ThS. TRẦN THANH YÊN

TỔNG HỢP

LÝ THUYẾT THPT

MÔN TOÁN

- Phù hợp ôn thi THPTQG và ôn thi ĐGNL các trường
- Biên soạn theo chương trình mới
- Đầy đủ chi tiết

MỤC LỤC

MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ	Trang
1. Hằng đẳng thức đáng nhớ	1
2. Chia đa thức	1
3. Sơ đồ Hooc-ne	1
4. Hình học phẳng	2
5. Mặt cầu	3
6. Mặt nón tròn xoay. Hình nón tròn xoay. Hình nón cụt	4
7. Mặt trụ tròn xoay. Hình trụ tròn xoay	5
8. Diện tích các hình thường gặp	7
9. Bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacopxki - Mincopxki	8
ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH 10	**8**
MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP	**8**
1. Mệnh đề	8
2. Tập hợp	10
BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	**12**
1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn	12
2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn	13
HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ	**14**
1. Hàm số	14
2. Hàm số bậc hai	16
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN	**17**
1. Xét dấu nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai	17
2. Giải bất phương trình bằng cách lập bảng xét dấu	19
3. Phương trình quy về phương trình bậc hai	19
4. Phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối và dấu căn	20
ĐẠI SỐ TỔ HỢP	**21**
1. Quy tắc cộng. Quy tắc nhân	21
2. Hoán vị. Tổ hợp. Chỉnh hợp	21
3. Nhị thức Newton	22
HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG 10	**23**
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	**23**
1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°	23
2. Hệ thức lượng trong tam giác vuông. Hệ thức lượng trong tam giác thường	24
VECTƠ	**25**
1. Vectơ	25
2. Tổng của hai vectơ. Hiệu của hai vectơ	26
3. Tích của một số với một vectơ và các tính chất	27

4. Góc giữa hai vectơ. Tích vô hướng của hai vectơ	28
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG	**29**
1. Tọa độ của vectơ. Tọa độ của một điểm	29
2. Đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ	30
3. Đường tròn trong mặt phẳng tọa độ	32
4. Ba đường conic trong mặt phẳng tọa độ: Elip. Hypebol. Parabol	36
THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 10	**38**
THỐNG KÊ	**38**
1. Số gần đúng. Sai số.	38
2. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu	39
3. Các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu	40
XÁC SUẤT	**41**
1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu	41
2. Xác suất của biến cố	41
ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH 11	**43**
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	**43**
1. Góc lượng giác	43
2. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác	43
3. Các công thức lượng giác	44
4. Hàm số lượng giác và đồ thị	46
5. Phương trình lượng giác cơ bản	47
6. Phương trình lượng giác thường gặp (đọc thêm)	49
DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN	**50**
1. Dãy số	50
2. Cấp số cộng	51
3. Cấp số nhân	51
GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC	**51**
1. Giới hạn dãy số	51
2. Giới hạn hàm số	53
3. Hàm số liên tục	54
HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT	**55**
1. Lũy thừa	56
2. Hàm số lũy thừa	57
3. Logarit	58
4. Hàm số mũ	59
5. Hàm số logarit	60
6. Một số bài toán lãi suất, bài toán thực tế	61
7. Phương trình mũ. Phương trình logarit	62
8. Bất phương trình mũ. Bất phương trình logarit	63

ĐẠO HÀM	**64**
1. Đạo hàm	64
2. Các quy tắc tính đạo hàm	66
HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG 11	**67**
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN	**67**
1. Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	67
2. Hai đường thẳng song song	68
3. Đường thẳng và mặt phẳng song song	69
4. Hai mặt phẳng song song	70
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN	**72**
1. Hai đường thẳng vuông góc	72
2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	72
3. Hai mặt phẳng vuông góc	73
4. Khoảng cách và góc trong không gian. Thể tích	75
THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 11	**80**
CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	**80**
1. Số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm	80
2. Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	81
XÁC SUẤT	**82**
1. Biến cố giao và quy tắc nhân xác suất	82
2. Biến cố hợp và quy tắc cộng xác suất	83
CHUYÊN ĐỀ 11	**83**
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ	**83**
1. Đồ thị	83
2. Đường đi Euler và đường đi Hamilton	84
3. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất	86
MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH 12	**88**
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ	**88**
1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số	88
2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	96
3. Đường tiệm cận	97
4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản	100
5. Phép biến đổi đồ thị. Sự tương giao của hai đồ thị	104
NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN	**106**
1. Nguyên hàm	106
2. Tích phân	108
3. Ứng dụng tích phân	109

HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG 12 111
VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 111
1. Vectơ và các phép toán trong không gian 111
2. Tọa độ của vectơ và của điểm trong không gian 112
3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ 113
4. Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng 114
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU 115
1. Phương trình mặt phẳng 115
2. Phương trình đường thẳng trong không gian 118
3. Phương trình mặt cầu 122
4. Các dạng toán thường gặp viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu 125
Dạng toán: Viết phương trình mặt phẳng 125
Dạng toán: Viết phương trình đường thẳng 130
Dạng toán: Viết phương trình mặt cầu 134
Dạng toán: Cực trị trong không gian Oxyz 138
THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 12 143
CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM 143
1. Khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm 143
2. Phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm 144
XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN 145
1. Xác suất có điều kiện 145
2. Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes 146

Giáo viên cần file word liên hệ:

ThS. Trần Thanh Yên

Facebook: https://www.facebook.com/thanhyendhsp

Email: tthanhyen@gmail.com

TỔNG HỢP LÝ THUYẾT THPT MÔN TOÁN

MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1

Hằng đẳng thức đáng nhớ

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

$A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB$

$A^4 + B^4 = (A^2+B^2)^2 - 2A^2B^2$

$A^4 - B^4 = (A^2 - B^2)(A^2 + B^2)$

2

Chia đa thức

Xem ví dụ sau: Chia đa thức $x^2 - 2x + 2$ cho đa thức $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 2 & x+1 \\ \cline{2-2} -\quad x^2 + x & \boxed{x-3} \\ \cline{1-1} -3x + 2 & \\ -\quad -3x - 3 & \\ \cline{1-1} \boxed{5} & \end{array}$$

Phép chia $x^2 - 2x + 2$ cho $x+1$ được thương $x-3$ và phần dư là 5 nên ta có:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x+1} = \boxed{x-3} + \frac{\boxed{5}}{x+1}.$$

3

Sơ đồ Hooc-ne

Chia đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ cho đa thức $x - a$ ta được thương là $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ và dư r:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = ab_{n-2} + a_{n-2}$	$\ldots$	$b_1 = ab_2 + a_2$	$b_0 = ab_1 + a_1$	$r = ab_0 + a_0$

"Nhân ngang, cộng chéo"

Khi đó ta viết $f(x) = (x-a).g(x) + r$.

Chú ý: Nếu $x = a$ là một nghiệm của $f(x)$ thì phần dư $r = 0$. Khi đó $f(x) = (x-a).g(x)$.

Xem ví dụ sau: Xét đa thức $x^3 - 4x^2 + 7x - 6$. Do $x = 2$ là một nghiệm của đa thức trên nên ta có sơ đồ Hooc-ne:

	1	–4	7	–6
2	1	–2	3	0

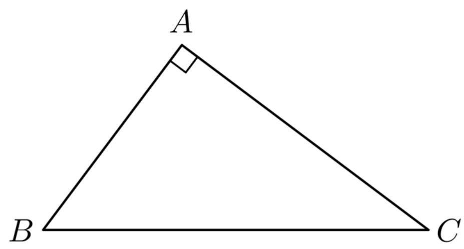
Khi đó ta có $x^3-4x^2+7x-6=(x-2)(x^2-2x+3)$.

4

Hình học phẳng

Định lý Pytago

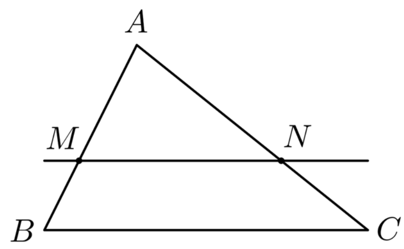
Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông: $BC^2=AB^2+AC^2$.



Định lý Talet trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Cho tam giác ABC với MN song song BC, khi đó: $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$.

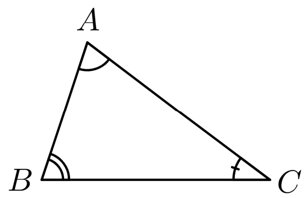


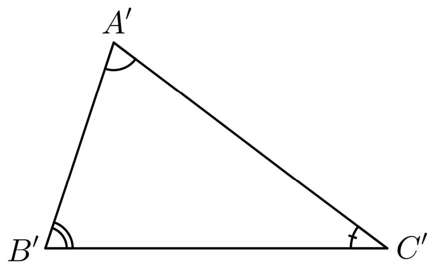
Định lý Talet đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Tức là, trong tam giác ABC, nếu ta có tỉ lệ $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$ thì ta suy ra $MN \parallel BC$.

Tam giác đồng dạng





$$\Delta ABC \text{ đồng dạng } \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

TH1: Nếu 3 cạnh của tam giác này tỉ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng (c-c-c).

TH2: Nếu 2 cạnh của tam giác này tỉ lệ với 2 cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng (c-g-c).

TH3: Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng (g-g-g).

Định lí 1: Tỉ số đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

Định lí 2: Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Tam giác bằng nhau

Các trường hợp bằng nhau của tam giác : cạnh – cạnh – cạnh, cạnh – góc – cạnh, góc – cạnh – góc, cạnh huyền – góc nhọn (tam giác vuông).

Các định nghĩa cơ bản trong tam giác

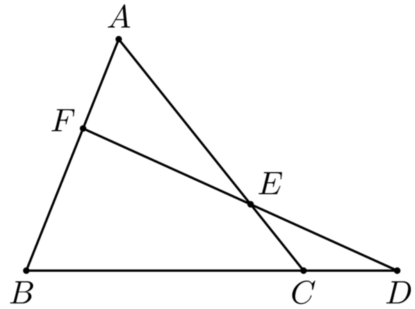
- ***Đường trung tuyến*** là đoạn thẳng nối từ đỉnh tới trung điểm của cạnh đối diện.
- ***Đường cao*** là đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến cạnh đối diện.
- ***Đường phân giác*** của một góc chia góc đó thành hai góc có độ lớn bằng nhau.
- ***Đường trung bình của tam giác*** là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của tam giác. Độ dài của nó là bằng một nửa cạnh đáy.
- ***Đường trung bình của hình thang*** là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang. Độ dài của nó là bằng nửa tổng hai đáy.
- ***Trọng tâm*** là giao điểm của ba đường trung tuyến.
- ***Trực tâm*** là giao điểm của ba đường cao.
- ***Tâm đường tròn ngoại tiếp*** là giao điểm của ba đường trung trực.
- ***Tâm đường tròn nội tiếp*** là giao điểm của ba đường phân giác trong.

Chú ý: Với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có đẳng thức vectơ sau:

$$BC.\overrightarrow{IA}+CA.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

Định lý Menelaus

Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{FA}{FB}.\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}=1$.



5

Mặt cầu

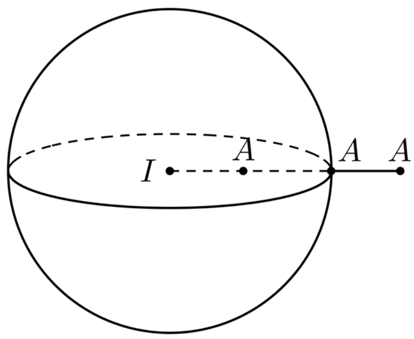
Trong không gian, cho điểm I. Tập hợp tất cả các điểm cách đều điểm I một khoảng không đổi R là ***mặt cầu*** (S) tâm I, bán kính R:

$$A\in(S)\Leftrightarrow IA=R.$$

Vị trí tương đối giữa điểm và mặt cầu

Cho điểm A và mặt cầu $S(I;R)$. Ta có:

- Điểm A thuộc (nằm trên) mặt cầu $\Leftrightarrow IA=R$.
- Điểm A nằm trong mặt cầu $\Leftrightarrow IA<R$.
- Điểm A nằm ngoài mặt cầu $\Leftrightarrow IA>R$.



Giao của mặt cầu và mặt phẳng, tiếp diện của mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P). Khi đó $h=IH$ là khoảng cách từ I tới mặt phẳng (P). Ta có:

- Nếu $h>R$: mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu.

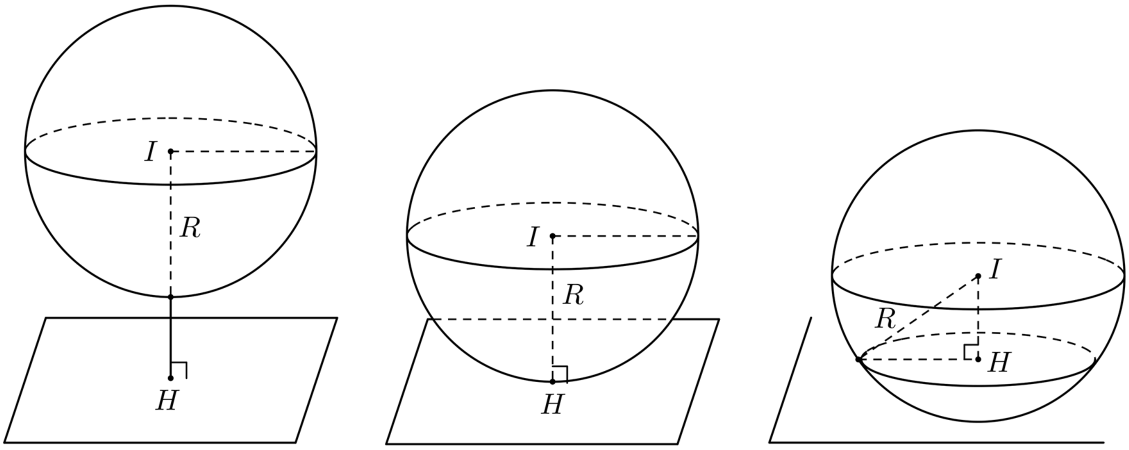
• Nếu $h = R$: mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H. Ta có $IH \perp (P)$.

Điểm H được gọi là ***tiếp điểm*** của mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P), mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng tiếp xúc hay ***tiếp diện*** của mặt cầu.

Chú ý: Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(I;R)$ tại điểm H là (P) vuông góc với bán kính IH tại điểm H đó.

• Nếu $h < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Đặc biệt khi $h = 0$ mặt phẳng (P) qua tâm mặt cầu, cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn có bán kính $r = R$.



$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
(P) và (S) không có điểm chung	(P) tiếp xúc (S) tại H	(P) cắt (S) theo một đường tròn

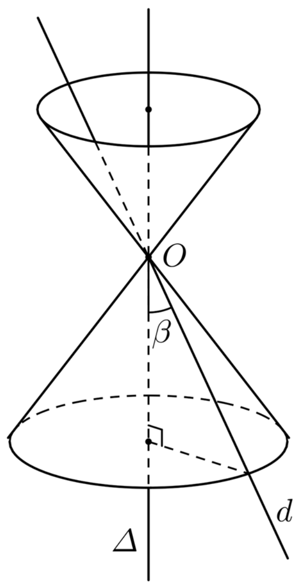
Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu bán kính R

• Diện tích: $S = 4\pi R^2$.

• Thể tích: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

6

Mặt nón tròn xoay



Trong mặt phẳng (P), cho hai đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O đồng thời hợp với nhau góc β (với $0° < \beta < 90°$). Khi (P) quay quanh trục Δ đường thẳng d tạo thành một ***mặt nón tròn xoay*** (gọi tắt là mặt nón) đỉnh O.

• Δ được gọi là trục.

• d được gọi là đường sinh.

• Góc 2β được gọi là góc ở đỉnh.

Hình nón tròn xoay

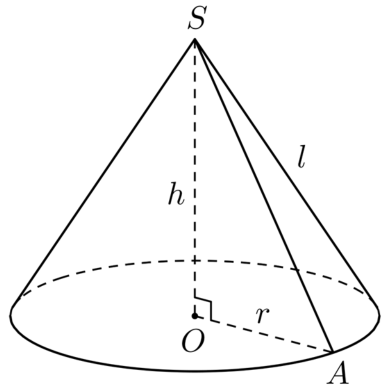
Cho ΔSOA vuông tại O quay quanh cạnh góc vuông SO thì đường gấp khúc SAO tạo thành một hình, gọi là ***hình nón tròn xoay*** (gọi tắt là hình nón).

Ta gọi: đường thẳng SO là trục, S là đỉnh, đoạn SO là đường cao và đoạn SA là đường sinh của hình nón.

Hình tròn tâm O, bán kính $r = OA$ là đáy của hình nón.

Các thông số thường gặp

- r bán kính đáy.
- h chiều cao (khoảng cách từ đỉnh đến đáy).
- l đường sinh.
- β là góc hợp bởi l và h.



Các công thức cần nhớ

(1) Diện tích đáy: $S_đ = \pi r^2$

(2) Chu vi đáy: $C_đ = 2\pi r$

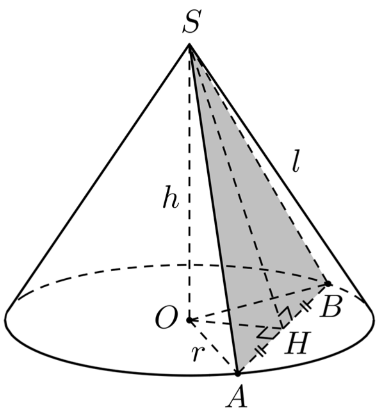
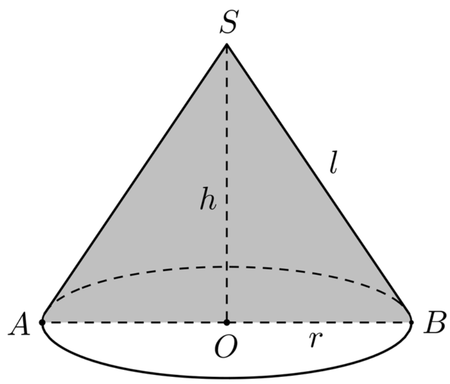
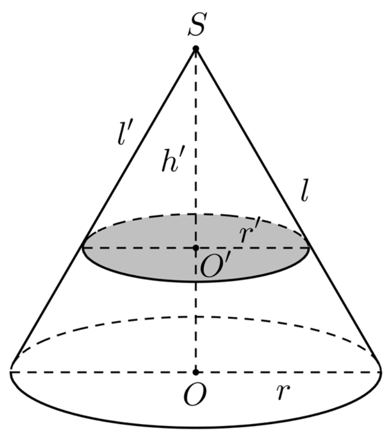
(3) Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl$

(4) Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2$

(5) Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

Thiết diện của hình nón khi cắt bởi mặt phẳng

Cho hình nón và mặt phẳng (P). Khi đó:

(P) qua đỉnh và cắt hình nón theo 2 đường sinh Thiết diện là tam giác cân	**(P) qua trục** Thiết diện là tam giác cân	**(P) vuông góc với trục** Thiết diện là 1 đường tròn
		

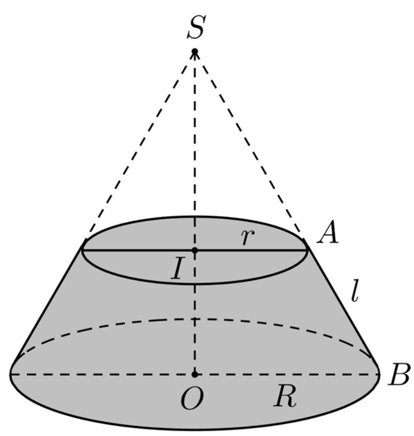
Hình nón cụt

Với R, r là bán kính 2 đáy, $h = IO$ là chiều cao, $AB = l$ là đường sinh của hình nón cụt. Khi đó:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R + r)l$.
- Diện tích toàn phần:

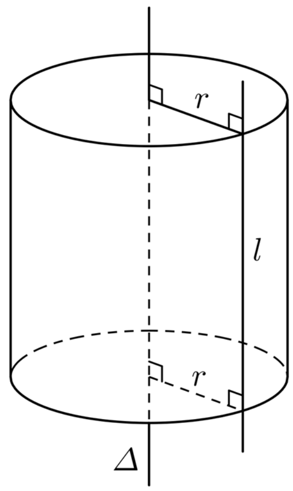
$S_{tp} = S_{2day} + S_{xq} = \pi(r^2 + R^2) + \pi(R + r)l$.

- Thể tích: $V = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$.



7

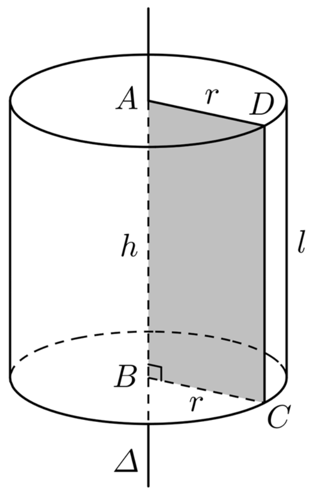
Mặt trụ tròn xoay



Trong $\text{mp}(P)$ cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng r. Khi quay $\text{mp}(P)$ quanh trục cố định Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là ***mặt trụ tròn xoay*** hay gọi tắt là mặt trụ.

- Đường thẳng Δ được gọi là trục.
- Đường thẳng l được gọi là đường sinh.
- Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ.

Hình trụ tròn xoay



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành một hình, hình đó được gọi là ***hình trụ tròn xoay*** hay gọi tắt là hình trụ.

- Đường thẳng AB được gọi là trục.
- Đoạn thẳng CD được gọi là đường sinh.
- Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ.
- Hình tròn tâm A, bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B, bán kính $r = BC$ được gọi là 2 đáy của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

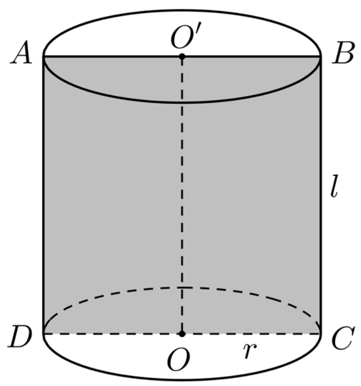
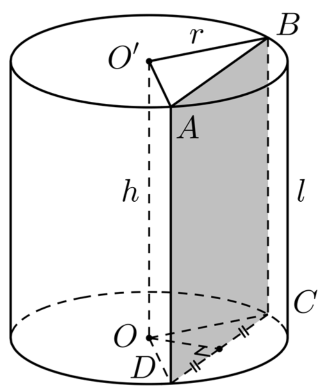
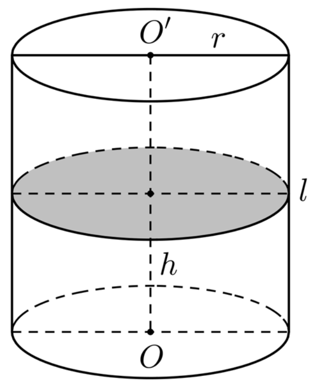
Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r. Khi đó:

- Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$.
- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{Đay} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
- Thể tích khối trụ: $V = B.h = \pi r^2 h$.

Thiết diện của hình trụ khi cắt bởi mặt phẳng

Cho hình trụ và mặt phẳng (P). Khi đó:

(P) qua trục	**(P) song song trục**	**(P) vuông góc trục**
Thiết diện là hình chữ nhật	Thiết diện là hình chữ nhật	Thiết diện là hình tròn
		

• Nếu cắt hình trụ (có bán kính là r) bởi một $mp(P)$ vuông góc với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính cũng bằng r.

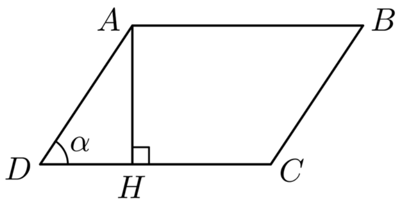
• Cho $mp(P)$ song song với trục Δ của hình trụ và cách Δ một khoảng d. Nếu $d<r$ thì $mp(P)$ cắt hình trụ theo hai đường sinh. Khi đó thiết diện là hình chữ nhật.

8

Diện tích các hình thường gặp

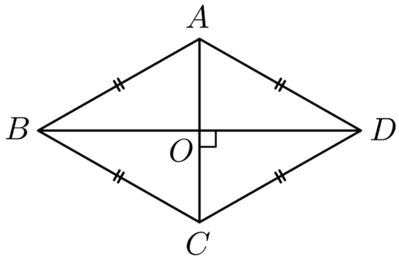
Diện tích hình bình hành:

$S_{ABCD} = AH.CD = AD.CD.\sin\alpha$



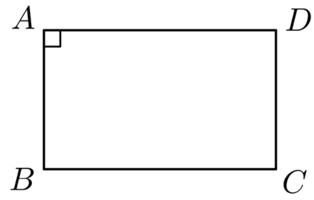
Diện tích hình thoi:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}.AC.BD$



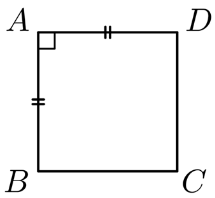
Diện tích hình chữ nhật:

$S_{ABCD} = AB.BC$



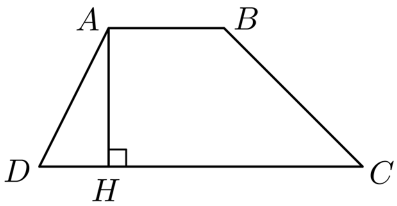
Diện tích hình vuông:

$S_{ABCD} = AB^2$



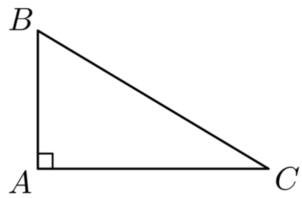
Diện tích hình thang:

$S_{ABCD} = \frac{(AB+CD).AH}{2}$



Diện tích tam giác vuông:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC$



Đặc biệt:

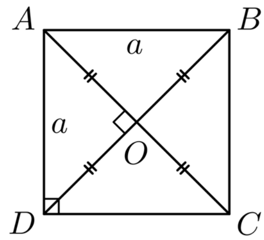
• Hình vuông cạnh *a*

Diện tích: $S = a^2$.

Độ dài đường chéo: $a\sqrt{2}$.

$OA = OB = OC = OD = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chéo = Cạnh . $\sqrt{2}$; Cạnh = Chéo / $\sqrt{2}$.



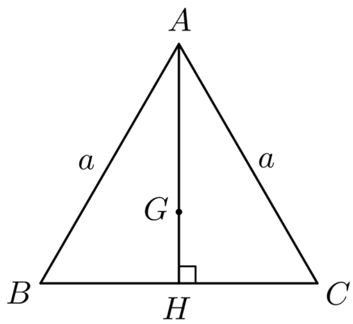
• Tam giác đều cạnh *a*

Diện tích: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Đường cao: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = AG = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = HG = \frac{1}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Cao = Cạnh . $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Cạnh = Cao . $\frac{2}{\sqrt{3}}$.



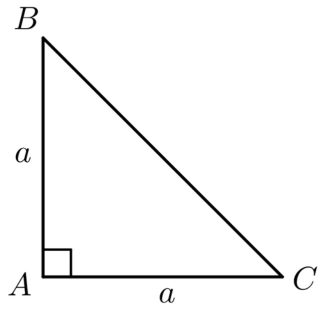
• **Tam giác vuông cân**

Diện tích: $S=\frac{1}{2}a^2$.

Cạnh huyền: $BC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.

Cạnh huyền = Cạnh góc vuông .$\sqrt{2}$;

Cạnh góc vuông = Cạnh huyền / $\sqrt{2}$.



9

Bất đẳng thức Cauchy

Với $a,\ b\ge 0$, ta có: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Mở rộng: Với $a,\ b,\ c\ge 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bất đẳng thức Bunhiacopxki

Với $a,\ b,\ x,\ y\in\mathbb{R}$, ta có: $(ax+by)^2\le(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ hoặc $|ax+by|\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$.

Bất đẳng thức Mincopxki

Với $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$, ta có: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH 10

MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

1

Mệnh đề

Mệnh đề là một khẳng định đúng hoặc sai. Một khẳng định đúng gọi là ***mệnh đề đúng***. Một khẳng định sai gọi là ***mệnh đề sai***. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Chú ý: Người ta thường sử dụng các chữ cái in hoa $P,\ Q,\ R,\ldots$ để kí hiệu mệnh đề.

Chú ý: Những mệnh đề liên quan đến toán học còn được gọi là ***mệnh đề toán học***.

Mệnh đề chứa biến

Xét câu "n chia hết cho 5" (n là số tự nhiên).

Câu "n chia hết cho 5" là một khẳng định, nhưng không là mệnh đề, vì khẳng định này có thể đúng hoặc sai, tuỳ theo giá trị của n. Tuy vậy, khi thay n bằng một số tự nhiên cụ thể thì ta nhận được một mệnh đề. Người ta gọi "n chia hết cho 5" là một ***mệnh đề chứa biến*** (biến n), kí hiệu $P(n)$. Ta viết $P(n)$: "n chia hết cho 5" (n là số tự nhiên).

Một mệnh đề chứa biến có thể chứa một biến hoặc nhiều biến.

Mệnh đề phủ định

Mỗi mệnh đề P có ***mệnh đề phủ định***, kí hiệu là $\overline{P}$, bằng cách thêm hoặc bớt từ "**không**", "**không phải**" vào trước vị ngữ của nó.

Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của nó có tính đúng sai trái ngược nhau. Nghĩa là khi P đúng thì $\overline{P}$ sai, khi P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Mệnh đề	Phủ định
$=$	$\neq$
$>$	$\leq$
$<$	$\geq$
$\geq$	$<$
$\leq$	$>$

Mệnh đề kéo theo

Cho hai phát biểu P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là ***mệnh đề kéo theo***, kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ **chỉ sai** khi P đúng và Q sai.

Nhận xét:

• Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".

• Để xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$, ta chỉ cần xét trường hợp P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì mệnh đề đúng, nếu Q sai thì mệnh đề sai.

P	***Q***	***P* suy ra *Q***
Đ	Đ	Đ
S	S	Đ
S	Đ	Đ
Đ	S	S

Trong toán học, ***định lí*** là mệnh đề đúng. Các định lí trong toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$.

Khi mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là định lí, ta nói: P là ***giả thiết***, Q là ***kết luận*** của định lí; P là ***điều kiện đủ*** để có Q và Q là ***điều kiện cần*** để có P.

Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là ***mệnh đề đảo*** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Chú ý: Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai ***mệnh đề tương đương***, kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$ (đọc là "P tương đương Q" hoặc "P khi và chỉ khi Q").

Khi đó, ta cũng nói P là ***điều kiện cần và đủ*** để có Q (hay Q là điều kiện cần và đủ để có P).

Nhận xét: Hai mệnh đề P và Q tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.

Mệnh đề chứa kí hiệu $\forall$ (với mọi), $\exists$ (tồn tại)

Mệnh đề	Phủ định
$\forall x,\ P(x)$	$\exists x,\ \overline{P(x)}$
$\exists x,\ P(x)$	$\forall x,\ \overline{P(x)}$

Mệnh đề "$\forall x \in M,\ P(x)$" **đúng** khi với mọi x_0 nó đều đúng; **sai** khi có một x_0 làm cho nó sai.

Mệnh đề "$\exists x \in M,\ P(x)$" **đúng** khi có một x_0 làm cho nó đúng; **sai** khi với mọi x_0 nó đều sai.

2

Tập hợp

Nhắc lại về tập hợp

Tập hợp dùng để chỉ một nhóm đối tượng nào đó hoàn toàn xác định. Mỗi đối tượng trong nhóm gọi là một ***phần tử*** của tập hợp đó. Kí hiệu tập hợp bằng các chữ cái in hoa $A, B, C, \ldots$ và kí hiệu phần tử của tập hợp bằng các chữ cái in thường $a, b, c, \ldots$

Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là "a thuộc A"). Để chỉ a không là phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là "a không thuộc A").

Một tập hợp có thể không chứa phần tử nào. Tập hợp như vậy gọi là ***tập rỗng***, kí hiệu $\varnothing$.

Người ta thường kí hiệu các tập hợp số như sau: $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên; $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên; $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ; $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực.

Cách xác định tập hợp

- Liệt kê các phần tử.
- Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử.

Chú ý: Khi liệt kê các phần tử của tập hợp, ta có một số chú ý sau đây:

a) Các phần tử có thể được viết theo thứ tự tuỳ ý.

b) Mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần.

c) Nếu quy tắc xác định các phần tử đủ rõ thì người ta dùng "..." mà không nhất thiết viết ra tất cả các phần tử của tập hợp.

d) Nếu A là tập hợp có hữu hạn phần tử thì số phần tử của nó được kí hiệu là $n(A)$.

Tập con và hai tập hợp bằng nhau

Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói tập A là ***tập con*** của tập B và kí hiệu $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B), hoặc $B \supset A$ (đọc là B chứa A).

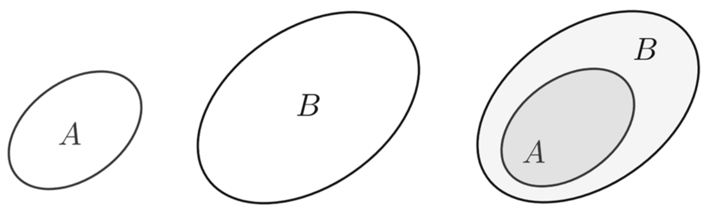
Hai tập hợp A và B gọi là ***bằng nhau***, kí hiệu $A = B$, nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

Nói cách khác, hai tập hợp A và B bằng nhau nếu mỗi phần tử của tập hợp này cũng là phần tử của tập hợp kia và ngược lại.

Nhận xét:

- $A \subset A$ và $\varnothing \subset A$ với mọi tập hợp A.
- Nếu A không phải là tập con của B thì ta kí hiệu $A \not\subset B$ (đọc là A không chứa trong B hoặc B không chứa A).
- Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì ta nói A và B ***có quan hệ bao hàm***.

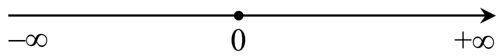
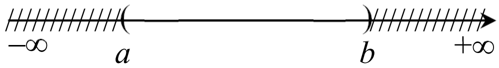
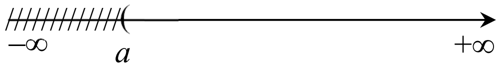
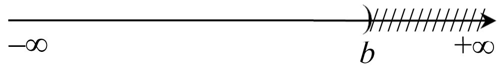
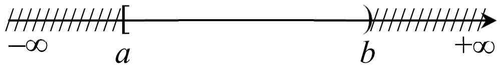
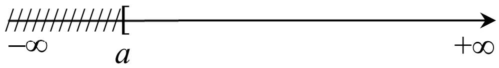
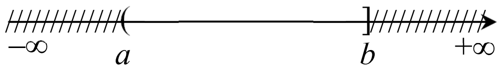
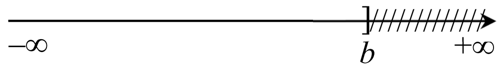
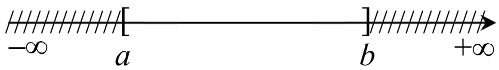
Biểu đồ Ven



$A \subset B$

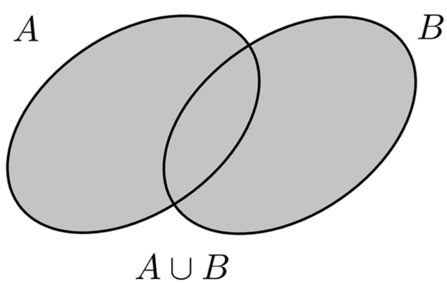
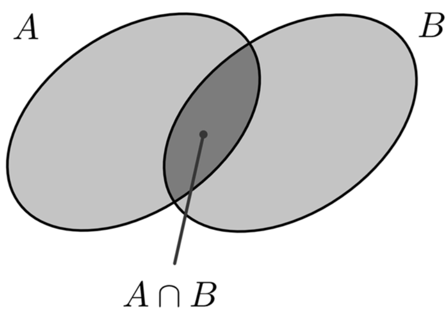
Chú ý: Giữa các tập hợp số quen thuộc (tập số tự nhiên, tập số nguyên, tập số hữu tỉ, tập số thực), ta có quan hệ bao hàm: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

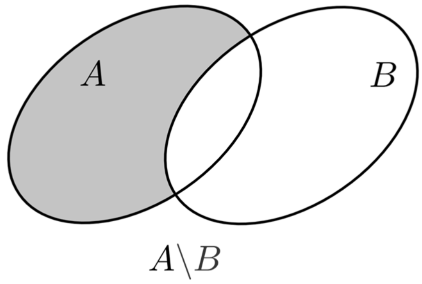
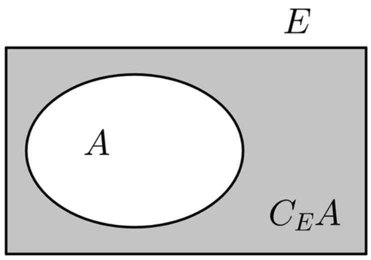
Một số tập con của tập hợp số thực

1	Tập số thực $(-\infty;+\infty)=\mathbb{R}$	
2	Khoảng $(a;b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$.	
3	Khoảng $(a;+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$.	
4	Khoảng $(-\infty;b)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<b\}$.	
5	Nửa khoảng $[a;b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$.	
6	Nửa khoảng $[a;+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\}$.	
7	Nửa khoảng $(a;b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$.	
8	Nửa khoảng $(-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le b\}$.	
9	Đoạn $[a;b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$.	

Kí hiệu $-\infty$ đọc là ***âm vô cực*** (âm vô cùng), kí hiệu $+\infty$ đọc là ***dương vô cực*** (dương vô cùng).

Các phép toán trên tập hợp

1	**Hợp của hai tập hợp** Tập hợp các phần tử thuộc A hoặc thuộc B gọi là ***hợp*** của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A\cup B$. $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ hoặc } x\in B\}$.	
2	**Giao của hai tập hợp** Tập hợp các phần tử thuộc cả hai tập hợp A và B gọi là ***giao*** của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A\cap B$. $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ và } x\in B\}$.	

3	**Công thức tính số phần tử** Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn thì $n\left(A\cup B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)-n\left(A\cap B\right)$. Đặc biệt nếu $A\cap B=\varnothing$ thì $n\left(A\cup B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)$.	
4	**Hiệu của hai tập hợp** Tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là ***hiệu*** của A và B, kí hiệu là $A\setminus B$. $A\setminus B=\left\{x\mid x\in A \text{ và } x\notin B\right\}$.	
5	**Phần bù của tập hợp con** Nếu A là tập con của E thì tập $E\setminus A$ gọi là ***phần bù*** của A trong E, kí hiệu là C_EA. $C_EA=E\setminus A$ với $A\subset E$.	

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $ax+by+c<0$ (hoặc $ax+by+c>0$; $ax+by+c\le 0$; $ax+by+c\ge 0$) trong đó a, b không đồng thời bằng 0.

Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét bất phương trình $ax+by+c<0$ (hoặc $ax+by+c>0$; $ax+by+c\le 0$; $ax+by+c\ge 0$) (*).

Mỗi cặp số $\left(x_0;y_0\right)$ thỏa mãn (*) được gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp tất cả các điểm $\left(x_0;y_0\right)$ là nghiệm của (*) được gọi là ***miền nghiệm*** của bất phương trình.

Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bước 1: Vẽ đường thẳng $d: ax+by+c=0$ (lấy 2 điểm phân biệt tùy ý trên d)

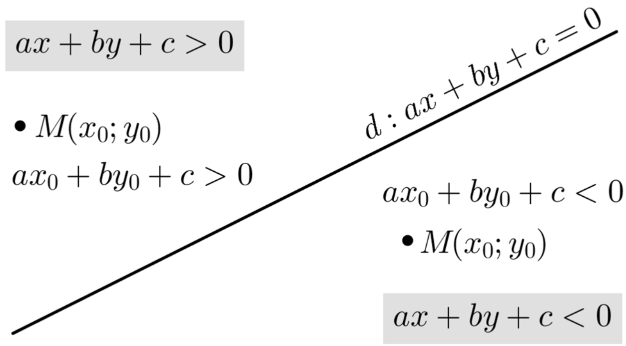
x	
y	

Bước 2: Lấy điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ tùy ý không thuộc d (thường lấy gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$ nếu d không đi qua O). Thay $x=x_0$, $y=y_0$ vào vế trái của (*) kiểm tra xem ta được mệnh đề đúng hay sai.

Bước 3: Kết luận:

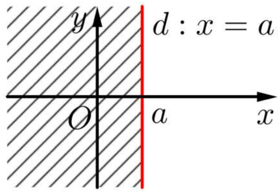
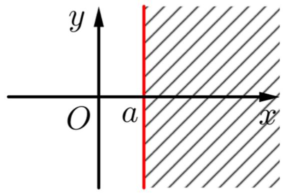
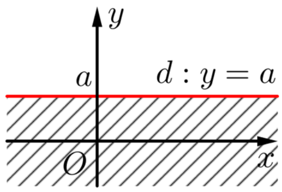
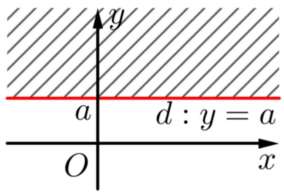
Nếu được mệnh đề **đúng** thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là d, **chứa** điểm M.

Nếu được mệnh đề **sai** thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là d, **không chứa** điểm M.



Chú ý:

- Miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c>0$, $ax+by+c<0$ là nửa mặt phẳng **không kể bờ**.
- Miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c\geq 0$, $ax+by+c\leq 0$ là nửa mặt phẳng **kể cả bờ**.
- Một số miền nghiệm của các bất phương trình đặc biệt:

BPT	Miền nghiệm	Biểu diễn
$x>a$	Nửa mặt phẳng bên phải đường thẳng $d:x=a$ (không kể bờ)	
$x<a$	Nửa mặt phẳng bên trái đường thẳng $d:x=a$ (không kể bờ)	
$y>a$	Nửa mặt phẳng bên trên đường thẳng $d:y=a$ (không kể bờ)	
$y<a$	Nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng $d:y=a$ (không kể bờ)	
Nếu các BPT trên có dấu "=" thì miền nghiệm **kể cả bờ**.		

Chú ý: Phương trình của trục Ox là $y=0$ và phương trình của trục Oy là $x=0$.

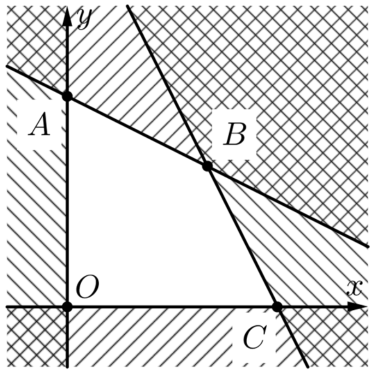
2

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một ***nghiệm*** của hệ bất phương trình đã cho.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0;y_0)$ có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là ***miền nghiệm*** của hệ bất phương trình đó.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn



- Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.
- Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Chú ý: Miền mặt phẳng tọa độ bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là một ***miền đa giác***.

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $F(x,y)=ax+by$ trên một miền đa giác

Người ta chứng minh được rằng $F(x,y)=ax+by$ đạt GTLN hoặc GTNN tại một trong các đỉnh của đa giác.

Do đó để tìm GTLN, GTNN của biểu thức dạng $F(x,y)=ax+by$, trong đó x, y là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn mà miền nghiệm của hệ đó là một miền đa giác, ta làm như sau:

Bước 1: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (là một miền đa giác).

Bước 2: Xác định toạ độ các đỉnh của đa giác.

Bước 3: Tính giá trị của biểu thức $F=ax+by$ tại các cặp số $(x_0;y_0)$ là toạ độ của các đỉnh của đa giác và so sánh các giá trị đó. Từ đó, kết luận được giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất cần tìm.

HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

1

Hàm số

Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên và x nhận giá trị thuộc tập số D.

Nếu với mỗi giá trị x thuộc D, ta xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một ***hàm số***.

Ta gọi x là ***biến số*** và y là ***hàm số*** của x.

Tập hợp D được gọi là ***tập xác định*** của hàm số.

Tập hợp T gồm tất cả các giá trị y (tương ứng với x thuộc D) gọi là ***tập giá trị*** của hàm số.

Ta thường dùng kí hiệu $f(x)$ để chỉ giá trị y tương ứng với x, nên hàm số còn được viết là $y=f(x)$.

Một hàm số có thể được cho bằng *bảng*, bằng *biểu đồ* hoặc bằng *công thức*.

Chú ý:

a) Khi một hàm số được cho bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định thì ta quy ước: *Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.*

b) Một hàm số có thể được cho bởi hai hay nhiều công thức. Chẳng hạn, xét hàm số:

$$f(x)=\begin{cases}-3x+5 & \text{khi } x\le 1\\ 2x^2 & \text{khi } x>1\end{cases}$$

Nghĩa là với $x \le 1$ thì $f(x) = -3x + 5$; với $x > 1$ thì $f(x) = 2x^2$.

Chú ý:

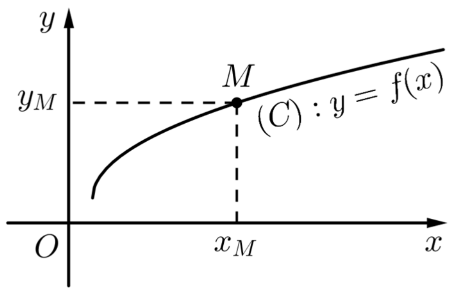
a) Nếu hàm số có nhiều điều kiện thì ta lấy phần giao các điều kiện đó.

b) Nếu hàm số cho bởi nhiều công thức trong từng miền khác nhau, ta tìm điều kiện xác định trong từng miền và lấy phần hợp của các điều kiện đó.

