BÀI 2
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D, kí hiệu $M = \max\limits_{D} f(x)$ nếu:

$f(x) \le M, \forall x \in D$ và tồn tại $x_o \in D$ sao cho $f(x_o) = M$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D, kí hiệu $m = \min\limits_{D} f(x)$ nếu:

$f(x) \ge m, \forall x \in D$ và tồn tại $x_o \in D$ sao cho $f(x_o) = m$.

Chú ý: Khi tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không chỉ rõ tập D thì ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

2. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm.

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng, ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể một số hữa hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữa hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

- ***Bước 1:*** Tìm các điểm $x_1, x_1, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.
- ***Bước 2:*** Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.
- ***Bước 3:*** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận
  - \+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
  - \+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Nhận xét:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D, kí hiệu $M=\max\limits_{D} f(x)$ nếu:

$f(x)\le M, \forall x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=M$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D, kí hiệu $m=\min\limits_{D} f(x)$ nếu:

$f(x)\ge m, \forall x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=m$.

Chú ý: Khi tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không chỉ rõ tập D thì ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

1. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng hoặc nửa khoảng hoặc đoạn

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên một khoảng $(a;b)$, đoạn $[a;b]$ hay nửa khoảng $[a;b),(a;b]$, ta làm như sau:

- **Bước 1:** Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên tập xác định.

- **Bước 2:** Căn cứ vào bảng biến thiên, ta kết luận được giá trị lớn nhất (nếu có) hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$.

2. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên một đoạn $[a;b]$, ngoài cách trên, ta còn có cách sau:

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1,x_1,...,x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

- **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)$.

- **Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

  + Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

  + Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

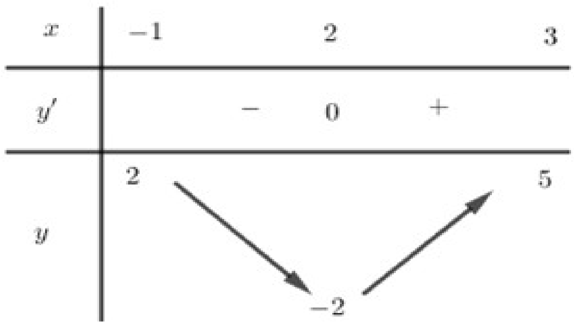
$$\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)\} \\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)\} \end{cases}$$

Chú ý:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$

DẠNG 1
TÌM GTLN VÀ GTNN KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

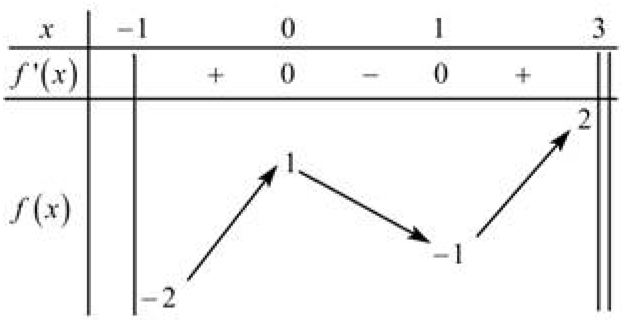
Bài 1. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

Bài 2. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $[-1;3)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

Bài 3. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-4;4]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;2)$.

Bài 4. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[0;1]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;1)$.

d) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Bài 5. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

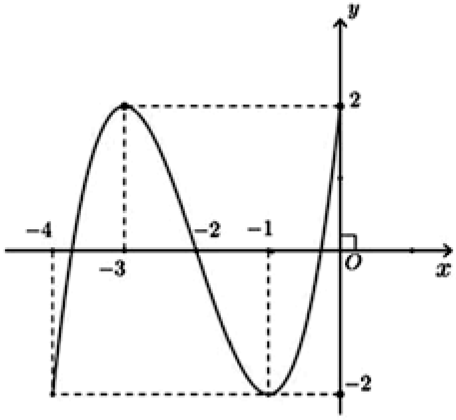
x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;+\infty)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên tập xác định.

