 0).$$

Đi tìm lời giải cho phương trình bậc hai

Chẳng hạn, phương trình $ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (a \neq 0)$.

Tương tự như giải phương trình bậc hai ta có hai trường hợp:

- Nếu $a > 0$:

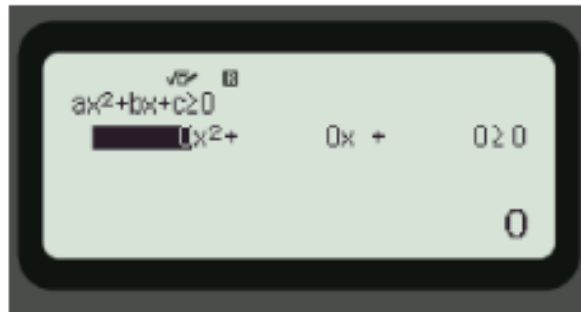
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq \frac{\Delta}{4a^2}.$$

- Nếu $a < 0$

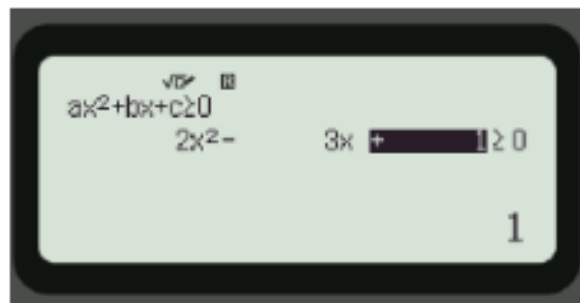
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Hướng dẫn sử dụng Casio Ví dụ 1. Giải bất phương trình bậc hai:
 $2x^2 - 3x + 1 \geq 0.$

Bước 1: Bấm phím Menu + A + 2 + 3



Bước 2: Nhập bất phương trình bậc hai vào



Bước 3: Bấm phím =

Calculator screen showing the inequality $x \leq a, b \leq x$ and the result $x \leq \frac{1}{2}, 1 \leq x$.

Kết luận: Thu được $x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 1$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình bậc hai: $2x^2 - 11x + 12 \leq 0$.

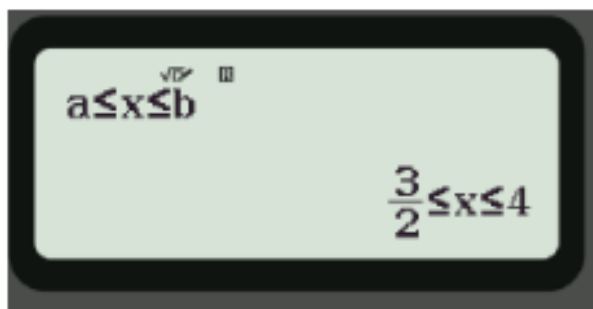
Bước 1: Bấm phím Menu + A + 2 + 4

Calculator screen showing the general form of a quadratic inequality $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Bước 2: Nhập bất phương trình bậc hai vào

Calculator screen showing the specific quadratic inequality $2x^2 - 11x + 12 \leq 0$.

Bước 3: Bấm phím =



Kết luận: Thu được $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$.

2.3 Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của hàm số bậc hai và đỉnh parabol

Lịch sử tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của hàm số bậc hai và đỉnh Parabol

- **Babylon (khoảng 2000 TCN):** Người Babylon đã biết giải phương trình bậc hai trong các bài toán tính diện tích hình vuông, hình chữ nhật, đồng thời biết cách so sánh các giá trị để tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trong thực tế, dù chưa có khái niệm đỉnh parabol.
- **Hy Lạp cổ đại:** Euclid và các nhà hình học Hy Lạp khi nghiên cứu các bài toán hình học tối ưu (như diện tích hình chữ nhật khi chu vi cho trước) đã gián tiếp thực hiện việc tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của hàm bậc hai bằng phương pháp hình học, tạo nền tảng khái niệm cực trị.
- **Ấn Độ (Bhaskara II, thế kỷ 12):** Bhaskara II phát triển công thức nghiệm phương trình bậc hai, qua đó người Ấn Độ đã biết cách tìm điều kiện để hàm đạt giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất trong các bài toán đo đạc và chia đất, liên quan đến cực trị của hàm bậc hai.