Nhận xét:

- $\dfrac{1}{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \ne 0$
- $\sqrt{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \ge 0$
- $\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ xác định $\Leftrightarrow A > 0$
- $\dfrac{1}{A\sqrt{B}}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} A \ne 0 \\ B > 0 \end{cases}$

Đồ thị hàm số



Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ***đồ thị*** (C) của hàm số là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ với $x \in D$ và $y = f(x)$. Vậy $(C) = \{M(x; f(x)) | x \in D\}$.

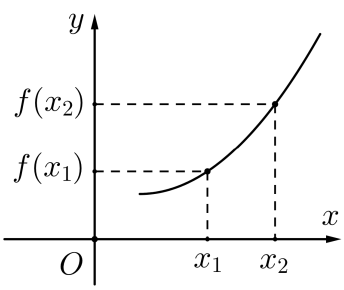
Chú ý: Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi $x_M \in D$ và $y_M = f(x_M)$.

Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

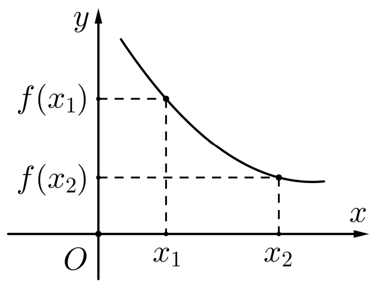
Với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, ta nói:

Hàm số ***đồng biến*** trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số ***nghịch biến*** trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



Hàm số đồng biến



Hàm số nghịch biến

Nhận xét:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 \ne x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 \ne x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.

Khi hàm số *đồng biến* (tăng) trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị của nó có dạng đi lên từ trái sang phải. Ngược lại, khi hàm số *nghịch biến* (giảm) trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị của nó có dạng đi xuống từ trái sang phải.

2

Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai có dạng: $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ \left(a\neq 0\right)$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

• Đồ thị là parabol $\left(P\right)$ với:

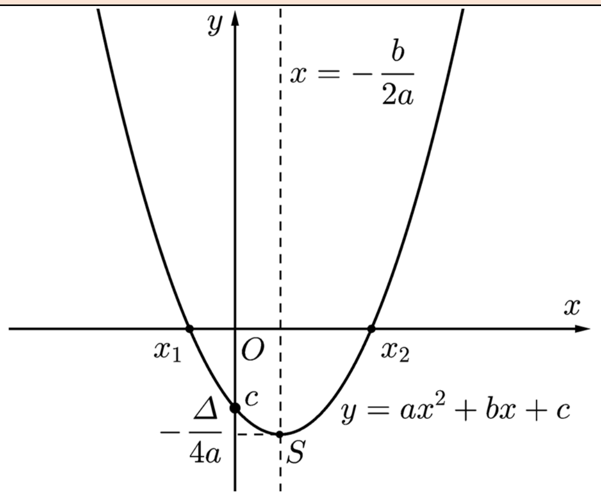
- Đỉnh: $S\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$; hoành độ $x_S=-\dfrac{b}{2a}$, tung độ $y_S=-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(x_S\right)$ với $\Delta=b^2-4ac$.

- Trục đối xứng: $x=-\dfrac{b}{2a}$ (đường thẳng đi qua đỉnh S và vuông góc trục Ox).

- Bề lõm quay lên trên nếu $a>0$, quay xuống dưới nếu $a<0$.

Chú ý: Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\left(P\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là x_1, x_2.

$a>0$



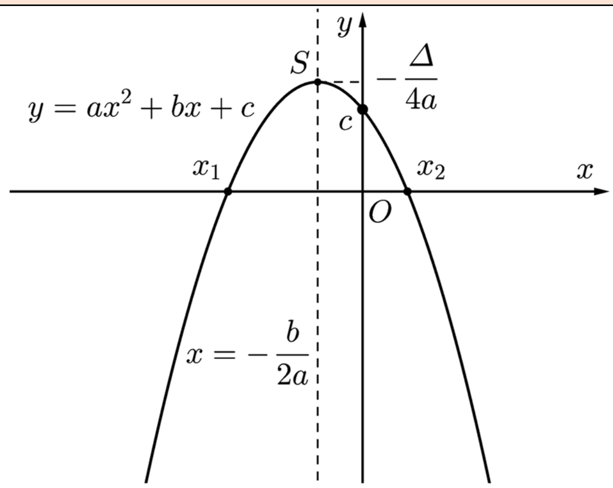
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

• Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$.

• $\min\limits_{\mathbb{R}} y=-\dfrac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$.

• Tập giá trị: $T=\left[-\dfrac{\Delta}{4a};+\infty\right)$.

$a<0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

• Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$.

• $\max\limits_{\mathbb{R}} y=-\dfrac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$.

• Tập giá trị: $T=\left(-\infty;-\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.

Nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ \left(a\neq 0\right)$.

Biệt thức: $\Delta=b^2-4ac$; ***biệt thức thu gọn***: $\Delta'=b'^2-ac$ với $b'=\dfrac{b}{2}$.

TH1: $\Delta>0\ \left(\Delta'>0\right)$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \left(x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}\right)$.

TH2: $\Delta=0\ \left(\Delta'=0\right)$: Phương trình có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}\ \left(x=-\dfrac{b'}{a}\right)$.

TH3: $\Delta<0$: Phương trình vô nghiệm.

Ứng dụng của hàm số bậc hai

Trong môn cầu lông, xét mặt phẳng toạ độ Oxy, chọn điểm có tọa độ $\left(0;y_0\right)$ là điểm phát cầu thì phương trình quỹ đạo của quả cầu khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y=\frac{-g.x^2}{2.v_0^2.\cos^2\alpha}+\left(\tan\alpha\right).x+y_0.$$

Trong đó:

- g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8\ \text{m/s}^2$);
- α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của quả cầu là một parabol.

Xét trường hợp lặng gió, với vận tốc ban đầu và góc phát cầu đã biết, cầu chuyển động theo quỹ đạo parabol nên sẽ:

- Đạt vị trí cao nhất tại đỉnh parabol, gọi là ***tầm bay cao***;
- Rơi chạm đất ở vị trí cách nơi đứng phát cầu một khoảng, gọi là ***tầm bay xa***.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1

Xét dấu nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai

Dấu của nhị thức bậc nhất

Cho nhị thức bậc nhất $f\left(x\right)=ax+b\ \left(a\neq 0\right)$. Khi đó:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f\left(x\right)$		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

"PHẢI CÙNG – TRÁI TRÁI"

Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ \left(a\neq 0\right)$. Khi đó:

TH1: $\Delta>0$ (phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

"TRONG TRÁI – NGOÀI CÙNG"

TH2: $\Delta = 0$ (phương trình có nghiệm kép)

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	cùng dấu với a	

TH3: $\Delta < 0$ (phương trình vô nghiệm)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	

Tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$. Khi đó:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \geq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \leq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Chú ý: Nếu hệ số a có chứa tham số m ta cần xét trường hợp $a = 0$ trước; có thể dùng Δ' thay cho Δ.

Định lí Vi-ét

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có 2 nghiệm là x_1, x_2. Khi đó:

- $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$
- Phương trình có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Chú ý: Khi cần 2 nghiệm **phân biệt** thì điều kiện Δ ở trên **không** có dấu bằng "="; có thể dùng Δ' thay cho Δ.

Một số hệ thức cơ bản sử dụng định lý Vi-ét

- $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{S}{P}$
- $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$
- $(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$

• $\left|x_1-x_2\right|=a>0 \Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)^2=a^2 \Leftrightarrow S^2-4P=a^2$

• $x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$

• Nếu biểu thức không đối xứng thường ta giải hệ $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} & (1) \\ \text{Biểu thức không đối xứng} & (2) \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} & (3) \end{cases}$ bằng phương pháp cộng ở (1) và (2) được x_1, x_2 theo m và thay x_1, x_2 vào (3) để tìm m.

So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với các số

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và các số α, $\beta\in\mathbb{R}$. Khi đó:

• $\alpha<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha).(x_2-\alpha)>0 \\ x_1+x_2>2\alpha\end{cases}$

• $x_1<x_2<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha).(x_2-\alpha)>0 \\ x_1+x_2<2\alpha\end{cases}$

• $x_1<\alpha<x_2 \Leftrightarrow (x_1-\alpha).(x_2-\alpha)<0$

• $x_1<\alpha<x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha)<0$

• $\alpha<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0 \\ a.f(\alpha)>0 \\ \dfrac{S}{2}-\alpha>0\end{cases}$

• $x_1<x_2<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0 \\ a.f(\alpha)>0 \\ \dfrac{S}{2}-\alpha<0\end{cases}$

• $x_1<\alpha<\beta<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}a.f(\alpha)<0 \\ a.f(\beta)<0\end{cases}$

• $x_1<\alpha<x_2<\beta \Leftrightarrow \begin{cases}a.f(\alpha)<0 \\ a.f(\beta)>0\end{cases}$

• $\left[\begin{array}{l}x_1<\alpha<x_2<\beta \\ \alpha<x_1<\beta<x_2\end{array}\right. \Leftrightarrow f(\alpha).f(\beta)<0$

• $\alpha<x_1<x_2<\beta \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0 \\ a.f(\alpha)>0 \\ a.f(\beta)>0 \\ \alpha<\dfrac{S}{2}<\beta\end{cases}$

2

Giải bất phương trình bằng cách lập bảng xét dấu

Để giải bất phương trình bằng cách xét dấu các biểu thức bậc nhất và bậc hai ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Chuyển các biểu thức qua vế trái, để vế phải là 0.

Bước 2: Biến đổi, quy đồng, rút gọn để được dạng tích, thương của các biểu thức (bậc nhất, bậc hai)

Bước 3: Tìm nghiệm của các biểu thức và lập bảng xét dấu.

Bước 4: Dựa vào bảng xét dấu kết luận tập nghiệm của bất phương trình.

3

Phương trình quy về phương trình bậc hai

Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại xem các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2+bx+c=(dx+e)^2$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại xem các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Phương trình chứa ẩn trong căn bậc hai

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta tìm cách để khử dấu căn, bằng cách:

- Bình phương hai vế để đưa về phương trình hệ quả không chứa căn. Tìm nghiệm phương trình hệ quả rồi thử nghiệm lại.

- Đặt điều kiện (*) để hai vế không âm sau đó bình phương để mất căn. Giải phương trình hệ quả rồi thử lại điều kiện (*).

4

Phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối và dấu căn bậc hai

- $|A|=|B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right.$
- $|A|=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right. \end{cases}$
- $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A=B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \ (\text{hay } B\ge 0) \\ A=B \end{cases}$
- $A\sqrt{B}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ \begin{cases} B>0 \\ A=0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $\sqrt{A}<B \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \\ A<B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A}<B \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \\ B>0 \\ A<B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A}\le B \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \\ A\le B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A}>B \Leftrightarrow \begin{cases} B<0 \\ A\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B\ge 0 \\ A>B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A}\ge B \Leftrightarrow \begin{cases} B<0 \\ A\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B\ge 0 \\ A\ge B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A}>\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A>B \end{cases}$
- $\sqrt{A}\ge\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B\ge 0 \\ A\ge B \end{cases}$
- $A\sqrt{B}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} B>0 \\ A>0 \end{cases}$
- $A\sqrt{B}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} B>0 \\ A<0 \end{cases}$
- $A\sqrt{B}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ \begin{cases} B>0 \\ A\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $A\sqrt{B}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ \begin{cases} B>0 \\ A\le 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $|A|<B \Leftrightarrow \begin{cases} A>-B \\ A<B \end{cases}$
- $|A|\le B \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge -B \\ A\le B \end{cases}$

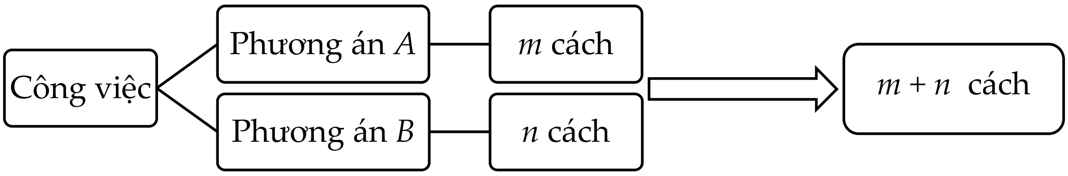
- $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$
- $|A| \ge B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \ge B \\ A \le -B \end{array}\right.$
- $|A| > |B| \Leftrightarrow A^2 > B^2 \Leftrightarrow (A+B)(A-B) > 0$
- $|A| \ge |B| \Leftrightarrow A^2 \ge B^2 \Leftrightarrow (A+B)(A-B) \ge 0$

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

1

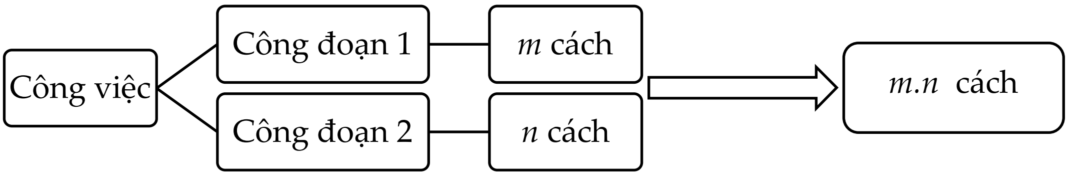
Quy tắc cộng

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án A. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m+n$ cách.



Quy tắc nhân

Giả sử một công việc được chia thành hai công đoạn. Công đoạn thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn thứ hai. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m.n$ cách.



2

Hoán vị

Cho tập hợp A có n phần tử $(n \ge 1)$. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của A theo một thứ tự gọi là một ***hoán vị*** các phần tử đó (gọi tắt là hoán vị của A hay của n phần tử).

Số các hoán vị của n phần tử: $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$ (nhân lùi từ n về 1).

Quy ước: $0! = 1$.

Tổ hợp

Cho tập hợp A có n phần tử $(n \ge 1)$ và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một ***tổ hợp*** chập k của n phần tử.

Nói cách khác, mỗi cách lấy k phần tử của A và **không sắp xếp** chúng gọi là một ***tổ hợp*** chập k của n phần tử đó.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử $(0 \le k \le n)$ là:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!} \text{ với quy ước } C_n^0 = 1.$$

Chỉnh hợp

Cho tập hợp A có n phần tử $(n \ge 1)$ và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi cách lấy k phần tử của A và **sắp xếp** chúng theo một thứ tự gọi là một ***chỉnh hợp*** chập k của n phần tử.

Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $\left(0 \le k \le n\right)$ là:

$$A_n^k = \frac{n!}{\left(n-k\right)!} = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots\left(n-k+1\right) \text{ với quy ước } A_n^0 = 1.$$

Nhận xét: Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử đó. Ta có $P_n = A_n^n,\ n \ge 1$.

3

Nhị thức Newton

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad \left(*\right).$$

- Số hạng tổng quát (thứ $k+1$) trong khai triển là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.
- Trong cùng một số hạng, số mũ của a và b có tổng bằng n.
- Trong khai triển $\left(*\right)$ có $n+1$ số hạng.
- Số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n.
- Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau.

Tam giác Pascal

$n=0$							1							$\left(a+b\right)^0$
$n=1$						1		1						$\left(a+b\right)^1$
$n=2$					1		2		1					$\left(a+b\right)^2$
$n=3$				1		3		3		1				$\left(a+b\right)^3$
$n=4$			1		4		6		4		1			$\left(a+b\right)^4$
$n=5$		1		5		10		10		5		1		$\left(a+b\right)^5$
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1	$\left(a+b\right)^6$
$\ldots$							$\ldots$							$\ldots$

Hai tính chất cơ bản của số C_n^k

(1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (2) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

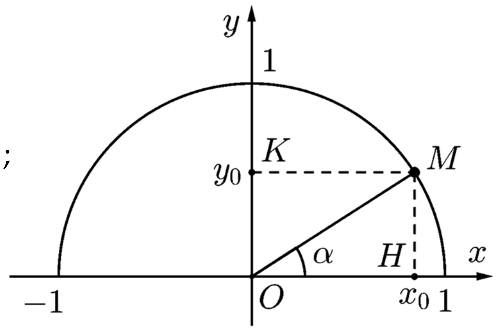
HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG 10

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1

Giá trị lượng giác của một góc từ $0°$ đến $180°$

Với mỗi góc α $\left(0° \le \alpha \le 180°\right)$ ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Gọi $\left(x_0; y_0\right)$ là toạ độ điểm M, ta có:



- Tung độ y_0 của M là **sin** của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha = y_0$;
- Hoành độ x_0 của M là **côsin** của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$;
- Tỉ số $\dfrac{y_0}{x_0}$ $\left(x_0 \ne 0\right)$ là **tang** của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$;
- Tỉ số $\dfrac{x_0}{y_0}$ $\left(y_0 \ne 0\right)$ là **côtang** của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các ***giá trị lượng giác*** của góc α.

Chú ý:

a) Nếu α là góc nhọn thì các giá trị lượng giác của α đều dương.

Nếu α là góc tù thì $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.

Góc α	**$0° < \alpha < 90°$**	**$90° < \alpha < 180°$**
$\sin\alpha$	+	+
$\cos\alpha$	+	–
$\tan\alpha$	+	–
$\cot\alpha$	+	–

b) $\tan\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \ne 90°$; $\cot\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \ne 0°$ và $\alpha \ne 180°$.

Hai góc phụ nhau

Ở lớp dưới, ta đã biết: Với mọi góc α thỏa mãn $0° \le \alpha \le 90°$ ta luôn có:

$\sin\left(90° - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(90° - \alpha\right) = \sin\alpha$;

$\tan\left(90° - \alpha\right) = \cot\alpha$; $\cot\left(90° - \alpha\right) = \tan\alpha$.

Hai góc bù nhau

Với mọi góc α thỏa mãn $0° \le \alpha \le 180°$ ta luôn có:

$\sin\left(180° - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\cos\left(180° - \alpha\right) = -\cos\alpha$;

$\tan\left(180° - \alpha\right) = -\tan\alpha$ $\left(\alpha \ne 90°\right)$; $\cot\left(180° - \alpha\right) = -\cot\alpha$ $\left(\alpha \ne 0° \text{ và } \alpha \ne 180°\right)$.

Công thức lượng giác cơ bản

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$; $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$; $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$.

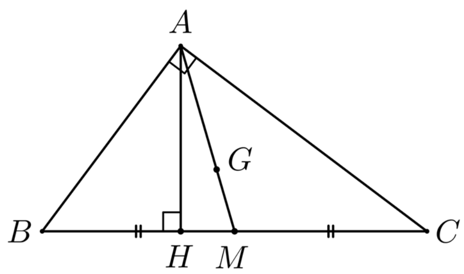
Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

2

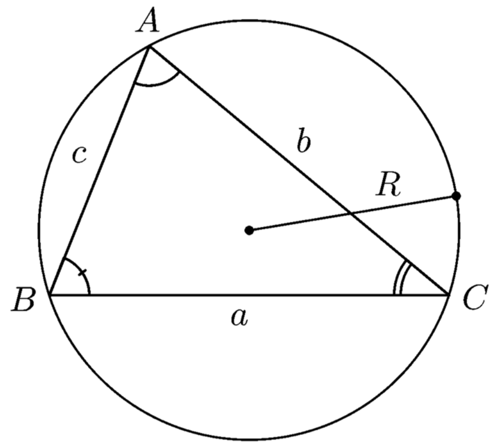
Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường trung tuyến AM, G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó:



- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $AB.AC = BC.AH$
- $AB^2 = BC.BH$
- $AC^2 = BC.CH$
- $AH^2 = HB.HC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$, $\cos B = \dfrac{AB}{BC}$, $\tan B = \dfrac{AC}{AB}$, $\cot B = \dfrac{AB}{AC}$
- $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}AH.BC$
- $AG = \dfrac{2}{3}AM$, $GM = \dfrac{1}{3}AM$
- $AM = BM = CM = \dfrac{1}{2}BC$
- sin = đối / huyền; cos = kề / huyền; tan = đối / kề; cot = kề / đối

Hệ thức lượng trong tam giác thường



Định lí côsin

Trong ΔABC với $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$, ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$.

Hệ quả

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Định lí sin

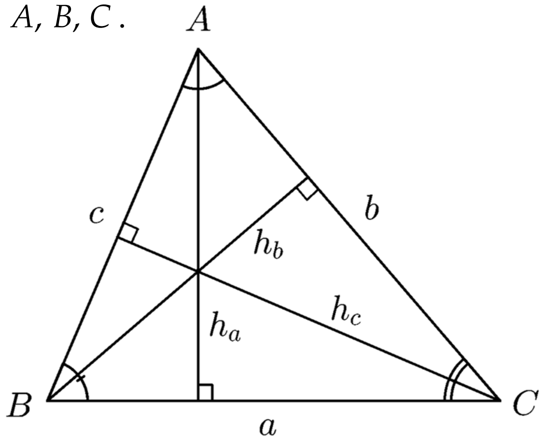
Trong ΔABC với $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hệ quả

$a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$; $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\sin C = \dfrac{c}{2R}$.

Các công thức tính diện tích tam giác

Cho ΔABC, ta kí hiệu:



h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B, C.

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

$S_{\Delta ABC}$ là diện tích tam giác.

Ta có các công thức tính diện tích tam giác sau:

1) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$;

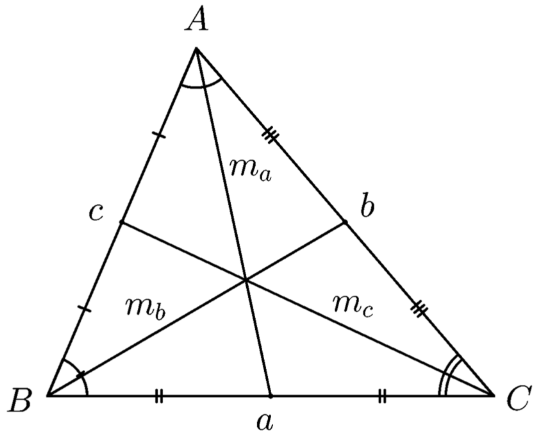
3) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R}$;

4) $S_{\Delta ABC} = pr$;

5) $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Heron).

Công thức độ dài đường trung tuyến

Cho ΔABC, ta kí hiệu: m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B, C. Khi đó:



$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4};$$

$$m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}.$$

Chú ý:
- Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ (hoặc $\cos A > 0$) thì góc $\widehat{A}$ nhọn.
- Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ (hoặc $\cos A < 0$) thì góc $\widehat{A}$ tù.
- Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ (hoặc $\cos A = 0$) thì góc $\widehat{A}$ vuông.

VECTƠ

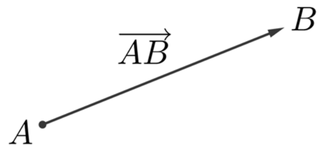
1

Định nghĩa vectơ

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đã chỉ ra điểm đầu và điểm cuối.

- Vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Đường thẳng đi qua hai điểm A và B gọi là ***giá*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là ***độ dài của vectơ*** $\overrightarrow{AB}$ và được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Như vậy ta có: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.



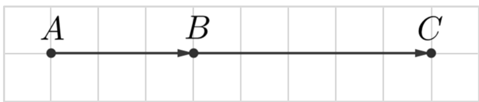
Chú ý: Một vectơ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

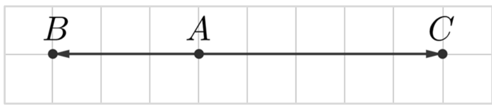
Hai vectơ cùng phương, cùng hướng

Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nhận xét: Hai vectơ cùng phương chỉ có thể ***cùng hướng*** hoặc ***ngược hướng***.

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

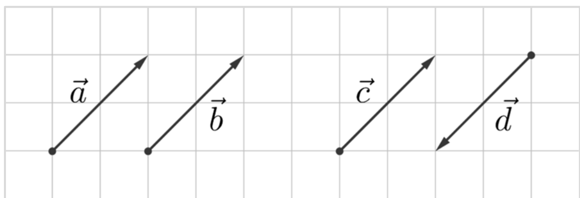




Vectơ bằng nhau – Vectơ đối nhau

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = -\vec{b}$. Khi đó, vectơ $\vec{b}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$.



Chú ý: $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

Vectơ-không

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là ***vectơ-không***, kí hiệu là $\vec{0}$.

Chú ý: - Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0.

- Vectơ-không luôn cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

- Mọi vectơ-không đều bằng nhau: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$ với mọi điểm $A, B, C, \ldots$

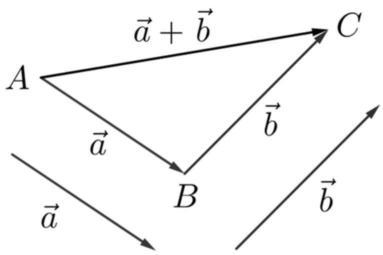
- Vectơ đối của vectơ-không là chính nó.

2

Tổng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A tuỳ ý, lấy hai điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a}, \vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

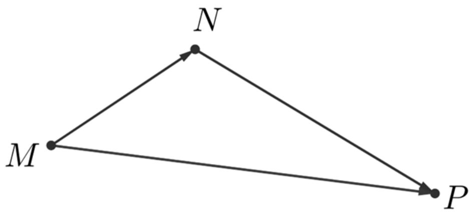


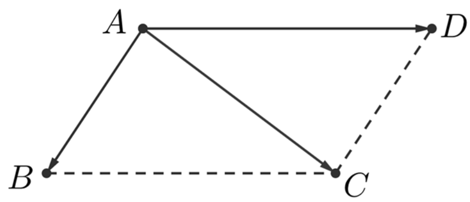
Quy tắc ba điểm

Với ba điểm M, N, P tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.





Tính chất của phép cộng các vectơ

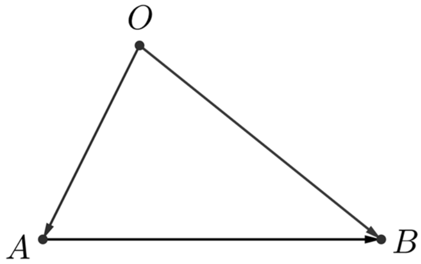
• Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

• Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;

• Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

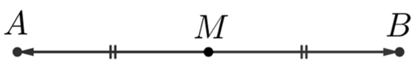
Hiệu của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. ***Hiệu của hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ và kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.



Quy tắc trừ

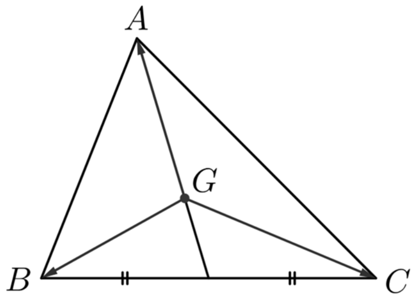
Với ba điểm O, A, B tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.



Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.



Dạng toán: Chứng minh một đẳng thức vectơ

- Biến đổi từ một tính chất, một hệ thức đã biết để đi đến hệ thức cần chứng minh.
- Biến đổi vế này thành vế kia.
- Biến đổi cả 2 vế về cùng một biểu thức trung gian.
- Biến đổi tương đương hệ thức cần chứng minh cho đến khi có được một hệ thức đúng.

Dạng toán: Xác định và tính độ dài của một vectơ tổng, vectơ hiệu

Biến đổi vectơ tổng (hiệu) đã cho thành một vectơ duy nhất $\vec{u}$, sau đó tính độ dài của vectơ $\vec{u}$ đó.

Dạng toán: Tìm các điểm thỏa mãn một hệ thức vectơ

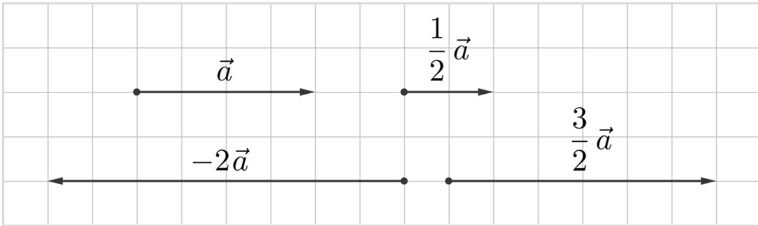
- Nếu hệ thức đã cho được đưa về dạng $\overrightarrow{AM}=\vec{v}$ (với A cố định và $\vec{v}$ không đổi) thì có duy nhất một điểm M hoàn toàn xác định.
- Nếu hệ thức được đưa về dạng $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\vec{v}\right|=\text{const}$ (với A cố định) thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm A, bán kính bằng $\left|\vec{v}\right|$.
- Nếu hệ thức được đưa về dạng $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\overrightarrow{BM}\right|$ (với A, B cố định, phân biệt) thì tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn AB.

3

Tích của một số với một vectơ và các tính chất

Cho số k khác 0 và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.

Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.



Ta quy ước $0\vec{a}=\vec{0}$ và $k\vec{0}=\vec{0}$.

Người ta còn gọi tích của một số với một vectơ là ***tích của một vectơ với một số***.

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số thực h và k, ta có:

- $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$;
- $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$;
- $1.\vec{a}=\vec{a}$;
- $(-1).\vec{a}=-\vec{a}$.

Hệ thức trung điểm đoạn thẳng

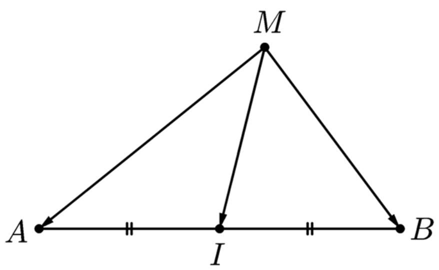
Cho đoạn thẳng AB và một điểm M tùy ý.

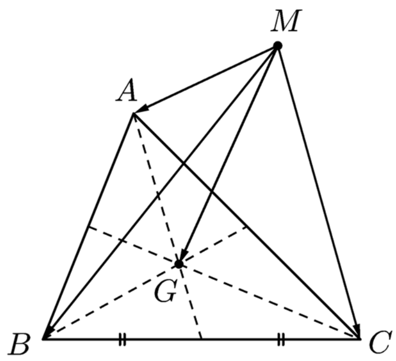
Khi đó I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Hệ thức trọng tâm tam giác

Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý.

Khi đó G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.





Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

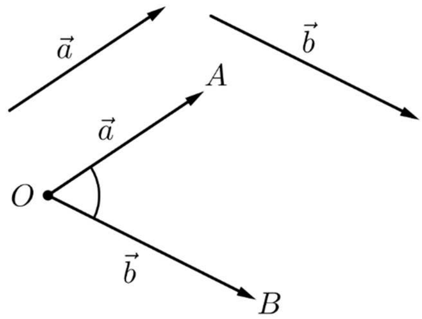
Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Chú ý: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ luôn tồn tại duy nhất cặp số thực $(m;n)$ sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

4

Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ (với số đo từ $0°$ đến $180°$) được gọi là ***góc giữa hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a},\vec{b})$.



Quy ước: Nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=\vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tùy ý (từ $0°$ đến $180°$).

Chú ý:

- $(\vec{a},\vec{b})=90° \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$;
- $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;
- $(\vec{a},\vec{b})=0° \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ cùng hướng;
- $(\vec{a},\vec{b})=180° \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ ngược hướng.

Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Đặc biệt: $\vec{a}.\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$. Ta có $\vec{a}^2\geq 0$; $\vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

Tính chất: Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bất kì và $\forall k\in\mathbb{R}$, ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$;
- $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$;
- $(k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(k\vec{b})$;
- $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
- $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
- $\vec{a}^2-\vec{b}^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$.
- $\vec{a}.\vec{b}>0\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})$ là góc nhọn;
- $\vec{a}.\vec{b}<0\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})$ là góc tù;
- $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})$ là góc vuông.

Tìm tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức về tích vô hướng hoặc tích độ dài

Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động.

- Nếu $|\overrightarrow{AM}|=k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R=k$.

- Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.

- Nếu $\overrightarrow{MA}.\vec{a}=0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

1

Tọa độ của vectơ

Tọa độ của vectơ đối với một hệ trục tọa độ

Trong hệ trục toạ độ Oxy, vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox và Oy.

- ***Tọa độ của vectơ:*** $\vec{a}=(x;y)\Leftrightarrow\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
- Nếu $\vec{a}=(x;y)$ và $\vec{b}=(x';y')$ thì $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$.

Tọa độ của một điểm

Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là ***tọa độ của điểm*** M. Tức là $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ và số thực k. Khi đó:

1) $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1;a_2+b_2)$ 2) $\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1;a_2-b_2)$ 3) $k\vec{a} = (ka_1;ka_2)$ 4) $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

Áp dụng của tọa độ vectơ

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. Tọa độ trung điểm $M(x_M;y_M)$ của đoạn thẳng AB là:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$. Tọa độ trọng tâm $G(x_G;y_G)$ của tam giác ABC là:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{2}.$$

Chú ý: Toạ độ điểm $M(x_M;y_M)$ chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$ là:

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k},\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k}.$$

(M chia đoạn AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$).

Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

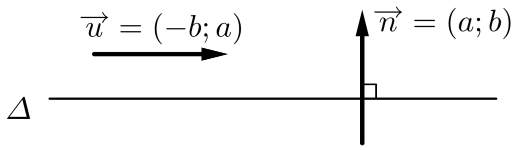
Cho 2 vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ và 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. Ta có:

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$;
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$;
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;
- $\cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

2

Đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ

Phương trình đường thẳng



- Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ có giá song song hoặc trùng với Δ.
- Vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ có giá vuông góc với Δ.
- Nếu đường thẳng Δ có một VTPT là $\vec{n} = (a;b)$ thì nó có một VTCP là $\vec{u} = (-b;a)$.
- Nếu đường thẳng Δ có hệ số góc là k thì nó có một VTCP là $\vec{u} = (1;k)$.

• Nếu đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u}=(a;b)$ thì nó có hệ số góc là $k=\frac{b}{a}$.

• Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}\text{VTCP } \vec{u}=(a;b)\\ \text{qua } M_0(x_0;y_0)\end{cases}$ có phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$.

• Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}\text{VTCP } \vec{u}=(a;b)\\ \text{qua } M_0(x_0;y_0)\end{cases}$ có phương trình chính tắc $\Delta:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ $(a,\, b\neq 0)$.

• Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}\text{VTPT } \vec{n}=(A;B)\\ \text{qua } M_0(x_0;y_0)\end{cases}$ có phương trình tổng quát $\Delta: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

• Đường thẳng Δ qua $M_0(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k có phương trình đại số $\Delta: y-y_0=k(x-x_0)$.

• Đường thẳng Δ qua $M(a;0)$, $N(0;b)$ với $a,\, b\neq 0$ có phương trình đoạn chắn $\Delta:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

• Đường thẳng Δ qua $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ có phương trình: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ $(x_B\neq x_A,\, y_B\neq y_A)$.

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M_0(x_0;y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$. Khi đó $d(M_0,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(a_1;b_1)$ và $\overrightarrow{n_2}=(a_2;b_2)$.

Điều kiện	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$
Hoặc	Hệ $\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1\\ a_2x+b_2y=-c_2\end{cases}$ có nghiệm duy nhất	Hệ $\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1\\ a_2x+b_2y=-c_2\end{cases}$ vô nghiệm	Hệ $\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1\\ a_2x+b_2y=-c_2\end{cases}$ vô số nghiệm
Hoặc	$\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ không cùng phương	$\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ cùng phương; điểm $P\in\Delta_1$, ta có $P\notin\Delta_2$	$\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ cùng phương; điểm $P\in\Delta_1$, ta có $P\in\Delta_2$
Kết quả	Δ_1 cắt Δ_2	$\Delta_1 \parallel \Delta_2$	$\Delta_1\equiv\Delta_2$

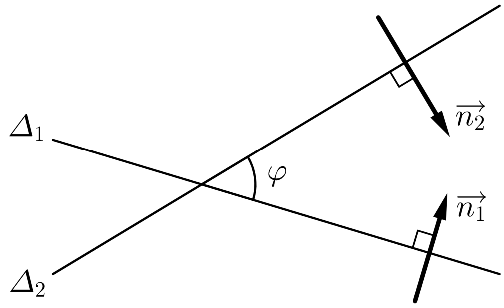
Chú ý: Để kiểm tra $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ cùng phương, ta kiểm tra $a_1b_2-a_2b_1=0$.

Góc giữa hai đường thẳng

Cho $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(a_1;b_1)$ và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(a_2;b_2)$.

Góc φ (với $0°\leq\varphi\leq 90°$) giữa 2 đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được tính bởi:

$$\cos\varphi=\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$



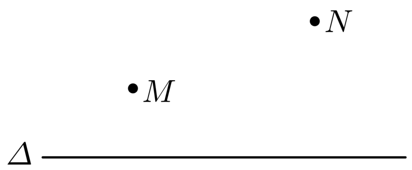
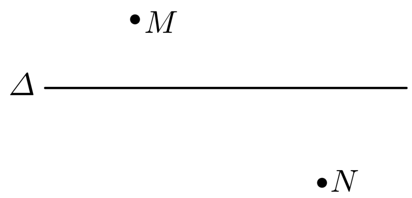
Nhận xét:

a) Ta có $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow a_1.a_2 + b_1.b_2 = 0$.

b) Cho $\Delta_1 : y = k_1x + m_1$ và $\Delta_2 : y = k_2x + m_2$. Khi đó $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$.

Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ không thuộc Δ. Khi đó:

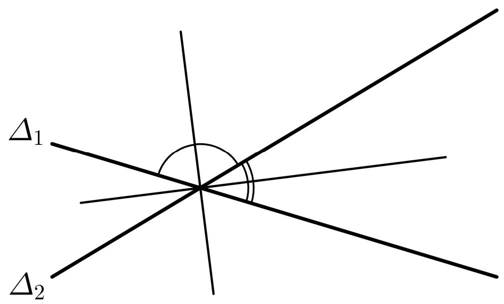
<table>
<tr>
<td>Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với Δ
$\Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

</td>
<td>Hai điểm M, N nằm khác phía đối với Δ
$\Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

</td>
</tr>
</table>

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau.

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là:

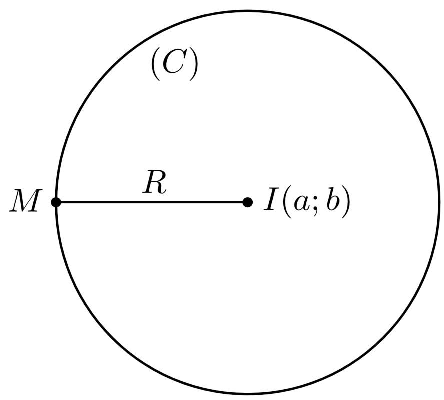
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$



3

Đường tròn trong mặt phẳng tọa độ

Phương trình đường tròn



• Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

• Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng d và đường tròn (C).

$d(I,d) < R$	$d(I,d) = R$	$d(I,d) > R$
d cắt (C) tại hai điểm phân biệt	d tiếp xúc với (C)	d và (C) không có điểm chung

Vị trí tương đối giữa điểm và đường tròn

Cho điểm A và đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R.

$IA = R$	$IA < R$	$IA > R$
A nằm trên (C) hay $A \in (C)$	A nằm trong (C)	A nằm ngoài (C)

Ngoài ra:

Nếu $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Thay tọa độ điểm A vào vế trái của (C):

$VT=VP$	$VT<VP$	$VT>VP$
$A\in(C)$	A nằm trong (C)	A nằm ngoài (C)

Nếu $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Thay tọa độ điểm A vào vế trái của (C):

$VT=0$	$VT<0$	$VT>0$
$A\in(C)$	A nằm trong (C)	A nằm ngoài (C)

Viết phương trình đường tròn

Dạng 1: Đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R

$$(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Dạng 2: Đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và đi qua điểm M

Bán kính $R=IM=\sqrt{(x_M-a)^2+(y_M-b)^2}$.

Dạng 3: Đường tròn (C) có đường kính AB

(C) có tâm I là trung điểm của AB, suy ra tọa độ $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Bán kính $R=IA=\sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2}$.

Dạng 4: Đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:ax+by+c=0$

Bán kính $R=d(I,\Delta)$.

Dạng 5: Đường tròn (C) đi qua 3 điểm $A,\ B,\ C$ (ngoại tiếp tam giác ABC)

Cách 1:

B1: Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn (C), ta có: $\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_A-a)^2+(y_A-b)^2=(x_B-a)^2+(y_B-b)^2\\(x_A-a)^2+(y_A-b)^2=(x_C-a)^2+(y_C-b)^2\end{cases}$ (giải hệ 2 ẩn $a,\ b$ suy ra tâm $I(a;b)$).

B2: Tính bán kính $R=IA=\sqrt{(x_A-a)^2+(y_A-b)^2}$.

Cách 2:

B1: Gọi phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (*)

B2: Thay 3 điểm $A,\ B,\ C$ vào (*), rút gọn đưa về hệ phương trình 3 ẩn $a,\ b,\ c$ rồi giải hệ này.

B3: Thay $a,\ b,\ c$ vào (*) ta được phương trình đường tròn (C) cần tìm.

Cách 3:

B1: Viết phương trình đường trung trực của 2 trong 3 cạnh $AB,\ AC,\ BC$.

B2: Giải hệ phương trình để tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ là giao điểm của 2 đường trung trực vừa viết.

B3: Tính bán kính $R = IA = \sqrt{\left(x_A - a\right)^2 + \left(y_A - b\right)^2}$.

Dạng 6: Đường tròn (C) đi qua điểm M và tiếp xúc với hai trục tọa độ $Ox,\ Oy$

B1: Gọi phương trình đường tròn (C): $\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 = R^2$ (*).

B2: (C) tiếp xúc với 2 trục tọa độ $Ox,\ Oy$ $\Leftrightarrow |a| = |b| = R$.

Trường hợp 1: $a = b,\ R = |a|$, (*) trở thành: $\left(x-a\right)^2 + \left(y-a\right)^2 = a^2$ (**).

Mà: $M \in (C)$ nên $\left(x_M - a\right)^2 + \left(y_M - a\right)^2 = a^2$. Giải phương trình này được a, thay a vào (**) ta được (C) cần tìm.

Trường hợp 2: $a = -b,\ R = |a|$, (*) trở thành: $\left(x-a\right)^2 + \left(y+a\right)^2 = a^2$ (***).

Mà: $M \in (C)$ nên $\left(x_M - a\right)^2 + \left(y_M + a\right)^2 = a^2$. Giải phương trình này được a, thay a vào (***) ta được (C) cần tìm.

Dạng 7: Đường tròn (C) tiếp xúc với 2 trục tọa độ $Ox,\ Oy$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d: mx + ny + p = 0$

B1: Gọi (C): $\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 = R^2$ (*).

B2: (C) tiếp xúc với 2 trục tọa độ $Ox,\ Oy$ $\Leftrightarrow |a| = |b| = R$.

Trường hợp 1: $a = b,\ R = |a|$: (*) trở thành: $\left(x-a\right)^2 + \left(y-a\right)^2 = a^2$ (**)

Từ (**) ta có tâm $I(a;a)$ mà $I \in d$ nên $ma + na + p = 0$, giải phương trình này tìm a, thay a vào (**) ta được (C) cần tìm.

Trường hợp 2: $a = -b,\ R = |a|$: (*) trở thành: $\left(x-a\right)^2 + \left(y+a\right)^2 = a^2$ (***)

Từ (***) ta có $I(a;-a)$ mà $I \in d$ nên: $ma - na + p = 0$, giải phương trình này tìm a, thay a vào (***) ta được (C) cần tìm.

Dạng 8: (C) đi qua hai điểm $A,\ B$ và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ

Cách 1:

- Tâm I thuộc Δ, suy ra tọa độ tâm I theo tham số t.
- Từ $IA = IB$ tìm t, suy ra tâm I và bán kính R, sau đó viết phương trình (C).

Cách 2:

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.
- Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ.
- Bán kính $R = IA$.

Dạng 9: (C) đi qua hai điểm $A,\ B$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.
- Tọa độ tâm I thoả mãn phương trình: $\begin{cases} I \in d \\ d(I,\Delta) = IA \end{cases}$.

- Bán kính $R = IA$.

Dạng 10: (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.
- Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua B và vuông góc với Δ.
- Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ'.
- Bán kính $R = IA$.

Dạng 11: (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

- Tâm I của (C) thoả mãn: $\begin{cases} d(I,\Delta_1) = d(I,\Delta_2) & (1) \\ d(I,\Delta_1) = IA & (2) \end{cases}$

- Bán kính $R = IA$.

Chú ý:

- Muốn bỏ dấu trị tuyệt đối trong (1), ta xét dấu miền mặt phẳng định bởi Δ_1 và Δ_2.
- Nếu $\Delta_1 \parallel \Delta_2$, ta tính $R = \frac{1}{2} d(\Delta_1, \Delta_2)$ và (2) được thay thế bởi $IA = R$.

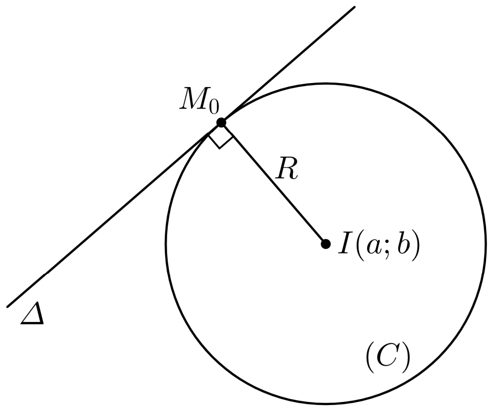
Dạng 12: (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d

- Tâm I của (C) thoả mãn: $\begin{cases} d(I,\Delta_1) = d(I,\Delta_2) \\ I \in d \end{cases}$.

- Bán kính $R = d(I,\Delta_1)$.

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R.



Tiếp tuyến tại điểm

PTTT tại một điểm $M_0(x_0;y_0) \in (C)$ là:

$$\Delta: (a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0.$$

Tiếp tuyến song song đường thẳng

PTTT của (C) song song với đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$

B1: Do $\Delta \parallel d$ nên Δ có dạng: $Ax + By + C' = 0$ (*) với $C' \neq C$.

B2: Sử dụng điều kiện tiếp xúc: $d(I,\Delta) = R$ tìm C' (nhớ so điều kiện).

B3: Thay C' vào (*), ta được PTTT Δ cần tìm.