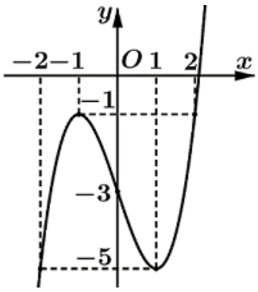
Bài 6. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;0]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

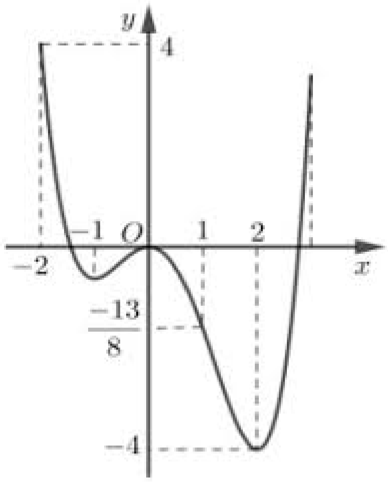
Bài 7. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

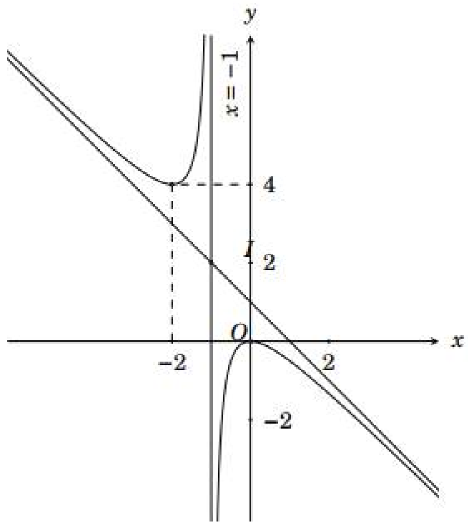
Bài 8. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

Bài 9. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ.

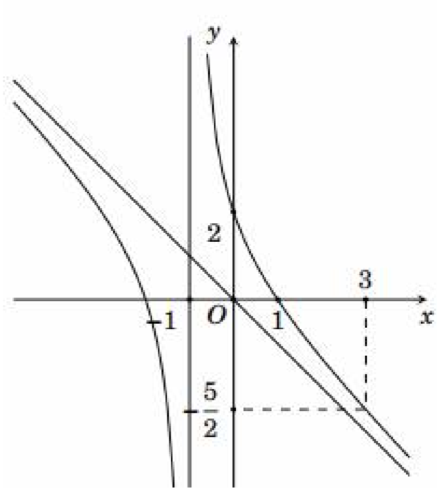


a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên tập xác định.

Bài 10. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;+\infty)$.

DẠNG 2

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a;b]$

Phương pháp :

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_1, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.
- **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.
- **Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

$$\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = \max\left\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\right\} \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = \min\left\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\right\} \end{cases}$$

Nhận xét:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$

Chú ý: Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $[a;b]$.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2;19]$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1;3]$

c) $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[0;2]$.

d) $y = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0;2]$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y = x + \dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

c) $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$.

d) $y = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sqrt{4-x^2}$

b) $y = x + \sqrt{4-x^2}$

c) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ trên $[-1;3]$.

d) $y=x+1+\sqrt{-3x^2+6x+9}$ trên $[-1;3]$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x+1+2\sqrt{-2x^2+2x+4}$ trên $[-1;2]$.

b) $y=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên $[0;3]$.

c) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1;2]$.

d) $y=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$

DẠNG 3

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a;b)$

NỬA KHOẢNG $(a;b]$; $[a;b)$.

Phương pháp : Dùng bảng biến thiên để tìm max – min.