- **Al-Khwarizmi (thế kỷ 9):** Trong tác phẩm “Al-jabr”, Al-Khwarizmi giải các phương trình bậc hai bằng cách hoàn thành bình phương, qua đó xác định giá trị biến số tại điểm đặc biệt (sau này là đỉnh parabol).
- **Châu Âu thời Phục Hưng:** Khi ký hiệu đại số phát triển, các nhà toán học châu Âu bắt đầu xét dấu tam thức bậc hai, tìm cực trị bằng cách hoàn thành bình phương, xác định điểm đỉnh của đồ thị parabol, nền tảng cho công thức:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

để tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của hàm bậc hai.

- **Hiện đại:** Việc tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của hàm bậc hai trở thành một phần quan trọng trong giải tích sơ cấp, ứng dụng rộng rãi trong tối ưu hoá, Vật lý, Kỹ thuật, Kinh tế. Đỉnh parabol được xác định bằng công thức:

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

cho phép xác định cực trị nhanh và chính xác, phục vụ học tập và thực tiễn.

Hàm số bậc hai có dạng tổng quát là

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Đi tìm lời giải

Bước 1: Đặt nhân tử chung a

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Bước 2: Thêm bớt $\frac{b^2}{4a^2}$

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

Bước 3: Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ

$$f(x) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

Bước 4: Phân phối a vào ta được

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Bước 5: Ta có hai trường hợp có thể xảy ra

- Nếu $a > 0$ thì tồn tại giá trị nhỏ nhất

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq \frac{-\Delta}{4a}$$

Nhận xét: Nếu ta chọn $x = \frac{-b}{2a}$ thì $f(x) = \frac{-\Delta}{4a}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- Nếu $a < 0$ thì tồn tại giá trị lớn nhất

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a}$$

Nhận xét: Nếu ta chọn $x = \frac{-b}{2a}$ thì $f(x) = \frac{-\Delta}{4a}$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn sử dụng Casio

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc hai $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$.

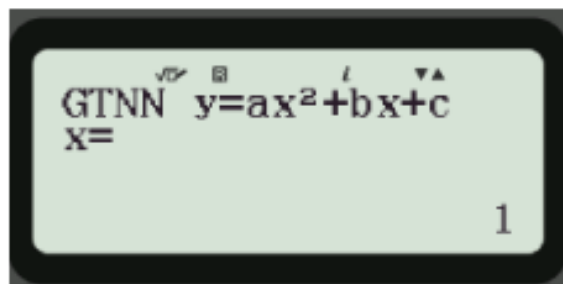
Bước 1: Bấm phím Menu + 9 + 2 + 2

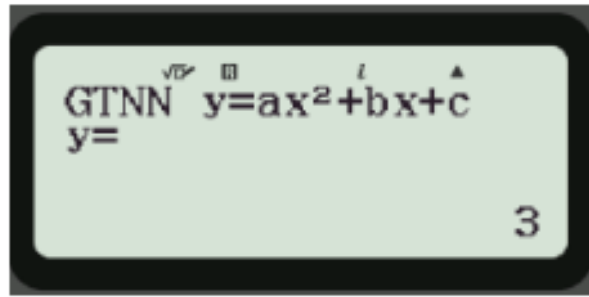


Bước 2: Nhập phương trình bậc hai vào



Bước 3: Bấm phím = cho đến khi xuất hiện chữ GTNN





Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 3 khi $x = 1$, nghĩa là $f(1) = 3$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số bậc hai $f(x) = -3x^2 + 8x + 10$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$.

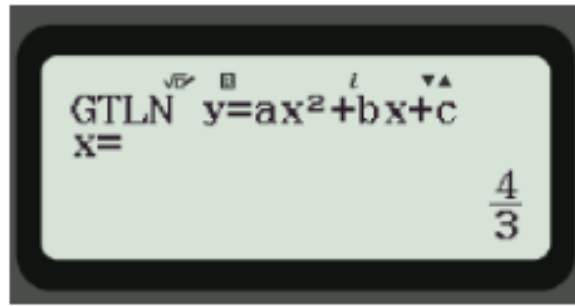
Bước 1: Bấm phím Menu + 9 + 2 + 2



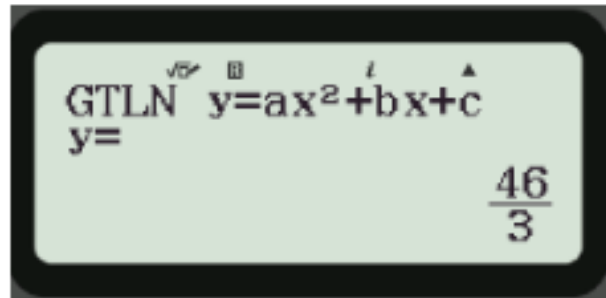
Bước 2: Nhập phương trình bậc hai vào



Bước 3: Bấm phím = cho đến khi xuất hiện chữ GTLN



GTLN $y=ax^2+bx+c$
X=
 $\frac{4}{3}$



GTLN $y=ax^2+bx+c$
y=
 $\frac{46}{3}$

Kết luận: Giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $\frac{46}{3}$ khi $x = \frac{4}{3}$, nghĩa là $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{46}{3}$ là giá trị lớn nhất của $f(x)$.