Tiếp tuyến vuông góc đường thẳng

PTTT của (C) vuông góc với đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$

B1: Do $\Delta \perp d$ nên Δ có dạng: $Bx - Ay + C' = 0$ (*).

B2: Sử dụng điều kiện tiếp xúc: $d(I,\Delta) = R$ tìm C' (có 2 giá trị).

B3: Thay C' vào (*), ta được PTTT Δ cần tìm (có 2 PTTT).

Tiếp tuyến qua điểm

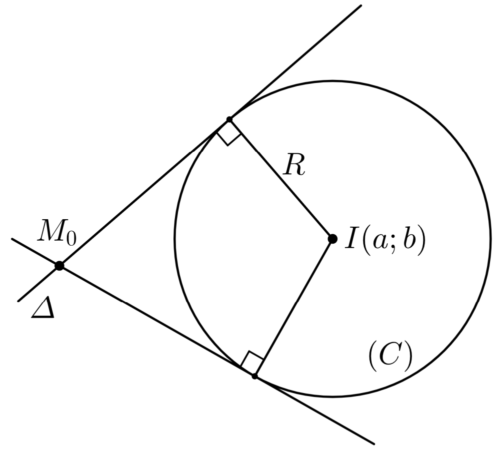
Tiếp tuyến Δ của (C) đi qua $M_0(x_0;y_0)\notin(C)$.

B1: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ có dạng:

$$y=k(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow kx-y-kx_0+y_0=0 \quad (*)$$

B2: Sử dụng điều kiện tiếp xúc $d(I,\Delta)=R$ tìm hệ số góc k.

B3: Thay k vào $(*)$, ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm (thường có 2 phương trình).



Chú ý: Nếu chỉ tìm được 1 nghiệm k thì tiếp tuyến còn lại có phương trình là: $x-x_M=0$.

4

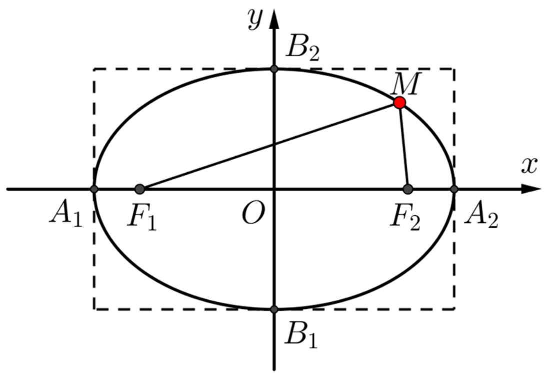
Ba đường conic trong mặt phẳng tọa độ

Elip

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ lớn hơn F_1F_2. ***Elip*** (E) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $F_1M+F_2M=2a$.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của elip.

Độ dài $F_1F_2=2c$ gọi là ***tiêu cự*** của elip $(a>c)$.



Phương trình chính tắc của elip

$M(x;y)\in(E)\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1) trong đó $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

Phương trình (1) gọi là ***phương trình chính tắc của elip***.

Chú ý:

• (E) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ và cắt Oy tại hai điểm $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

• Các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là các ***đỉnh*** của elip.

• Tiêu điểm: Điểm $F_1(-c;0)$ gọi là ***tiêu điểm trái***, điểm $F_2(c;0)$ gọi là ***tiêu điểm phải*** của elip.

• Đoạn thẳng $A_1A_2=2a$ gọi là ***trục lớn***, đoạn thẳng $B_1B_2=2b$ gọi là ***trục nhỏ*** của elip.

• Giao điểm O của hai trục gọi là ***tâm đối xứng*** của elip.

• Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x=\pm a$, $y=\pm b$ gọi là ***hình chữ nhật cơ sở***.

• ***Tâm sai***: $e=\frac{c}{a}<1$.

• Nếu $M(x;y)\in(E)$ thì $|x|\le a$, $|y|\le b$.

• ***Bán kính qua tiêu*** của điểm $M(x_M;y_M)$ thuộc (E) là:

$$MF_1=a+ex_M=a+\frac{c}{a}x_M \text{ và } MF_2=a-ex_M=a-\frac{c}{a}x_M.$$

• Diện tích hình elip: $S=\pi ab$.

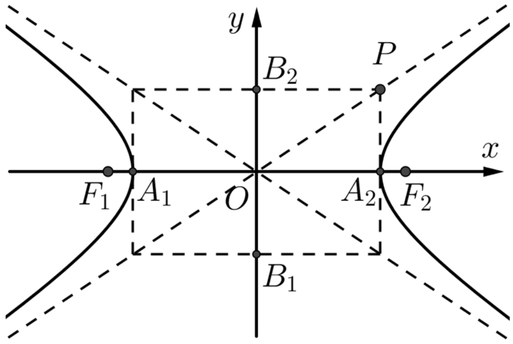
Hypebol

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ nhỏ hơn F_1F_2. ***Hypebol*** (H) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của hypebol.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của hypebol $(c > a)$.

Phương trình chính tắc của hypebol



Người ta chứng minh được:

$M(x;y) \in (H) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (2) trong đó $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Phương trình (2) gọi là ***phương trình chính tắc của hypebol***.

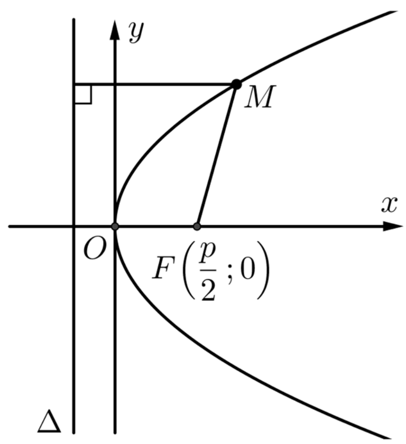
Chú ý:

- (H) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a;0)$ và $A_2(a;0)$. Nếu vẽ hai điểm $B_1(0;-b)$ và $B_2(0;b)$ vào hình chữ nhật OA_2PB_2 thì $OP = \sqrt{a^2 + b^2} = c$.
- Các điểm A_1, A_2 gọi là các ***đỉnh*** của hypebol.
- Tiêu điểm: Điểm $F_1(-c;0)$ gọi là ***tiêu điểm trái***, điểm $F_2(c;0)$ gọi là ***tiêu điểm phải*** của hypebol.
- Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là ***trục thực***, đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là ***trục ảo*** của hypebol.
- Giao điểm O của hai trục là ***tâm đối xứng*** của hypebol.
- Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$ gọi là ***hình chữ nhật cơ sở***. Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai ***đường tiệm cận*** của hypebol và có phương trình là $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.
- ***Tâm sai***: $e = \dfrac{c}{a} > 1$.
- Nếu $M(x;y) \in (H)$ thì $x \le -a$ hoặc $x \ge a$.
- Nếu $M(x_M;y_M)$ thuộc (H) thì: $MF_1 = |a + ex_M| = \left|a + \dfrac{c}{a}x_M\right|$ và $MF_2 = |a - ex_M| = \left|a - \dfrac{c}{a}x_M\right|$.

Parabol

Cho một điểm F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm M cách đều F và Δ.

F gọi là ***tiêu điểm*** và Δ gọi là ***đường chuẩn*** của parabol (P).



Phương trình chính tắc của parabol

$M(x;y) \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 2px$. (3)

Phương trình (3) gọi là ***phương trình chính tắc của parabol***.

Chú ý:

- O gọi là ***đỉnh*** của parabol (P).
- Ox gọi là ***trục đối xứng*** của parabol (P).

• $p = d(F;\Delta)$ gọi là ***tham số tiêu*** của parabol (P).

• Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

• Phương trình đường chuẩn: $\Delta : x = -\frac{p}{2}$.

• Nếu $M(x_M;y_M) \in (P)$ thì: $MF = d(M;\Delta) = x_M + \frac{p}{2}$.

• Nếu $M(x;y) \in (P)$ thì $x \ge 0$ và $M'(x;-y) \in (P)$.

THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 10

THỐNG KÊ

1

Số gần đúng

Số đúng kí hiệu là $\overline{a}$. ***Số gần đúng*** kí hiệu là a, là giá trị xấp xỉ của số đúng $\overline{a}$.

Sai số tuyệt đối

Sai số tuyệt đối của số gần đúng *a*: $\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right|$.

Ý nghĩa: Phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\overline{a}$ và số gần đúng a.

Đánh giá sai số tuyệt đối: $\Delta_a \le d$ (d gọi là ***độ chính xác*** của số gần đúng).

Ta viết: $\overline{a} = a \pm d$ hoặc $a - d \le \overline{a} \le a + d$ hoặc $\overline{a} \in [a-d;a+d]$.

Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng *a*: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

Ý nghĩa: Trong các phép đo không tương đồng, người ta sử dụng sai số tương đối. Sai số tương đối càng nhỏ thì chất lượng của phép đo hay tính toán càng cao. Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

Chú ý: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \le \frac{d}{|a|}$.

Số quy tròn

Quy tắc làm tròn số

• Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.

• Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.

Xác định số quy tròn của số gần đúng *a* với độ chính xác *d* cho trước

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của *d*.

Bước 2: Quy tròn *a* ở hàng gấp 10 lần hàng tìm đc ở trên.

Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác *d* cho trước

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của *d*.

Bước 2: Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng tìm được ở trên.

2

Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu

Số trung bình

Mẫu số liệu: $x_1, x_2, ..., x_n$ hoặc

Giá trị	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Số trung bình: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ hoặc $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n}$ với n_i là tần số của x_i.

Cỡ mẫu: $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Ngoài ra: $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k$ với $f_k = \dfrac{n_k}{n}$ gọi là ***tần số tương đối*** (hay ***tần suất***) của x_k.

Ý nghĩa của số trung bình: Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu đó.

Trung vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$.

Trung vị của mẫu, kí hiệu là M_e, là giá trị ở chính giữa dãy $x_1, x_2, ..., x_n$.

Nhận xét: Ta có thể đếm và tính trực tiếp trung vị hoặc áp dụng cách tính tổng quát như sau:

Nếu cỡ mẫu n lẻ: trung vị là số thứ $\dfrac{n+1}{2}$: $M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$.

Nếu cỡ mẫu n chẵn: trung vị là số trung bình cộng của số thứ $\dfrac{n}{2}$ và $\dfrac{n}{2}+1$: $M_e = \dfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$.

Hoặc xem ví dụ sau đây:

Mẫu số liệu	**Tính**	**Trung vị**
$x_1, ..., x_9$	$\dfrac{1+9}{2} = 5$	x_5
$x_{10}, ..., x_{18}$	$\dfrac{10+18}{2} = 14$	x_{14}
$x_1, ..., x_{20}$	$\dfrac{1+20}{2} = 10,5$	$\dfrac{x_{10} + x_{11}}{2}$
$x_{21}, ..., x_{40}$	$\dfrac{21+40}{2} = 30,5$	$\dfrac{x_{30} + x_{31}}{2}$

Khi các số liệu trong mẫu có sự chênh lệnh rất lớn đối với nhau thì số trung bình khó có thể đại diện cho các số liệu trong mẫu. Có một chỉ số khác thích hợp hơn trong trường hợp này. Đó là số trung vị.

Ý nghĩa của trung vị:

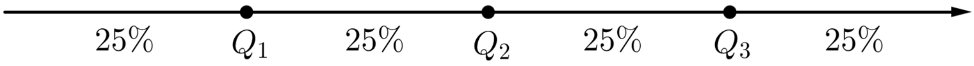
Trung vị được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Trung vị là giá trị nằm ở chính giữa của mẫu số liệu theo nghĩa: luôn có ít nhất 50% số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng trung vị và ít nhất 50% số liệu trong mẫu nhỏ hơn hoặc bằng trung vị. Khi trong mẫu xuất hiện thêm một giá trị rất lớn hoặc rất nhỏ thì số trung bình sẽ bị thay đổi đáng kể nhưng trung vị thì ít thay đổi.

Tứ phân vị

• Giá trị ***tứ phân vị thứ hai***, Q_2, chính là số trung vị của mẫu.

• Giá trị ***tứ phân vị thứ nhất***, Q_1, là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

• Giá trị ***tứ phân vị thứ ba***, Q_3, là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).



Ý nghĩa của tứ phân vị:

Các điểm tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã xắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần chứa khoảng 25% tổng số số liệu đã thu thập được. Tứ phân vị thứ nhất Q_1 còn được gọi là tứ phân vị dưới và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía dưới. Tứ phân vị thứ ba Q_3 còn được gọi là tứ phân vị trên và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía trên.

Mốt

Giá trị có tần số (hoặc tần số tương đối) lớn nhất được gọi là ***mốt*** của mẫu số liệu, kí hiệu là M_0.

Ý nghĩa của mốt:

Mốt đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu.

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt. Khi tất cả các giá trị trong mẫu số liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.

Nhận xét: Số trung bình, trung vị và tứ phân vị là các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Ta thường chọn số đặc trưng là số trung bình nếu các số liệu có giá trị gần nhau, chọn số đặc trưng là trung vị nếu trong mẫu có số lớn hoặc nhỏ bất thường (gọi là các giá trị bất thường hoặc giá trị ngoại lệ), chọn số đặc trưng là tứ phân vị khi các số liệu không đồng đều nhau, nhiều số liệu trong mẫu chênh lệch lớn so với trung vị.

3

Các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu

Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$.

Khoảng biến thiên của một mẫu số liệu, kí hiệu là R, là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó, tức là $R = x_n - x_1$.

Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu giữa Q_3 và Q_1, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị:

Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu.

Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu.

Khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu.

Giá trị ngoại lệ (giá trị bất thường)

Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các giá trị ngoại lệ trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị của mẫu. Cụ thể, phần tử x trong mẫu là ***giá trị ngoại lệ*** nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.

Sự xuất hiện của các giá trị ngoại lệ làm cho số trung bình và phạm vi của mẫu thay đổi lớn. Do đó, khi mẫu có giá trị ngoại lệ, người ta thường sử dụng trung vị và khoảng tứ phân vị để đo mức độ tập trung và mức độ phân tán của đa số các phần tử trong mẫu số liệu.

Phương sai và độ lệch chuẩn

Phương sai

$$(1)\ S^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right];$$

$$(2)\ S^2=\frac{1}{n}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)-\overline{x}^2;$$

$$(3)\ S^2=\frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+n_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2\right];$$

$$(4)\ S^2=\frac{1}{n}\left(n_1x_1^2+n_2x_2^2+\ldots+n_kx_k^2\right)-\overline{x}^2.$$

Độ lệch chuẩn là căn bậc hai (số học) của phương sai, kí hiệu là S. Tức là $S=\sqrt{S^2}$.

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn:

Phương sai là trung bình cộng của các bình phương độ lệch từ mỗi giá trị của mẫu số liệu đến số trung bình.

Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

XÁC SUẤT

1

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử ngẫu nhiên được gọi là ***không gian mẫu***, kí hiệu là Ω.

Biến cố

Biến cố là một tập con của không gian mẫu, kí hiệu là $A, B, C, \ldots$

Mỗi phần tử của biến cố A được gọi là kết quả làm cho A xảy ra, hoặc ***kết quả thuận lợi*** cho A. Trong một phép thử, nếu kết quả của phép thử là một kết quả thuận lợi cho A thì ta nói biến cố A xảy ra.

Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu là Ω.

Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra, kí hiệu là $\varnothing$.

2

Xác suất của biến cố

Giả sử một phép thử có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết quả có cùng khả năng xảy ra và A là một biến cố.

Xác suất của biến cố A là: $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

Trong đó $n(A)$ và $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của A và Ω.

Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là ***biến cố đối*** của biến cố A. Về mặt tập hợp, ta có $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Nhận xét:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\Omega) = 1$ và $P(\varnothing) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Nguyên lí xác suất bé

Trong thực tế, các biến cố có xác suất xảy ra gần bằng 1 thì gần như là luôn xảy ra trong một phép thử. Ngược lại, các biến cố mà xác suất xảy ra gần bằng 0 thì gần như không xảy ra trong một phép thử.

Trong Lí thuyết Xác suất, Nguyên lí xác suất bé được phát biểu như sau:

Nếu một biến cố có xác suất rất bé thì trong một phép thử, biến cố đó sẽ không xảy ra.

Ví dụ như khi một con tàu lưu thông trên biển, xác suất nó bị đắm là số dương. Tuy nhiên, nếu tuân thủ các quy tắc an toàn thì xác suất xảy ra biến cố này là rất nhỏ, con tàu có thể yên tâm hoạt động.

Nếu một nhà sản xuất tuyên bố tỉ lệ gây sốc phản vệ nặng khi tiêm một loại vắc xin là rất nhỏ, chỉ khoảng 0,001, thì có thể tiêm vắc xin đó cho mọi người được không? Câu trả lời là không, vì sức khoẻ và tính mạng con người là vô giá, nếu tiêm loại vắc xin đó cho hàng tỉ người thì khả năng có nhiều người bị sốc phản vệ nặng là rất cao.

ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH 11

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1

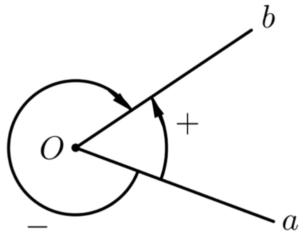
Góc lượng giác

Góc lượng giác có tia đầu Oa, tia cuối Ob, kí hiệu (Oa,Ob).

Số đo của góc lượng giác (Oa,Ob) kí hiệu là sđ(Oa,Ob).

Chú ý: Có vô số góc lượng giác tia đầu Oa và tia cuối Ob.

Ta kí hiệu (Oa,Ob) cho tất cả các góc lượng giác này.



Đơn vị radian

Trên đường tròn bán kính R, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 ***radian***.

- $180° = \pi$ rad
- $a° = \dfrac{\pi a}{180}$ rad
- α rad $= \left(\dfrac{180\alpha}{\pi}\right)^{\circ}$

Độ dài cung tròn: Trên đường tròn bán kính R, một góc ở tâm có số đo α rad thì chắn một cung có độ dài $l = \alpha R$.

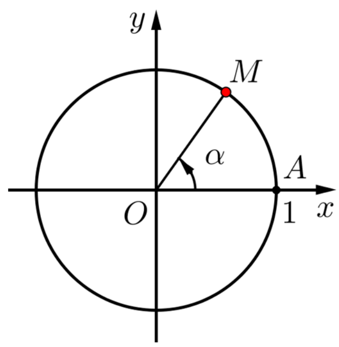
Nhận xét: sđ$(Oa,Ob) = \alpha° + k360°$ $(k \in \mathbb{Z})$ với $\alpha°$ là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob. Với đơn vị radian, sđ$(Oa,Ob) = \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

Với ba tia Oa, Ob và Oc bất kì, ta có $(Oa,Ob) + (Ob,Oc) = (Oa,Oc) + k360°$ $(k \in \mathbb{Z})$.

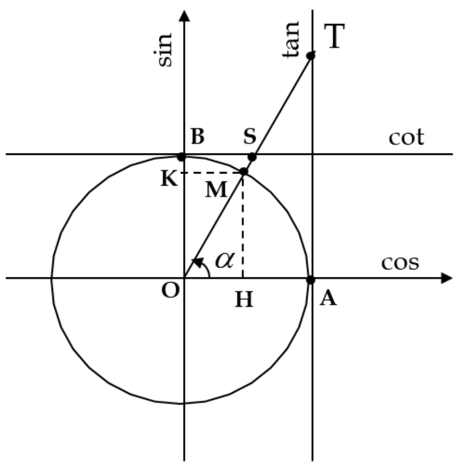
Đường tròn lượng giác

- Chiều dương ngược chiều kim đồng hồ
- Chiều âm cùng chiều kim đồng hồ.
- Cho góc α. Trên đường tròn lượng giác, ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác (OA,OM) bằng α. Khi đó điểm M được gọi là ***điểm biểu diễn*** của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



2

Giá trị lượng giác của một góc lượng giác



- $\cos\alpha = x_M$
- $\sin\alpha = y_M$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = y_T$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = x_S$ $(\alpha \neq k\pi)$

$\forall\alpha$, ta có:

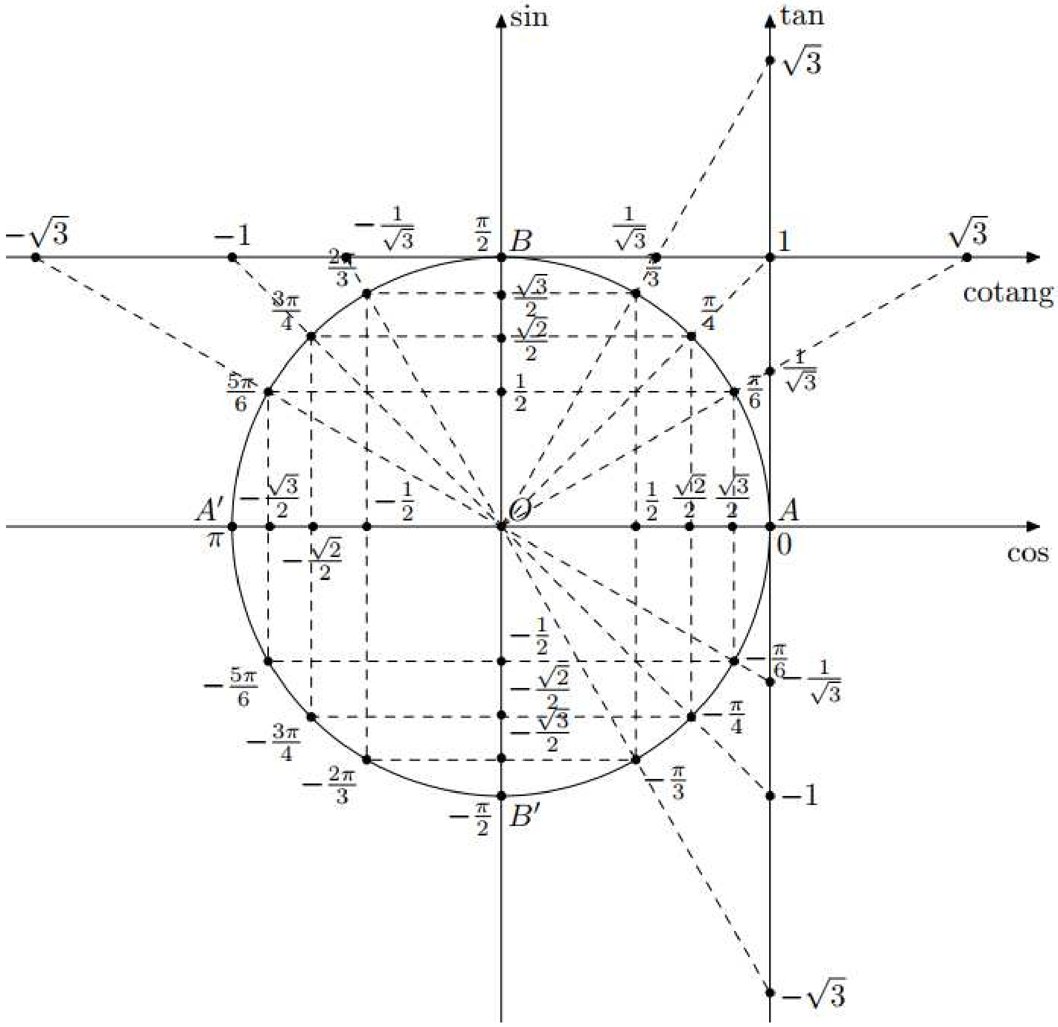
- $-1 \le \cos\alpha \le 1$
- $-1 \le \sin\alpha \le 1$
- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$
- $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$

Dấu của các giá trị lượng giác

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–

Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0
cot	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\parallel$



3

Các công thức lượng giác

Hai góc đối nhau	Hai góc bù nhau	Hai góc hơn kém π
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$

$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$
Hai góc phụ nhau	**Hai góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$**	**Công thức lượng giác cơ bản**
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$ $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\alpha$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad\tan\alpha.\cot\alpha=1$ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$ $\quad\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha$

"COS ĐỐI – SIN BÙ – PHỤ CHÉO – TAN, COT HƠN KÉM PI"
"HƠN KÉM PI/2 CHÉO SIN"

Công thức cộng	**Công thức nhân đôi**
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$
Công thức hạ bậc	**Công thức nhân ba**
$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$	$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ $\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$
Công thức biến đổi tích thành tổng	**Công thức biến đổi tổng thành tích**
$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$ $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Công thức tính theo $\tan\frac{x}{2}$	Một số công thức khác
Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$. Khi đó: $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$ $\cot x=\frac{1-t^2}{2t}$	$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$ $\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$ $\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$ $\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}$ $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$
$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}.\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$	

4

Hàm số lượng giác và đồ thị

Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

• Hàm số $y=f(x)$ là ***hàm số chẵn*** trên D nếu với mọi $x\in D$ ta có $-x\in D$ và $f(-x)=f(x)$.

• Hàm số $y=f(x)$ là ***hàm số lẻ*** trên D nếu với mọi $x\in D$ ta có $-x\in D$ và $f(-x)=-f(x)$.

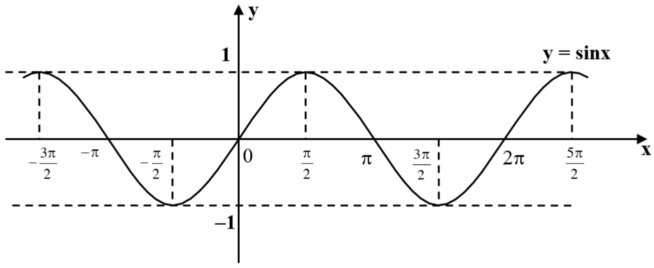
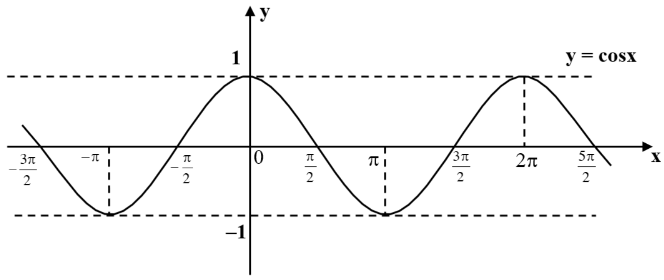
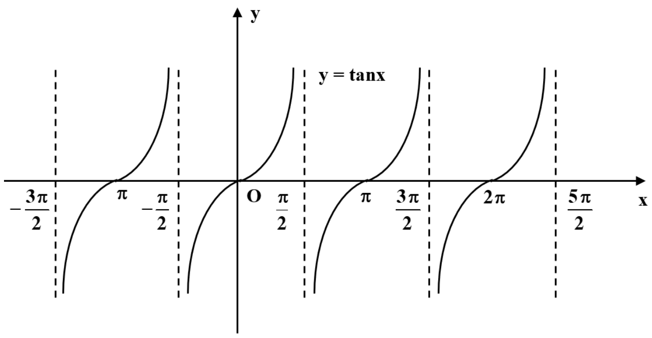
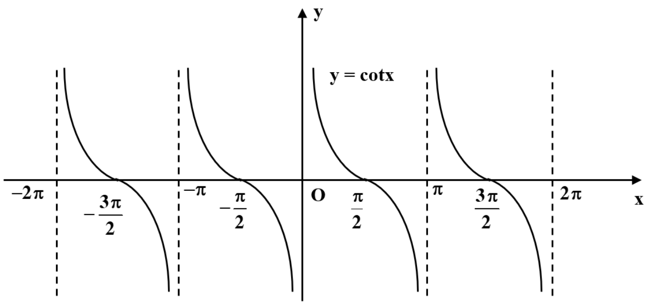
Chú ý: - Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

- Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

• Hàm số $y=f(x)$ là ***hàm số tuần hoàn*** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x\in D$ ta có $x\pm T\in D$ và $f(x+T)=f(x)$. Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là ***chu kì*** của hàm số tuần hoàn $y=f(x)$.

Hàm số lượng giác

Hàm số $y=\sin x$	Hàm số $y=\cos x$
- Tập xác định $D=\mathbb{R}$ - Tập giá trị $T=[-1;1]$ - Là hàm số lẻ - Chu kỳ $T_0=2\pi$ - Hàm số $y=\sin(ax+b)$ có chu kỳ $T_0=\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	- Tập xác định $D=\mathbb{R}$ - Tập giá trị $T=[-1;1]$ - Là hàm số chẵn - Chu kỳ $T_0=2\pi$ - Hàm số $y=\cos(ax+b)$ có chu kỳ $T_0=\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$

<table>
<tr>
<td>- Đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$
- Nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$

</td>
<td>- Đồng biến trên $\left(-\pi+k2\pi;k2\pi\right)$
- Nghịch biến trên $\left(k2\pi;\pi+k2\pi\right)$

</td>
</tr>
<tr>
<th>Hàm số $y=\tan x$</th>
<th>Hàm số $y=\cot x$</th>
</tr>
<tr>
<td>- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Tập giá trị $T=\mathbb{R}$
- Là hàm số lẻ
- Chu kỳ $T_0=\pi$
- Hàm số $y=\tan\left(ax+b\right)$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{\pi}{\left|a\right|}$
- Đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$

</td>
<td>- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Tập giá trị $T=\mathbb{R}$
- Là hàm số lẻ
- Chu kỳ $T_0=\pi$
- Hàm số $y=\cot\left(ax+b\right)$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{\pi}{\left|a\right|}$
- Nghịch biến trên $\left(k\pi;\pi+k\pi\right)$

</td>
</tr>
</table>

Chú ý

- $\tan X$ có điều kiện là $\cos X\neq 0$.
- $\cot X$ có điều kiện là $\sin X\neq 0$.
- Cho hàm số $y=f_1\left(x\right)$ có chu kỳ T_1 và hàm số $y=f_2\left(x\right)$ có chu kỳ T_2. Khi đó hàm số $y=f_1\left(x\right)\pm f_2\left(x\right)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Cách tìm BCNN của T_1 và T_2:

Viết $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{m}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó $\text{BCNN}\left[T_1,T_2\right]=T_1.n$.

5

Phương trình lượng giác cơ bản

Phương trình $\sin x=m$ với $m\in\left[-1;1\right]$

• $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$ với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa $\sin\alpha = m$ (góc α này còn gọi là $\arcsin m$, **CASIO:** bấm **Shift** **sin** m). Tức là:

• $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý:

• $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

• $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\cos x = m$ với $m \in [-1;1]$

• $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$ với α là góc thuộc $[0;\pi]$ thỏa $\cos\alpha = m$ (góc α này còn gọi là $\arccos m$, **CASIO:** bấm **Shift** **cos** m). Tức là:

• $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý:

• $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

• $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\tan x = m$

• $\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ với α là góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$ (góc α này còn gọi là $\arctan m$, **CASIO:** bấm **Shift** **tan** m). Tức là:

• $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý:

• $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ với $u,\ v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

• $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\cot x = m$

• $\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ với α là góc thuộc $(0;\pi)$ sao cho $\cot\alpha = m$ (góc α này còn gọi là $\operatorname{arccot} m$, **CASIO:** bấm **Shift** **tan** $\frac{1}{m}$). Tức là:

• $\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Nhận xét: $\operatorname{arccot} m = \arctan\frac{1}{m}$.

Chú ý:

• $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ với $u,\ v \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

• $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ \ (k \in \mathbb{Z})$.

Một số trường hợp đặc biệt

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có:

• $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$

• $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$
- $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$
- $\tan u = 0 \Leftrightarrow \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$
- $\cot u = 0 \Leftrightarrow \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\tan u = 1 \Leftrightarrow \sin u = \cos u \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4} + k\pi$
- $\cot u = 1 \Leftrightarrow \sin u = \cos u \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4} + k\pi$
- $\tan u = -1 \Leftrightarrow \sin u = -\cos u \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
- $\cot u = -1 \Leftrightarrow \sin u = -\cos u \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

6

ĐỌC THÊM: Phương trình lượng giác thường gặp

Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác

Dạng $at^2 + bt + c = 0$ $(a \neq 0)$ với t là một hàm số lượng giác nào đó. Chẳng hạn như t là $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \alpha \sin x + \beta \cos x, \sin(\alpha x + \beta), \frac{1}{\sin x}, \ldots$

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Dạng $a\sin x + b\cos x = c$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Cách giải:

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$, phương trình trở thành:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Đặt: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$ và $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$. Ta được: $\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Áp dụng công thức cộng, ta được phương trình $\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Bất đẳng thức B.C.S tìm max min của $y = a\sin x + b\cos x$

$$|y| = |a.\sin x + b.\cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Khi đó: $\min y = -\sqrt{a^2+b^2}$ và $\max y = \sqrt{a^2+b^2}$ khi $\frac{\sin x}{a} = \frac{\cos x}{b}$ hay $\tan x = \frac{a}{b}$.

Phương trình thuần nhất bậc hai theo $\sin x$ và $\cos x$

Dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ (*) với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Cách giải 1:

TH1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Suy ra $\sin^2 x = 1$. Thay vào (*) xem có nghiệm không.

TH2: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ để đưa về phương trình theo $\tan x$.

Cách giải 2:

Áp dụng công thức hạ bậc và công thức nhân đôi, phương trình thuần nhất bậc hai được chuyển thành phương trình bậc nhất theo $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

Phương trình đối xứng đối với sin*x* và cos*x*

Dạng: Phương trình có chứa tích $\sin x\cos x$ và tổng $\sin x+\cos x$ hoặc hiệu $\sin x-\cos x$.

Cách giải:

• Đặt $t=\sin x+\cos x$ (điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$). Suy ra $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$ và đưa phương trình về ẩn *t*.

• Đặt $t=\sin x-\cos x$ hoặc $t=\cos x-\sin x$ (điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$). Suy ra $\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$ và đưa phương trình về ẩn *t*.

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

1

Dãy số

Dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số) là hàm số: $u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$

$$n\ \mapsto u_n=u(n)$$

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_n;\ \ldots$

$u_1=u(1)$ gọi là số hạng đầu, $u_n=u(n)$ gọi là số hạng thứ n (hay số hạng tổng quát) của dãy số.

Dãy số hữu hạn có dạng khai triển là $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m$.

Cách xác định dãy số

Cách 1: Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).

Cách 2: Cho công thức của số hạng tổng quát u_n.

Cách 3: Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là:

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);

- Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).

Cách 4: Cho bằng cách mô tả.

Dãy số tăng, dãy số giảm

• Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***tăng*** nếu $u_{n+1}>u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

• Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***giảm*** nếu $u_{n+1}<u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Cách 1: Xét hiệu $u_{n+1}-u_n$:

$u_{n+1}-u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	$u_{n+1}-u_n<0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$
(u_n) là dãy số tăng	(u_n) là dãy số giảm

Cách 2: Khi $u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$

(u_n) là dãy số tăng	(u_n) là dãy số giảm

Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2

Cấp số cộng

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi (d được gọi là ***công sai***).

Định nghĩa: $u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \ge 2$.

Tính chất các số hạng: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \ge 2$.

Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$.

3

Cấp số nhân

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi (q được gọi là ***công bội***).

Định nghĩa: $u_{n+1} = u_n.q, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \ge 2$.

Tính chất các số hạng: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \ge 2$.

Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$ với $q \ne 1$.

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1

Giới hạn dãy số

Một vài giới hạn đặc biệt

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ $(\lvert q\rvert < 1)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$ (với c là hằng số)
$\lim n^k = +\infty$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$	$\lim q^n = +\infty$ $(q > 1)$	$\lim \sqrt{n} = +\infty$

Quy ước: Ta hay viết $\lim u_n = a$ thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Định lí

• Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì:

▪ $\lim(u_n + v_n) = a + b$

▪ $\lim(u_n - v_n) = a - b$

▪ $\lim(u_n.v_n) = a.b$

▪ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

• Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

• **(Định lí kẹp)** Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

• Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim |u_n| = |a|$.

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n.v_n)$
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
a	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$a > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$a < 0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

Chú ý: Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cho cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q| < 1$. Khi đó: $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}$.

Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số

• Chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của n.

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.

- Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của luỹ thừa cao nhất của tử và của mẫu.

- Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ hoặc $-\infty$ tùy vào dấu của tử và mẫu.

• Dùng Định lí kẹp: Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

• Nhân lượng liên hợp: Dùng các hằng đẳng thức:

(1) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

(2) $\left(A-B\right)\left(A^2+AB+B^2\right)=A^3-B^3$

(3) $\left(A+B\right)\left(A^2-AB+B^2\right)=A^3+B^3$

Cụ thể:

$\sqrt{A}+B$ liên hợp $\sqrt{A}-B$ $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ liên hợp $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ $\sqrt[3]{A}-B$ liên hợp $\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A}.B+B^2$ $A-\sqrt[3]{B}$ liên hợp $A^2+A.\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}$ $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$ liên hợp $\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}$	$A+\sqrt{B}$ liên hợp $A-\sqrt{B}$ $\sqrt[3]{A}+B$ liên hợp $\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A}.B+B^2$ $A+\sqrt[3]{B}$ liên hợp $A^2-A.\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}$ $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ liên hợp $\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}$

2

Giới hạn hàm số

Một vài giới hạn đặc biệt

Với c là hằng số và k nguyên dương, ta có:

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & ;k=2l\\ -\infty & ;k=2l+1\end{cases}$	$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$
$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{\lvert x\rvert}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\lvert x\rvert}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0$
$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{x-a}=+\infty\ \left(a\in\mathbb{R}\right)$	$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{x-a}=-\infty\ \left(a\in\mathbb{R}\right)$	

Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

- Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$ ▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$

▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$ ▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$ (nếu $M\neq0$).

- Nếu $f(x)\geq0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì $L\geq0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|L\right|$.

Giới hạn một bên

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bằng $x\to x_0^+$ hoặc $x\to x_0^-$ hoặc $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

Tìm giới hạn của tích

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Tìm giới hạn của thương

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
$L<0$		+	$-\infty$
		−	$+\infty$

Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$.

Chú ý: Hai quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Một số phương pháp khử dạng vô định:

Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

• **Dạng $\frac{0}{0}$:**

Tử và mẫu là các đa thức: Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Tử và mẫu là các biểu thức chứa căn cùng bậc: Nhân lượng liên hợp.

Tử thức là biểu thức chứa căn không cùng bậc (thường thì chứa căn bậc 2 và bậc 3 cùng lúc): Thêm bớt hằng số a hoặc một biểu thức phù hợp vào tử.

• **Dạng $\frac{\infty}{\infty}$:** Rút nhân tử chung bậc cao nhất tử và mẫu (rút x mũ) hoặc nhân lượng liên hợp.

• **Dạng $\infty - \infty$:** Rút nhân tử chung bậc cao nhất (rút x mũ) hoặc nhân lượng liên hợp.

• **Dạng $0.\infty$:** Nhân liên hợp.

3

Hàm số liên tục

Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.

Hàm số $y = f(x)$ ***liên tục tại điểm*** $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:

B1: Tính $f(x_0)$.

B2: Tính $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp ta cần tính $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ và $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$).

B3: So sánh $\lim_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

Hàm số liên tục trên một khoảng

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số liên tục trên một đoạn

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (liên tục phải tại a), $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (liên tục trái tại b).

Chú ý: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền nét" trên khoảng đó.

Tính liên tục của hàm số sơ cấp

• Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Hàm số phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.

Trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

Nhận xét: Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là ***hàm số sơ cấp***.

Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

• Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_0.

• Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lí giá trị trung gian

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Nói cách khác: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Mở rộng:

• Cho $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Đặt $m = \min_{[a;b]} f(x)$, $M = \max_{[a;b]} f(x)$. Khi đó với mọi $T \in (m;M)$ luôn tồn tại ít nhất một số $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = T$.

• Nếu hàm $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $[a;b]$ thì hàm số $y = f(x)$ có dấu không đổi trên $[a;b]$.

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

1

Lũy thừa

Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý, ***lũy thừa bậc n của a*** là tích của n thừa số a:

$$a^n = a.a.\ \dots\ .a \text{ (có } n \text{ thừa số } a\text{)}.$$

Với $a \neq 0$: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Trong biểu thức a^m, ta gọi a là ***cơ số***, m là ***số mũ***.

Chú ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

Căn bậc *n*

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$. Số a được gọi là **căn bậc n** của số b nếu $a^n = b$.

Xét phương trình $x^n = b$:

- Với n lẻ và $b \in \mathbb{R}$: phương trình có nghiệm duy nhất là căn bậc n của b, kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$.
- Với n chẵn:
  - $b < 0$: Phương trình vô nghiệm (không tồn tại căn bậc n của b).
  - $b = 0$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$ (có một căn bậc n của 0 là số 0).
  - $b > 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt (có hai căn bậc n của b là hai số đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$).

Tính chất của căn bậc *n*

(1) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n = 2k+1 \\ |a|, & \text{khi } n = 2k \end{cases} \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ (5) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n.k]{a}$

Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $\dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Lũy thừa của a với số mũ $\dfrac{m}{n}$ được xác định bởi:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Cho a là một số dương, α là một số vô tỉ. Khi đó luôn có một dãy số hữu tỉ $\left(r_n\right)$ có giới hạn là α và dãy số tương ứng $\left(a^{r_n}\right)$ có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số $\left(r_n\right)$. Ta gọi giới hạn của dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ là lũy thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.

$$a^\alpha = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \text{ với } \alpha = \lim_{n\to+\infty} r_n.$$

Tính chất của lũy thừa với số mũ thực

Cho a, b là các số thực dương; α, β là các số thực tùy ý. Khi đó, ta có:

(1) $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ (2) $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ (3) $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}$

(4) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$ (5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$ (6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}$

So sánh hai lũy thừa cùng cơ số

- Với $a>1$: $a^{\alpha}>a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha>\beta$.
- Với $0<a<1$: $a^{\alpha}>a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha<\beta$.

So sánh hai lũy thừa cùng số mũ

Cho $a,\ b>0$. Khi đó:

- Với $\alpha>0$: $a^{\alpha}<b^{\alpha}$ khi và chỉ khi $a<b$.
- Với $\alpha<0$: $a^{\alpha}<b^{\alpha}$ khi và chỉ khi $a>b$.

Điều kiện xác định của biểu thức lũy thừa x^{α}

Số mũ α	α là số nguyên dương	α nguyên âm hoặc bằng 0	α không nguyên
Điều kiện xác định	$x\in\mathbb{R}$	$x\neq 0$	$x>0$

2

Hàm số lũy thừa

Định nghĩa: Hàm số $y=x^{\alpha}$, với $\alpha\in\mathbb{R}$, được gọi là ***hàm số lũy thừa***.

Tập xác định D của hàm số $y=x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của số mũ α:

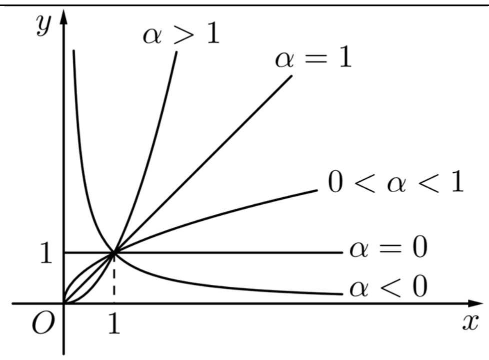
Số mũ α	α là số nguyên dương	α nguyên âm hoặc bằng 0	α không nguyên
Tập xác định	$D=\mathbb{R}$	$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$D=(0;+\infty)$

Xét hàm số $y=\left[f(x)\right]^{\alpha}$:

Số mũ α	α là số nguyên dương	α nguyên âm hoặc bằng 0	α không nguyên
Điều kiện xác định	$f(x)$ xác định	$f(x)\neq 0$	$f(x)>0$

Đồ thị hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$

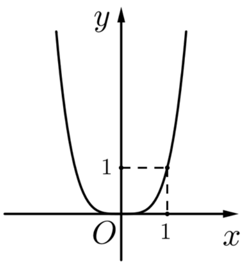
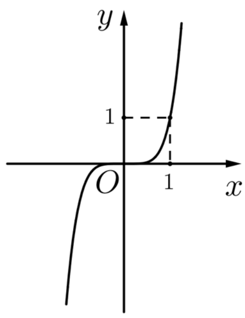
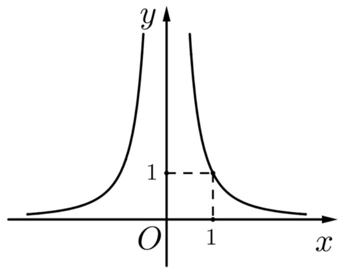
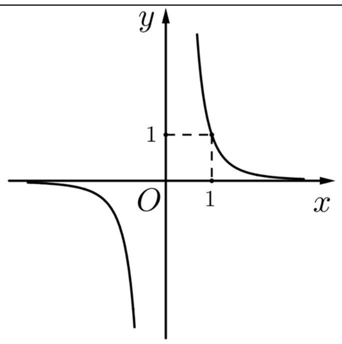
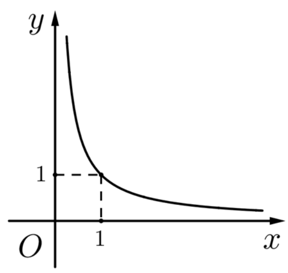
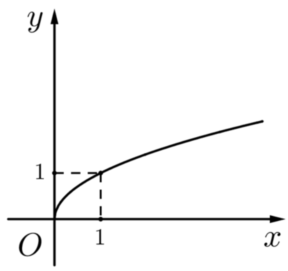
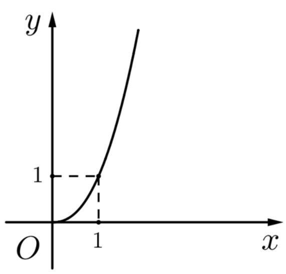
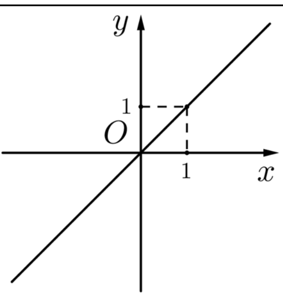
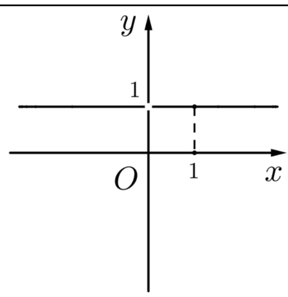
<table>
<tr><th>$y=x^{\alpha},\ \alpha>0$</th><th>$y=x^{\alpha},\ \alpha<0$</th></tr>
<tr><td>1. Tập khảo sát: $(0;+\infty)$.</td><td>1. Tập khảo sát: $(0;+\infty)$.</td></tr>
<tr><td>2. Sự biến thiên:
Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty$.
Tiệm cận: Không có</td><td>2. Sự biến thiên:
Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=0$.
Tiệm cận:
Ox là tiệm cận ngang, Oy là tiệm cận đứng.</td></tr>
<tr><td>3. Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0 $\nearrow$ $+\infty$</td></tr>
</table></td><td>3. Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty$ $\searrow$ 0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Đồ thị:</td></tr>
</table>



Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

Chú ý: Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

Đồ thị

		
$y = x^n$ với n là số tự nhiên chẵn	$y = x^n$ với n là số tự nhiên lẻ	$y = x^{-n}$ với n là số tự nhiên chẵn
		
$y = x^{-n}$ với n là số tự nhiên lẻ	$y = x^{\alpha}$ với số thực $\alpha < 0$	$y = x^{\alpha}$ với số thực $0 < \alpha < 1$
		
$y = x^{\alpha}$ với số thực $\alpha > 1$	$y = x^{\alpha}$ với $\alpha = 1$	$y = x^{\alpha}$ với $\alpha = 0$

3

Logarit

Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là ***logarit*** cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b$.