- **Bước 1:** Tìm tập xác định.
- **Bước 2:** Tính $f'(x)$
- **Bước 2:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = 4x^3 - 3x^4$

b) $y = 2x^5 + 5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3}$

c) $y = \frac{x}{x^2+1}$

d) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x + \frac{4}{x}$ với $x > 0$.

b) $y = x - \frac{1}{x}$ với $x \in (0;2]$

c) $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) $y = x + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x\sqrt{3-x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

DẠNG 4
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

b) $y = x + \dfrac{1}{x} + x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ trên đoạn $\left[1;3\right]$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$ trên đoạn $\left[0;63\right]$.

b) $y = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$.

DẠNG 5
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Đạo hàm của hàm sơ cấp thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)' = u.'\cos u$ $(\cos u)' = -u'.\sin u$ $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

d) $y = 2\sin x - \dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$.

b) $y = \cos^2 2x - \sin x\cos x + 4$

c) $y = \cos^4 x + \sin^2 x - 2$

d) $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

DẠNG 6
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Đạo hàm của hàm sơ cấp thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp
$\left(e^x\right)'=e^x$ $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	$\left(e^u\right)'=u'.e^u$ $\left(a^u\right)'=u'a^u\ln a$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)'=\dfrac{u'}{u}$ $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x^2\ln x$ trên đoạn $[1;e]$ b) $y=x^2e^{-x}$ trên đoạn $[0;\ln 8]$

c) $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$ d) $y=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$ trên đoạn $[0;2]$. b) $y=\ln\left(2x^2-5x+3\right)$ trên đoạn $[2;3]$.

Lời giải

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$$y'=1-\frac{4x}{x^2+3}=\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(N)\\x=3(L)\end{array}\right.$$

Ta có: $f(0)=-2\ln 3;\ f(1)=1-4\ln 2;\ f(2)=4-2\ln 7$

$$\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{[0;2]}y=f(2)=4-2\ln 7\\ \min\limits_{[0;2]}y=f(0)=-2\ln 3\end{cases}$$

b) $y=\ln\left(2x^2-5x+3\right)$ trên đoạn $[2;3]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$$y'=\frac{4x-5}{2x^2-5x+3}$$

$y'=0 \Leftrightarrow 4x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}(L)$

Ta có: $f(0)=\ln 3; f(2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[2;3]} y = f(0)=\ln 3 \\ \min\limits_{[2;3]} y = f(2)=0 \end{cases}$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=e^{2x^2-2x+1}$

b) $y=e^{x-\sqrt{4-x^2}}$

DẠNG 7
ỨNG DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG THỰC TIỄN

Phương pháp chung:

- **Bước 1:** Chọn đặt biến x, kèm điền kiện tồn tại x.
- **Bước 2:** Dựa vào giả thiết và các quan hệ bài toán để xác lập hàm số chứa ẩn x.
- **Bước 3:** Ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số như ta đã biết và có thể phối hợp nhiều phương pháp khác.

- **Bài toán chuyển động**

Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc

Khi đó $v(t)=s'(t)$; $a(t)=v'(t)=s''(t)$

- **Bài toán thực tế**

Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$

Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

Chú ý:

- Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương:

Với *a, b* ≥ 0, ta có: $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

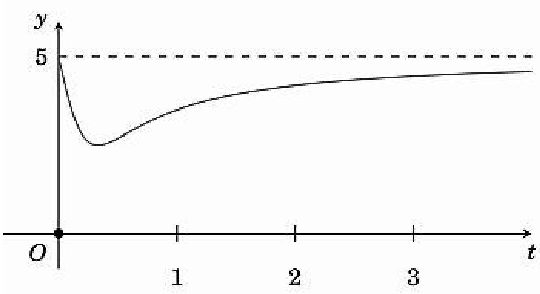
- Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương:

Với *a, b, c* ≥ 0, ta có: $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 1. Một cửa hàng bán Xoài với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số Xoài bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

Bài 2. Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ $(t\geq 0)$ khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ như hình bên.Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?