3 Đáp án và lời giải

3.1 Bảng đáp án

Bài 1	12	Bài 2	17	Bài 3	1666	Bài 4	112	Bài 5	80
Bài 6	30,5	Bài 7	450	Bài 8	52	Bài 9	9	Bài 10	125
Bài 11	75	Bài 12	84,4	Bài 13	1375	Bài 14	40	Bài 15	46
Bài 16	41	Bài 17a	3	Bài 17b	6	Bài 18a	1250	Bài 18b	80
Bài 18c	4	Bài 19a	7	Bài 19b	12,8	Bài 20	25,4	Bài 21	5
Bài 22	101	Bài 23	40	Bài 24	16	Bài 25	71	Bài 26	164
Bài 27	14	Bài 28	900	Bài 29a	20	Bài 29b	30	Bài 30a	-6,25
Bài 30b	10,94	Bài 31	80	Bài 32	30,5	Bài 33	9	Bài 34	336
Bài 35	11,86	Bài 37	6	Bài 38	50	Bài 39	50	Bài 40	36
Bài 41	50	Bài 42	72	Bài 43	55	Bài 44	14	Bài 45	10
Bài 46	14	Bài 47	22	Bài 48	32	Bài 49	50	Bài 50	11
Bài 51	79	Bài 52	5,42	Bài 53	5000	Bài 54	20 và 30	Bài 55	80
Bài 56	8 và 12	Bài 57	6,5	Bài 58	21	Bài 59	12	Bài 60	20
Bài 61	17	Bài 62	419	Bài 63	17	Bài 64	100	Bài 65	100
Bài 66	500	Bài 67	450	Bài 68	200	Bài 69	25	Bài 70	27,5
Bài 71	48	Bài 72	25	Bài 73	40	Bài 74	8,5	Bài 75	1,375
Bài 76	2,7	Bài 77	35,4	Bài 78	8100	Bài 79	2400	Bài 80	1,375
Bài 81	2,6	Bài 82	186	Bài 84	7,6	Bài 85	12,5	Bài 86	333,3
Bài 87	18,75	Bài 88	50	Bài 89	35	Bài 90	101	Bài 91	84,32
Bài 92	1,43	Bài 93	469,2	Bài 94	48	Bài 95	4000	Bài 96	4
Bài 97	160	Bài 98	216	Bài 99	800	Bài 100	9000		

3.2 Lời giải chi tiết

Bài 1. Một công viên hình chữ nhật có chu vi bằng 156 m và diện tích bằng 1512 m². Người ta cần xây dựng một cái cổng có chiều rộng bằng $\frac{1}{3}$ chiều rộng của công viên. Hỏi chiều rộng của cổng là bao nhiêu mét?

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều dài của khu vườn (đơn vị m).

Bởi vì chu vi công viên bằng 156 m nên $2x + 2y = 156$ ($y = 78 - x$).

Bởi vì công viên có diện tích bằng 1512 m² nên $xy = 1512$.

Suy ra: $x(78 - x) = 1512 \implies -x^2 + 78x - 1512 = 0 \implies x = 36, y = 42$.

Từ đây, chiều rộng của công viên bằng 36 m. Suy ra, chiều rộng của cổng là $\frac{36}{3} = 12$ m.

Bài 2. Một công viên hình chữ nhật có chu vi bằng 120 m và diện tích bằng 875 m². Người ta cần trồng một hàng cây dọc theo chiều dài của công viên và khoảng cách giữa 2 cây ít nhất là 2 m. Biết rằng diện tích trồng cây là không đáng kể. Hỏi có thể trồng nhiều nhất bao nhiêu cây xanh?

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều dài của khu vườn (đơn vị m).

Bởi vì chu vi công viên bằng 120 m nên $2x + 2y = 120$ ($x + y = 120$).

Bởi vì công viên có diện tích bằng 875 m² nên $xy = 875$.

Theo Vi-ét x, y là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 120x + 875 = 0 \implies x = 25, y = 35$.