Điều kiện xác định: $\log_a b$ xác định khi $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$.

Tính chất

Cho $a, b, c > 0, a \neq 1$, với mọi α, ta có:

(1) $\log_a 1 = 0$

(2) $\log_a a = 1$

(3) $a^{\log_a b} = b$

(4) $\log_a a^{\alpha} = \alpha$

(5) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

(6) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

(7) $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

(8) $\log_a b^{\alpha} = \alpha.\log_a b$

(9) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}.\log_a b$

(10) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1)$

(11) $\log_c a.\log_a b = \log_c b \quad (c \neq 1)$

(12) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1)$

(13) $\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha}.\log_a b \quad (\alpha \neq 0)$

Logarit thập phân, logarit tự nhiên

Logarit cơ số 10 còn được gọi là logarit thập phân: $\log_{10} x = \log x = \lg x$.

Logarit cơ số e còn được gọi là logarit tự nhiên: $\log_e x = \ln x$, trong đó:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718\ 281\ 828.$$

4

Hàm số mũ

Định nghĩa: Hàm số $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ được gọi là ***hàm số mũ*** cơ số a.

Đồ thị hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

$y = a^x$, $a > 1$	$y = a^x$, $0 < a < 1$
1. Tập xác định: $\mathbb{R}$. Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.	1. Tập xác định: $\mathbb{R}$. Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang.	2. Sự biến thiên: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$. Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang.
3. Bảng biến thiên:	3. Bảng biến thiên:

<table>
<tr>
<td>

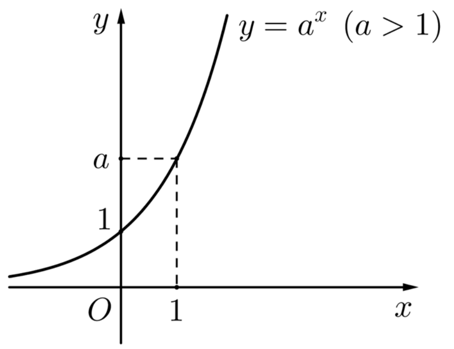
$$\begin{array}{c|cccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline y' & & + & & \\ \hline y & 0 & \nearrow 1 & \nearrow a & \nearrow +\infty \end{array}$$

</td>
<td>

$$\begin{array}{c|cccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline y' & & - & & \\ \hline y & +\infty & \searrow 1 & \searrow a & \searrow 0 \end{array}$$

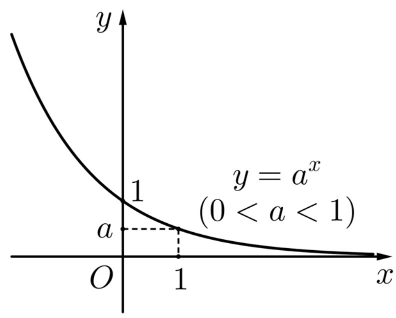
</td>
</tr>
<tr>
<td>

4. Đồ thị:



</td>
<td>

4. Đồ thị:



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Đồ thị của hàm số mũ $y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$ luôn đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm phía trên trục hoành: $y = a^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

</td>
</tr>
</table>

5

Hàm số logarit

Định nghĩa: Hàm số $y = \log_a x,\ (a > 0,\ a \neq 1)$ được gọi là ***hàm số logarit*** cơ số a.

Đồ thị hàm số logarit $y = \log_a x,\ (a > 0,\ a \neq 1)$

<table>
<tr>
<th>$y = \log_a x,\ a > 1$</th>
<th>$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$</th>
</tr>
<tr>
<td>

1. Tập xác định: $(0;+\infty)$.

Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$.

</td>
<td>

1. Tập xác định: $(0;+\infty)$.

Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2. Sự biến thiên:

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

Tiệm cận:

Oy là tiệm cận đứng.

</td>
<td>

2. Sự biến thiên:

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

Tiệm cận:

Oy là tiệm cận đứng.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. Bảng biến thiên:

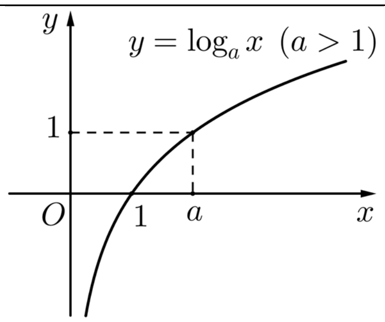
$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & a & +\infty \\ \hline y' & & + & & \\ \hline y & -\infty & \nearrow 0 & \nearrow 1 & \nearrow +\infty \end{array}$$

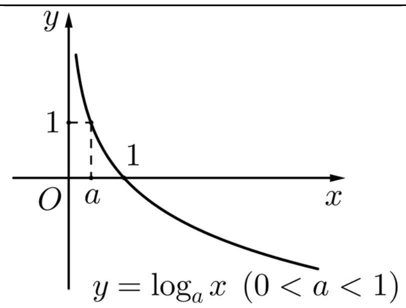
</td>
<td>

3. Bảng biến thiên:

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & a & 1 & +\infty \\ \hline y' & & - & & \\ \hline y & +\infty & \searrow 1 & \searrow 0 & \searrow -\infty \end{array}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Đồ thị:</td>
<td>4. Đồ thị:</td>
</tr>
</table>

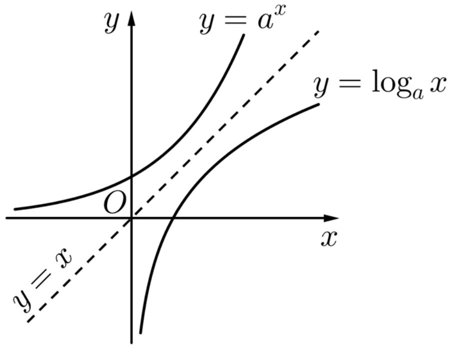




Đồ thị của hàm số logarit $y=\log_a x$, $(a>0,\ a\neq 1)$ luôn đi qua các điểm $(1;0)$ và $(a;1)$, nằm phía bên phải trục tung.

Mối liên hệ giữa đồ thị hàm mũ và đồ thị hàm logarit

Đồ thị của các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.



So sánh hai logarit

Cho $0<a\neq 1$ và $b,\ c>0$. Khi đó:

- Với $a>1$: $\log_a b>\log_a c \Leftrightarrow b>c$.
- Với $0<a<1$: $\log_a b>\log_a c \Leftrightarrow b<c$.

6

Một số bài toán lãi suất, bài toán thực tế

Bài toán lãi đơn

Gửi vào ngân hàng số tiền là A đồng, với lãi đơn r trên một kì hạn (tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp). Sau n kì hạn $(n\geq 1)$, số tiền cả vốn lẫn lãi là: $T=A(1+nr)$.

Bài toán lãi kép

Gửi vào ngân hàng số tiền là A đồng, với lãi suất là r trên một kì hạn. Sau n kì hạn $(n\geq 1)$, số tiền cả vốn lẫn lãi là: $T=A(1+r)^n$.

Bài toán tiền gửi hàng tháng

Hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là A đồng (gửi đầu tháng) với lãi suất hàng tháng là r. Tổng số tiền sau n tháng $(n\geq 1)$ là: $T=\dfrac{A}{r}(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]$.

Bài toán vay trả góp

Vay vốn A đồng, lãi suất mỗi tháng là r, mỗi tháng trả a đồng (trả cuối tháng). Số tiền nợ còn lại sau n tháng $(n\geq 1)$ là: $T=A(1+r)^n-\dfrac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$.

Bài toán gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là a đồng. Số tiền còn lại sau n tháng là: $T = A(1+r)^n - a\frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Bài toán tăng lương

Lương khởi điểm là A đồng/tháng. Cứ sau n tháng thì lương được tăng thêm $r\%$ /tháng. Tổng số tiền nhận được sau kn tháng là: $S_{kn} = Ak\frac{(1+r)^k - 1}{r}$.

7

Phương trình mũ

Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản

Xét phương trình: $a^x = b$ với $a > 0,\ a \ne 1$.

Với $b \le 0$, phương trình vô nghiệm.

Với $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Dạng 2. Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0,\ a \ne 1$: $a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x)$.

Dạng 3. Logarit hóa

Với $0 < a,\ b \ne 1$: $a^{A(x)} = b^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = (\log_a b)B(x)$ (lấy logarit cơ số a hai vế).

Dạng 4. Đặt ẩn phụ

Dạng 5. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

1) Phương trình $f(x) = g(x)$

Dạng phương trình $f(x) = g(x)$ với: $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến (hoặc đồng biến nghiêm ngặt) hoặc: $f(x)$ đơn điệu và $g(x)$ là hàm hằng.

- Đoán x_0 là một nghiệm của phương trình.

- Dựa vào tính đơn điệu của $f(x)$ và $g(x)$ để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất:

2) Phương trình $a^x + b^x = c^x$

Chia 2 vế cho c^x ta được: $\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x - 1 = 0$. Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x - 1$, chứng minh $f(x)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến và đoán 1 nghiệm x_0. Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

3) Xét hàm đặc trưng

Biến đổi phương trình về dạng $f(u) = f(v)$ với $f(x)$ là hàm đồng biến hoặc nghịch biến. Khi đó: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Dạng 6. Đưa về phương trình đặc biệt (phương trình tích, ...)

Dạng 7. Phương pháp đối lập

Xét phương trình $f(x) = g(x)$.

Nếu $\begin{cases} f(x) \ge M \\ g(x) \le M \end{cases}$ thì $f(x) = g(x) = M$.

Phương trình logarit

Dạng 1. Phương trình logarit cơ bản

Xét phương trình: $\log_a x = b$ với $0 < a \ne 1$.

Khi đó: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Dạng 2. Đưa về cùng cơ số

$\log_a A(x) = \log_a B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x)$ với $a > 0,\, a \ne 1$ và $A(x),\, B(x) > 0$.

Dạng 3. Mũ hóa

Với $0 < a,\, b \ne 1$ và $A(x),\, B(x) > 0$:

$\log_a A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) = a^{B(x)}$ với $0 < a,\, b \ne 1$.

$\log_a A(x) = \log_b B(x) = t \Rightarrow \begin{cases} A(x) = a^t \\ B(x) = b^t \end{cases}$ với $0 < a,\, b \ne 1$ và $A(x),\, B(x) > 0$.

Dạng 4. Đặt ẩn phụ

Dạng 5. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Dạng 6. Đưa về phương trình đặc biệt (phương trình tích, ...)

8

Bất phương trình mũ

Với $a > 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Với $0 < a < 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] > 0$.

Các phương pháp giải bất phương trình mũ cũng tương tự như giải phương trình mũ:

- Bất phương trình mũ cơ bản.
- Đưa về cùng cơ số.
- Logarit hóa.
- Đặt ẩn phụ.
- …

Bất phương trình logarit

Với $a > 1$: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

Với $0 < a < 1$: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

Các phương pháp giải bất phương trình logarit cũng tương tự như giải phương trình logarit:

- Bất phương trình logarit cơ bản.
- Đưa về cùng cơ số.
- Mũ hóa.
- Đặt ẩn phụ.

- …

Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$\log_a f(x) > 0 \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-1\right] > 0$.

$\dfrac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[f(x)-1\right]\left[g(x)-1\right] > 0$.

ĐẠO HÀM

1

Đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. ***Đạo hàm*** (nếu có) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu là $y'(x_0)$ hoặc $f'(x_0)$, được tính bởi:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ hoặc } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$\Delta x = x - x_0$: ***Số gia của biến số*** tại x_0.

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$: ***Số gia tương ứng của hàm số***.

Định lí: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Đạo hàm một bên

Đạo hàm bên trái của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu $f'(x_0^-)$, được định nghĩa là:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Đạo hàm bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu $f'(x_0^+)$, được định nghĩa là:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Định lí: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thuộc tập xác định của nó, nếu và chỉ nếu $f'(x_0^-)$ và $f'(x_0^+)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó ta có $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Đạo hàm trên một khoảng, đoạn

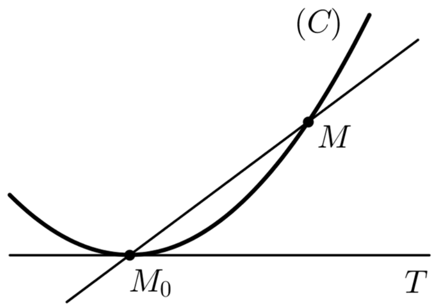
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***có đạo hàm trên khoảng*** $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó. Kí hiệu là y' hoặc $f'(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***có đạo hàm trên đoạn*** $[a;b]$ nếu nó có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm bên phải tại *a*, đạo hàm bên trái tại *b*.

Ý nghĩa của đạo hàm

Cho đường cong phẳng (C) và một điểm cố định M_0 trên (C), M là điểm di động trên (C). Khi đó M_0M là một ***cát tuyến*** của (C).

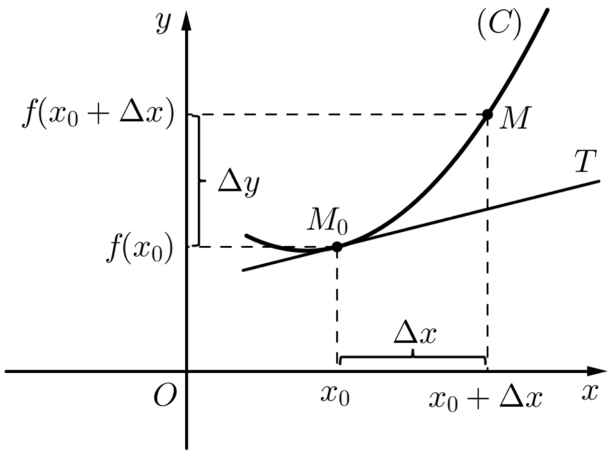
Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T khi điểm M di chuyển trên (C) và dần tới điểm M_0 thì đường thẳng M_0T được gọi là ***tiếp tuyến*** của đường cong (C) tại điểm M_0. Điểm M_0 được gọi là ***tiếp điểm***.



Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a;b)$, gọi (C) là đồ thị hàm số đó.

Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, tức là $f'(x_0)$, là ***hệ số góc*** của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.



Phương trình của tiếp tuyến

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Trong đó:

- $M_0(x_0; y_0)$ gọi là tiếp điểm.
- $k_\Delta = f'(x_0)$ là hệ số góc (hệ số góc là giá trị $\tan\alpha$, với α là góc giữa Δ với tia Ox).

Nhận xét:

- Nếu cho x_0 thì thay vào $y = f(x)$ tìm y_0.
- Nếu cho y_0 thì thay vào $y = f(x)$ tìm x_0.
- Nếu cho hệ số góc k, ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ tìm được x_0, thay vào $y = f(x)$ tìm y_0.
- Nếu cho tiếp tuyến Δ song song với $d: y = ax + b$ thì ta có $k_\Delta = a \Leftrightarrow f'(x_0) = a$.

(song song hệ số góc bằng nhau)

• Nếu cho tiếp tuyến Δ vuông góc với với $d: y = ax + b$ thì ta có $k_\Delta.a = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$.

(vuông góc tích hệ số góc bằng -1)

Tiếp tuyến đi qua một điểm

Để viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) biết Δ đi qua điểm $A(x_A;\, y_A)$, ta làm như sau:

• Gọi $M_0(x_0;\, y_0)$ là tiếp điểm.

• Phương trình đường thẳng Δ qua M_0 với hệ số góc $k = f'(x_0)$ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

• Từ $A(x_A; y_A) \in \Delta$, ta được một phương trình giải tìm x_0, suy ra $f'(x_0)$ và y_0. Từ đó viết được phương trình Δ.

Ý nghĩa vật lí

Vận tốc tức thời

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s = f(t)$ tại t_0.

$$v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0).$$

Cường độ dòng điện tức thời

Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình: $Q = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $Q = f(t)$ tại t_0.

$$I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0).$$

Đạo hàm cấp hai

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đạo hàm của hàm số $f'(x)$, nếu có, được gọi là ***đạo hàm cấp hai*** của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là y'' hay $f''(x)$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là ***gia tốc tức thời*** tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

2

Các quy tắc tính đạo hàm

$(u - v + w)' = u' - v' + w'$	$(ku)' = k.u'$, với k là hằng số
$(u.v)' = u'v + v'u$	$(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$	$y'_x = y'_u.u'_x$
$c' = 0$ với c là hằng số	$x' = 1$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -u'.\sin u$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = u'.\cos u$
$\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tan u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u.u'$
$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u.\ln a.u'$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$
$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$	$\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{ex+f}\right)' = \dfrac{aex^2+2afx+\left(bf-ce\right)}{\left(ex+f\right)^2}$
$\left(\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \dfrac{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)x^2+2\left(a_1c_2-a_2c_1\right)x+b_1c_2-b_2c_1}{\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)^2}$	

HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG 11

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

1

Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

Biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng

Để biểu diễn một hình trong không gian lên một mặt phẳng (tờ giấy, mặt bảng,...), ta thường dựa vào các quy tắc sau:

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Giữ nguyên tính liên thuộc (thuộc hay không thuộc) giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.
- Giữ nguyên tính song song, tính cắt nhau giữa các đường thẳng.
- Biểu diễn đường nhìn thấy bằng nét vẽ liền và biểu diễn đường bị che khuất bằng nét vẽ đứt đoạn.

Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Tính chất 6: Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Cách xác định mặt phẳng

• Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó **chứa ba điểm không thẳng hàng**.

• Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó **chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó**.

• Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó **chứa hai đường thẳng cắt nhau**.

• Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó **chứa hai đường thẳng song song**.

Các kí hiệu thường dùng

• Điểm ***thuộc*** đường thẳng: $A \in \Delta$.

• Điểm ***thuộc*** mặt phẳng: $A \in (\alpha)$.

• Đường thẳng ***nằm trong*** mặt phẳng: $\Delta \subset (\alpha)$.

• ***Giao điểm*** của 2 đường thẳng: $M = \Delta \cap d$.

• ***Điểm chung*** của 2 mặt phẳng: $M \in (\alpha) \cap (\beta)$.

• ***Giao tuyến*** của 2 mặt phẳng: $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.

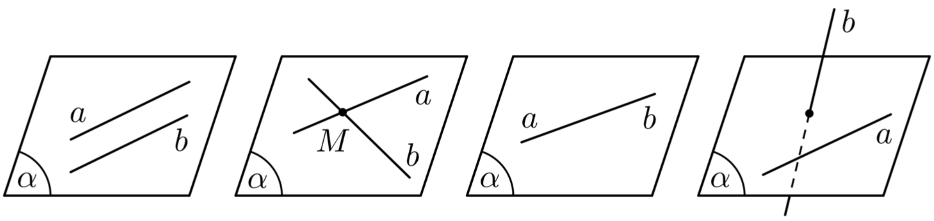
• ***Giao điểm*** của đường thẳng và mặt phẳng: $M = \Delta \cap (\alpha)$.

2

Hai đường thẳng song song

Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong các trường hợp sau:



$a \parallel b$ $a \cap b = M$ $a \equiv b$ a và b chéo nhau

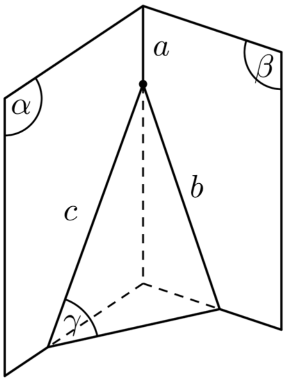
Định lí

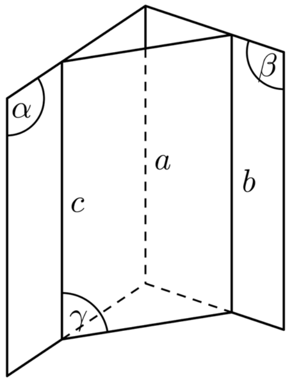
Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Định lí (về giao tuyến của ba mặt phẳng)

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(\beta)=a\\(\beta)\cap(\gamma)=b\\(\gamma)\cap(\alpha)=c\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b\parallel c \text{ hoặc } a,\ b,\ c \text{ đồng quy.}$$

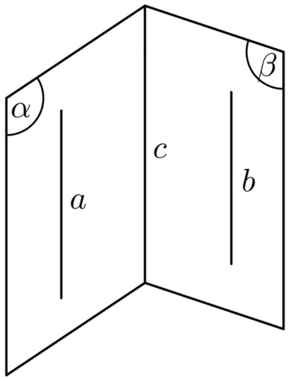




Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

$$\left.\begin{array}{l}a\subset(\alpha)\\b\subset(\beta)\\a\parallel b\\(\alpha)\cap(\beta)=c\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c\parallel a\parallel b\\c\equiv a\\c\equiv b\end{array}\right..$$



Định lí

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

3

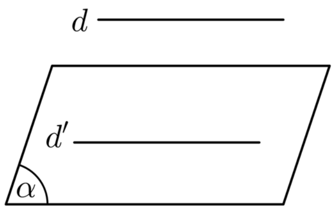
Đường thẳng và mặt phẳng song song

Đường thẳng và mặt phẳng song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Định lí

Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).

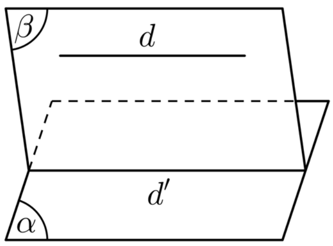
$$\left\{\begin{array}{l}d\not\subset(\alpha)\\d\parallel d'\\d'\subset(\alpha)\end{array}\right.\Rightarrow d\parallel(\alpha).$$



Định lí

Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) đi qua d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì $d'\parallel d$.

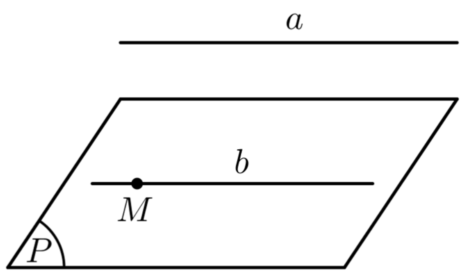
$$\left\{\begin{array}{l}d\parallel(\alpha)\\d\subset(\beta)\\(\alpha)\cap(\beta)=d'\end{array}\right.\Rightarrow d'\parallel d.$$



Hệ quả

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P).

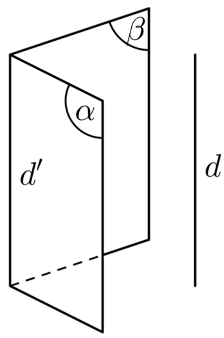
$$\begin{cases} a \parallel (P) \\ M \in (P) \cap b \\ b \parallel a \end{cases} \Rightarrow b \subset (P).$$



Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel d \\ (\beta) \parallel d \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d' \parallel d.$$



Định lí

Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a, có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

4

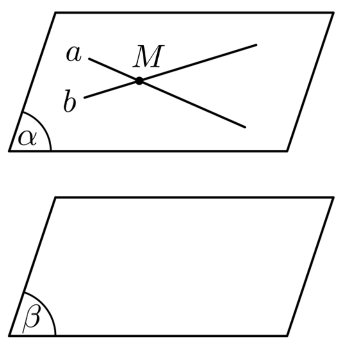
Hai mặt phẳng song song

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung

Định lí

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ a \parallel (\beta),\ b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$



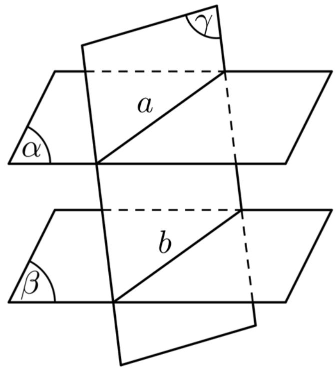
Định lí

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Định lí

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

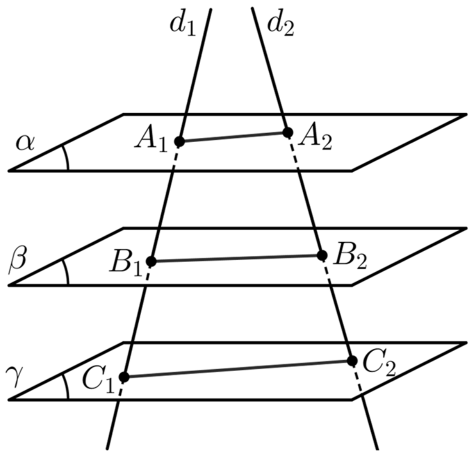
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$



Định lí Thalès trong không gian

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \parallel (\gamma) \\ d_1 \cap (\alpha) = A_1,\ d_1 \cap (\beta) = B_1,\ d_1 \cap (\gamma) = C_1 \\ d_2 \cap (\alpha) = A_2,\ d_2 \cap (\beta) = B_2,\ d_2 \cap (\gamma) = C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$



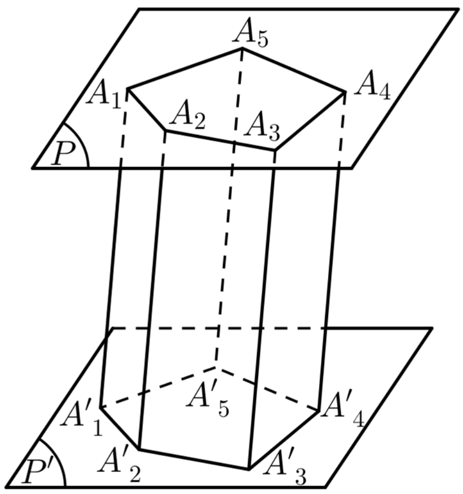
Định lí đảo của định lí Thalès trong không gian

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau, các điểm $A_1, B_1, C_1 \in d_1$ và $A_2, B_2, C_2 \in d_2$ thỏa $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$. Khi đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

Hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \ldots, A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là ***hình lăng trụ***, kí hiệu $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.

Trong hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$, ta gọi:



- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ là hai mặt đáy nằm trên hai mặt phẳng song song;

- Các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n, A'_1, A'_2, ..., A'_n$ là các đỉnh;

- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \ldots, A_nA_1A'_1A'_n$ là các mặt bên;

- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \ldots, A_nA'_n$ là các cạnh bên. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

- Các cạnh của hai đa giác đáy là các cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song và bằng nhau.

Chú ý: Hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,... tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác,...

Hình hộp

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1

Hai đường thẳng vuông góc

Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ $0°$ đến $90°$.

Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Trong không gian, hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

Hai đường thẳng a, b vuông góc được kí hiệu là $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.

Chú ý:

• Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

• Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường này thì cũng vuông góc với đường kia.

• Trong không gian, khi có hai đường thẳng phân biệt a, b cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba c thì ta chưa kết luận được $a \parallel b$ như trong hình học phẳng.

2

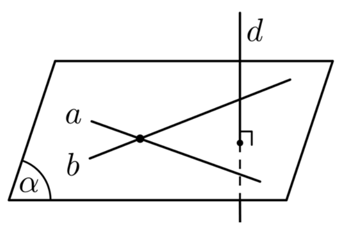
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng được gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với tất cả đường thẳng trong mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} d \perp (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \perp a.$$

Định lí

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với (α).



$$\begin{cases} d \perp a,\ d \perp b \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$

Định lí

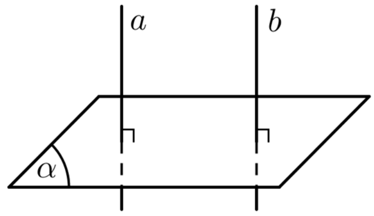
Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Định lí

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

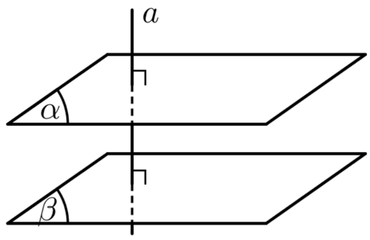
b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Định lí

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

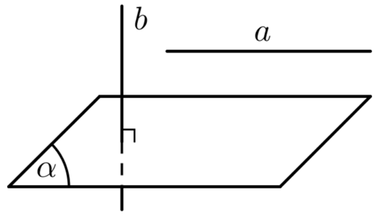
b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Định lí

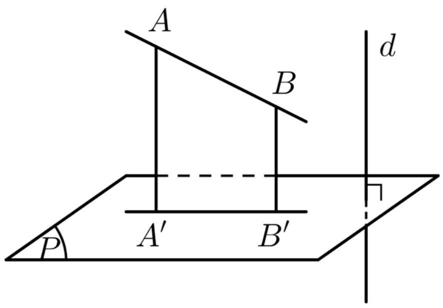
a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.



Phép chiếu vuông góc

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P). Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là ***phép chiếu vuông góc*** lên (P).



Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

3

Hai mặt phẳng vuông góc

Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$((\alpha),(\beta))=(m,n)$ với $m\perp(\alpha)$, $n\perp(\beta)$.

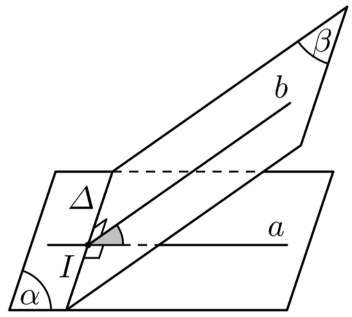
Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng:

- Tìm giao tuyến.

- Trong mỗi mặt phẳng tìm một đường thẳng vuông góc với giao tuyến.

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

$$\begin{cases}(\alpha)\cap(\beta)=\Delta \\ a\subset(\alpha),\ a\perp\Delta \\ b\subset(\beta),\ b\perp\Delta\end{cases} \Rightarrow ((\alpha),(\beta))=(a,b).$$



Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

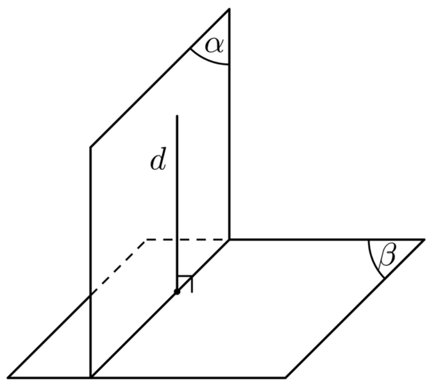
Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases}d\subset(\alpha) \\ d\perp(\beta)\end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

Định lí

Cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

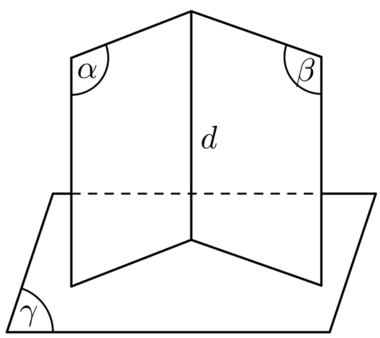
$$\begin{cases}(\alpha)\perp(\beta),\ (\alpha)\cap(\beta)=\Delta \\ d\subset(\alpha),\ d\perp\Delta\end{cases} \Rightarrow d\perp(\beta).$$



Định lí

Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng nếu có cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

$$\begin{cases}(\alpha)\perp(\gamma),\ (\beta)\perp(\gamma) \\ (\alpha)\cap(\beta)=d\end{cases} \Rightarrow d\perp(\gamma).$$



Hình chóp

• **Hình chóp:** có đáy là một đa giác và các cạnh bên đồng quy tại đỉnh S.

• **Hình chóp đều:** là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

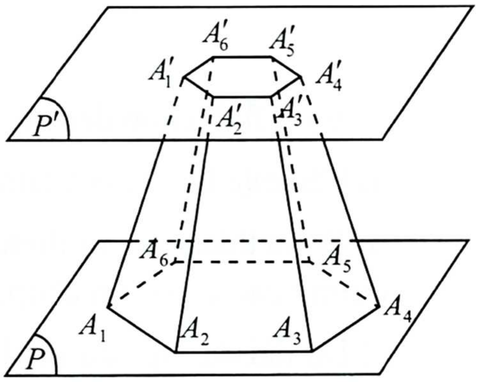
- **Hình chóp tam giác đều:** là hình chóp có đáy là tam giác đều và chân đường cao trùng với trọng tâm của đáy.

- **Hình chóp tứ giác đều:** là hình chóp có đáy là hình vuông, chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo hình vuông.

• **Hình chóp có đáy là tam giác đều:** là hình chóp chỉ có đáy là tam giác đều.

• **Tứ diện đều:** là đa diện có bốn mặt là các tam giác đều bằng nhau.

• **Hình chóp cụt đều:** Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều.



Hình chóp cụt đều $A_1A_2A_3\ldots A_6.A'_1A'_2A'_3\ldots A'_6$

Hình lăng trụ

• **Lăng trụ (xiên):**

- Hai đáy song song và là hai đa giác bằng nhau.
- Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Các mặt bên là các hình bình hành.

• **Lăng trụ đứng:** là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy.

• **Lăng trụ đều:** là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

- **Lăng trụ tam giác đều:** là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều.
- **Lăng trụ tứ giác đều:** là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông.

• **Lăng trụ có đáy là tam giác đều:** là lăng trụ (xiên), có đáy là tam giác đều.

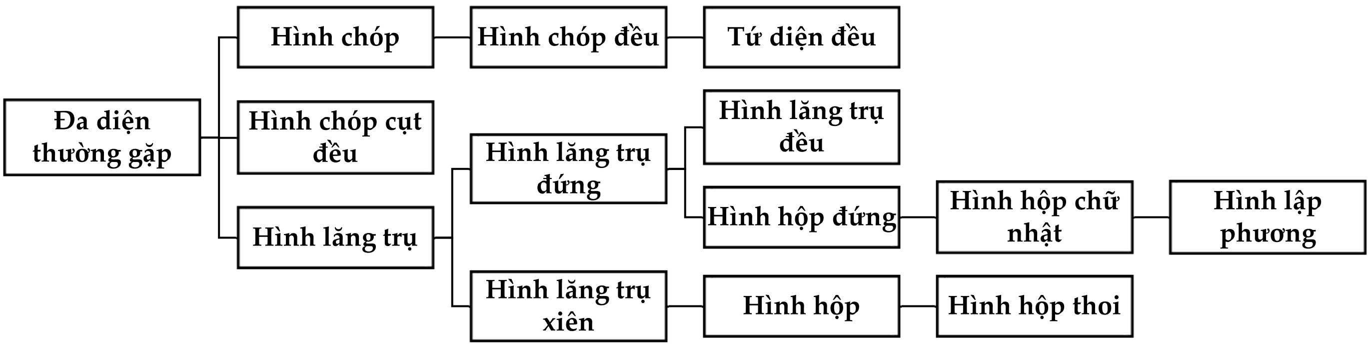
• **Lăng trụ có đáy là tứ giác đều:** là lăng trụ (xiên) có đáy là hình vuông.

• **Hình hộp:** là lăng trụ (xiên), có đáy là hình bình hành.

• **Hình hộp đứng:** là lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

• **Hình hộp chữ nhật:** là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

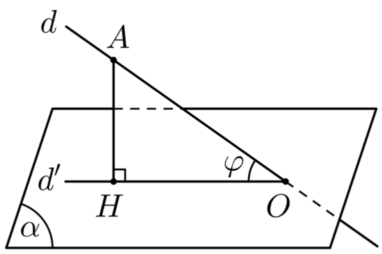
• **Hình lập phương:** là hình lăng trụ đứng có đáy và các mặt bên là hình vuông.



4

Khoảng cách và góc trong không gian

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

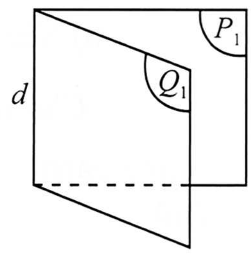


- Nếu d vuông góc với (α) thì ta nói góc giữa d và (α) là $90°$.

- Nếu d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên (α).

Góc φ giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thoả $0° \le \varphi \le 90°$.

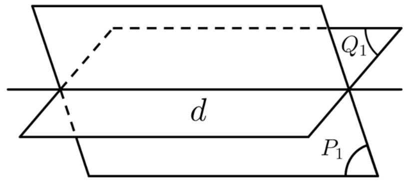
Góc nhị diện



Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình tạo bởi $(P_1), (Q_1)$ và d được gọi là ***góc nhị diện*** tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

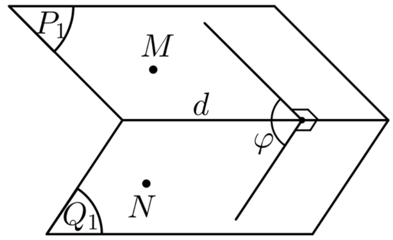
Hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$ gọi là hai ***mặt của nhị diện*** và d gọi là ***cạnh của nhị diện***.

Chú ý:



- Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.
- Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$.

Góc phẳng nhị diện



Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là ***số đo góc nhị diện***.

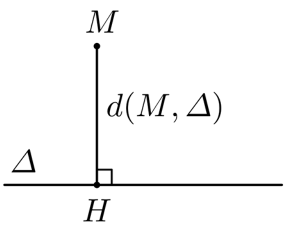
Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ $0°$ đến $180°$.

Diện tích hình chiếu của một đa giác

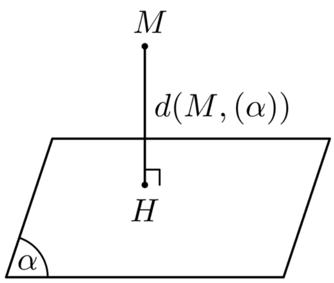
Gọi S là diện tích của đa giác nằm trong (P), S' là diện tích của hình chiếu của đa giác đó trên (Q), với $\varphi = ((P),(Q))$. Khi đó: $S' = S.\cos\varphi$.

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là độ dài đoạn vuông góc kẻ từ M đến Δ.



Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là độ dài đoạn vuông góc kẻ từ M đến (α).



Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

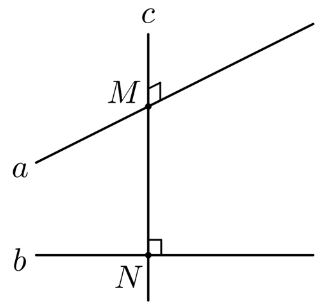
Cho đường thẳng d song song với (P), mặt phẳng (Q) song song với (P).

- Khoảng cách từ đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc d đến (P).

- Khoảng cách từ mặt phẳng (Q) đến mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc (Q) đến (P).

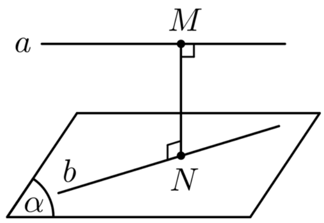
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng độ dài đoạn vuông góc chung.

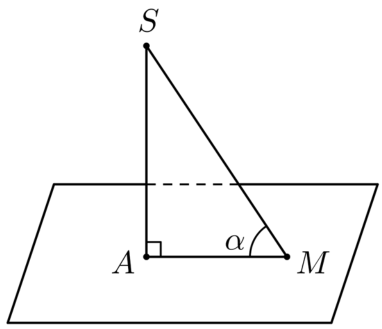
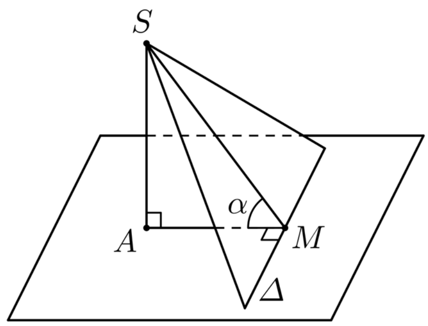
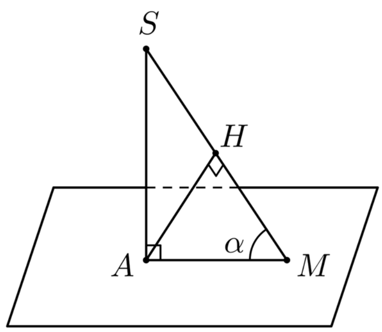
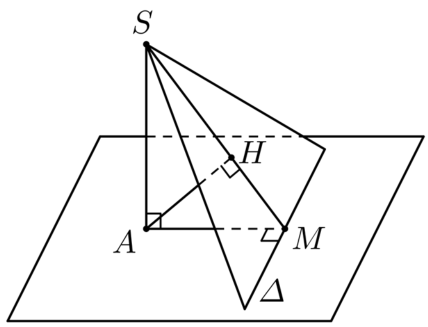


- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó tới mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với nó.

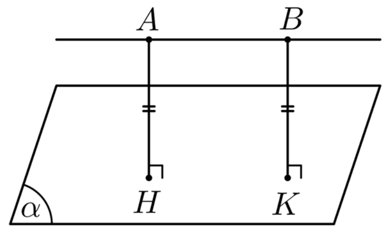
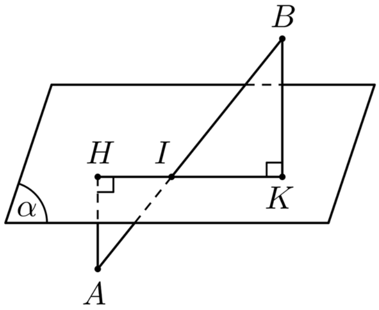
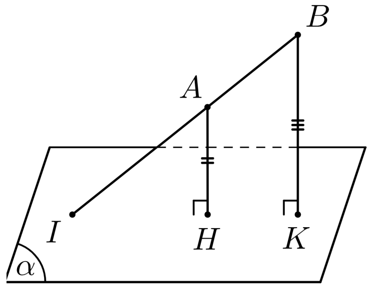
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



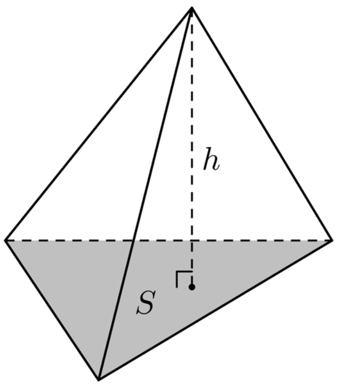
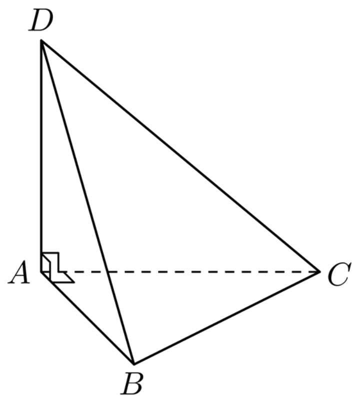
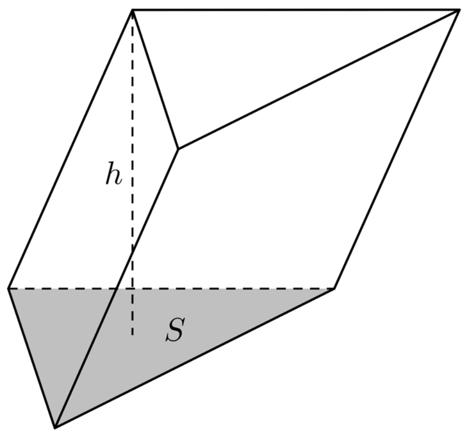
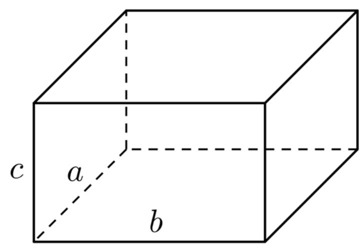
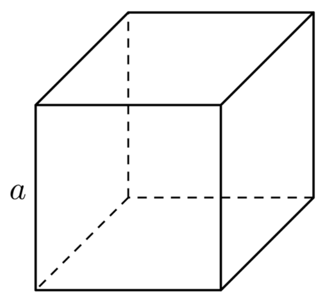
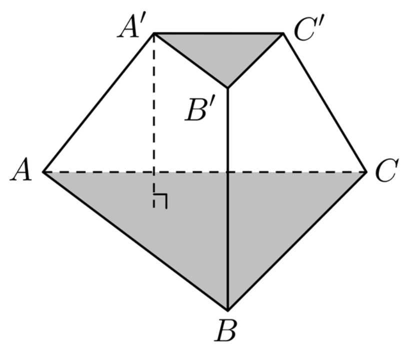
Các góc và khoảng cách thường gặp

<table>
<tr>
<td>Góc giữa cạnh bên (hoặc cạnh chứa đỉnh S) và mặt đáy trong hình chóp
Cho hình chóp có đỉnh S, chân đường cao A và cạnh bên SM.
Góc giữa cạnh bên SM và đáy là góc $\widehat{SMA}$.

</td>
<td>Góc giữa mặt bên (hoặc mặt có chứa đỉnh S) và mặt đáy trong hình chóp
- Tìm giao tuyến Δ của mặt bên và đáy.
- Kẻ AM từ chân đường cao vuông góc Δ.
- Nối SM.
Góc giữa mặt bên và đáy là góc $\widehat{SMA}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Khoảng cách từ chân đường cao đến cạnh bên (hoặc cạnh chứa đỉnh S) trong hình chóp
Cho hình chóp có đỉnh S, chân đường cao A và cạnh bên SM.
Kẻ $AH \perp SM$. Khi đó khoảng cách là AH.