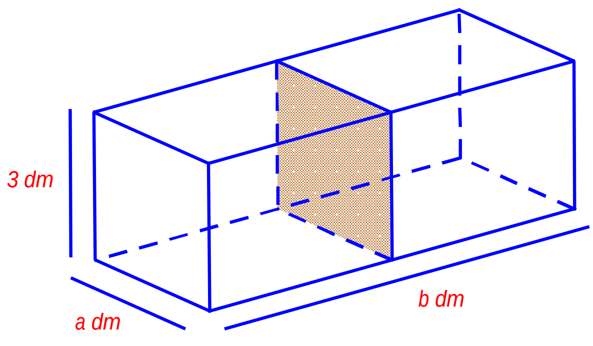
Bài 3. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Bài 4. Thầy Hùng dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

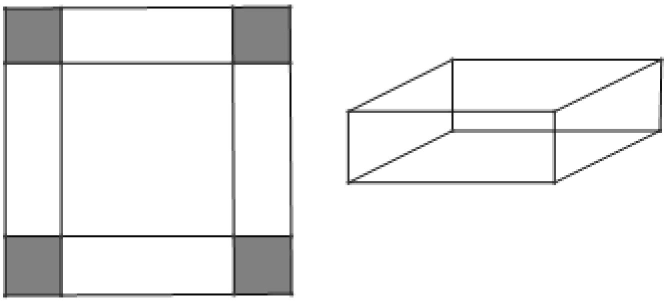
Bài 5. Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2024. Thầy Nam đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x bằng bao nhiêu?

Bài 6. Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là 125m^3. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

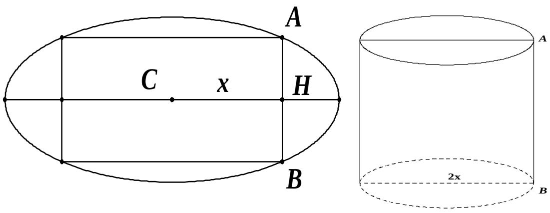
Bài 7. Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72\,\text{dm}^3$, chiều cao là 3dm. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a,b (đơn vị dm) như hình vẽ. Tính a,b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



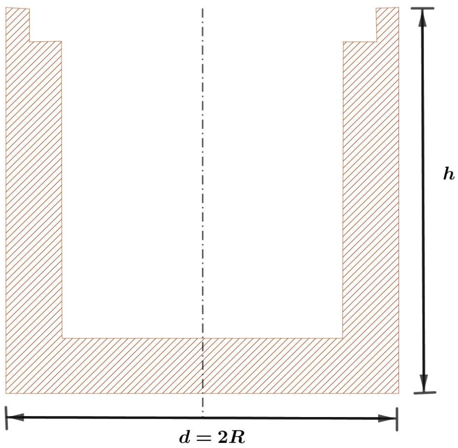
Bài 8. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp(tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



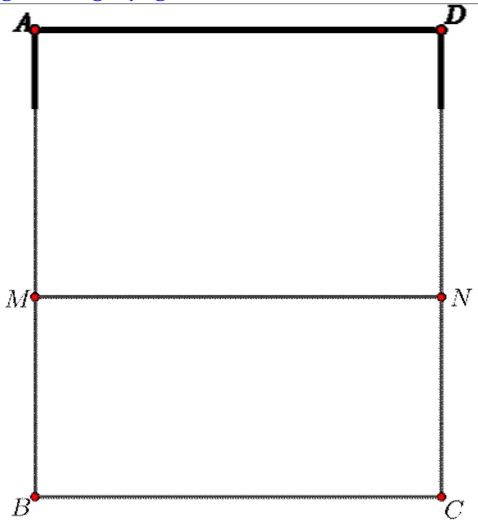
Bài 9. Từ một tấm tôn có hình dạng elip với độ dài trục lớn bằng 6 độ dài trục bé bằng 4. Người thợ cần cắt một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elíp, sau đó gò tấm tôn hình chữ nhật này thành một hình trụ không có đáy (như hình bên)**.** Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó?