</td>
<td>Khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên (hoặc mặt có chứa đỉnh S) trong hình chóp
- Tìm giao tuyến Δ của mặt bên và đáy.
- Kẻ AM từ chân đường cao vuông góc Δ.
- Kẻ $AH \perp SM$.

</td>
</tr>
</table>

Các tỉ lệ khoảng cách thường gặp

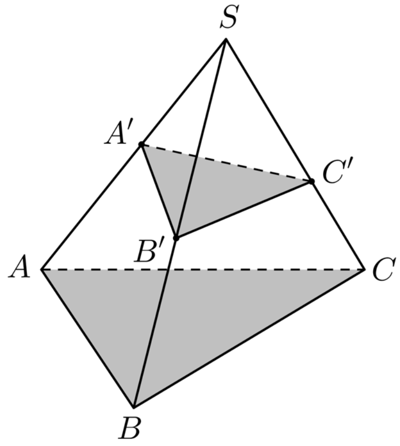
<table>
<tr><td>$AB \parallel (\alpha)$
$d(A,(\alpha)) = d(B,(\alpha))$</td><td colspan="2">$I \in (\alpha),\ \dfrac{IA}{IB} = k$
$d(A,(\alpha)) = k.d(B,(\alpha))$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Thể tích khối chóp, lăng trụ

<table>
<tr><td>Thể tích khối chóp
Khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h thì có thể tích là: $V = \frac{1}{3}.S.h$.

</td><td>Thể tích khối tứ diện vuông
Nếu tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc thì: $V = \frac{1}{6}.AB.AC.AD$.

</td><td>Thể tích khối lăng trụ
Khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h có thể tích là: $V = S.h$.

</td></tr>
<tr><td>Thể tích khối hộp chữ nhật
Khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c có thể tích là: $V = a.b.c$

</td><td>Thể tích khối lập phương
Khối lập phương có cạnh bằng a có thể tích là: $V = a^3$.

</td><td>Thể tích khối chóp cụt
Thể tích khối chóp cụt có diện tích hai đáy là S, S' và chiều cao h là: $V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{SS'} + S'\right)$

</td></tr>
</table>

Tỉ số thể tích trong khối chóp tam giác
(Công thức Simson)

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}.$$

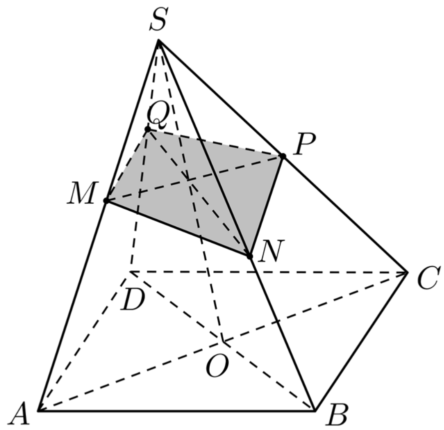


Tỉ số thể tích trong khối chóp tứ giác

Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $\frac{SM}{SA}=x$, $\frac{SN}{SB}=y$, $\frac{SP}{SC}=z$, $\frac{SQ}{SD}=t$.

Khi đó:

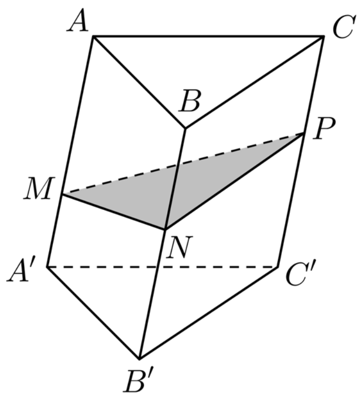
$$V_{S.MNPQ}=\frac{xyzt}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right).V_{S.ABCD} \text{ và } \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{t}.$$



Tỉ số thể tích trong khối lăng trụ tam giác

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Một mặt phẳng cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P sao cho $\frac{AM}{AA'}=x$, $\frac{BN}{BB'}=y$, $\frac{CP}{CC'}=z$. Khi đó:

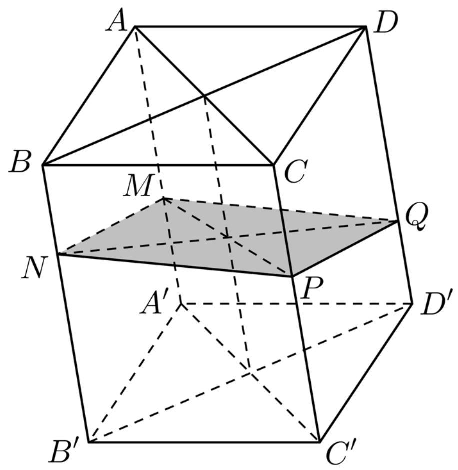
$$V_{ABC.MNP}=\frac{x+y+z}{3}.V_{ABC.A'B'C'}.$$



Tỉ số thể tích trong khối hộp

Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại các điểm M, N, P, Q sao cho $\frac{AM}{AA'}=x$, $\frac{BN}{BB'}=y$, $\frac{CP}{CC'}=z$, $\frac{DQ}{DD'}=t$. Khi đó:

$$V_{ABCD.MNPQ}=\frac{x+y+z+t}{4}.V_{ABCD.A'B'C'D'} \text{ và } x+z=y+t.$$



THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 11

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1

Số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Số liệu ghép nhóm

Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	...	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Chú ý:

- ***Cỡ mẫu*** $n=n_1+n_2+...+n_k$.

- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm ***giá trị đại diện*** cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1;u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1+u_2)$.

- Hiệu $u_{m+1}-u_m$ được gọi là ***độ dài của nhóm*** $[u_m;u_{m+1})$.

- Nhóm cuối cùng có thể là $[u_k;u_{k+1}]$.

- Các đầu mút của các nhóm có thể **không** là giá trị của mẫu số liệu.

- Nếu gặp bảng tần số ghép nhóm kiểu như sau (các đầu mút không liên tục):

Nhóm	$[1;2]$	$[3;4]$	$[5;6]$	$[7;8]$	$[9;10]$
Tần số	122	75	14	5	2

Thì ta lập lại ***bảng tần số ghép nhóm hiệu chỉnh*** như sau (mở rộng bên trái bên phải thêm nửa đơn vị):

Nhóm	$[0,5;\ 2,5)$	$[2,5;\ 4,5)$	$[4,5;\ 6,5)$	$[6,5;\ 8,5)$	$[8,5;\ 10,5)$
Tần số	122	75	14	5	2

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình: $\overline{x}=\frac{n_1c_1+n_2c_2+...+n_kc_k}{n}$ với $n=n_1+n_2+...+n_k$ là cỡ mẫu và c_1, c_2, ..., c_k là các giá trị đại diện các nhóm.

Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m;u_{m+1})$, khi đó ***mốt của mẫu số liệu ghép nhóm***, kí hiệu là M_0, được xác định bởi công thức:

$$M_0=u_m+\frac{n_m-n_{m-1}}{(n_m-n_{m-1})+(n_m-n_{m+1})}.(u_{m+1}-u_m).$$

Chú ý: Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $n_{m-1}=0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1}=0$.

Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm:

- Mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_0 xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_0 thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.

- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa mốt và nhiều mốt.

2

Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Cách 1: Xác định trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng cách xác định nhóm chứa trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu gốc

- Giá trị n: cỡ mẫu.
- Nhóm $[u_m;u_{m+1})$ (nhóm m): Nhóm chứa Q_1 (hoặc $Q_2=M_e$ hoặc Q_3) (của mẫu số liệu gốc).
- n_m: tần số của nhóm $[u_m;u_{m+1})$;
- $C=cf_{m-1}=n_1+n_2+...+n_{m-1}$: tần số tích lũy của nhóm $[u_{m-1};u_m)$ (nhóm $m-1$), nói cách khác nó là tổng tần số của các nhóm phía trước nhóm m.

Khi đó, các tứ phân vị (của mẫu số liệu ghép nhóm) là: $Q_k=u_m+\dfrac{k.\frac{n}{4}-C}{n_m}.(u_{m+1}-u_m)$ với $k=1,\ 2,\ 3$.

Cụ thể: $Q_1=u_m+\dfrac{\frac{n}{4}-C}{n_m}.(u_{m+1}-u_m)$; $Q_2=M_e=u_m+\dfrac{\frac{n}{2}-C}{n_m}.(u_{m+1}-u_m)$; $Q_3=u_m+\dfrac{\frac{3n}{4}-C}{n_m}.(u_{m+1}-u_m)$.

Chú ý: Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})$, trong đó x_i và x_{i+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_i\in[u_{m-1};u_m)$ và $x_{i+1}\in[u_m;u_{m+1})$ thì ta lấy $Q_k=u_m$.

Nhận xét: Cách này ta cần xác định vị trí Q_1, $Q_2=M_e$, Q_3 của mẫu số liệu gốc thuộc nhóm m nào và cần lưu ý **Chú ý** phía trên.

Cách 2: Xác định trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng cách xác định nhóm đầu tiên có tần số tích lũy thỏa điều kiện

Ta có thể xác định nhóm $[u_m;u_{m+1})$ (nhóm m) trong các công thức trên mà không cần xác định Q_1, Q_2, Q_3 (của mẫu số liệu gốc).

- Đối với Q_1: nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{m-1}<\frac{n}{4}$ nhưng $cf_m\ge\frac{n}{4}$.
- Đối với $Q_2=M_e$: nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức là $cf_{m-1}<\frac{n}{2}$ nhưng $cf_m\ge\frac{n}{2}$.

• Đối với Q_3: nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{m-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_m \geq \frac{3n}{4}$.

Khi đó, các tứ phân vị (của mẫu số liệu ghép nhóm) là: $Q_k = u_m + \frac{k.\frac{n}{4} - C}{n_m}.\left(u_{m+1} - u_m\right)$ với $k = 1, 2, 3$.

Cụ thể: $Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m}.\left(u_{m+1} - u_m\right)$; $Q_2 = M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m}.\left(u_{m+1} - u_m\right)$; $Q_3 = u_m + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_m}.\left(u_{m+1} - u_m\right)$.

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau. Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

XÁC SUẤT

1

Biến cố giao và quy tắc nhân xác suất

Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB hoặc $A \cap B$, được gọi là ***biến cố giao*** của A và B.

Biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là ***xung khắc*** nếu A và B không đồng thời xảy ra.

Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \varnothing$.

Đối với hai biến cố xung khắc, nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là ***độc lập*** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét: Nếu A và B độc lập thì $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.

2

Biến cố hợp và quy tắc cộng xác suất

Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố $A \cup B$ được gọi là ***biến cố hợp*** của A và B. Biến cố $A \cup B$ có nghĩa là “ A hoặc B xảy ra”.

Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra.

Quy tắc cộng xác suất

Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$.

Mở rộng, nếu A và B là hai biến cố bất kì thì $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P(AB)$.

CHUYÊN ĐỀ 11

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

1

Đồ thị

Một ***đồ thị*** G là một tập hợp gồm hữu hạn các điểm, gọi là ***đỉnh*** của đồ thị, cùng với tập hợp các đoạn đường cong hoặc thẳng có các đầu mút là các đỉnh của đồ thị, gọi là ***cạnh*** của đồ thị.

Các đỉnh của đồ thị được kí hiệu bằng các chữ in hoa $A, B, C, \dots$; cạnh có đầu mút là các đỉnh A, B (cạnh nối hai đỉnh A, B) được kí hiệu là AB hoặc BA. Đôi khi ta cũng dùng các chữ thường $a, b, \dots$ để kí hiệu cạnh.

Hai cạnh khác nhau có thể có chung hai đầu mút.

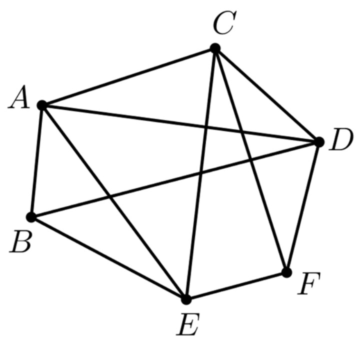
Hai đỉnh của đồ thị gọi là *kề nhau* (còn gọi đỉnh này kề với đỉnh kia) nếu chúng là hai đầu mút của một cạnh. Một đỉnh không kề với đỉnh nào (kể cả chính nó) gọi là ***đỉnh cô lập***.

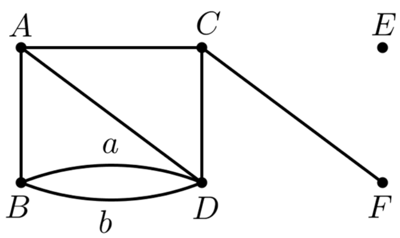
Nhận xét:

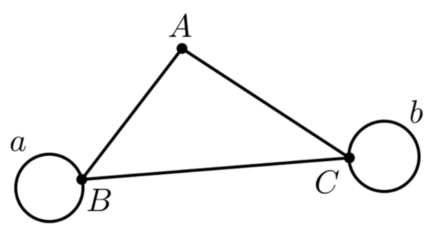
a) Hai đầu mút của một cạnh có thể trùng nhau. Cạnh có hai đầu mút trùng nhau gọi là ***khuyên***.

b) Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh bất kì là đầu mút của nhiều nhất một cạnh gọi là một *đơn đồ thị*.

c) Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh có thể nối với nhau bằng nhiều cạnh gọi là một ***đa đồ thị***.







Bậc của đỉnh

Giả sử A là đỉnh của một đồ thị. Số cạnh của đồ thị có A là đầu mút gọi là ***bậc*** của A, kí hiệu $d\left(A\right)$.

Chú ý:

a) Đỉnh có bậc là một số chẵn còn được gọi là ***đỉnh bậc chẵn***; đỉnh có bậc là một số lẻ còn được gọi là ***đỉnh bậc lẻ***.

b) Đỉnh cô lập có bậc bằng 0.

Định lí

Trong một đồ thị, tổng tất cả bậc của các đỉnh là một số chẵn và bằng hai lần số cạnh của đồ thị.

Nhận xét: Từ định lí trên suy ra, số đỉnh bậc lẻ của mọi đồ thị là một số chẵn.

2

Đường đi Euler và đường đi Hamilton

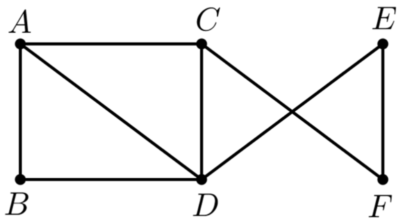
Đường đi Euler

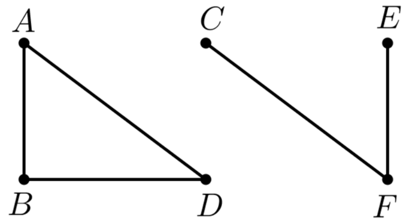
Trong đồ thị G, một dãy cạnh nối tiếp (hai cạnh nối tiếp là hai cạnh có chung một đỉnh) $AB, BC, ..., MN, NP$ được gọi là một ***đường đi*** từ đỉnh A đến đỉnh P, kí hiệu $ABCD...MNP$.

Ta cũng nói đường đi $ABCD...MNP$ bắt đầu từ đỉnh A, đi qua các cạnh $AB, BC, ..., NP$ và kết thúc tại đỉnh P.

Một đường đi được gọi là một ***chu trình*** nếu nó bắt đầu (hoặc xuất phát) và kết thúc tại cùng một đỉnh.

Một đồ thị được gọi là ***liên thông*** nếu mọi cặp đỉnh phân biệt của nó đều có đường đi từ đỉnh này đến đỉnh kia.





Cho G là một đồ thị liên thông.

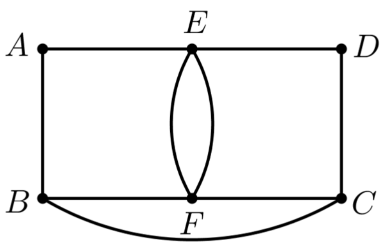
Trong đồ thị G, một đường đi từ đỉnh A đến đỉnh B, đi qua tất cả các cạnh của G, mỗi cạnh đúng một lần, được gọi là ***đường đi Euler*** từ A đến B.

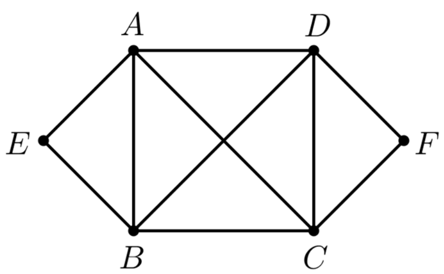
Một chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần, được gọi là ***chu trình Euler***.

Chú ý: Khi G là đồ thị liên thông thì mọi đường đi Euler trên G (nếu có) đi qua mọi đỉnh của G.

Định lí 1

Đồ thị liên thông G có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

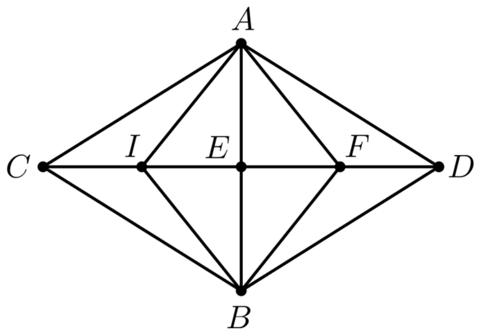


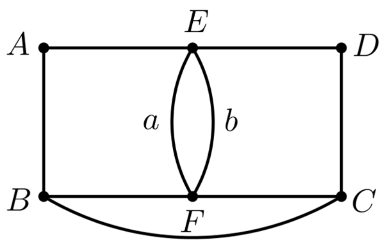


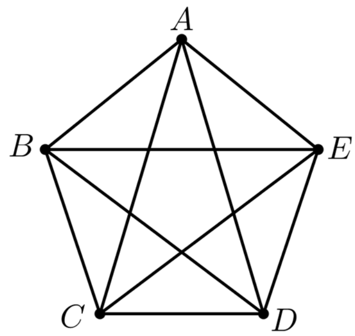
Định lí 2

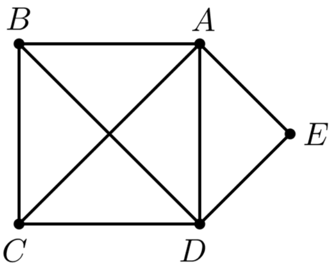
Đồ thị liên thông G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

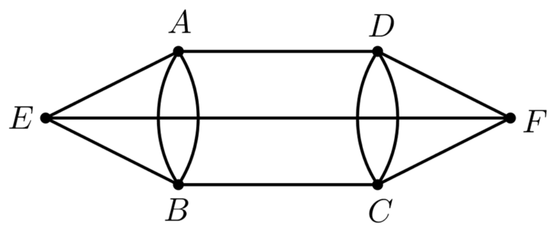
Khi đó, đường đi Euler đi từ đỉnh bậc lẻ này đến đỉnh bậc lẻ kia.











Đường đi Hamilton

Cho đồ thị G.

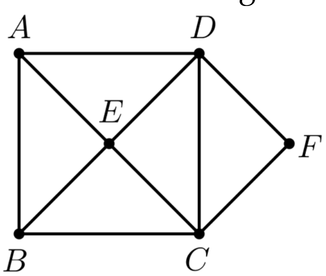
Đường đi đi qua mọi đỉnh của G, mỗi đỉnh đúng một lần gọi là ***đường đi Hamilton*** trong G.

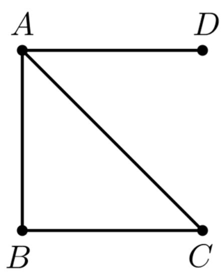
Đường đi bắt đầu và kết thúc tại đỉnh A, đi qua mọi đỉnh của G, mỗi đỉnh đúng một lần, trừ đỉnh A, được gọi là ***chu trình Hamilton*** trong G.

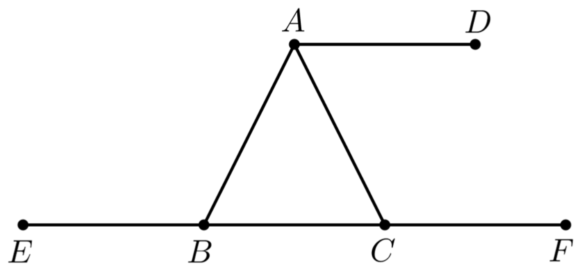
Chú ý:

a) Đường đi và chu trình Hamilton đi qua mỗi cạnh của đồ thị nhiều nhất một lần (không đi qua lần nào hoặc đi qua một lần).

b) Từ chu trình Hamilton, bỏ đi cạnh cuối cùng ta được đường đi Hamilton. Do đó, một đồ thị có chu trình Hamilton thì cũng có đường đi Hamilton (như vậy, một đồ thị không có đường đi Hamilton thì cũng không có chu trình Hamilton).







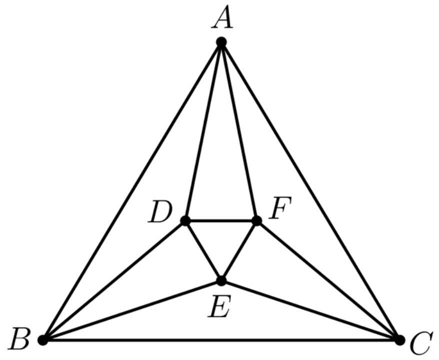
Nhận xét: Đến nay, người ta tìm ra được một số điều kiện đủ (nhưng chưa tìm được điều kiện cần và đủ nào) để một đồ thị có chu trình Hamilton. Dưới đây là hai trong số những điều kiện đủ đó.

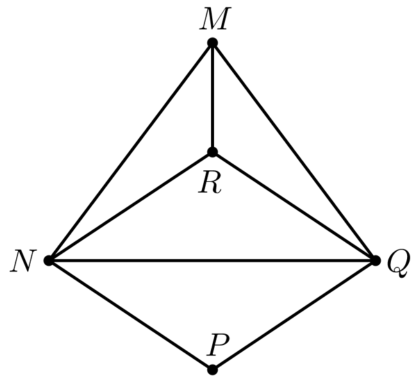
Định lí 3 (Định lí Dirac)

Cho G là một đơn đồ thị liên thông có n đỉnh với $n \geq 3$. Khi đó, nếu mọi đỉnh của đồ thị G đều có bậc lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$ thì đồ thị G có chu trình Hamilton.

Định lí 4 (Định lí Ore)

Cho G là một đơn đồ thị liên thông có n đỉnh với $n \geq 3$. Nếu với mọi cặp đỉnh A, B không kề nhau của G đều có $d(A)+d(B) \geq n$ thì đồ thị G có chu trình Hamilton.



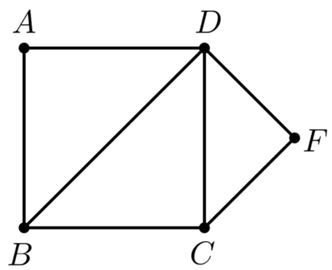


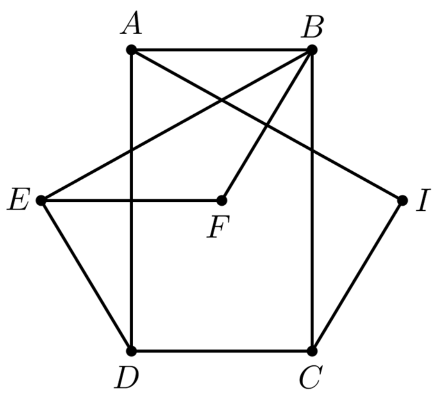
Nhận xét: Nhiều đồ thị tuy không thỏa mãn giả thiết của Định lí Dirac hay Định lí Ore nhưng vẫn có chu trình Hamilton. Trong một số trường hợp đơn giản, ta có thể tìm chu trình (đường đi) Hamilton của đồ thị, hoặc chứng minh rằng đồ thị không có chu trình (đường đi) Hamilton, dựa vào các quy tắc sau đây:

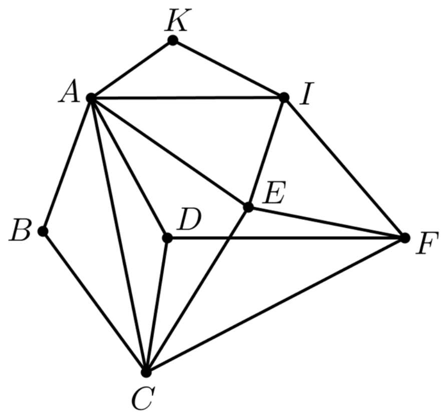
a) Chu trình (đường đi) Hamilton phải đi qua hai cạnh nối với đỉnh bậc 2 (trừ khi đỉnh đó là đỉnh bắt đầu hoặc đỉnh kết thúc của đường đi).

b) Nếu chu trình (đường đi) Hamilton đã qua hai cạnh nối với một đỉnh có bậc lớn hơn 2 thì nó không thể đi qua các cạnh khác nối với đỉnh đó.

c) Đường đi Hamilton phải đi qua cạnh nối với đỉnh bậc 1; các đỉnh bậc 1 phải là đỉnh bắt đầu hoặc đỉnh kết thúc của đường đi Hamilton. Đồ thị có đỉnh bậc 1 thì không có chu trình Hamilton.







3

Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số và đường đi ngắn nhất

Một đồ thị mà mỗi cạnh được gán thêm một số được gọi là một ***đồ thị có trọng số***. Số được gán cho mỗi cạnh được gọi là ***trọng số*** của cạnh đó. Trọng số của cạnh a được kí hiệu là w_a.

Nhận xét: Ta chỉ xét đồ thị có trọng số với trọng số là các số dương. Trọng số của cạnh còn được gọi là ***độ dài*** của cạnh đó, mặc dù trong thực tế trọng số có thể biểu diễn nhiều đại lượng khác nhau (không chỉ là độ dài vật lí). Chẳng hạn, trên đồ thị biểu diễn đường đi giữa những nơi nào đó, trọng số của cạnh có thể biểu diễn độ dài của đoạn đường, hoặc số tiền cần trả, hoặc thời gian cần để đi hết đoạn đường đó.

Tổng trọng số (hay tổng độ dài) của các cạnh tạo thành đường đi gọi là ***độ dài*** của đường đi đó. Độ dài của đường đi m được kí hiệu là l_m.

Trong đồ thị có trọng số, đường đi có độ dài bé nhất trong tất cả các đường đi từ đỉnh A đến đỉnh B gọi là ***đường đi ngắn nhất*** từ A đến B.

Chú ý: Khi xét bài toán tìm đường đi ngắn nhất, ta chỉ xét đồ thị liên thông có trọng số.

Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất

Ta gán cho mỗi đỉnh của đồ thị một số, gọi là ***nhãn*** của đỉnh đó. Nhãn của đỉnh M kí hiệu là n_M.

Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến đỉnh T:

Mở đầu (gọi là Bước 0): Gán nhãn của A bằng 0, các đỉnh khác bằng ∞. Khoanh tròn đỉnh A.

Các bước lặp: Trong mỗi bước lặp thực hiện các thao tác dưới đây:

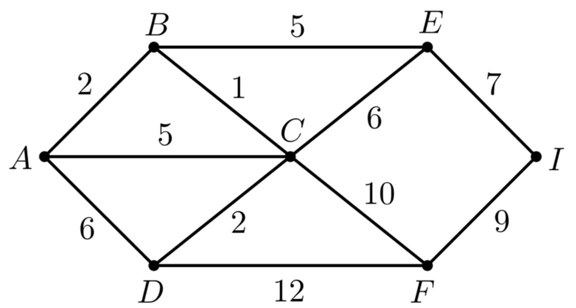
– Gọi U là đỉnh vừa được khoanh tròn ở bước trước. Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, xét lần lượt từng đỉnh V kề với đỉnh U, tính $n_U + w_{UV}$, rồi so sánh số này với nhãn hiện tại n_V của V. Nếu số nhỏ hơn thì đổi nhãn n_V bằng số đó.

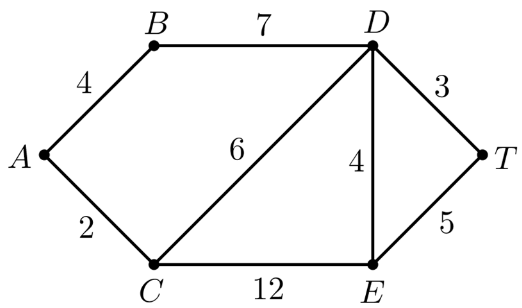
– So sánh nhãn của tất cả các đỉnh chưa khoanh tròn. Đỉnh nào có nhãn nhỏ nhất thì khoanh tròn đỉnh đó (nếu có nhiều đỉnh như vậy thì khoanh một đỉnh tùy ý trong số đó).

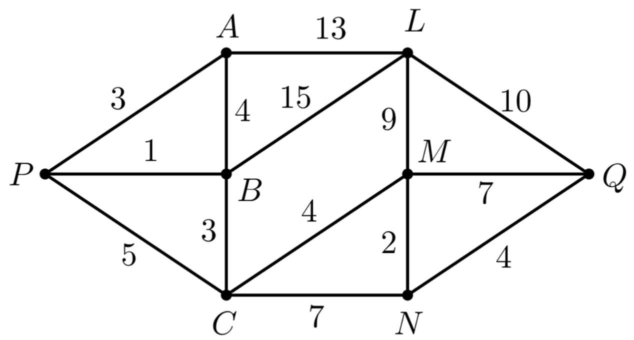
– Nếu đỉnh T chưa được khoanh tròn thì thực hiện bước lặp tiếp theo, trái lại thì kết thúc các bước lặp.

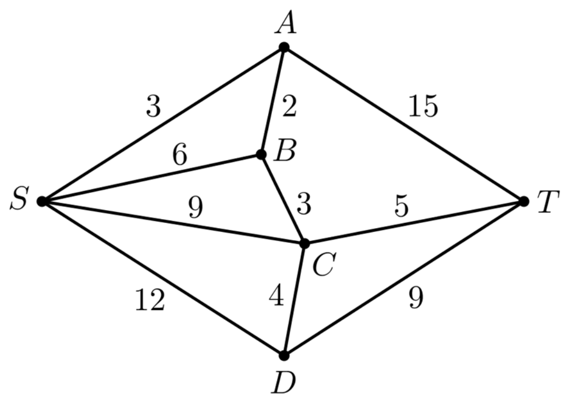
Kết luận: Dò lại các bước lặp để viết được nhãn n_T của T dưới dạng tổng độ dài các cạnh. Từ đó nhận được đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến T cùng với độ dài của nó.

Chú ý: Để hình vẽ dễ nhìn, ta bỏ qua việc ghi nhãn ∞ cho các đỉnh trên hình vẽ.









MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH 12

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1

Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

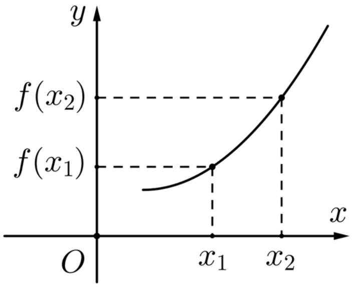
Tính đơn điệu của hàm số

Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

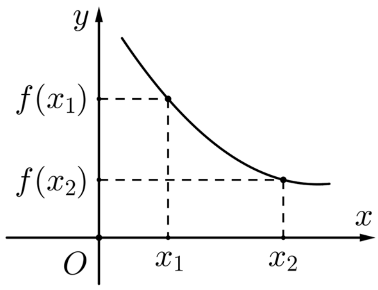
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên K, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1,\, x_2\in K,\, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1,\, x_2\in K,\, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.



Hàm số đồng biến



Hàm số nghịch biến

Tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.

Nếu $f'(x)<0,\ \forall x\in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý:

Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết "Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x)>0,\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

Chú ý:

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)\le 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K.
- Nếu $f'(x)=0,\ \forall x\in K$ thì hàm số không đổi trên K.

Nhận xét:

Nếu hàm số đồng biến trên K thì $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in K$.

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì $f'(x)\le 0,\ \forall x\in K$.

Các bước xét tính đơn điệu của hàm số:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Một số quy tắc xét dấu biểu thức $f'(x)$

• Nếu $f'(x)$ là đa thức thì khoảng ngoài cùng bên phải cùng dấu với a là hệ số cao nhất.

• Qua nghiệm đơn (bội lẻ) đổi dấu, qua nghiệm kép (bội chẵn) không đổi dấu.

CASIO: CALC $X = X_0$ với X_0 là một số tùy ý trong khoảng $(a;b)$ để xác định dấu của $f'(x)$ trong khoảng đó (với $f'(x)$ liên tục và vô nghiệm trên khoảng $(a;b)$).

Cực trị của hàm số

Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

• Nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b) \subset D$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một ***điểm cực đại***, $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực đại*** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là $y_{CĐ}$.

• Nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b) \subset D$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một ***điểm cực tiểu***, $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực tiểu*** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là y_{CT}.

Chú ý:

• Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị*** của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị*** (còn gọi là ***cực trị***) của hàm số.

• Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta cũng nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0.

• Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên D.

• Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ là một ***điểm cực trị của đồ thị*** hàm số $y = f(x)$.

Tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

• Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

• Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

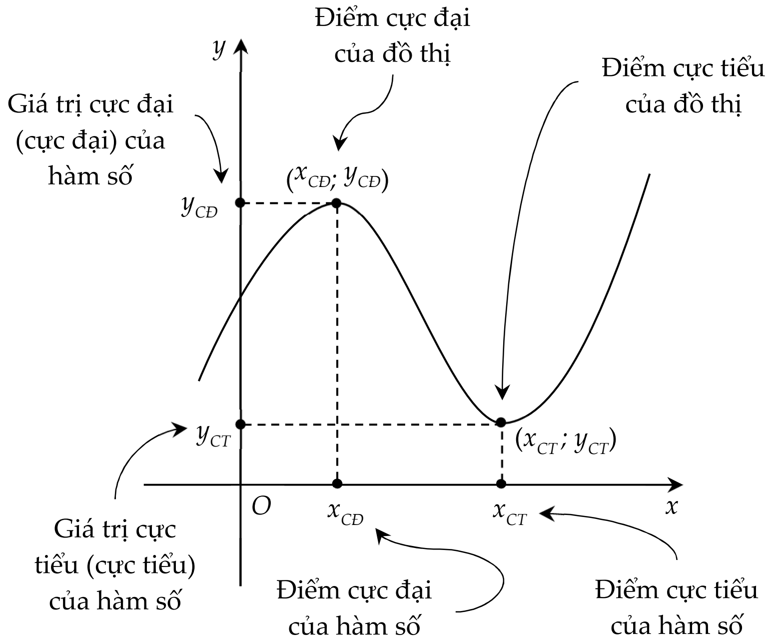
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	

Chú ý:

• Nếu $f'(x_0)=0$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không có cực trị tại x_0.

• Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì $f(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.



Định lí

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(a;b)$ chứa x_0. Khi đó:

• Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

• Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

Chú ý: Chiều đảo của định lý này không chắc đúng. Nhưng đối với hàm số bậc ba, chiều đảo của định lý luôn đúng.

Các bước tìm cực trị của hàm số:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm x thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 4. Từ bảng biến thiên kết luận về cực trị của hàm số.

Dạng toán: Tìm m để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định

Đối với các hàm số sơ cấp $y=f(x)$, nói chung ta có:

• Hàm số đồng biến (tăng) trên $D \Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in D$.

• Hàm số nghịch biến (giảm) trên $D \Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in D$.

Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \ne 0)$:

Hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} > 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$.

Hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$.

Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \ne 0,\ ad - bc \ne 0)$:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$. Đạo hàm $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Hàm số đồng biến (tăng) trên từng khoảng của $D \Leftrightarrow y' > 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc > 0$.

Hàm số nghịch biến (giảm) trên từng khoảng của $D \Leftrightarrow y' < 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc < 0$.

Hàm số phân thức bậc hai trên bậc một $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a \ne 0,\ m \ne 0)$:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{n}{m} \right\}$. Đạo hàm $y' = \dfrac{am.x^2 + 2an.x + bn - mc}{(mx+n)^2}$.

Đặt $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

Hàm số đồng biến (tăng) trên từng khoảng của D

$\Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in D$

$\Leftrightarrow a.m > 0$ và phương trình $am.x^2 + 2an.x + bn - mc = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} a.m > 0 \\ \Delta_{g(x)} \le 0 \end{cases}$.

Hàm số nghịch biến (giảm) trên từng khoảng của D

$\Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in D$

$\Leftrightarrow a.m < 0$ và phương trình $am.x^2 + 2an.x + bn - mc = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} a.m < 0 \\ \Delta_{g(x)} \le 0 \end{cases}$.

Chú ý:

• Công thức trên áp dụng cho hàm số có điều kiện là $a \ne 0,\ m \ne 0$. Trong trường hợp a và m chưa chắc khác 0 thì ta phải xét $a = 0,\ m = 0$ trước.

• Nếu đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu (tức là $-\dfrac{n}{m}$ **không là nghiệm** của tử) thì trong các công thức trên, $\Delta_{g(x)}$ có thể không có dấu bằng "$=$".

Dạng toán: Tìm tham số m để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên tập K

Phương pháp tổng quát:

Đối với các hàm số sơ cấp $y=f\left(x\right)$, nói chung ta có:

- Hàm số đồng biến (tăng) trên $K \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in K$.
- Hàm số nghịch biến (giảm) trên $K \Leftrightarrow y' \leq 0,\ \forall x \in K$.

Phương pháp hàm số (phương pháp cô lập tham số m): dựa vào việc tìm GTLN, GTNN của một hàm số $g\left(x\right)$ trên K để tìm điều kiện cho m: Chỉ áp dụng cho các bài cô lập được tham số m trong điều kiện $y' \geq 0,\ \forall x \in K$ hoặc $y' \leq 0,\ \forall x \in K$.

Bước 1: Tính đạo hàm $y' = f'\left(x\right)$.

Bước 2: Cô lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g\left(x\right)$.

Bước 3: Lập bảng biến thiên của $g\left(x\right)$.

Bước 4: Kết luận: Theo quy tắc "Lớn hơn hoặc bằng số lớn – Nhỏ hơn hoặc bằng số nhỏ".

Tìm m để hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a\neq 0\right)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên tập K

Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a\neq 0\right)$. Ta có $y' = f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$.

Trường hợp 1: Cô lập được tham số m: Sử dụng phương pháp này.
Trường hợp 2: Không cô lập được tham số m:
TH1: $\Delta \leq 0$: Khi đó y' cùng dấu với a. Tức là:

Nếu $a>0$ thì $f'\left(x\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên K.

Nếu $a<0$ thì $f'\left(x\right)\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số nghịch biến trên K.

TH2: $\Delta>0$: Khi đó $y'=f'\left(x\right)$ có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ và đổi dấu khi qua 2 nghiệm.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Dựa vào đề bài, so sánh $x_1,\ x_2$ với số $a\in\mathbb{R}$ để tìm ra m.

Kiến thức cần nhớ:

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ và số $a\in\mathbb{R}$. Khi đó:

- $x_2>x_1>a \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x_1-a\right).\left(x_2-a\right)>0\\ x_1+x_2>2a\end{cases}$
- $x_1<x_2<a \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x_1-a\right).\left(x_2-a\right)>0\\ x_1+x_2<2a\end{cases}$
- $x_1<a<x_2 \Leftrightarrow \left(x_1-a\right).\left(x_2-a\right)<0$

Tìm m để hàm số phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$ đồng biến, nghịch biến trên tập K

Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in K \Leftrightarrow \begin{cases}ad-bc>0\\ -\dfrac{d}{c}\notin K\end{cases}$;

Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in K \Leftrightarrow \begin{cases}ad-bc<0\\ -\dfrac{d}{c}\notin K\end{cases}$.

Tìm m để hàm số phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\ m\neq 0)$ đồng biến, nghịch biến trên tập K

Ta có đạo hàm $y'=\dfrac{am.x^2+2an.x+bn-mc}{(mx+n)^2}$. Đặt $g(x)=am.x^2+2an.x+bn-mc$.

Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow \begin{cases} y'\geq 0,\ \forall x\in K \\ -\dfrac{n}{m}\notin K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} am.x^2+2an.x+bn-mc\geq 0,\ \forall x\in K \\ -\dfrac{n}{m}\notin K \end{cases}$;

Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \begin{cases} y'\leq 0,\ \forall x\in K \\ -\dfrac{n}{m}\notin K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} am.x^2+2an.x+bn-mc\leq 0,\ \forall x\in K \\ -\dfrac{n}{m}\notin K \end{cases}$.

Trường hợp 1: Cô lập được tham số m: Sử dụng phương pháp này.

Trường hợp 2: Không cô lập được tham số m:

TH1: Hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên từng khoảng xác định (khi đó nó sẽ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập K).

TH2: Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1,\ x_2$. Lập bảng biến thiên, so sánh $x_1,\ x_2$ với số $a\in\mathbb{R}$ để tìm m.

Dạng toán: Tìm m để hàm số bậc ba đơn điệu trên khoảng (đoạn) có độ dài đúng bằng số k

Tìm tập xác định D. Tính đạo hàm y'. Tính Δ và xét 2 trường hợp $\Delta\leq 0$ và $\Delta>0$.

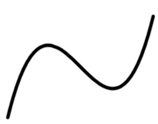
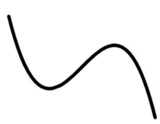
Chú ý: $|x_1-x_2|=k \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1.x_2=k^2$, sử dụng định lý Vi-ét đưa về phương trình theo m.

Dạng toán: Cực trị của hàm số bậc ba có tham số

Cực trị của hàm số bậc ba $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$

Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$. Ta có $\Delta=4b^2-12ac$ $(\Delta'=b^2-3ac)$.

Hàm số bậc ba hoặc có 2 cực trị hoặc không có cực trị.

<table>
<tr><th colspan="2">Hàm số có cực trị</th><th colspan="4">Hàm số không có cực trị</th></tr>
<tr><td colspan="2">$y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt</td><td colspan="4">$y'=0$ có nghiệp kép hoặc vô nghiệm</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$</td><td colspan="4">$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{cases} a\neq 0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$</td><td colspan="4">$\begin{cases} a\neq 0 \\ b^2-3ac\leq 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hàm số có 2 cực trị (1 cực đại và 1 cực tiểu)</td><td colspan="4">Hàm số luôn đồng biến (nếu $a>0$) (hoặc luôn nghịch biến (nếu $a<0$)) trên $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} a<0 \\ \Delta>0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} a>0 \\ \Delta=0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} a<0 \\ \Delta=0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Chú ý: Nếu hệ số a có chứa tham số m chưa chắc khác 0 thì ta cần xét thêm trường hợp $a=0$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$

Khi hàm số có 2 điểm cực trị, chia y cho y' ta được dư là $ax+b$. Khi đó $\Delta: y=ax+b$ là đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C).

Hoặc nhớ công thức sau: $\Delta: y=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$.

Điều kiện để hàm số đạt cực trị tại một điểm

Đối với hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$, ta có:

- $\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- $\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)<0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0$ là điểm cực đại của hàm số.

Dạng toán (đọc thêm): Cực trị của hàm số trùng phương có tham số

Cực trị hàm số trùng phương $(C): f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

Ta có đạo hàm: $y'=4ax^3+2bx$. Khi đó $y'=4ax^3+2bx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-\frac{b}{2a} \end{array}\right.$.

Hàm số trùng phương có 1 điểm cực trị hoặc có 3 điểm cực trị.

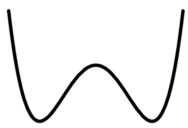
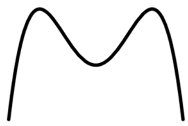
Hàm số có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 1 nghiệm

$\Leftrightarrow x^2=-\frac{b}{2a}$ vô nghiệm hoặc có nghiệm bằng 0

$\Leftrightarrow -\frac{b}{2a}\le 0 \Leftrightarrow ab\ge 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -\frac{b}{2a}>0 \Leftrightarrow ab<0$.

Hàm số có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab\ge 0$		**Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab<0$**	
			
Hàm số có đúng 1 điểm cực trị và điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b\ge 0 \end{cases}$	Hàm số có đúng 1 điểm cực trị và điểm cực trị đó là điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b\le 0 \end{cases}$	Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$	Hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$

Một số điều kiện liên quan các điểm cực trị của đồ thị $(C): f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

Giả sử đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 điểm cực trị $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành tam giác ABC với $AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}}$, $BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ thỏa mãn dữ kiện:

Dữ kiện	Công thức thỏa $ab<0$
1. Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a+b^3=0$
2. Tam giác ABC đều	$24a+b^3=0$
3. Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=\alpha$	$8a+b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=0$
4. Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC}=S_0$	$32a^3\left(S_0\right)^2+b^5=0$
5. Tam giác ABC có diện tích $\max S=S_0$	$S_0=\sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}$
6. Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC}=r_0$	$r_0=\dfrac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{8a}}\right)}$
7. Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC=m_0$	$am_0^2+2b=0$
8. Tam giác ABC có độ dài $AB=AC=n_0$	$16a^2n_0^2-b^4+8ab=0$
9. Tam giác ABC với 2 điểm cực trị $B,C\in Ox$	$b^2-4ac=0$
10. Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b\left(8a+b^3\right)>0$
11. Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2-6ac=0$
12. Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3+8a-4ac=0$
13. Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC}=R$	$R=\dfrac{b^3-8a}{8\lvert a\rvert b}$
14. Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2-2ac=0$
15. Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$
16. Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3-8a-8abc=0$
17. Tam giác ABC có cạnh $BC=kAB=kAC$	$b^3.k^2-8a\left(k^2-4\right)=0$
18. Trục hoành chia tam giác ABC thành 2 phần có diện tích bằng nhau	$b^2=4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
19. Ba điểm cực trị A,B,C cách đều trục hoành	$b^2-8ac=0$

Dạng toán: Cực trị của hàm số phân thức bậc 2 trên bậc 1 có tham số

Cực trị của hàm số phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ (điều kiện $a\neq 0,\ m\neq 0$)

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{am.x^2+2an.x+bn-mc}{\left(mx+n\right)^2}$.