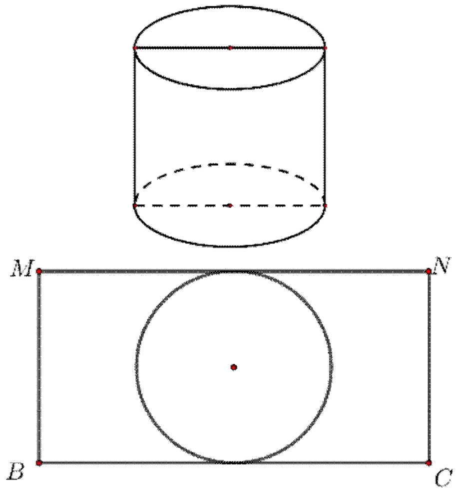


Bài 10. Bác Hà muốn xây dựng một hố ga không nắp hình trụ với dung tích $3m^3$. Hãy tính chi phí ít nhất mà bác Hà phải bỏ ra xây dựng hố ga, biết tiền công và vật liệu cho $1m^2$ thành bê tông của hố ga (thành bê tông đáy và thành bê tông xung quang) là 685000 đồng.

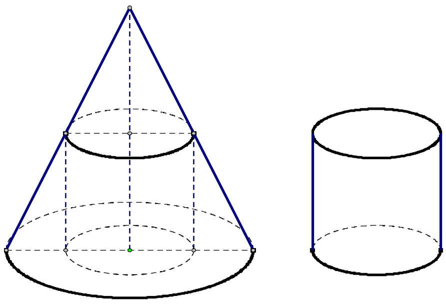


Bài 11. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1m^2 và cạnh $BC = x(\text{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2 hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox thừa được bỏ đi) Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



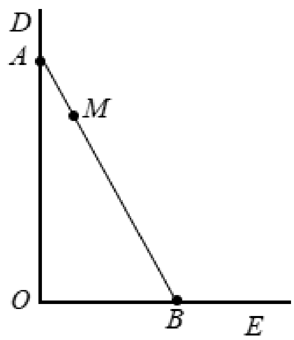


Bài 12. Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2\text{m}$, chiều cao $h = 6\text{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



Bài 13. Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8\left(m^3\right)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Bài 14. Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?



DẠNG 8
TÌM (GTLN) VÀ (GTNN) CỦA HÀM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

c) Hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+2024$ có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+5m}{x-3}$ trên $[1;2]$ bằng 4

b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn$[0;4]$ bằng -1.

b) Hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-1}{x+2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn$[1;3]$ bằng $\dfrac{1}{5}$.

c) Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$(tham số m).

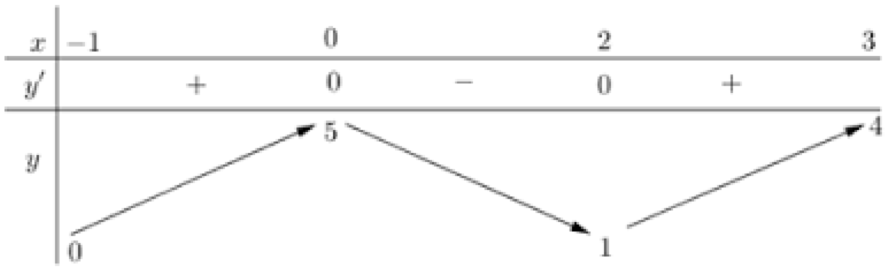
a) Tìm tham số m để hàm số liên tục trên $[0;2]$.

b) Tìm tham số m để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

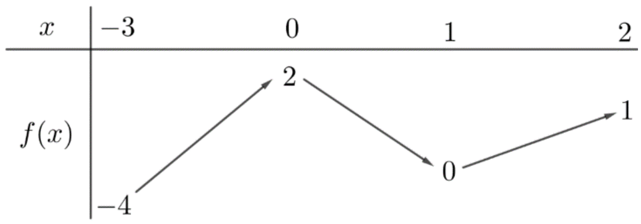
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?