Đặt $g\left(x\right)=am.x^2+2an.x+bn-mc$.

Hàm số này hoặc không có cực trị hoặc có 2 cực trị (1 cực đại, 1 cực tiểu).

- Hàm số **không có cực trị**

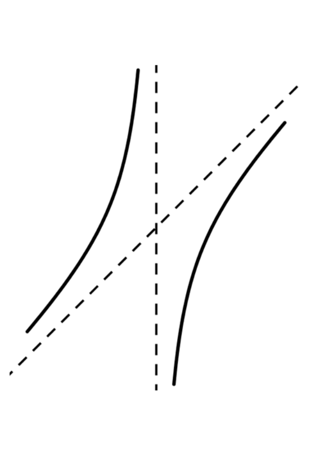
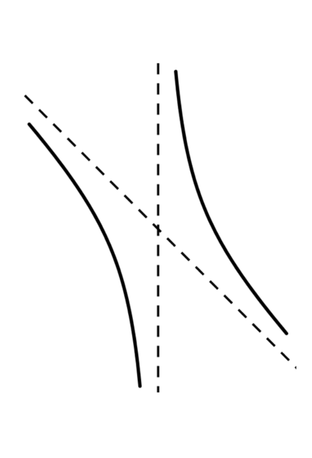
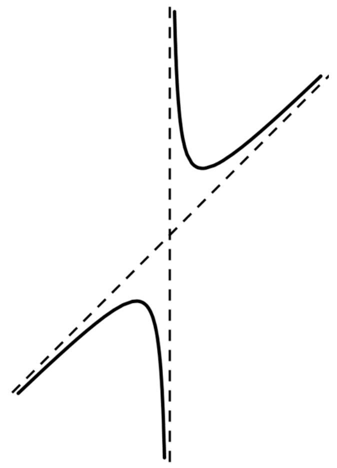
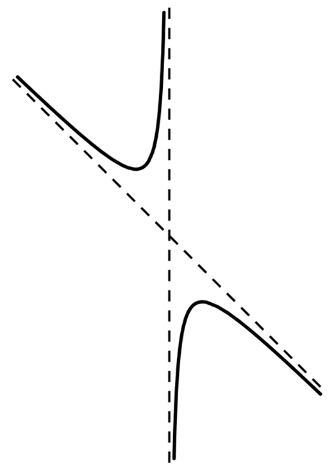
$\Leftrightarrow g(x)=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} am \neq 0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định (khi $am>0$) hoặc nghịch biến trên mỗi khoảng xác định (khi $am<0$).

- Hàm số **có 2 cực trị**

$\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{n}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} am \neq 0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \\ g\left(-\frac{n}{m}\right) \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} am \neq 0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \end{cases}$.

Hàm số không có cực trị		**Hàm số có cực trị (2 cực trị: 1 cực đại, 1 cực tiểu)**	
$\begin{cases} am>0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} am<0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} am>0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} am<0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \end{cases}$
			
$g(x)=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm		$g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt	

Chú ý: Nếu hệ số a và m chưa chắc khác 0 thì ta cần xét thêm các trường hợp $a=0$ và $m=0$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức bậc 2 trên bậc 1

Cho hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$. Khi hàm số có 2 cực trị thì phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đó là $\Delta: y=\frac{2ax+b}{m}$ (đạo hàm tử, đạo hàm mẫu).

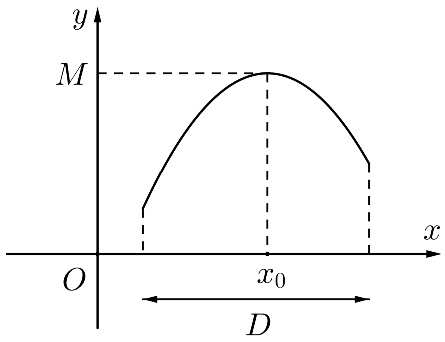
2

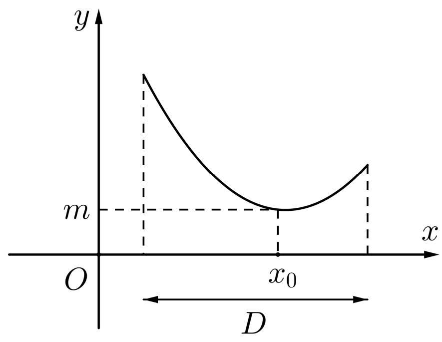
Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

Số M được gọi là ***giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số*** $y=f(x)$ trên D, nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0)=M$. Kí hiệu: $M=\max\limits_{D} f(x)$.

Số m được gọi là ***giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số*** $y=f(x)$ trên D, nếu $f(x)\geq m$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$. Kí hiệu: $m=\min\limits_{D} f(x)$.





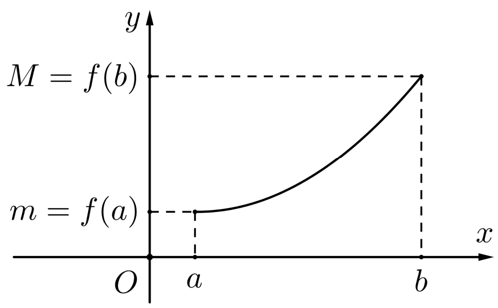
Định lí

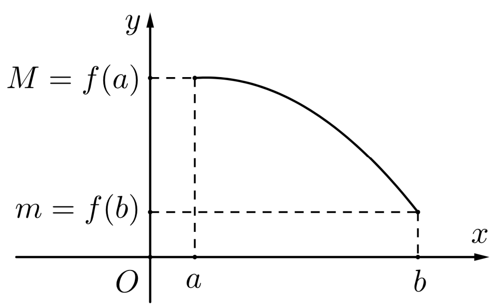
Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Hơn nữa:

a) Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$ và $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$.

b) Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$ và $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$.





Dạng toán: Tìm GTLN, GTNN của hàm số

Phương pháp chung là lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Chú ý: Nếu tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.

Bước 2. Tìm các điểm $x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n$ trên khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc không tồn tại.

Bước 3. Tính $f(a);f(x_1);f(x_2);\ ...;\ f(x_n);f(b)$.

Bước 4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các giá trị tìm được ở Bước 3. Khi đó:

$$M=\max\limits_{[a;b]} f(x),\ \ m=\min\limits_{[a;b]} f(x).$$

Dạng toán: Vận dụng tìm GTLN, GTNN của hàm số giải quyết một số bài toán thực tiễn

Dựa vào giả thiết bài toán, đặt biến x phù hợp, lập hàm số biểu diễn giá trị cần tìm GTLN, GTNN để giải quyết.

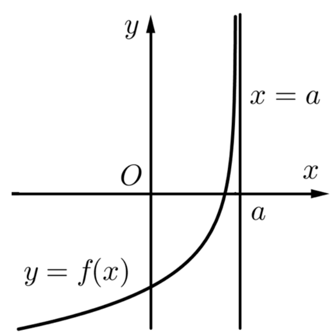
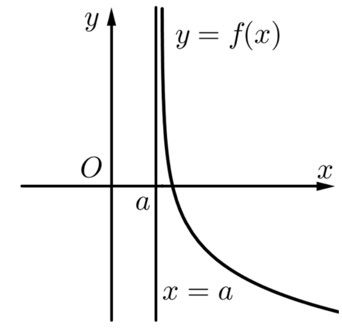
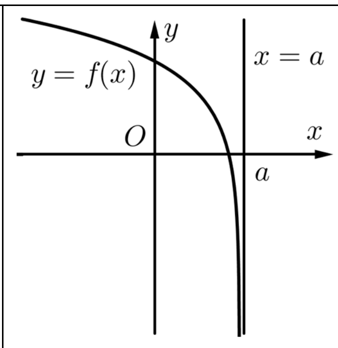
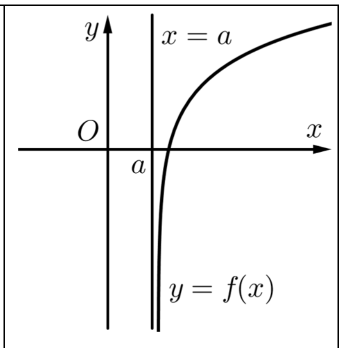
3

Đường tiệm cận

Đường tiệm cận đứng

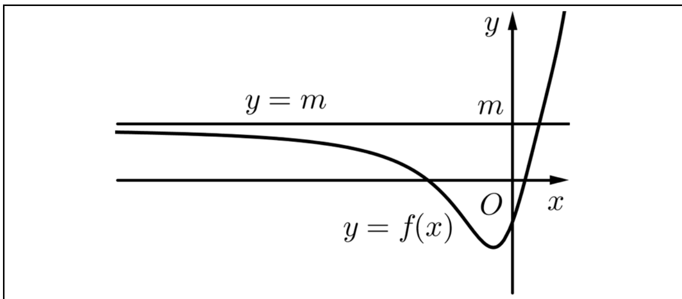
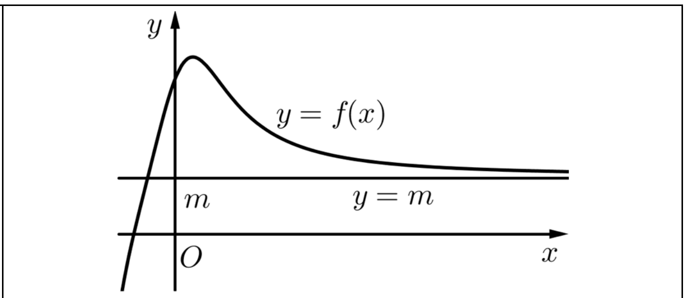
Đường thẳng $x=a$ được gọi là một ***đường tiệm cận đứng*** (hay ***tiệm cận đứng***) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x\to a^-} f\left(x\right)=+\infty,\ \lim_{x\to a^+} f\left(x\right)=+\infty,\ \lim_{x\to a^-} f\left(x\right)=-\infty,\ \lim_{x\to a^+} f\left(x\right)=-\infty.$$

			
$\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=-\infty$

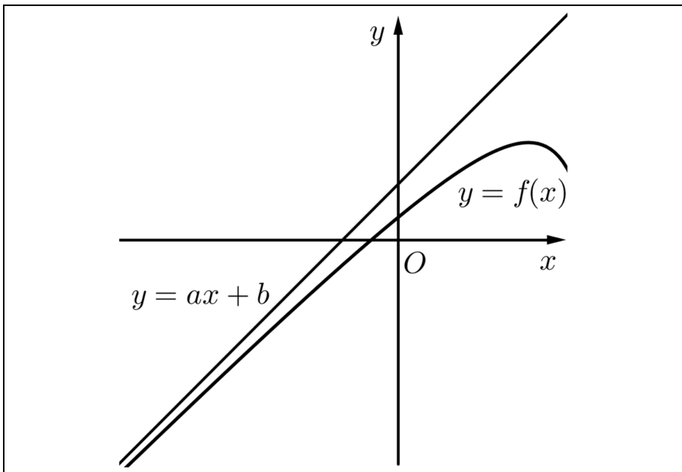
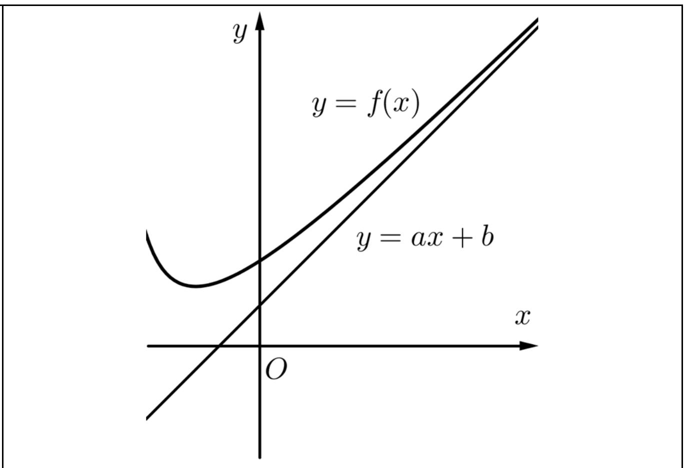
Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y=m$ được gọi là một ***đường tiệm cận ngang*** (hay ***tiệm cận ngang***) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=m$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=m$.

	
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=m$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=m$

Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y=ax+b$, $a\neq 0$, được gọi là ***đường tiệm cận xiên*** (hay ***tiệm cận xiên***) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$.

	
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0$

Nhận xét:

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y=ax+b$ theo công thức như sau:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] \text{ hoặc } a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right].$$

b) Khi $a=0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=b$.

Dạng toán: Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số

Tìm tiệm cận ngang

Ta tính đủ hai giới hạn sau:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=m \Rightarrow y=m$ là tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=n \Rightarrow y=n$ là tiệm cận ngang.

CASIO: Nhập $f(X)$ và CALC với $X=99999$, $X=-99999$, kết quả ra hằng số.

Chú ý:

Cho đồ thị hàm phân thức $(C): y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các hàm đa thức.

- Bậc tử < bậc mẫu: (C) có tiệm cận ngang $y=0$.
- Bậc tử = bậc mẫu: (C) có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{b}$ với a, b lần lượt là hệ số của số hạng có bậc cao nhất ở tử và ở mẫu.
- Bậc tử > bậc mẫu: (C) không có tiệm cận ngang.

Tìm tiệm cận đứng

Ta tìm các điểm mà tại đó hàm số không xác định (thường là nghiệm của mẫu $x=a$). Sau đó tính hai giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=a$ là tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=a$ là tiệm cận đứng.

Chú ý:

- Chỉ cần 1 trong 4 điều kiện trên thỏa mãn là đủ.
- Riêng với hàm phân thức thì $x=a$ thường là nghiệm của mẫu nhưng không nghiệm của tử.

CASIO: Nhập $f(X)$ và CALC với $X=a+0{,}00001$ và $X=a-0{,}00001$ với a thường là nghiệm của mẫu, kết quả ra số dương lớn $(+\infty)$ hoặc số âm lớn $(-\infty)$.

Tìm tiệm cận xiên

Ta tính cả 2 cặp giới hạn sau:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] \text{ và } a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right].$$

Chú ý: $a, b\in\mathbb{R}$ và $a\neq 0$.

Khi đó (các) đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

CASIO: Nhập $\dfrac{f(X)}{X}$ và CALC với $X=99999$ để tìm a, nhập $f(X)-a.X$ và CALC với $X=99999$ để tìm b. Lặp lại bước trên với $X=-99999$.

Chú ý:

Đồ thị hàm phân thức có tiệm cận xiên khi và chỉ khi bậc của đa thức tử lớn hơn bậc của đa thức mẫu 1 bậc. Khi đó để tìm tiệm cận xiên ta chỉ cần chia tử cho mẫu được đa thức thương $ax+b$. Suy ra đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

4

Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản

Sơ đồ khảo sát hàm số

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

• Tìm đạo hàm y'. Xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.

• Tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

• Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số

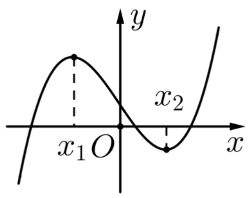
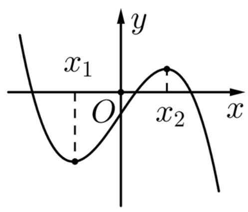
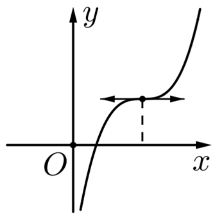
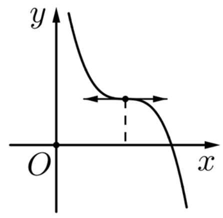
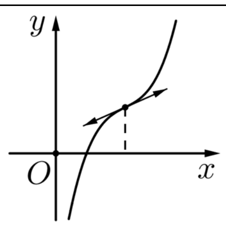
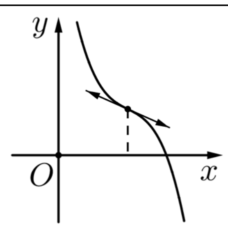
• Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm),…

• Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

• Vẽ đồ thị hàm số.

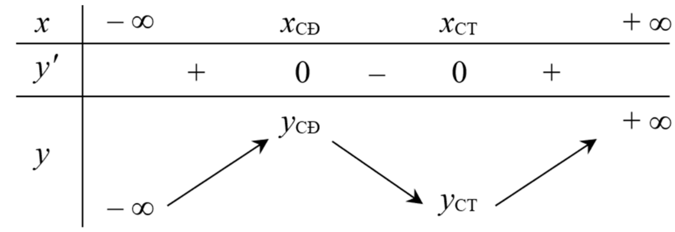
Chú ý: Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

Hàm số bậc ba $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

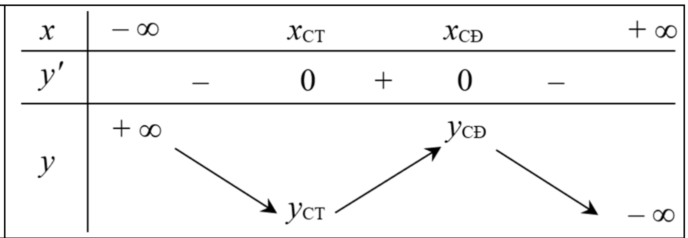
	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt	 $\Delta_{y'}>0 \Leftrightarrow b^2-3ac>0$	 $\Delta_{y'}>0 \Leftrightarrow b^2-3ac>0$
Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép	 $\Delta_{y'}=0 \Leftrightarrow b^2-3ac=0$	 $\Delta_{y'}=0 \Leftrightarrow b^2-3ac=0$
Phương trình $y'=0$ vô nghiệm	 $\Delta_{y'}<0 \Leftrightarrow b^2-3ac<0$	 $\Delta_{y'}<0 \Leftrightarrow b^2-3ac<0$

Bảng biến thiên

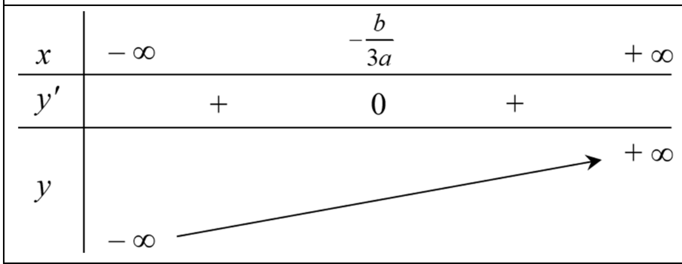
$a>0$	$a<0$



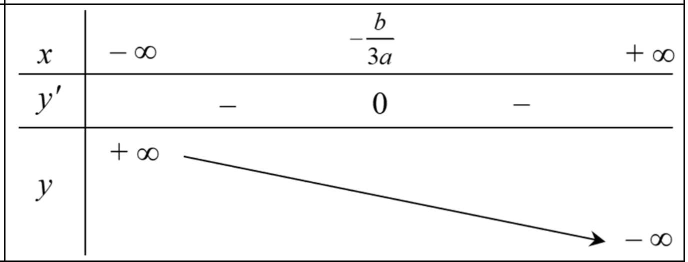
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



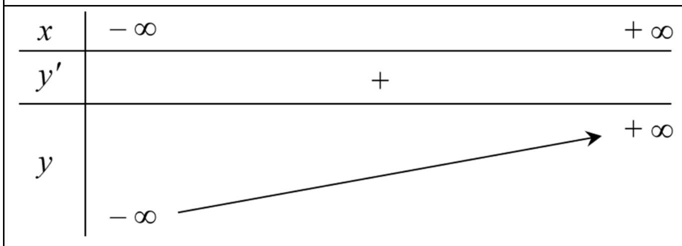
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



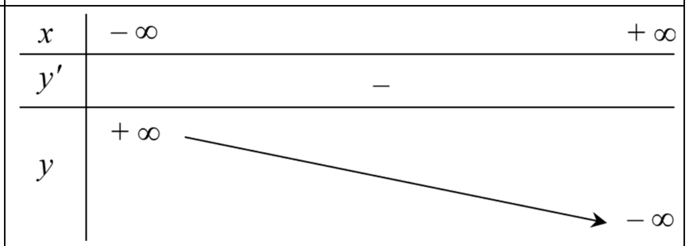
$y' = 0$ có nghiệm kép



$y' = 0$ có nghiệm kép



$y' = 0$ vô nghiệm



$y' = 0$ vô nghiệm

Chú ý:

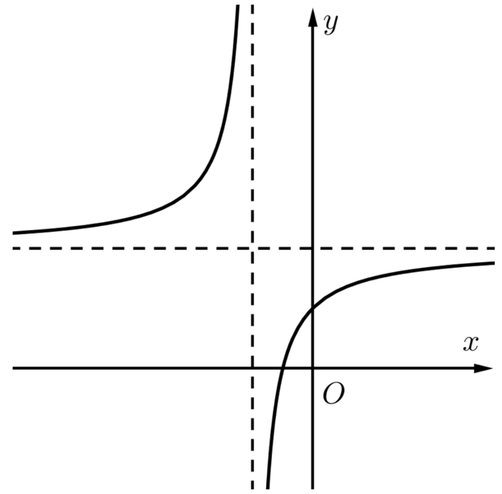
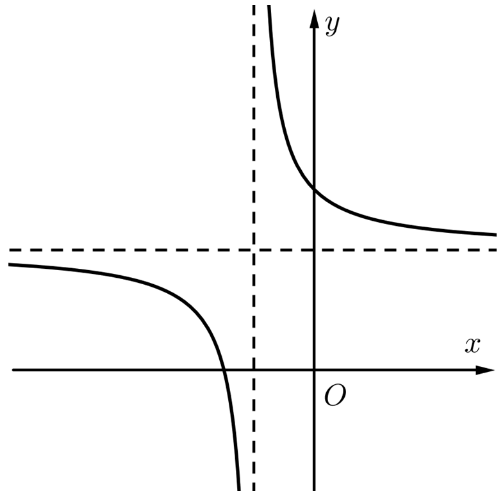
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ và $y'' = 6ax + 2b$. Khi đó $y'' = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

Đồ thị của hàm số bậc ba luôn nhận điểm $I\left(x_0; y_0\right)$ làm tâm đối xứng, trong đó $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y\left(x_0\right)$. Điểm $I\left(x_0; y_0\right)$ được gọi là ***điểm uốn*** của đồ thị này, nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị (nếu có).

Nhận dạng đồ thị hàm số bậc ba $\left(C\right): y = ax^3 + bx^2 + cx + d \; \left(a \neq 0\right)$

• Nhận biết dấu hệ số a: - Nét cuối đồ thị hướng lên: $a > 0$. - Nét cuối đồ thị hướng xuống: $a < 0$.	• Nhận biết dấu hệ số c: - Hai điểm cực trị nằm về 2 phía so với Oy: $ac < 0$. - Hai điểm cực trị nằm về 1 phía so với Oy: $ac > 0$. - Một điểm cực trị thuộc trục Oy: $c = 0$. - Không có cực trị: $c = 0$ hoặc $ac > 0$.
• Nhận biết dấu hệ số d: Xét giao điểm của $\left(C\right)$ và trục Oy: - Nằm phía trên Ox: $d > 0$. - Nằm phía dưới Ox: $d < 0$. - Trùng với gốc tọa độ O: $d = 0$.	• Nhận biết dấu hệ số b: - Điểm uốn bên phải Oy: $ab < 0$. - Điểm uốn bên trái Oy: $ab > 0$. - Điểm uốn thuộc trục Oy: $b = 0$.

Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \; \left(c \neq 0,\, ad - bc \neq 0\right)$

$ad-bc>0$	$ad-bc<0$
	

$ad-bc>0$:

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$+$	$\parallel$	$+$	
y	$\frac{a}{c}$	$\nearrow$ $+\infty$	$\parallel$	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{a}{c}$

$ad-bc<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-$	$\parallel$	$-$	
y	$\frac{a}{c}$	$\searrow$ $-\infty$	$\parallel$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{a}{c}$

• Tiệm cận đứng $x=-\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}$.

• Đồ thị nhận giao điểm 2 đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.

• Nhận 2 đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

• Hàm số không có cực trị.

Nhận dạng đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$

• Nhận biết tính đơn điệu:
- Hai nhánh đi lên: $ad-bc>0$.
- Hai nhánh đi xuống: $ad-bc<0$.

• Tiệm cận đứng $x=-\frac{d}{c}$:
- Nằm bên trái Oy: $cd>0$.
- Nằm bên phải Oy: $cd<0$.
- Trùng với Oy: $d=0$.

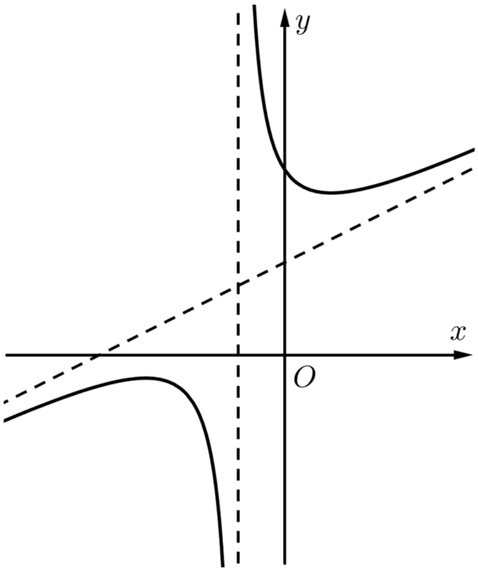
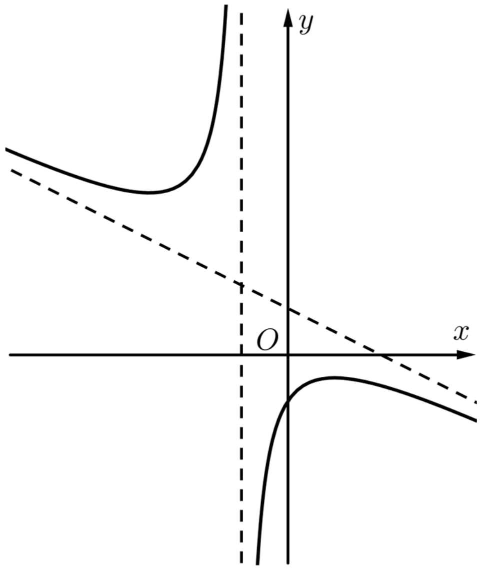
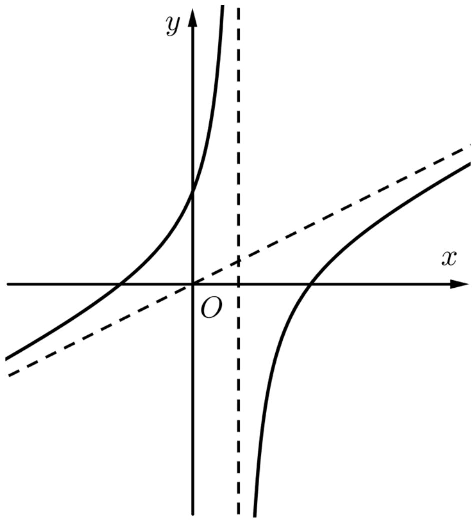
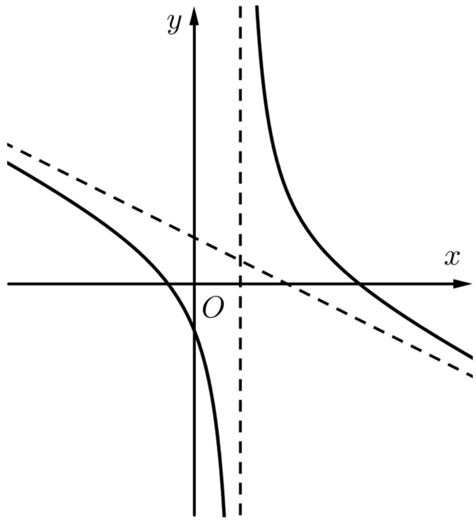
• Tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}$:
- Nằm phía trên Ox: $ac>0$.
- Nằm phía dưới Ox: $ac<0$.
- Trùng với Ox: $a=0$.

• Giao điểm với trục hoành Ox: $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$:
- Nằm bên trái Oy: $ab>0$.
- Nằm bên phải Oy: $ab<0$.
- Thuộc trục Oy: $b=0$.

• Giao điểm với trục tung Oy: $B\left(0;\frac{b}{d}\right)$:
- Nằm phía trên Ox: $bd>0$.
- Nằm phía dưới Ox: $bd<0$.
- Thuộc trục Ox: $b=0$.

Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a\neq 0$, $m\neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu, tức là $-\dfrac{n}{m}$ không là nghiệm của tử)

Dấu của y' là dấu của $g(x)=am.x^2+2an.x+bn-mc$.

	$am>0$	$am<0$
Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt	 $\Delta_{g(x)}>0$	 $\Delta_{g(x)}>0$
Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm	 $\Delta_{g(x)}\le 0$	 $\Delta_{g(x)}\le 0$

Bảng biến thiên

$am>0$

x	$-\infty$		$x_{CĐ}$		$-\dfrac{n}{m}$		x_{CT}		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Hàm số có 2 cực trị

$am<0$

x	$-\infty$		x_{CT}		$-\dfrac{n}{m}$		$x_{CĐ}$		$+\infty$
y'		−	0	+	||	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	$-\infty$

Hàm số có 2 cực trị

x	$-\infty$	$-\dfrac{n}{m}$	$+\infty$	x	$-\infty$	$-\dfrac{n}{m}$	$+\infty$
y'	$+$	$\Vert$	$+$	y'	$-$	$\Vert$	$-$
y	$-\infty \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow +\infty$	y	$+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow -\infty$
Hàm số không có cực trị				Hàm số không có cực trị			

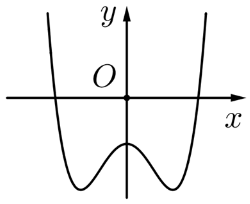
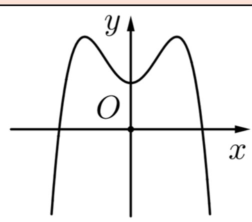
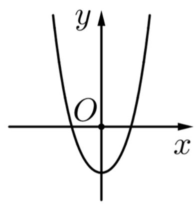
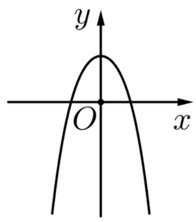
Chú ý: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a\neq 0,\ m\neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

a) Có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{n}{m}$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=\dfrac{a}{m}x-\dfrac{an-bm}{m^2}$.

b) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng là tiệm cận xiên làm tâm đối xứng, tâm đối xứng này cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị (nếu có).

c) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

(ĐỌC THÊM) Hàm số trùng phương $(C): y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt	 $ab<0\ (a>0,\ b<0)$	 $ab<0\ (a<0,\ b>0)$
Phương trình $y'=0$ có 1 nghiệm	 $ab\geq 0\ (a>0,\ b\geq 0)$	 $ab\geq 0\ (a<0,\ b\leq 0)$

• Đồ thị hàm số trùng phương nhận Oy làm trục đối xứng.

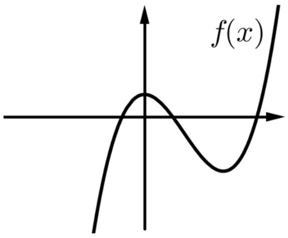
Nhận dạng đồ thị hàm số trùng phương $(C): y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

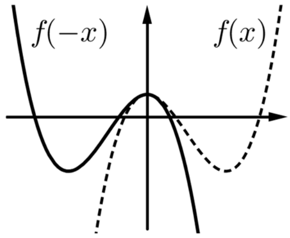
• Nhận biết dấu hệ số a: - Nét cuối đồ thị hướng lên: $a>0$. - Nét cuối đồ thị hướng xuống: $a<0$.	• Nhận biết dấu hệ số b: - Hàm số có 1 điểm cực trị: $ab\geq 0$. - Hàm số có 3 điểm cực trị: $ab<0$.
• Nhận biết dấu hệ số c: Xét giao điểm của (C) và trục Oy: - Nằm phía trên Ox: $c>0$. - Nằm phía dưới Ox: $c<0$. - Trùng với gốc tọa độ O: $c=0$.	

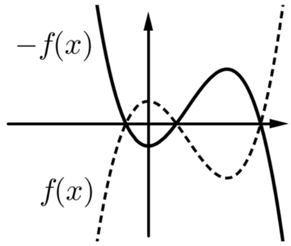
5

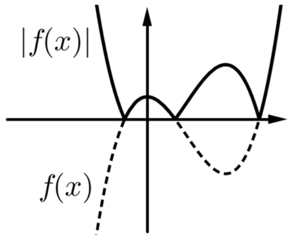
Phép biến đổi đồ thị

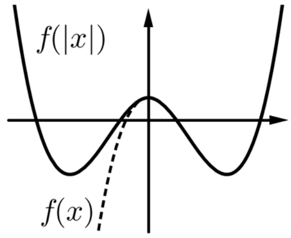
Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Khi đó ta có một số phép biến đổi đồ thị thường gặp như sau:

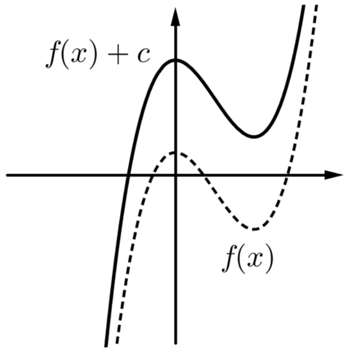
<table>
<tr>
<td>

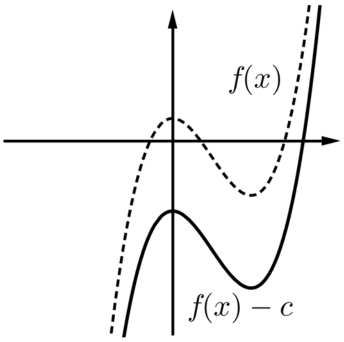
$\left(C\right): y=f\left(x\right)$</td>
<td>

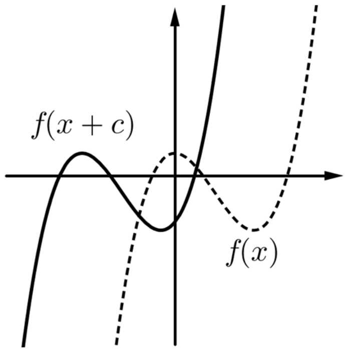
$\left(C_1\right): y=f\left(-x\right)$
Lấy đối xứng $\left(C\right)$ qua trục Oy.</td>
<td>

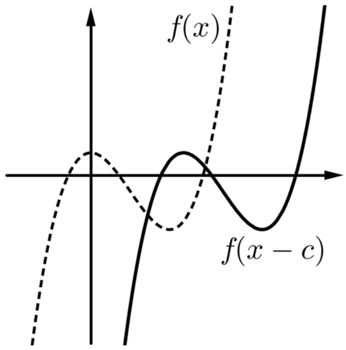
$\left(C_2\right): y=-f\left(x\right)$
Lấy đối xứng $\left(C\right)$ qua trục Ox.</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\left(C_3\right): y=\left|f\left(x\right)\right|$
- Giữ $\left(C\right)$ nằm trên Ox.
- Lấy đối xứng $\left(C\right)$ nằm dưới Ox qua trục Ox và bỏ phần $\left(C\right)$ nằm dưới Ox đó.</td>
<td>

$\left(C_4\right): y=f\left(\left|x\right|\right)$
- Giữ $\left(C\right)$ bên phải Oy và bỏ phần $\left(C\right)$ bên trái Oy.
- Lấy đối xứng $\left(C\right)$ bên phải Oy qua trục Oy.</td>
<td>

$\left(C_5\right): y=f\left(x\right)+c\ \left(c>0\right)$
Tịnh tiến $\left(C\right)$ theo phương Oy lên trên c đơn vị.</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\left(C_6\right): y=f\left(x\right)-c\ \left(c>0\right)$
Tịnh tiến $\left(C\right)$ theo phương Oy xuống dưới c đơn vị.</td>
<td>

$\left(C_7\right): y=f\left(x+c\right)\ \left(c>0\right)$
Tịnh tiến $\left(C\right)$ theo phương Ox qua trái c đơn vị.</td>
<td>

$\left(C_8\right): y=f\left(x-c\right)\ \left(c>0\right)$
Tịnh tiến $\left(C\right)$ theo phương Ox qua phải c đơn vị.</td>
</tr>
</table>

Sự tương giao của hai đồ thị

Xét 2 đồ thị $\left(C\right): y=f\left(x\right)$ và $\left(C'\right): y=g\left(x\right)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ là: $f\left(x\right)=g\left(x\right)\quad\left(*\right)$.

Khi đó, số điểm chung giữa 2 đồ thị $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ đúng bằng số nghiệm của phương trình $\left(*\right)$.

Tiếp tuyến đi qua một điểm

Ngoài cách đã học ở lớp 11, để lập phương trình tiếp tuyến d của (C) biết d đi qua $A(x_A;y_A)$, ta thực hiện:

Bước 1. Phương trình đường thẳng d đi qua $A(x_A;y_A)$ và có hệ số góc k có dạng:

$$d: y=k(x-x_A)+y_A \quad (*).$$

Bước 2. d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases}$.

Bước 3. Giải hệ này tìm x, suy ra k thay vào $(*)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý:

✓ Để vẽ đồ thị $y=\left|f(|x|)\right|$:

① Vẽ đồ thị $y=f(|x|)$ ② Vẽ đồ thị $y=|f(x)|$.

✓ Để vẽ đồ thị $y=|f(x)|\pm c$:

① Vẽ đồ thị $y=|f(x)|$ ② Tịnh tiến đồ thị lên trên hoặc xuống dưới c đơn vị.

✓ Để vẽ đồ thị $y=|f(x\pm c)|$:

① Tịnh tiến đồ thị qua phải hoặc qua trái c đơn vị ② Vẽ như cách vẽ đồ thị $y=|f(x)|$.

✓ Để vẽ đồ thị $y=f(|x|\pm c)$:

① Tịnh tiến đồ thị qua phải hoặc qua trái c đơn vị ② Vẽ như cách vẽ đồ thị $y=f(|x|)$.

✓ Để vẽ đồ thị $y=f(|x\pm c|)$:

① Vẽ đồ thị $y=f(|x|)$ ② Tịnh tiến đồ thị qua phải hoặc qua trái c đơn vị.

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

1

Nguyên hàm

Khái niệm nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là ***nguyên hàm*** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K;
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi x thuộc K.

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là một hằng số. Ta gọi $F(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K, kí hiệu $\int f(x)dx$ và viết

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)dx$ gọi là ***vi phân*** của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$.

Vậy $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$.

Chú ý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Tính chất

- $\int f'(x)dx = f(x)+C$ và $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$, k là hằng số khác 0
- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Bảng các nguyên hàm cơ bản

	Nguyên hàm	Nguyên hàm mở rộng (đọc thêm)
1	$\int 0.dx = C$	Nếu $\int f(x)dx = F(x)+C$ thì $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$
2	$\int dx = x+C$ $\int k.dx = k.x+C$	
3	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}+C$	$\int \frac{1}{2\sqrt{ax+b}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax+b}+C$
4	$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$	$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b}+C$
5	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ với $n\neq -1$	$\int (ax+b)^n .dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$
6	$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a}.\frac{-1}{ax+b}+C$
7	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert+C$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$
8	$\int M^x dx = \frac{M^x}{\ln M}+C$	$\int M^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}.\frac{M^{ax+b}}{\ln M}+C$
9	$\int e^x dx = e^x+C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
10	$\int \sin x\,dx = -\cos x+C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
11	$\int \cos x\,dx = \sin x+C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x+C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
13	$\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x+C$	$\int \left[1+\tan^2(ax+b)\right].dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

14	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
15	$\int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$	$\int \left[1+\cot^2(ax+b)\right]dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
16	$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
17	$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
18	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
19	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}dx = \ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm 1}\right\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
20	$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$	$\int \ln(ax+b)dx = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x + C$
21	$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$

2

Tích phân

Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là ***tích phân*** từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Hiệu số $F(b)-F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$.

Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Ta gọi $\int_a^b$ là *dấu tích phân*, a và b là *cận tích phân*, a là *cận dưới*, b là *cận trên*, $f(x)dx$ là *biểu thức dưới dấu tích phân* và $f(x)$ là *hàm số dưới dấu tích phân*.

Tích phân không phụ thuộc vào biến số: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ... = F(b)-F(a)$.

Chú ý:

a) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$f(b)-f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

b) Ta đã biết rằng, đạo hàm của quãng đường di chuyển theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mỗi thời điểm ($v(t) = s'(t)$). Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức

$$s=s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)dt.$$

Lưu ý: Tốc độ chuyển động $v(t)$ luôn nhận giá trị không âm.

Nhận xét: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là ***giá trị trung bình*** của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Tính chất:

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

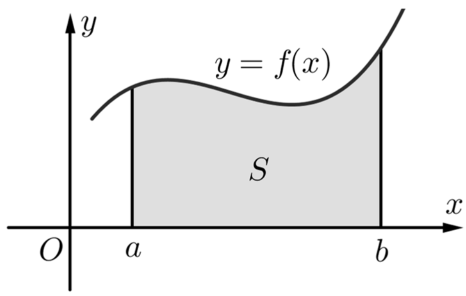
(4) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

(5) $\int_a^b kf(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx\ (k\in\mathbb{R})$

(6) Nếu $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge 0,\ \forall x\in[a;b]$

Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được gọi là ***hình thang cong*** có diện tích S được tính bởi $S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.



Tích phân với hàm số chẵn và lẻ

• Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx=2.\int_0^a f(x)dx$.

• Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ, liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

• Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì $I=\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_0^a f(x)dx$, với $a,\ b>0$.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (Holder) cho tích phân

Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên đoạn $[a;b]$.Khi đó, ta có:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right).\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=k.g(x)$ với $k\ne 0$ là một số thực nào đó.

3

Ứng dụng tích phân

Tích phân của hàm số chứa trị tuyệt đối

Cách giải: Xét dấu hàm số và bỏ trị tuyệt đối.

Ngoài ra:

Nếu trên đoạn $\left[a;b\right]$, hàm số $f\left(x\right)$ không đổi dấu (hoặc không có nghiệm trên $\left(a;b\right)$) thì:

$$I=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|.$$

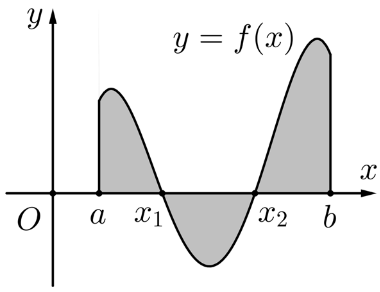
Vậy để tính $I=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$, ta giải phương trình $f\left(x\right)=0$, giả sử được các nghiệm $x_1,\ x_2\in\left[a;b\right]$ với $x_1<x_2$. Khi đó:

$$I=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_a^{x_1}\left|f\left(x\right)\right|dx+\int_{x_1}^{x_2}\left|f\left(x\right)\right|dx+\int_{x_2}^{b}\left|f\left(x\right)\right|dx=\left|\int_a^{x_1}f\left(x\right)dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f\left(x\right)dx\right|+\left|\int_{x_2}^{b}f\left(x\right)dx\right|.$$

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$

Diện tích hình phẳng $\left(H\right):\begin{cases}\left(C\right):y=f\left(x\right),\ Ox:y=0\\ x=a,\ x=b\ \left(a<b\right)\end{cases}$ là:

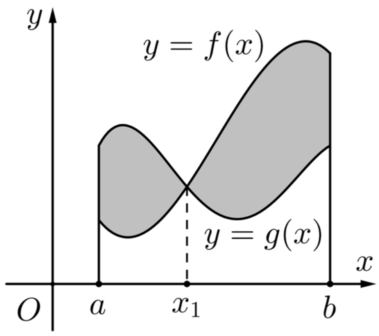
$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx.$$



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$

Diện tích hình phẳng $\left(H\right):\begin{cases}\left(C_1\right):y=f\left(x\right),\left(C_2\right):y=g\left(x\right)\\ x=a,\ x=b\ \left(a<b\right)\end{cases}$ là:

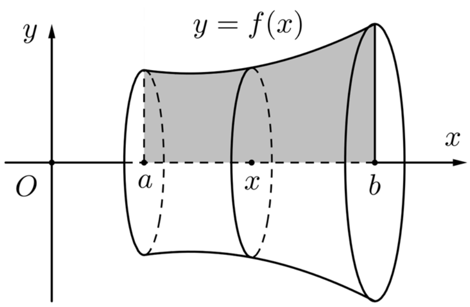
$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx.$$



Khối tròn xoay với một đồ thị hàm số

Thể tích hình phẳng $\left(H\right):\begin{cases}\left(C\right):y=f\left(x\right),\ Ox:y=0\\ x=a,\ x=b\ \left(a<b\right)\end{cases}$ quay quanh Ox là:

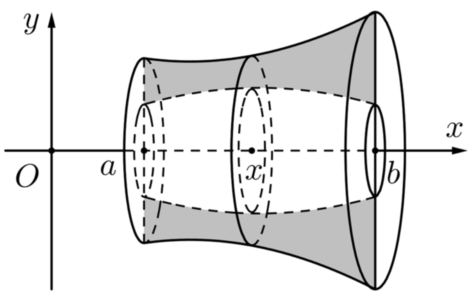
$$V=\pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx.$$



Khối tròn xoay với hai đồ thị hàm số

Thể tích hình phẳng $\left(H\right):\begin{cases}\left(C_1\right):y=f\left(x\right)\ge 0,\left(C_2\right):y=g\left(x\right)\ge 0\\ x=a,\ x=b\ \left(a<b\right)\end{cases}$ quay quanh Ox là:

$$V=\pi\int_a^b\left|f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)\right|dx.$$

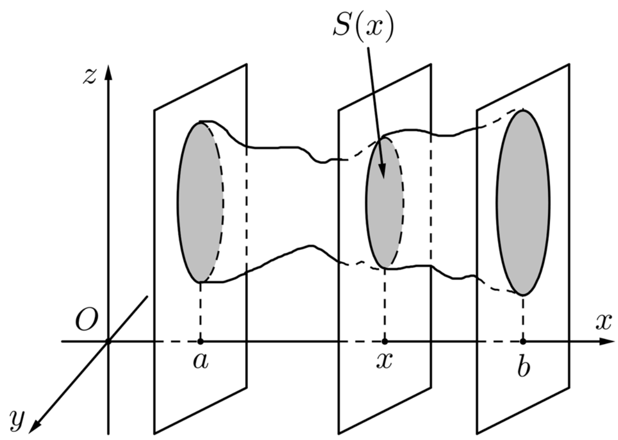


Thể tích hình khối

Gọi B là vật thể giới hạn bởi 2 mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của B bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$.

Khi đó:

$$V_{(B)} = \int_a^b S(x)dx.$$



Chú ý: Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a;b]$ thì $V = (b-a)S$.

HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG 12

VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1

Vectơ và các phép toán trong không gian

- Quy tắc cộng (quy tắc ba điểm): Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- Quy tắc trừ: Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

- Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

- Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

- Hệ thức trung điểm đoạn thẳng: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0};\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

- Hệ thức trọng tâm tam giác: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0};\quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

- Hệ thức trọng tâm tứ diện: Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0};\quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}.$$

- Điều kiện để hai vectơ cùng phương: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (với $\vec{b} \ne \vec{0}$) cùng phương nếu $\exists! k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k.\vec{b}$.

- Tính chất đoạn chia: Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k $(k \ne 1)$, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB};\ \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}.$$

Sự đồng phẳng của ba vectơ

Ba vectơ được gọi là ***đồng phẳng*** nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Khi đó:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \exists! m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý. Khi đó: $\exists! m, n, p \in \mathbb{R} : \vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Với $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$, ta có $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \widehat{BAC}$ $\left(0^\circ \le \widehat{BAC} \le 180^\circ\right)$.

Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Cho $\vec{u}, \vec{v} \ne \vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

- Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \left|\vec{u}\right|^2$; $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}^2}$.
- $\vec{u}^2 \ge 0$, $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số k, ta có:

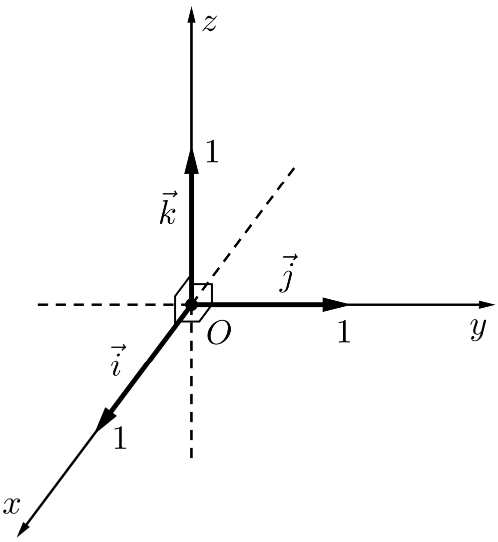
- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$;
- $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$;
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$;
- $\vec{a}.\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ là góc nhọn;
- $\vec{a}.\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ là góc tù;
- $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ là góc vuông.

2

Tọa độ của vectơ trong không gian

Hệ toạ độ trong không gian

Cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc và cắt nhau tại gốc O. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ hoặc đơn giản là ***hệ tọa độ*** $Oxyz$.



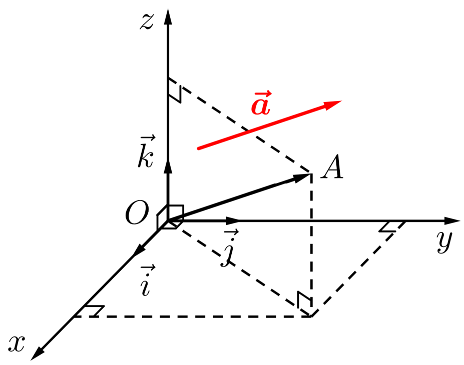
Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

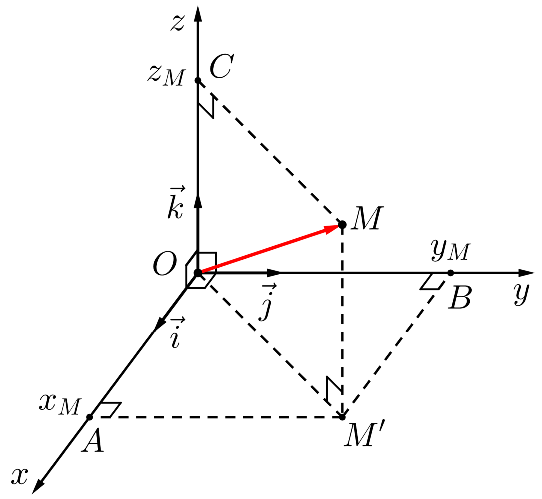
Tọa độ của vectơ

Định nghĩa: $\vec{a} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Tọa độ của điểm

Định nghĩa: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ (x: hoành độ, y: tung độ, z: cao độ).





Hình chiếu vuông góc và điểm đối xứng của một điểm qua các trục và mặt phẳng tọa độ

Cho điểm $M(x;y;z)$.

Hình chiếu vuông góc M' của M trên các trục và mặt phẳng tọa độ như sau:

- $Ox: M'(x;0;0)$
- $Oy: M'(0;y;0)$
- $Oz: M'(0;0;z)$
- $(Oxy): M'(x;y;0)$
- $(Oyz): M'(0;y;z)$
- $(Oxz): M'(x;0;z)$

"có giữ nguyên, thiếu bằng 0"

Điểm đối xứng M'' của M qua các trục và mặt phẳng tọa độ như sau:

- $Ox: M''(x;-y;-z)$
- $Oy: M''(-x;y;-z)$
- $Oz: M''(-x;-y;z)$
- $(Oxy): M''(x;y;-z)$
- $(Oyz): M''(-x;y;z)$
- $(Oxz): M''(x;-y;z)$

"có giữ nguyên, thiếu đổi dấu"

3

Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, $k\in\mathbb{R}$.

Khi đó:

• $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$.	• $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$.
• $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$.	• $\vec{0}=(0;0;0)$, $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.
• $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}$ $(k\in\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ $(b_1,b_2,b_3\neq0)$.	• $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$.
• $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.	• $\vec{a}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$.
• $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.	• $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert.\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (với $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$).

Tính chất: Cho $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, $D(x_D;y_D;z_D)$. Khi đó:

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
- Toạ độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k $(k\neq1)$: $M\left(\frac{x_A-kx_B}{1-k};\frac{y_A-ky_B}{1-k};\frac{z_A-kz_B}{1-k}\right)$.
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

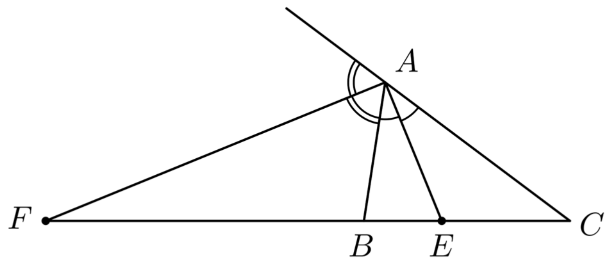
• Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

• Toạ độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right).$$

• $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

• Tọa độ chân đường phân giác của tam giác: Cho tam giác ABC với E, F lần lượt là chân của các đường phân giác trong và ngoài của góc A trên BC. Ta có: $\overrightarrow{BE}=-\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BF}=\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{CF}$.

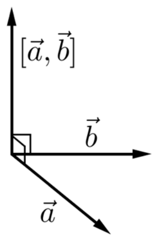


4

Tích có hướng của hai vectơ

Định nghĩa:

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó ***tích có hướng*** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ (vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$), kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, được tính bằng công thức:



$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right).$$

Cách tính nhanh:

"Che cột 1 lấy tích dấu huyền trừ tích dấu sắc
Che cột 2 lấy tích dấu sắc trừ tích dấu huyền
Che cột 3 lấy tích dấu huyền trừ tích dấu sắc".

Vectơ	Cột 1	Cột 2	Cột 3
$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$	a_1	a_2	a_3
$\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$	b_1	b_2	b_3

Tính chất:

• $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$

• $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$

• $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$

• $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$

• $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$

• $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

• $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$

• $\left[k.\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},k.\vec{b}\right]=k.\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

• $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]\neq\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$

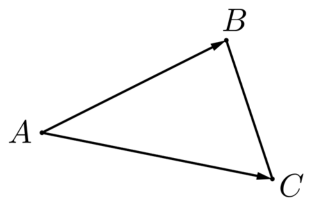
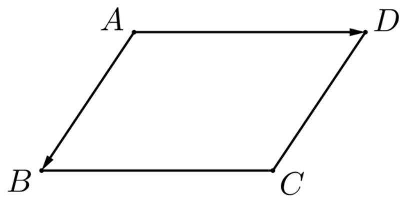
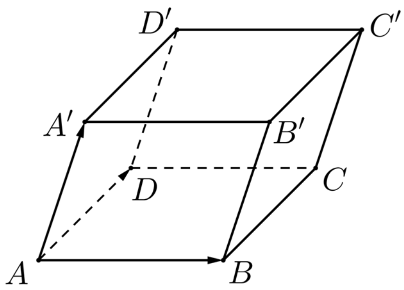
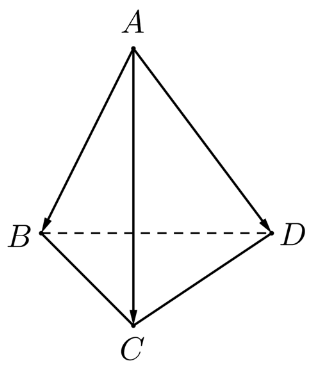
• $\vec{a}.\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{b}.\left[\vec{c},\vec{a}\right]=\vec{c}.\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

• $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}.\left(\vec{a}.\vec{c}\right)-\vec{c}.\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$

• Đẳng thức Jacobi: $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=\vec{0}$

Ứng dụng của tích có hướng:

- $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$.
- $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$.
- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$.
- A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0$.
- A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$.

<table>
<tr>
<td>• Diện tích tam giác:
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

</td>
<td>• Diện tích hình bình hành:
$S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>• Thể tích khối hộp:
$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

</td>
<td>• Thể tích tứ diện:
$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

</td>
</tr>
</table>

Chú ý:

• Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.

• Tích vô hướng của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

• Tích có hướng của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

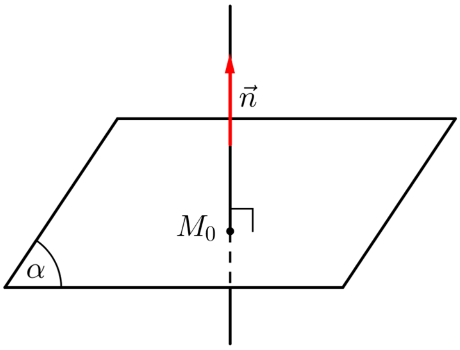
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

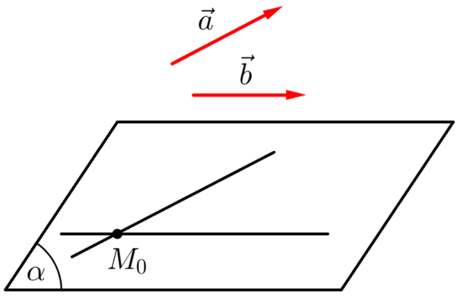
1

Phương trình mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

• ***Vectơ pháp tuyến*** $\vec{n}$ của mặt phẳng (α) là vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α).





• ***Cặp vectơ chỉ phương*** $\vec{a}, \vec{b}$ của (α) là hai vectơ không cùng phương và có giá song song hoặc nằm trên (α).

• Tích có hướng của cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$ của (α) là một vectơ pháp tuyến của (α): $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là ***phương trình tổng quát*** của mặt phẳng.

Phương trình mặt phẳng (α) qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Nhận xét: Nếu $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì một VTPT của (α) là $\vec{n} = (A; B; C)$.

Các trường hợp đặc biệt

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc toạ độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$

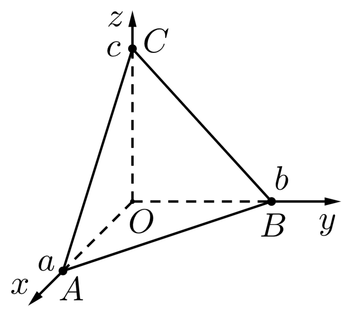
Nhận xét:

Nếu phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

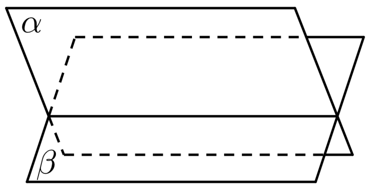
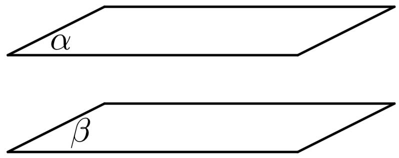
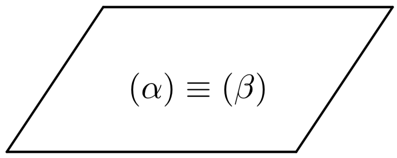
Nếu (α) cắt các trục toạ độ tại các điểm $(a;0;0), (0;b;0), (0;0;c)$ thì phương trình của (α) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ và $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó:

$(\alpha),(\beta)$ **cắt nhau**	$(\alpha)\parallel(\beta)$	$(\alpha)\equiv(\beta)$
$\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ không cùng phương	$\overrightarrow{n_1}=k\overrightarrow{n_2}$ và $D_1\neq kD_2$	$\overrightarrow{n_1}=k\overrightarrow{n_2}$ và $D_1=kD_2$
$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$ 	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ 	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ 

Đặc biệt: $(\alpha)\perp(\beta) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Hai điểm cùng phía, khác phía so với mặt phẳng

Cho hai điểm $M(x_M;y_M;z_M)$, $N(x_N;y_N;z_N)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

- M, N nằm cùng phía so với $(\alpha) \Leftrightarrow (Ax_M+By_M+Cz_M+D)(Ax_N+By_N+Cz_N+D)>0$;
- M, N nằm khác phía so với $(\alpha) \Leftrightarrow (Ax_M+By_M+Cz_M+D)(Ax_N+By_N+Cz_N+D)<0$.

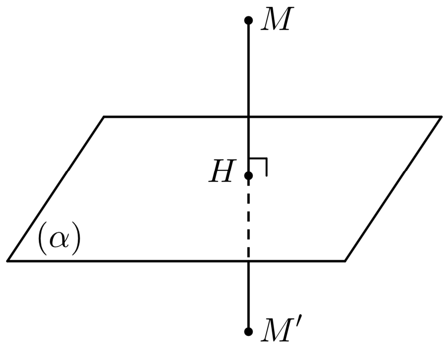
Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) là:

$$d(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Tìm hình chiếu H của điểm M trên mặt phẳng (α)

Điểm H là hình chiếu của điểm M trên $(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MH}=k.\overrightarrow{n_{(\alpha)}} \\ H\in(\alpha)\end{cases}$.



- Gọi $H(x;y;z)$.
- Do $H\in(\alpha)$ nên ta có phương trình (1).
- $\overrightarrow{MH}$ cùng phương $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}$ nên ta có phương trình $(2),(3)$.
- Giải hệ $(1),(2),(3)$ ta được x, y, z, suy ra H.

Tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (α)

Điểm M' đối xứng với điểm M qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm của MM'.

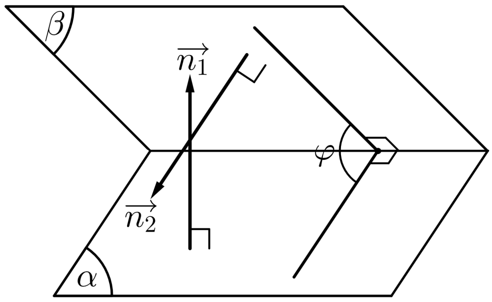
Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ và $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$.

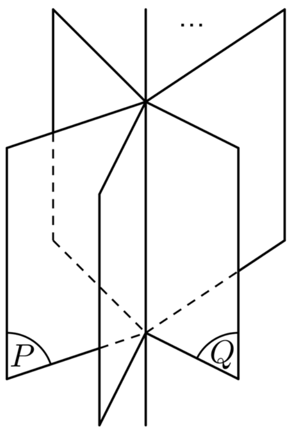
Góc giữa (α), (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$:

$$\cos((\alpha),(\beta)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Chú ý: $0° \le ((\alpha),(\beta)) \le 90°$.



Phương trình chùm mặt phẳng



Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau:

$(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Khi đó mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) sẽ có dạng:

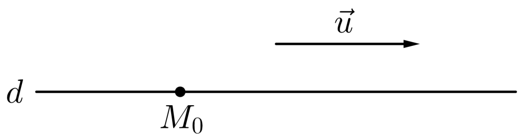
$m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

với $m^2 + n^2 > 0$.

2

Phương trình đường thẳng trong không gian

Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của d.



Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có một VTCP là $\vec{u} = (a;b;c)$. Khi đó:

• ***Phương trình tham số*** của $d: \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, mỗi giá trị của tham số t xác định duy nhất một điểm M trên d và ngược lại.

• ***Phương trình chính tắc*** của $d: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ với $a.b.c \ne 0$.

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + b_1t \\ z = z_0 + c_1t \end{cases}$ qua điểm $M_1(x_0;y_0;z_0)$, có một VTCP $\overrightarrow{u_{d_1}} = (a_1;b_1;c_1)$

và đường thẳng $d_2:\begin{cases} x = x'_0 + a_2t' \\ y = y'_0 + b_2t' \\ z = z'_0 + c_2t' \end{cases}$ qua điểm $M_2\left(x'_0;y'_0;z'_0\right)$, có một VTCP $\overrightarrow{u_{d_2}} = \left(a_2;b_2;c_2\right)$.

Xét hệ phương trình (ẩn t, t'): $\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a_2t' \\ y_0 + b_1t = y'_0 + b_2t' \\ z_0 + c_1t = z'_0 + c_2t' \end{cases} \left(I\right)$.

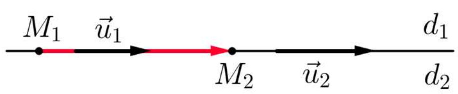
Khi đó:

Điều kiện	$\overrightarrow{u_1}$ cùng phương $\overrightarrow{u_2}$		$\overrightarrow{u_1}$ không cùng phương $\overrightarrow{u_2}$	
	$M_1 \in d_2$	$M_1 \notin d_2$	Hệ $\left(I\right)$ có nghiệm duy nhất	Hệ $\left(I\right)$ vô nghiệm
Kết quả	$d_1 \equiv d_2$	$d_1 \parallel d_2$	d_1 cắt d_2	d_1 chéo d_2

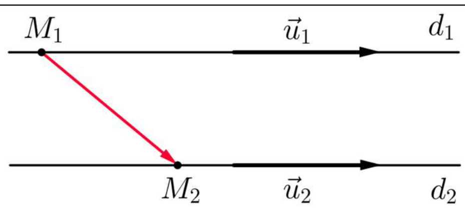
Hoặc:

Điều kiện	Ba vectơ sau cùng phương: $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$	$\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ không cùng phương	$\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương và $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng	$\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương và $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng
Tức là	$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right] \ne \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] \ne \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$	$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \ne 0$
Kết quả	$d_1 \equiv d_2$	$d_1 \parallel d_2$	d_1 cắt d_2	d_1 chéo d_2

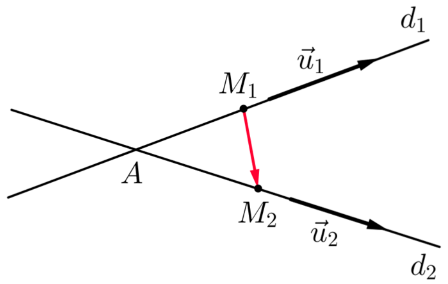
Hình minh họa:



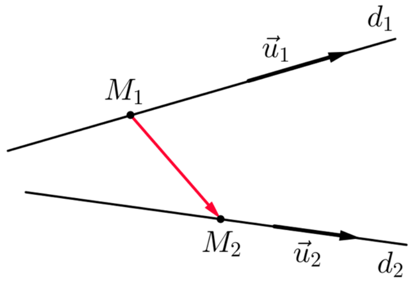
Hai đường thẳng trùng nhau



Hai đường thẳng song song



Hai đường thẳng cắt nhau



Hai đường thẳng chéo nhau

Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

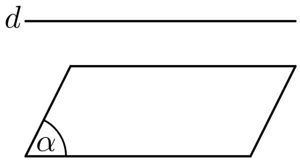
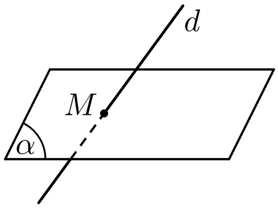
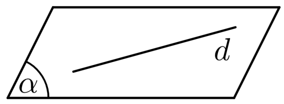
Ta có $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho mặt phẳng $\left(\alpha\right): Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(A;B;C\right)$ và đường thẳng

$d:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$.

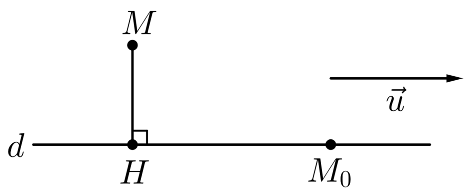
Xét phương trình: $A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0$ (ẩn t) $(*)$. Khi đó:

Điều kiện	$(*)$ vô nghiệm	$(*)$ có đúng 1 nghiệm t	$(*)$ có vô số nghiệm
Hoặc	$\vec{u} \perp \vec{n}$ và $M_0 \notin (\alpha)$	$\vec{u} \not\perp \vec{n}$	$\vec{u} \perp \vec{n}$ và $M_0 \in (\alpha)$
Kết quả	$d \parallel (\alpha)$ 	d cắt (α) tại M ứng với nghiệm t thay vào phương trình d 	$d \subset (\alpha)$ 

Chú ý: $d \perp (\alpha)$ khi và chỉ khi $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}$.

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng d đi qua M_0, có một VTCP là $\vec{u}$ và điểm M.

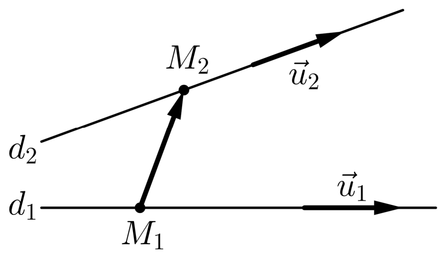


Cách 1: Áp dụng công thức: $d(M,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

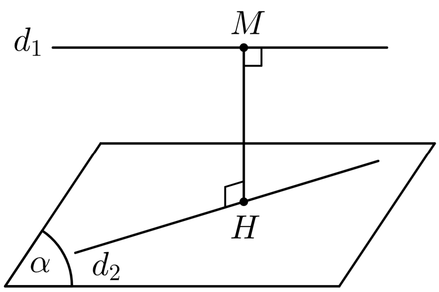
Cách 2: Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng d. Khi đó: $d(M,d) = MH$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 với d_1 đi qua điểm M_1 và có một VTCP $\overrightarrow{u_1}$, d_2 đi qua điểm M_2 và có một VTCP $\overrightarrow{u_2}$.



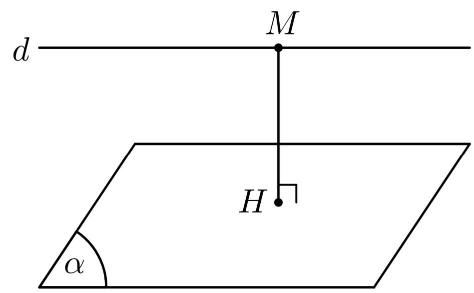
Cách 1: Áp dụng công thức: $d(d_1,d_2) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$.



Cách 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 đến mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1.

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nhau

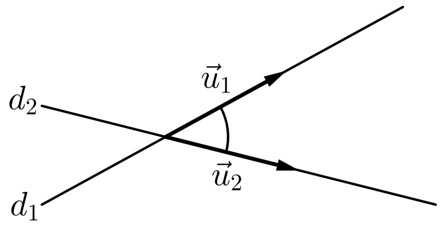
Khoảng cách giữa đường thẳng d đến mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α).



Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có các vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(a_1;b_1;c_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2;b_2;c_2)$.

Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 **bằng** hoặc **bù** với góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$. Ta có:

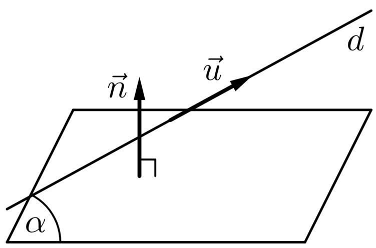


$$\cos(d_1,d_2)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Chú ý: $0°\le(d_1,d_2)\le 90°$.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng (α) có một VTPT là $\vec{n}=(A;B;C)$.



Cách 1: Áp dụng công thức:

$$\sin(d,(\alpha))=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{u}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}.\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{u}\right|}=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

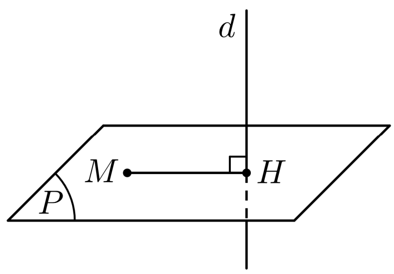
Cách 2: Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α).

Chú ý: $0°\le(d,(\alpha))\le 90°$.

Xác định hình chiếu vuông góc H của điểm M trên đường thẳng d

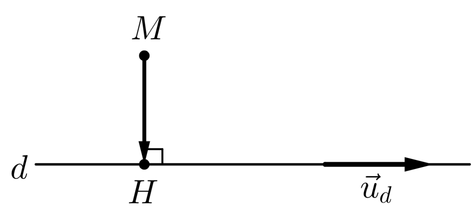
Cách 1:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d.
- Khi đó $H=d\cap(P)$.

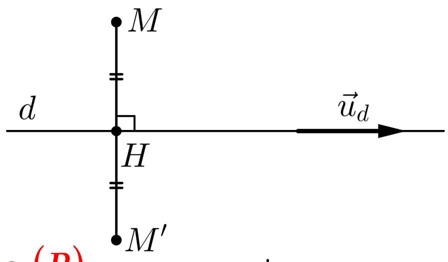


Cách 2:

- Lấy điểm H thuộc d (tọa độ H ẩn t). Từ $\overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_d}=0$ giải tìm t, suy ra H.

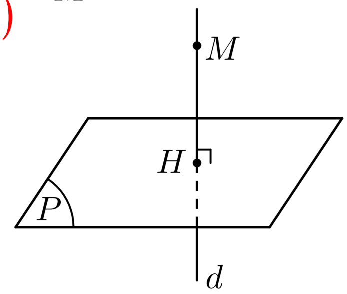


Xác định điểm đối xứng M' của điểm M qua đường thẳng d



- Tìm điểm H là hình chiếu của M trên d.
- Xác định điểm M' sao cho H là trung điểm của đoạn MM'.

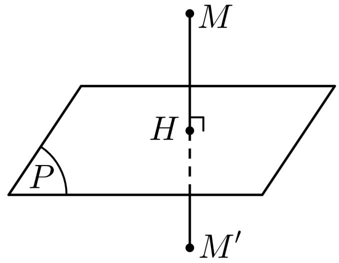
Xác định hình chiếu vuông góc H của điểm M trên mặt phẳng (P)



Ngoài cách đã biết ở bài trước, sau khi học xong phương trình đường thẳng thì ta còn có cách làm như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (P).
- Khi đó $H = d \cap (P)$.

Xác định điểm đối xứng M' của điểm M qua mặt phẳng (P)



- Tìm điểm H là hình chiếu của M trên (P).
- Xác định điểm M' sao cho H là trung điểm của đoạn MM'.

3

Phương trình mặt cầu

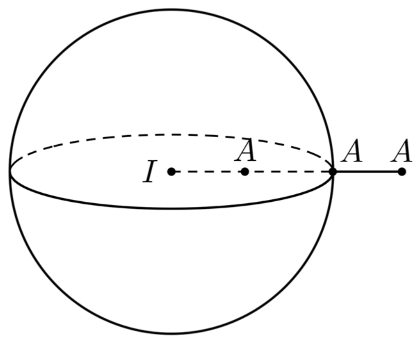
Dạng chính tắc:

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Dạng khai triển:

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Vị trí tương đối giữa điểm và mặt cầu



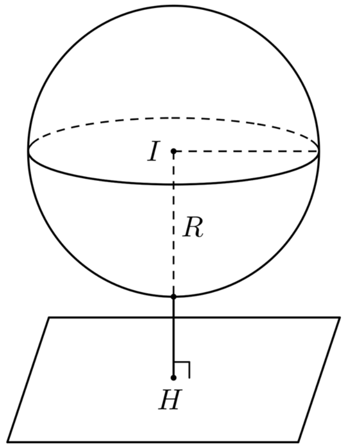
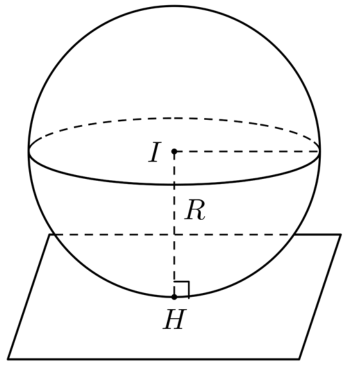
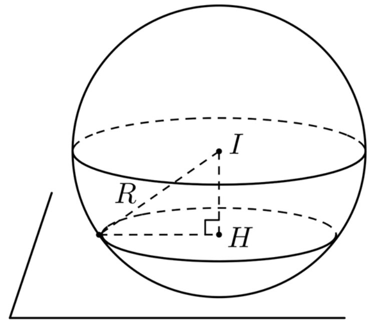
Cho điểm A và mặt cầu $S(I;R)$. Ta có:

- Điểm A thuộc (nằm trên) mặt cầu $\Leftrightarrow IA = R$.
- Điểm A nằm trong mặt cầu $\Leftrightarrow IA < R$.
- Điểm A nằm ngoài mặt cầu $\Leftrightarrow IA > R$.

Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và mặt cầu $(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Khi đó:

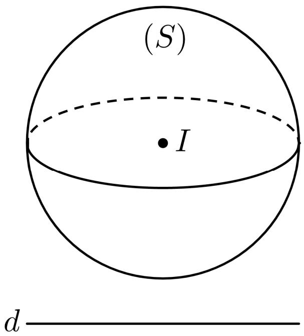
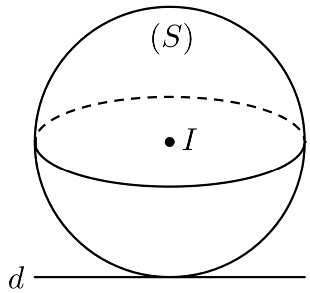
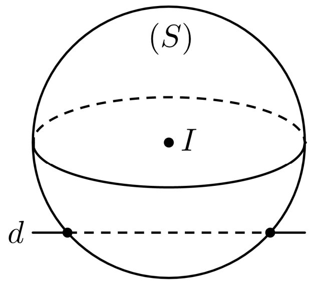
$d(I,(\alpha))>R$	$d(I,(\alpha))=R$	$d(I,(\alpha))<R$
(α) và (S) không có điểm chung	(α) tiếp xúc với (S) tại điểm H là hình chiếu của tâm I trên (α)	(α) cắt (S) theo một đường tròn (C): $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+z-c)^2=R^2\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$

		- Tâm H là hình chiếu vuông góc của tâm I trên (α). - Bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$.
		

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ (1) và mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (2).

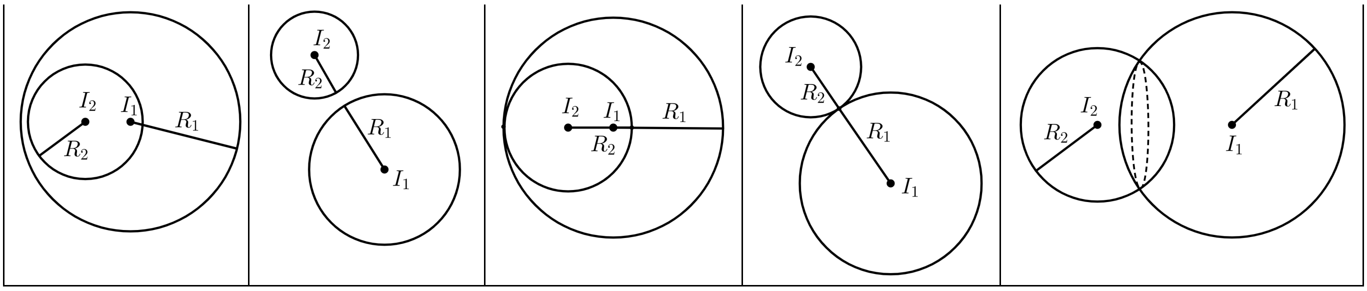
Thay (1) vào (2) ta được phương trình $(*)$. Khi đó

Điều kiện	$(*)$ vô nghiệm Hoặc $d(I,d)>R$	$(*)$ có đúng 1 nghiệm Hoặc $d(I,d)=R$	$(*)$ có 2 nghiệm phân biệt Hoặc $d(I,d)<R$
Kết quả	d và (S) không có điểm chung	d tiếp xúc (S)	d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt
			

Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1;R_1)$ và $S_2(I_2;R_2)$. Khi đó:

$I_1I_2<\lvert R_1-R_2\rvert$	$I_1I_2>R_1+R_2$	$I_1I_2=\lvert R_1-R_2\rvert$	$I_1I_2=R_1+R_2$	$\lvert R_1-R_2\rvert<I_1I_2<R_1+R_2$
(S_1) nằm trong (S_2) hoặc ngược lại.	(S_1) không cắt (S_2).	(S_1), (S_2) tiếp xúc trong.	(S_1), (S_2) tiếp xúc ngoài.	(S_1), (S_2) cắt nhau theo một đường tròn.



Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu bán kính R

• Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

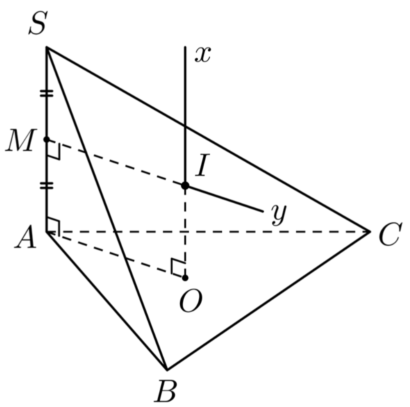
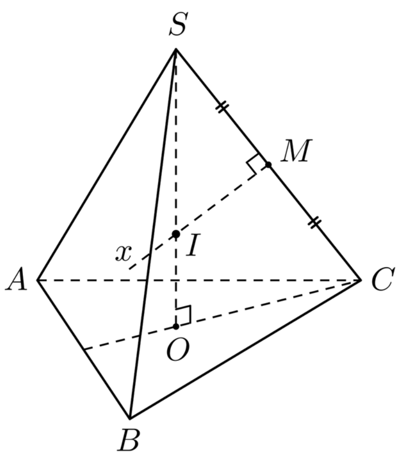
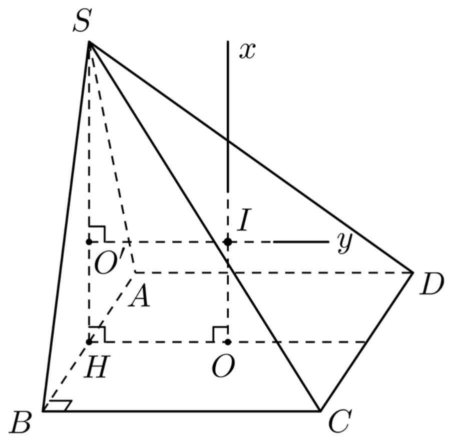
• Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp, khối lăng trụ

Trục của đa giác

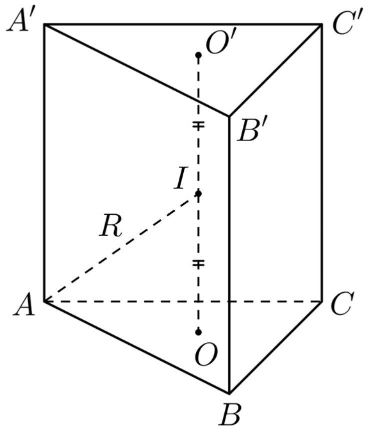
Trục của một đa giác (nếu có) là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đó. Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

SA vuông góc đáy	Hình chóp đều	Mặt bên (SAB) vuông góc đáy
- Dựng trục Ox của đáy. - Kẻ trung trực My của SA cắt Ox tại I. Khi đó: Tâm I, bán kính $R = IA$. **Nhận xét:** $MIOA$ là hình chữ nhật.  	- Trục là SO. - Kẻ trung trực Mx của cạnh bên cắt SO tại I. Khi đó: Tâm I, bán kính $R = IS$. **Nhận xét:** ΔSMI đồng dạng $\Delta SOC \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SC}$ $\Rightarrow R = SI = \dfrac{SM.SC}{SO}$.  	- Dựng trục Ox của đáy. - Dựng trục $O'y$ của mặt bên (SAB) cắt Ox tại I. Khi đó: Tâm I, bán kính $R = IA$. **Nhận xét:** $O'IOH$ là hình chữ nhật. 

Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng

- Kẻ OO' là đoạn thẳng nối tâm của 2 đáy
- Gọi I là trung điểm OO'.
- Khi đó: Mặt cầu có tâm I, bán kính $R = IA$.



4

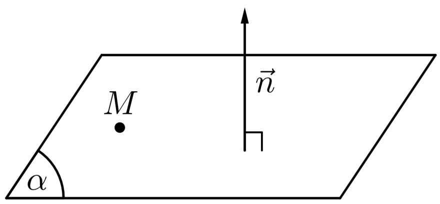
Các dạng toán thường gặp viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu

DẠNG TOÁN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Để viết phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định 1 điểm thuộc (α) và 1 VTPT của (α).

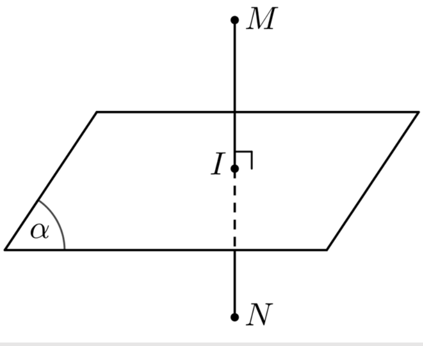
Dạng 1: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có một VTPT là $\vec{n}=(A;B;C)$

Khi đó $(\alpha): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.



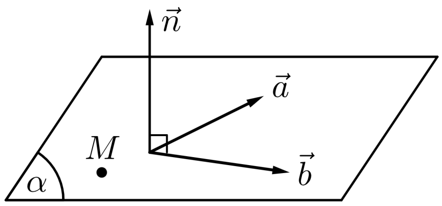
Dạng 2: (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN

Khi đó: (α) đi qua trung điểm I của MN và có 1 VTPT $\vec{n}=\overrightarrow{MN}$.



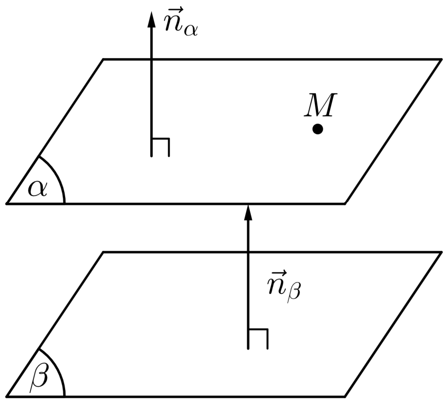
Dạng 3: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có cặp VTCP $\vec{a}$, $\vec{b}$

Khi đó (α) có VTPT $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.



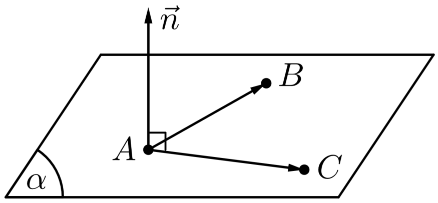
Dạng 4: (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$

Khi đó (α) có 1 VTPT $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = \overrightarrow{n_{(\beta)}}$.



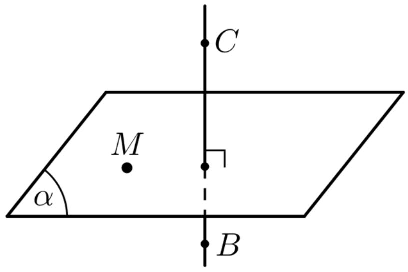
Dạng 5: (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C

Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.



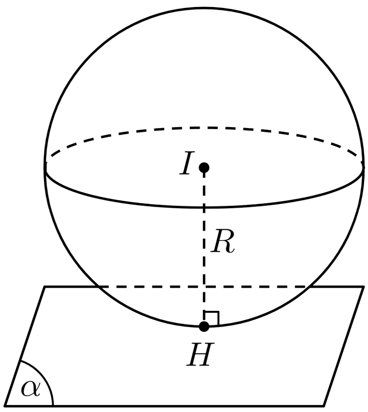
Dạng 6: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với đường thẳng BC

Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{BC}$.



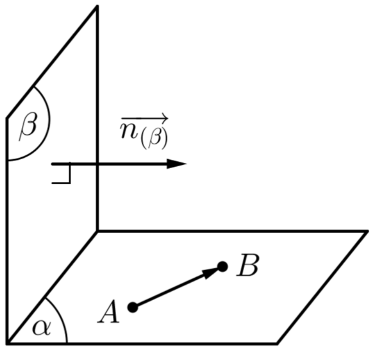
Dạng 7: (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm I bán kính R tại điểm H

Khi đó (α) qua điểm H và có 1 VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$.



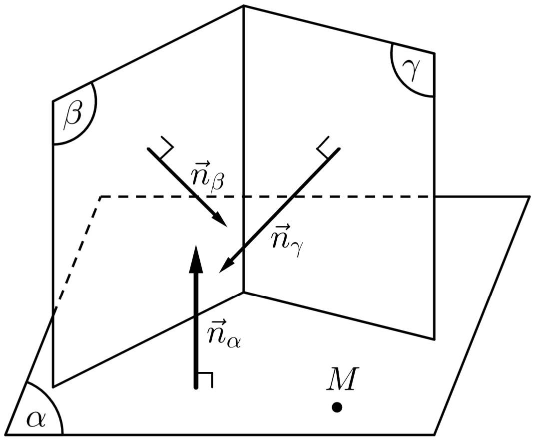
Dạng 8: (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β)

Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{n_{(\beta)}}, \overrightarrow{AB}\right]$.



Dạng 9: (α) đi qua điểm M và vuông góc với 2 mặt phẳng cắt nhau (β), (γ)

- Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_{(\beta)}},\overrightarrow{n_{(\gamma)}}\right]$.



Dạng 10: (α) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q)

Cách 1: Tìm 2 điểm phân biệt A, B thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) đi qua 3 điểm M, A, B.

Cách 2: Tìm 1 điểm A thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) có 1 VTPT là $n=\left[\overrightarrow{MA},\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]\right]$.

Cách 3: Viết mặt phẳng (α) ở dạng *phương trình chùm mặt phẳng*, dựa vào giả thiết (α) đi qua điểm M để tìm hệ số chưa biết.

Dạng 11: (α) chứa giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) đồng thời song song với mặt phẳng (R)

Cách 1: Tìm 1 điểm A thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) đi qua điểm A và có 1 VTPT $\vec{n}=\overrightarrow{n_{(R)}}$.

Cách 2: Viết mặt phẳng (α) ở dạng *phương trình chùm mặt phẳng*, dựa vào giả thiết (α) song song với (R) để tìm hệ số chưa biết.

Dạng 12: (α) chứa giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) đồng thời vuông góc với mặt phẳng (R)

Cách 1: Tìm 2 điểm phân biệt A, B thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) đi qua điểm A và có 1 VTPT là $n=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(R)}}\right]$.

Cách 2: Tìm 1 điểm A thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) đi qua điểm A và có 1 VTPT là $n=\left[\overrightarrow{n_{(R)}},\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]\right]$.

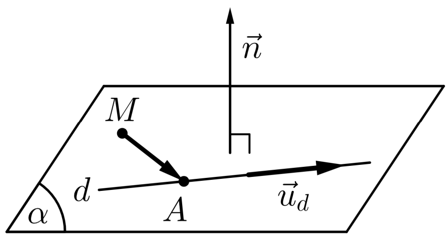
Cách 3: Viết mặt phẳng (α) ở dạng *phương trình chùm mặt phẳng*, dựa vào giả thiết (α) vuông góc với (R) để tìm hệ số chưa biết.

DẠNG TOÁN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Sau khi học xong phương trình đường thẳng và mặt cầu, ta có một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng liên quan đến chúng:

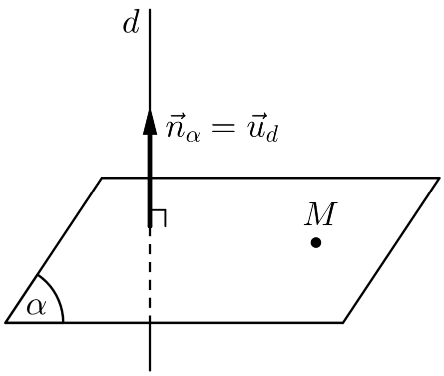
Dạng 1: (α) đi qua điểm M và chứa đường thẳng d

Lấy điểm A tùy ý thuộc d. Khi đó (α) qua điểm M và có 1 VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u_d}\right]$.



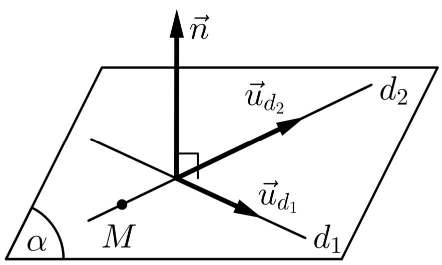
Dạng 2: (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d

Khi đó (α) qua điểm M và có 1 VTPT $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\overrightarrow{u_d}$.



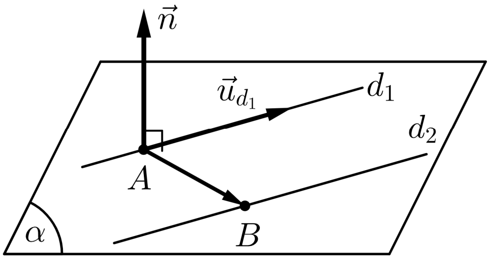
Dạng 3: (α) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d_1, d_2

Khi đó (α) qua điểm M tùy ý thuộc d_1 hoặc d_2 và có 1 VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$.



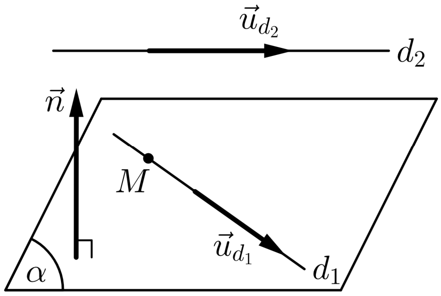
Dạng 4: (α) chứa 2 đường thẳng song song d_1, d_2

Trên d_1 lấy điểm A tùy ý, trên d_2 lấy điểm B tùy ý. Khi đó (α) qua điểm A (hoặc B) và có 1 VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{AB}\right]$.



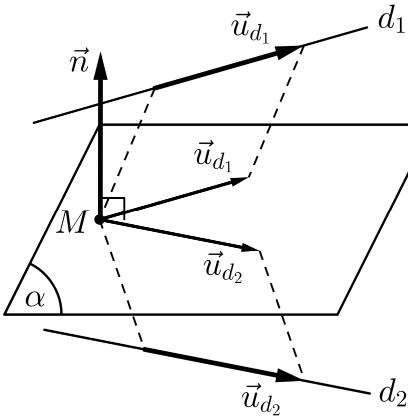
Dạng 5: (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 (d_1, d_2 chéo nhau)

Khi đó (α) qua điểm M tùy ý thuộc d_1 và có 1 VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$.



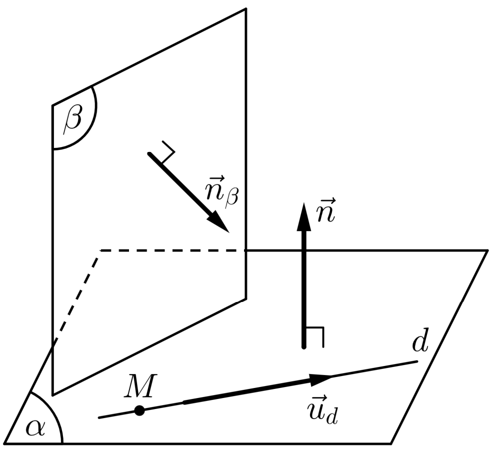
Dạng 6: (α) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau d_1, d_2

- Khi đó (α) qua M và có 1 VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$.



Dạng 7: (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (β)

Khi đó (α) qua điểm M tùy ý thuộc d và có 1 VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]$.



Dạng 8: (α) chứa đường thẳng d và cách điểm M một khoảng bằng k

- Gọi (α): $Ax+By+Cz+D=0$ $\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

- Lấy 2 điểm $A,\, B\in d$. Khi đó $A,\, B$ cũng thuộc (α) nên ta được hai phương trình $(1),\,(2)$.

- Từ điều kiện khoảng cách $d\left(M,(\alpha)\right)=k$, ta được phương trình (3).

- Giải hệ phương trình $(1),\,(2),\,(3)$ bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại.

Dạng 9: (α) song song với mặt phẳng (β)/vuông góc đường thẳng d và tiếp xúc mặt cầu/cắt mặt cầu theo một đường tròn

- Do $(\alpha)\parallel(\beta)/(\alpha)\perp d$ nên $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ (hệ số D chưa biết).

- Dựa vào điều kiện tiếp xúc $d\left(I,(\alpha)\right)=R$ hoặc từ giả thiết ta có $d\left(I,(\alpha)\right)=k$. Giải phương trình này tìm D, suy ra (α).

Dạng 10: (α) chứa đường thẳng d và tiếp xúc mặt cầu/cắt mặt cầu theo một đường tròn

- Viết d thành dạng giao tuyến 2 mặt phẳng.
- Viết (α) dạng phương trình chùm (hệ số $m,\, n$ chưa biết).

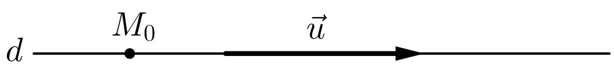
- Dựa vào điều kiện tiếp xúc $d\left(I,(\alpha)\right)=R$ hoặc từ giả thiết ta có $d\left(I,(\alpha)\right)=k$. Giải phương trình này tìm $m,\, n$ (chọn 1 ẩn tính ẩn còn lại), suy ra (α).

DẠNG TOÁN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Để viết phương trình đường thẳng d ta cần xác định một **điểm** thuộc d và một **VTCP** của d.

Dạng 1: d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$

Khi đó PTTS $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ và PTCT $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ (với $abc\neq 0$).

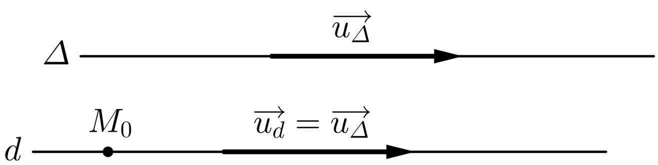


Dạng 2: d đi qua hai điểm $A,\, B$

Khi đó d có 1 VTCP là $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

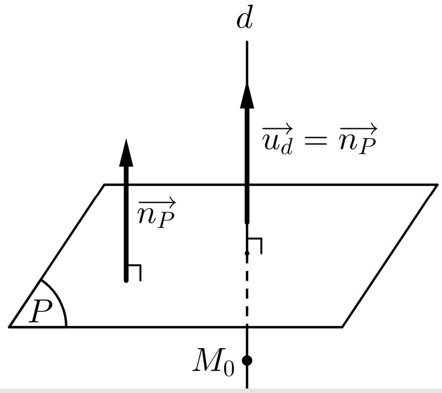
Dạng 3: d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và song song với đường thẳng Δ

Khi đó d có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{u_\Delta}$.



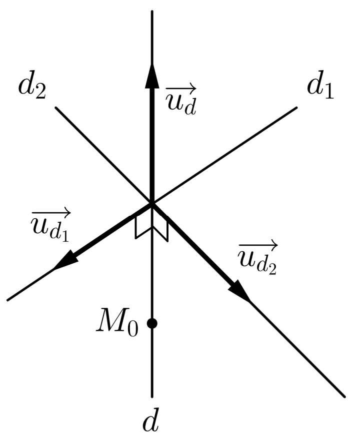
Dạng 4: d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và vuông góc với mặt phẳng (P)

Khi đó d có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_{(P)}}$.



Dạng 5: d đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2

Khi đó d có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$.

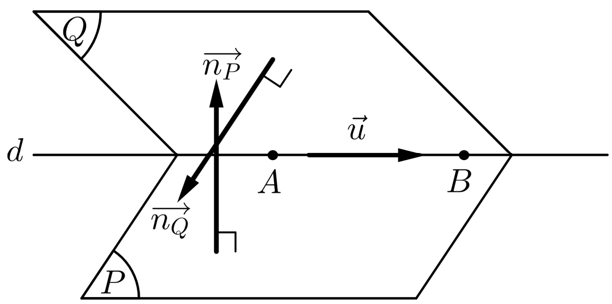


Dạng 6: d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q)

Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP của d

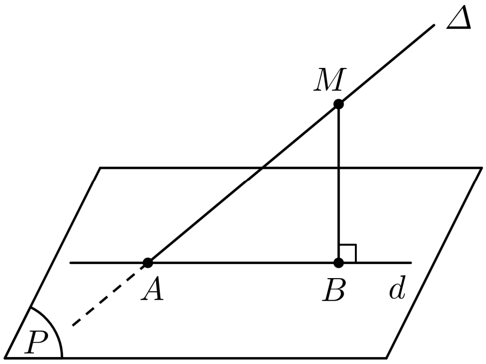
Tìm toạ độ điểm $A\in d$ bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại) và một VTCP của d là $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]$.

Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d và viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.



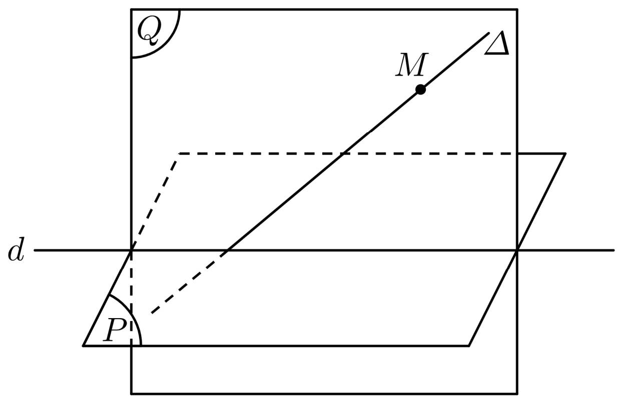
Dạng 7: d là hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (P)

Cách 1: Tìm điểm $A=\Delta\cap(P)$ trong trường hợp Δ cắt (P). Lấy điểm M (khác A) tùy ý thuộc Δ, tìm hình chiếu vuông góc B của M trên (P). Khi đó d đi qua 2 điểm A, B.



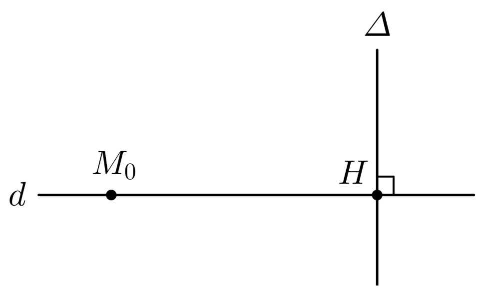
Cách 2: Lấy 2 điểm M, N thuộc Δ và tìm hình chiếu vuông góc H, K của chúng trên (P). Khi đó d đi qua 2 điểm H, K.

Cách 3: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) (Mặt phẳng (Q) đi qua 1 điểm $M \in \Delta$ và có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right]$). Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ (**Dạng 6**).



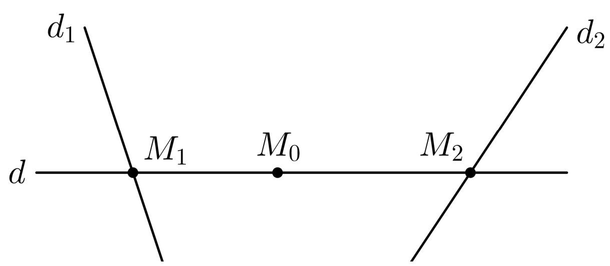
Dạng 8: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ

Tìm hình chiếu vuông góc H của M_0 trên Δ. Khi đó d là đường thẳng đi qua 2 điểm M_0, H.

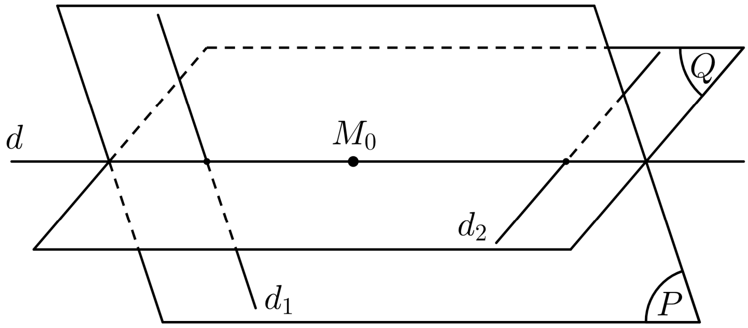


Dạng 9: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2

Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1$ (tọa độ ẩn t_1) và $M_2 \in d_2$ (tọa độ ẩn t_2) lần lượt là giao điểm của d và d_1, d_2. Từ điều kiện M_0, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được t_1, t_2; từ đó suy ra tọa độ M_1, M_2. Khi đó đường thẳng d đi qua các điểm M_0, M_1, M_2.

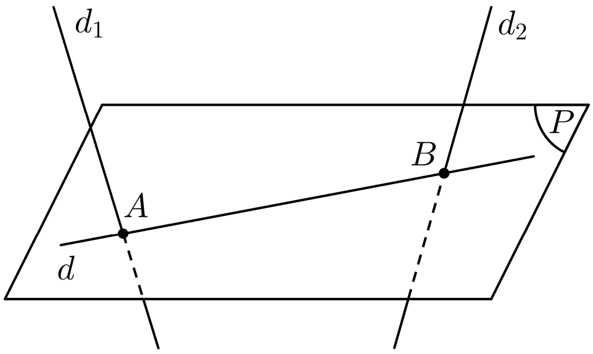


Cách 2: Gọi $(P)\equiv(M_0,d_1)$ và $(Q)\equiv(M_0,d_2)$. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$ nên 1 VTCP của d là $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]$.



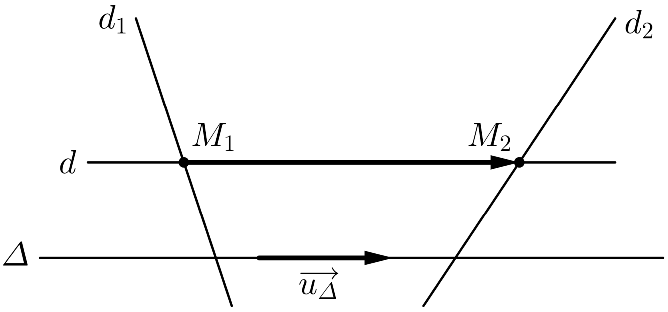
Dạng 10: d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

Tìm các giao điểm $A=d_1\cap(P)$, $B=d_2\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.



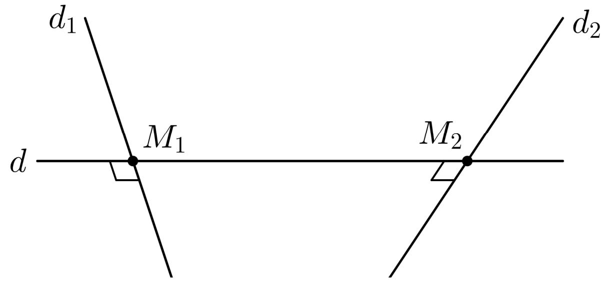
Dạng 11: d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

Gọi $M_1\in d_1$ (tọa độ ẩn t_1) và $M_2\in d_2$ (tọa độ ẩn t_2). Từ điều kiện $\overrightarrow{M_1M_2}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_\Delta}$ ta tìm được t_1, t_2; từ đó suy ra tọa độ M_1, M_2. Khi đó d đi qua 2 điểm M_1, M_2.

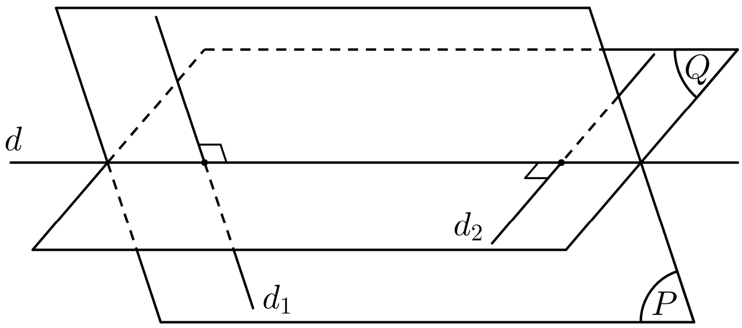


Dạng 12: d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau

Cách 1: Gọi $M_1\in d_1$ (tọa độ ẩn t_1) và $M_2\in d_2$ (tọa độ ẩn t_2). Từ điều kiện $\begin{cases}M_1M_2\perp d_1\\M_1M_2\perp d_2\end{cases}$ ta tìm được t_1, t_2; suy ra tọa độ M_1, M_2. Khi đó d là đường thẳng M_1M_2.



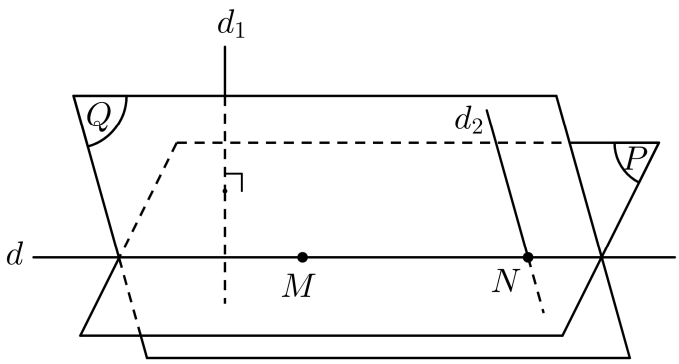
Cách 2: Viết phương trình các mặt phẳng $(P)\equiv(d,d_1)$ và $(Q)\equiv(d,d_2)$. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$ (**Dạng 6**).



Dạng 13: d đi qua điểm M, vuông góc với d_1 và cắt d_2

Cách 1: Gọi $N=d\cap d_2$ (tọa độ theo tham số t của d_2). Từ điều kiện $MN\perp d_1$ ta tìm được N. Khi đó d là đường thẳng MN.

Cách 2: Gọi mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d_1, mặt phẳng (Q) chứa M và d_2. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$ (**Dạng 6**).

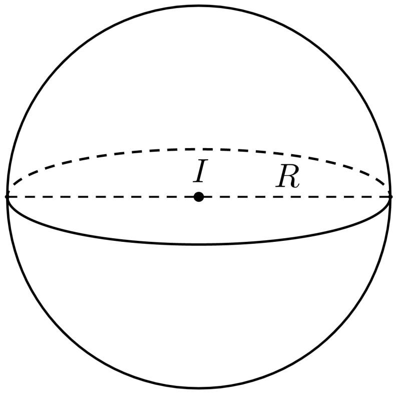


DẠNG TOÁN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Để viết phương trình mặt cầu (S) ta cần xác định tâm I và bán kính R của nó. Một số dạng cơ bản:

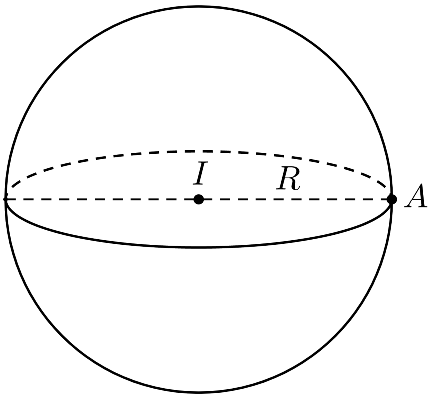
Dạng 1: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R

Khi đó $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.



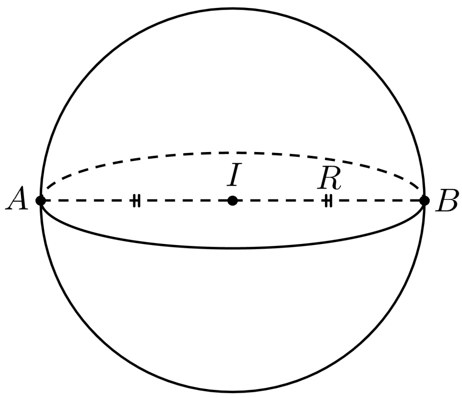
Dạng 2: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm A

Khi đó bán kính $R = IA$.



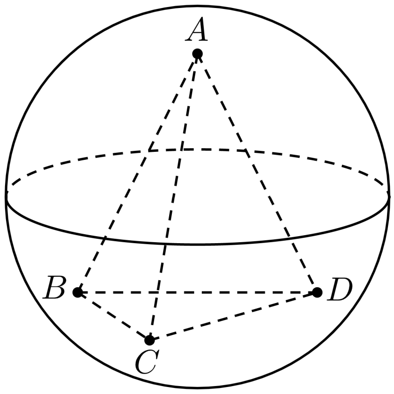
Dạng 3: (S) có đường kính là đoạn thẳng AB

- Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB: $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Bán kính $R = IA = IB = \dfrac{AB}{2}$.



Dạng 4: (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D (còn gọi là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)

- Gọi $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \quad (*)$.
- Thay toạ độ của A, B, C, D vào $(*)$ ta được 4 phương trình ẩn a, b, c, d.
- Giải hệ phương trình đó ta được a, b, c, d thay vào $(*)$ ta được (S).

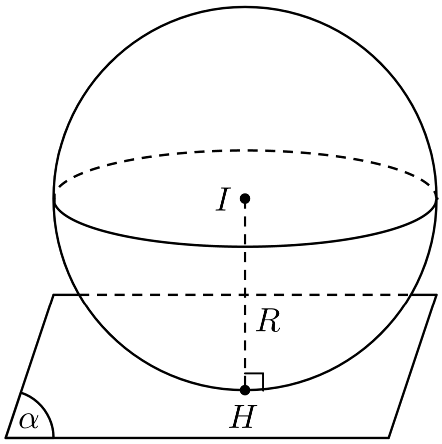


Dạng 5: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và có vị trí tương đối với mặt cầu (S') cho trước

- Xác định tâm I' và bán kính R' của mặt cầu (S').
- Sử dụng điều kiện vị trí tương đối của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S).

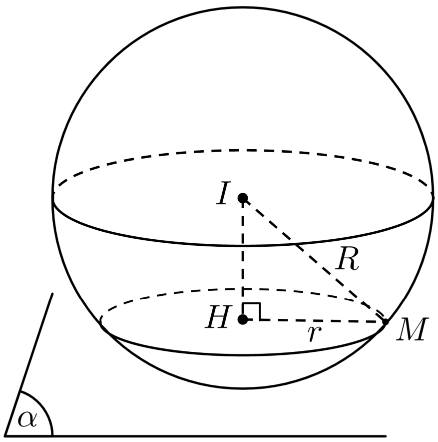
Dạng 6: (S) tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α)

- Bán kính $R = d(I,(\alpha))$.



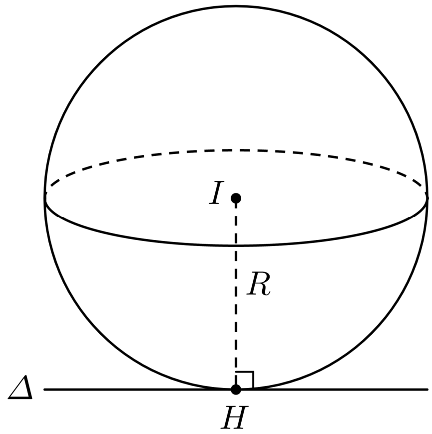
Dạng 7: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và cắt mp(α) theo một đường tròn bán kính r

- Bán kính $R = \sqrt{d(I,(\alpha))^2 + r^2} = \sqrt{IH^2 + HM^2}$.



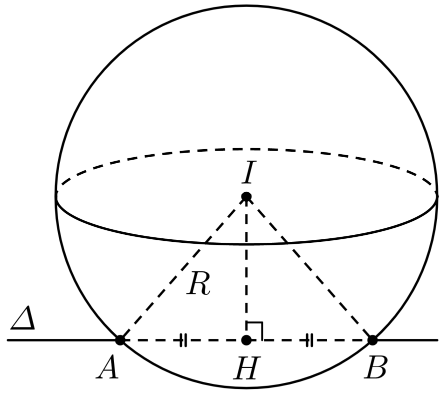
Dạng 8: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ

- Bán kính $R = d(I,\Delta)$.



Dạng 9: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm $A,\ B$

• Bán kính $R=\sqrt{d(I,\Delta)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{IH^2+AH^2}$.



Dạng 10: (S) có tâm I thuộc đường thẳng Δ và đi qua hai điểm $A,\ B$

• Từ $I\in\Delta$, tính tọa độ I theo tham số t.

• Từ $IA=IB$ giải phương trình (ẩn t) được tọa độ I.

• Bán kính mặt cầu $R=IA=IB$.

Dạng 11: (S) đi qua 3 điểm $A,\ B,\ C$ và có tâm I thuộc mặt phẳng (P)

Cách 1:

• Viết phương trình mặt phẳng trung trực $(P_1),\ (P_2)$ của AB và AC.

• Tâm $I=(P)\cap(P_1)\cap(P_2)$. Giải hệ $\begin{cases}(P)\\(P_1)\\(P_2)\end{cases}$ tìm tọa độ I.

• Bán kính $R=IA$.

Cách 2:

Gọi $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\quad(^*)$.

• Thay toạ độ 3 điểm $A,\ B,\ C$ vào $(^*)$ ta được 3 phương trình ẩn $a,\ b,\ c,\ d$.

• Tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) ta được phương trình ẩn $a,\ b,\ c,\ d$ thứ tư.

• Giải hệ phương trình đó ta được a, b, c, d thay vào $(*)$ ta được (S).

DẠNG TOÁN: CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

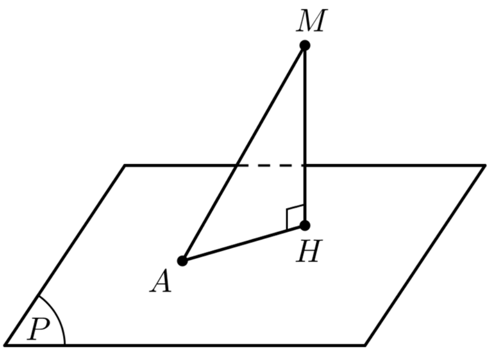
Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách điểm M một khoảng lớn nhất.

Phương pháp:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P). Ta có tam giác AMH vuông tại H và $d(M,(\alpha)) = MH \le MA$. Vậy $d(M,(\alpha))$ lớn nhất khi và chỉ khi $A \equiv H$.

Khi đó (α) đi qua A và vuông góc với AM.

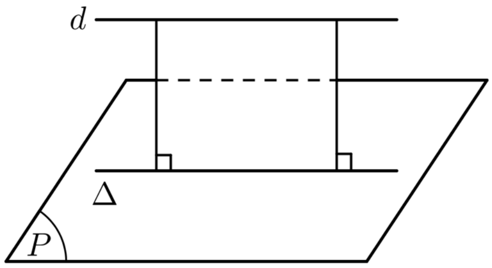
Do đó (P) có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{AM}$.



Dạng 2: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng $d \parallel (P)$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), song song với d và cách d một khoảng nhỏ nhất.

Phương pháp:

Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (P).



Dạng 3: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cách điểm M một khoảng lớn nhất.

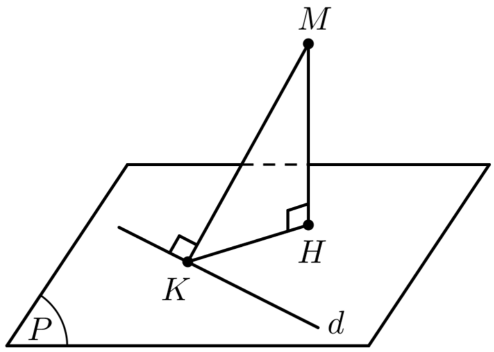
Phương pháp:

Gọi hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d lần lượt là H, K.

Ta có $d(M,(P)) = MH \le MK$; MH lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$.

Khi đó (P) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (M,d).

Do đó (P) có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{MK}$ hoặc $\vec{n} = \left[\left[\vec{u_d}, \overrightarrow{AM}\right], \vec{u_d}\right]$ với điểm $A \in d$.



Dạng 4: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, tạo với đường thẳng Δ (không song song với d) một góc lớn nhất.

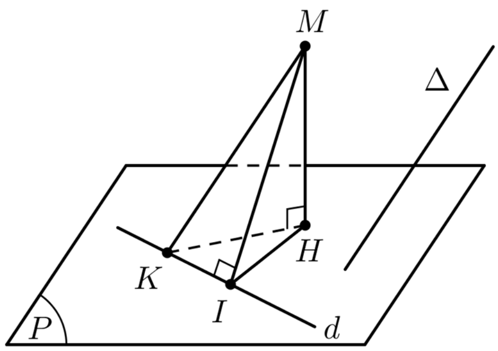
Phương pháp:

Lấy điểm K thuộc d, trên đường thẳng song song với Δ tại K, lấy điểm M. Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d.

Ta có $\sin(\Delta,(P)) = \cos\widehat{KMH} = \dfrac{MH}{MK} \le \dfrac{MI}{MK}$. Vậy góc $(\Delta,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv I$.

Khi đó (P) chứa d, vuông góc với mặt phẳng chứa d và song song Δ.

Do đó (P) có VTPT là $n = \overrightarrow{IM}$ hoặc $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_\Delta}\right], \overrightarrow{u_d}\right]$.



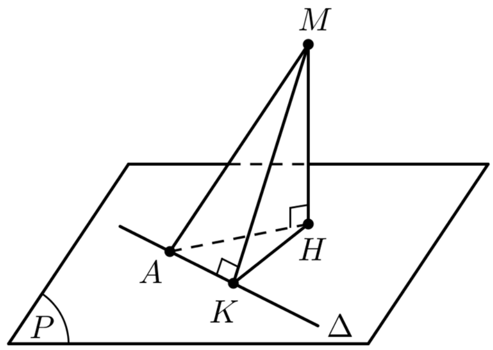
Dạng 5: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, nằm trong mặt phẳng (P) và cách điểm M một khoảng nhỏ nhất / lớn nhất (AM không vuông góc với (P)).

Phương pháp:

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và Δ.

Ta có:

- $d(M,\Delta) = MK \ge MH$. Vậy $d(M,\Delta)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $K \equiv H$. Khi đó Δ đi qua 2 điểm A, H. Do đó Δ có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AH}$ hoặc $\vec{u} = \left[\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AM}\right], \overrightarrow{n_P}\right]$.
- $d(M,\Delta) = MK \le MA$. Vậy $d(M,\Delta)$ lớn nhất khi và chỉ khi $K \equiv A$. Khi đó Δ vuông góc AM. Do đó Δ có VTCP là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AM}\right]$.

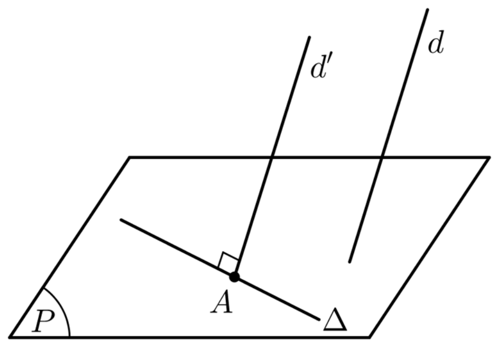


Dạng 6: Cho mặt phẳng (P), điểm $A \in (P)$ và đường thẳng d (d cắt và không vuông góc (P)). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, nằm trong (P) và tạo với d một góc lớn nhất.

Phương pháp:

Vẽ d' qua A và song song với d. Ta có $(d,\Delta) = (d',\Delta)$ lớn nhất bằng $90°$ khi và chỉ khi $\Delta \perp d$.

Khi đó Δ có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_d}\right]$.



Dạng 7: Cho mặt phẳng (P), điểm $A \in (P)$ và đường thẳng d (d cắt và không vuông góc (P)). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, nằm trong (P) và tạo với d một góc nhỏ nhất.

Phương pháp:

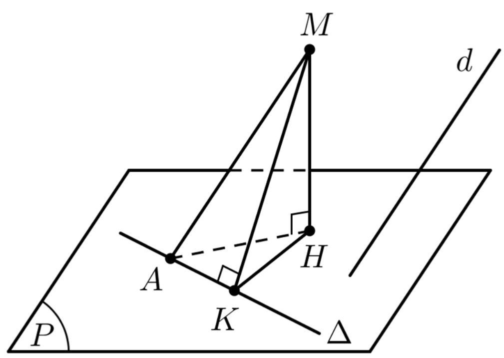
Trên đường thẳng song song với d tại A, lấy điểm M.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và Δ.

Ta có $\cos(d,\Delta) = \cos\widehat{MAK} = \dfrac{AK}{AM} \le \dfrac{AH}{AM}$. Góc (d,Δ) nhỏ nhất khi và chỉ khi $K \equiv H$.

Khi đó Δ đi qua 2 điểm A, H.

Khi đó Δ có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{AH}$ hoặc $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_d}\right], \overrightarrow{n_P}\right]$.



Dạng 8: Cho mặt phẳng (P), điểm $A\in(P)$ và đường thẳng d cắt (P) tại điểm M. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua A sao cho khoảng cách giữa d và Δ lớn nhất.

Phương pháp:

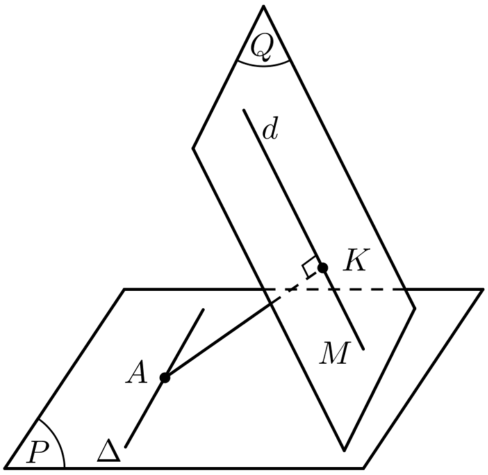
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Δ.

Khi đó $d(\Delta,d)=d(\Delta,(Q))=d(A,(Q))$.

Khi đó ta cần tìm (Q) chứa d và cách A một khoảng lớn nhất (**Dạng toán 3**). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Khoảng cách này lớn nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{AK}$ hoặc $\overrightarrow{n_Q}=\left[\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AB}\right],\overrightarrow{u_d}\right]$ với $B\in d$.

Khi đó $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AK}\right]$ hoặc $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=\left[\overrightarrow{n_P},\left[\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AB}\right],\overrightarrow{u_d}\right]\right]$ với $B\in d$.

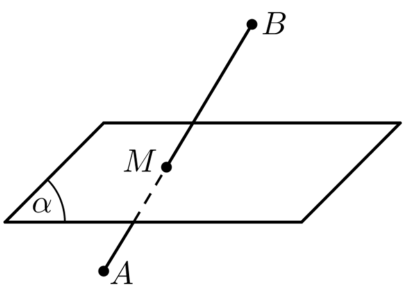


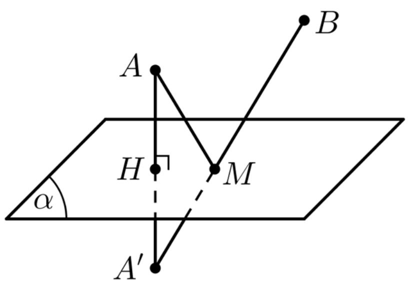
Dạng 9: Cho mặt phẳng (α) và hai điểm A,B không thuộc (α). Tìm điểm M trên (α) sao cho $MA+MB$ có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp:

TH1: A,B nằm khác phía so với (α). Ta có $MA+MB\ge AB$. Khi đó $MA+MB$ nhỏ nhất khi M thuộc AB hay M là giao điểm của (α) và AB.

TH2: A,B nằm cùng phía so với (α). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (α). Do $MA+MB$ $=MA'+MB$ nên $MA'+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M là giao điểm của (α) và $A'B$.



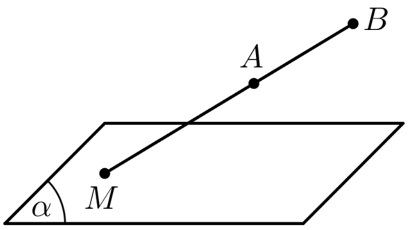


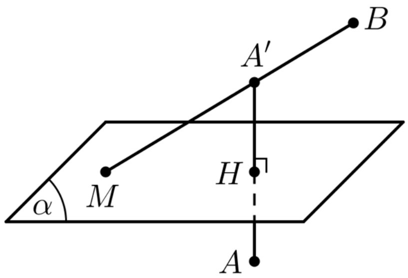
Dạng 10: Cho mặt phẳng (α) và hai điểm A,B không thuộc (α). Tìm điểm M trên (α) sao cho $|MA-MB|$ có giá trị lớn nhất với $d(A,(\alpha))\ne d(B,(\alpha))$.

Phương pháp:

TH1: A, B nằm cùng phía so với (α). Ta có $|MA - MB| \le AB$. Khi đó $|MA - MB|$ lớn nhất bằng AB khi M là giao điểm của AB và (α).

TH2: A, B nằm khác phía so với (α). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (α). Khi đó A' và B nằm cùng phía so với (α) và $MA = MA'$ nên $|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$. Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất bằng $A'B$ khi M là giao điểm của $A'B$ và (α).

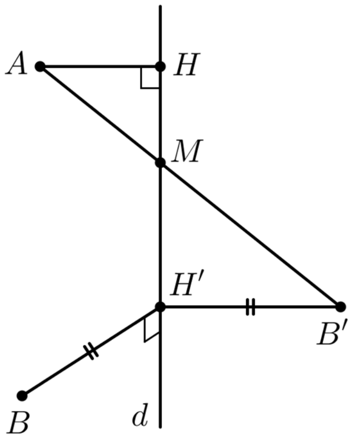




Dạng 11: Trong không gian cho đường thẳng d và hai điểm A, B. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Phương pháp:

- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H, H' tương ứng của A, B trên d.
- Tính độ dài AH và BH'.
- Điểm M có tọa độ thỏa $\overrightarrow{HM} = -\dfrac{AH}{BH'}.\overrightarrow{H'M}$.



Nhận xét:

1) Nếu $AB \parallel d$ thì điểm M là hình chiếu vuông góc của trung điểm I của AB trên d.

2) Nếu $AB \perp d$ thì $M \equiv H \equiv H'$.

3) Sử dụng bất đẳng thức Mincopxki: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

4) Có thể dùng phương pháp hàm số để giải quyết (thường phức tạp).

Dạng 12: Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$ thỏa $k_1 + k_2 + ... + k_n \ne 0$. Tìm điểm M (thuộc 1 đường thẳng, 1 mặt phẳng hoặc 1 mặt cầu) sao cho biểu thức $\left|k_1\overrightarrow{MA_1} + k_2\overrightarrow{MA_2} + ... + k_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ có giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất).

Phương pháp (tâm tỉ cự):

- Tìm điểm I thỏa $k_1\overrightarrow{IA_1}+k_2\overrightarrow{IA_2}+...+k_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

- Biến đổi: $\left|k_1\overrightarrow{MA_1}+k_2\overrightarrow{MA_2}+...+k_n\overrightarrow{MA_n}\right|=\left|(k_1+k_2+...+k_n).\overrightarrow{MI}\right|=\left|k_1+k_2+...+k_n\right|.MI$

Khi đó: $\left|k_1\overrightarrow{MA_1}+k_2\overrightarrow{MA_2}+...+k_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất (lớn nhất) khi MI nhỏ nhất (lớn nhất).

Dạng 13: Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$. Tìm điểm M (thuộc 1 đường thẳng, 1 mặt phẳng hoặc 1 mặt cầu) sao cho $T=k_1MA_1^2+k_2MA_2^2+...+k_nMA_n^2$:

a) Đạt giá trị nhỏ nhất khi $k_1+k_2+...+k_n>0$ hoặc

b) Đạt giá trị lớn nhất khi $k_1+k_2+...+k_n<0$.

Phương pháp (tâm tỉ cự):

- Tìm điểm I thỏa $k_1\overrightarrow{IA_1}+k_2\overrightarrow{IA_2}+...+k_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

- Biến đổi: $T=k_1MA_1^2+k_2MA_2^2+...+k_nMA_n^2$

$=(k_1+...+k_n)MI^2+k_1IA_1^2+k_2IA_2^2+...+k_nIA_n^2+2\overrightarrow{MI}.\left(k_1\overrightarrow{IA_1}+k_2\overrightarrow{IA_2}+...+k_n\overrightarrow{IA_n}\right)$

$=(k_1+...+k_n)MI^2+k_1IA_1^2+k_2IA_2^2+...+k_nIA_n^2$.

Khi đó, do $k_1IA_1^2+k_2IA_2^2+...+k_nIA_n^2$ không đổi nên biểu thức T nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) khi MI nhỏ nhất.

Nhận xét:

1) Nếu M thuộc đường thẳng (hoặc mặt phẳng) thì MI nhỏ nhất (không có trường hợp lớn nhất) khi M là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng (hoặc mặt phẳng) đó.

2) Nếu M thuộc mặt cầu (S) thì MI nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) khi M là giao điểm của đường thẳng d đi qua I và tâm của mặt cầu (S) (tùy trường hợp).

Chú ý: Nếu M thuộc đường thẳng d thì ta có thể đưa bài toán về việc xét GTLN, GTNN của một hàm $f(t)$ thích hợp.

THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 12

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1

Khoảng biến thiên

Khoảng biến thiên, kí hiệu R, của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

Chú ý:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau: Nếu n_1 và n_k cùng khác 0 thì $R=u_{k+1}-u_1$.

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	...	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

• Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

• Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

• Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).

• Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.

• Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là ***giá trị ngoại lệ*** nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.

• Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

2

Phương sai

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$(1)\ S^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(c_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(c_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(c_k - \overline{x}\right)^2\right];$$

$$(2)\ S^2 = \frac{1}{n}\left(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \ldots + n_kc_k^2\right) - \overline{x}^2 .$$

Trong đó: • $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ là cỡ mẫu;

• $\overline{x} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_kc_k\right)$ là số trung bình;

• $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các giá trị đại diện các nhóm.

Độ lệch chuẩn

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S, là căn bậc hai số học của phương sai:

$$S = \sqrt{S^2} .$$

Chú ý: Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm: $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\left[n_1\left(c_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(c_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(c_k - \overline{x}\right)^2\right]$.

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

• Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai của mẫu số liệu gốc. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cũng là giá trị xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.

• Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Chú ý: Với các mẫu số liệu ghép nhóm có cùng số trung bình (hoặc xấp xỉ nhau), ta thường sử dụng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ phân tán của các mẫu số liệu đó.

Trong tài chính, người ta có nhiều cách để đo độ rủi ro của một phương án đầu tư. Một trong các cách đó là sử dụng độ lệch chuẩn của lợi nhuận thu được theo phương án đầu tư. Độ lệch chuẩn càng lớn thì phương án đầu tư càng rủi ro. Ta không nên dùng phương sai hay độ lệch chuẩn để so sánh độ rủi ro của hai phương án đầu tư khi lợi nhuận trung bình của hai phương án đầu tư này khác nhau rất nhiều.

Chú ý: Để so sánh độ phân tán của hai mẫu số liệu khi đơn vị đo trên hai mẫu số liệu khác nhau hoặc giá trị trung bình của hai mẫu số liệu này khác nhau rất nhiều người ta dùng hệ số biến thiên CV (Coefficient of Variation). Hệ số biến thiên được tính theo công thức: $CV = \frac{S}{\overline{x}}$, trong đó S là độ lệch chuẩn và $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

1

Xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là ***xác suất của A với điều kiện B***, kí hiệu $P(A|B)$.

Công thức tính xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B bất kì với $P(B)>0$. Khi đó:

• $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{n(AB)}{n(B)}$ với $P(B)>0$; • $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{n(AB)}{n(A)}$ với $P(A)>0$.

Chú ý:

• Nhắc lại: $AB=A\cap B$; $\overline{A}\overline{B}=\overline{A\cup B}$; $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$.

• $P(AB)=P(A).P(B|A)=P(B).P(A|B)$ (***công thức nhân xác suất*** cho hai biến cố bất kì).

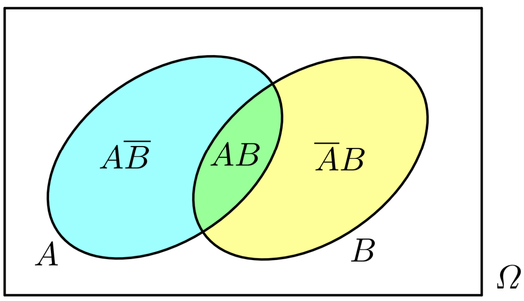
• $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$ với $P(B)>0$.

• Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì:
  - $P(A)=P(A|B)=P(A|\overline{B})$ với $0<P(B)<1$;
  - $P(B)=P(B|A)=P(B|\overline{A})$ với $0<P(A)<1$.

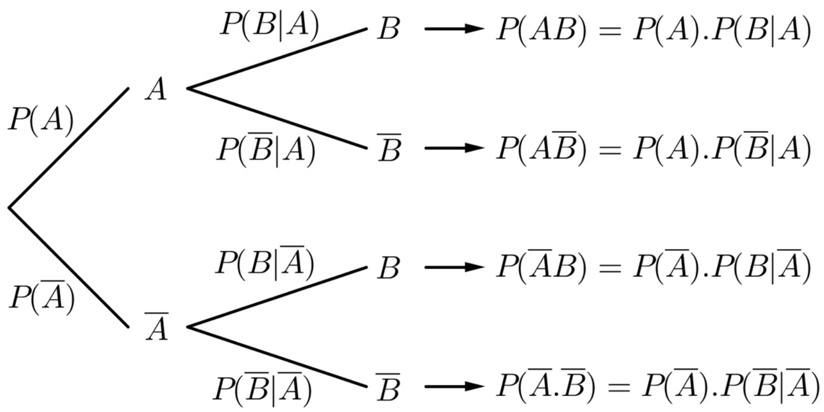
• $P(A)+P(\overline{A})=1$.

• $P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)$.

• $P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B)$.



Sơ đồ hình cây



Trên sơ đồ hình cây:

• Xác suất của các nhánh trong sơ đồ hình cây từ đỉnh thứ hai là xác suất có điều kiện.

• Xác suất xảy ra của mỗi kết quả bằng tích các xác suất trên các nhánh của cây đi đến kết quả đó.

2

Công thức xác suất toàn phần

• $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = P(B).P(A|B) + P(\overline{B}).P(A|\overline{B})$ với $0 < P(B) < 1$.

• $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A})$ với $0 < P(A) < 1$.

Chú ý: Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với hai biến cố A, B bất kì.

Công thức Bayes

• $P(B|A) = \dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$ với $P(A) > 0$.

• $P(A|B) = \dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}$ với $P(B) > 0$.

• $P(B|A) = \dfrac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B) + P(\overline{B}).P(A|\overline{B})}$ với $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$.

• $P(A|B) = \dfrac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}$ với $P(B) > 0$ và $0 < P(A) < 1$.