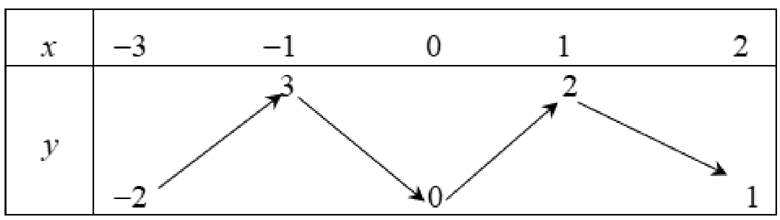
A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $M.m$.



A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -8.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$.

Tính $M + m$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	0		3		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f\left(x_0\right)$ tại x_0. Khi đó tích $x_0.f\left(x_0\right)$ bằng

A. 30. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 0.

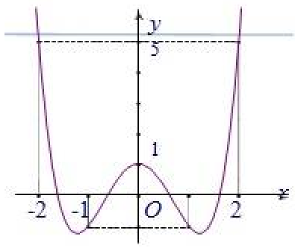
Câu 5. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right) = f\left(0\right)$ **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f\left(x\right) = f\left(1\right)$ **C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f\left(x\right) = f\left(-1\right)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f\left(x\right) = f\left(0\right)$

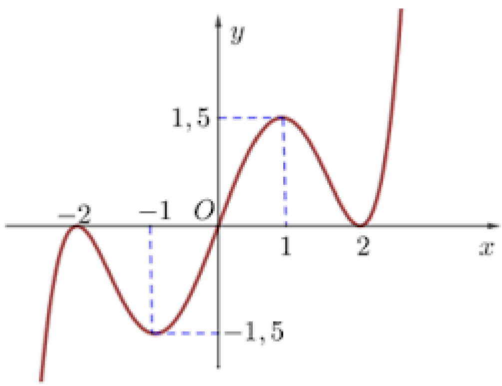
Câu 6. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

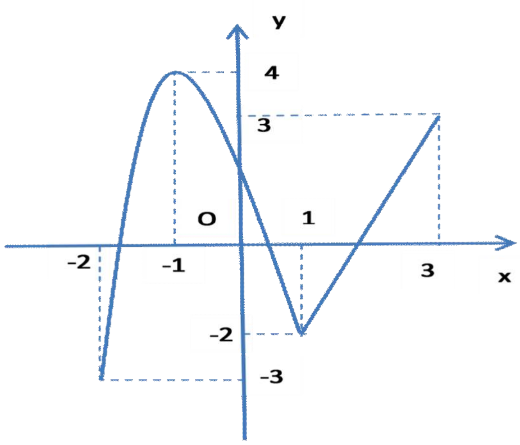
Câu 7. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) + 2024$ cho trên đoạn $\left[-2;2\right]$. Giá trị $M - m$ bằng:

A. $M - m = 0$ **B.** $M - m = -2024$ **C.** $M - m = 4048$ **D.** $M - m = 3$

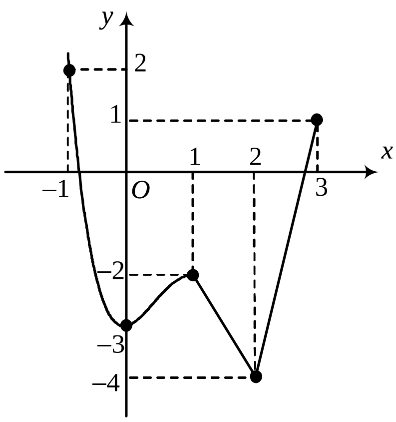
Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [-2;3] có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $2m-3M$ bằng:

A. -13. **B.** -18. **C.** -16. **D.** -15.

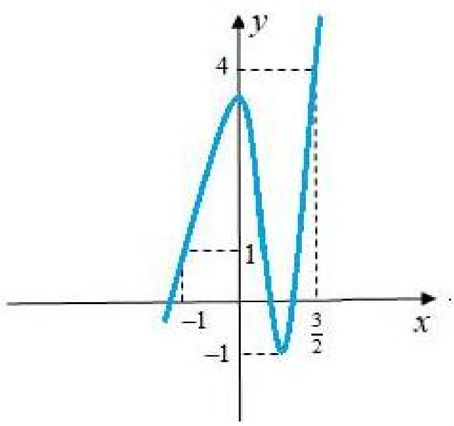
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là

A. 2. **B.** −6. **C.** −5. **D.** −2.

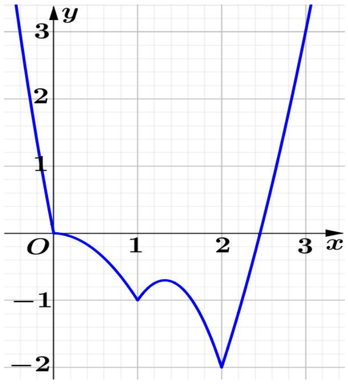
Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng

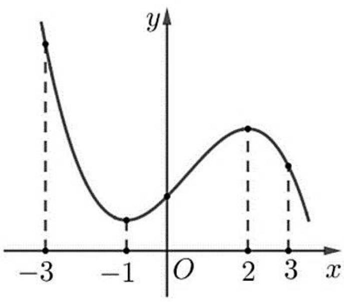
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

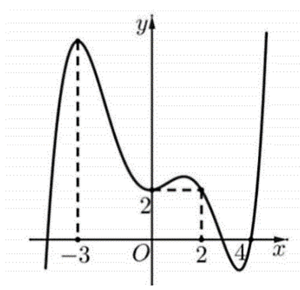
Câu 12. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(-3)$. **D.** $f(3)$

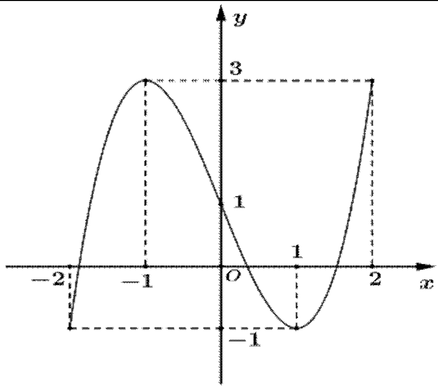
Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng:

A. $f(2)$. **B.** $f(-3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$

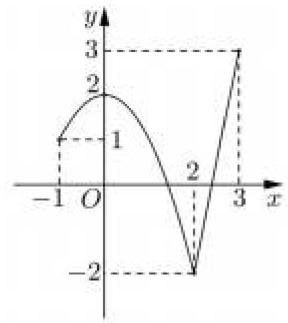
Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 3.

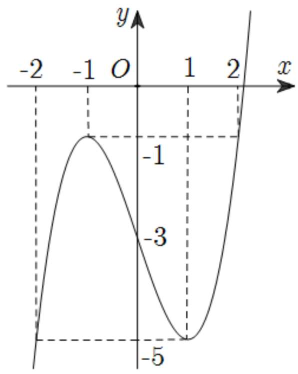
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 1 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 0

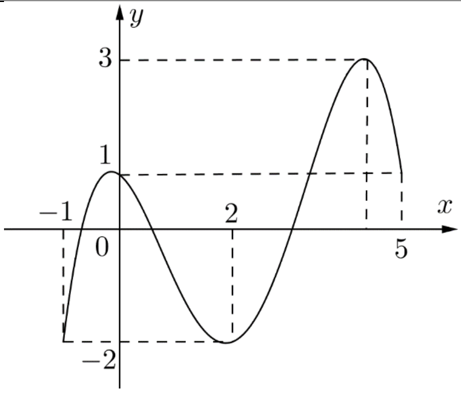
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $m=-5;M=-1$. **B.** $m=-2;M=2$. **C.** $m=-1;M=0$. **D.** $m=-5;M=0$.

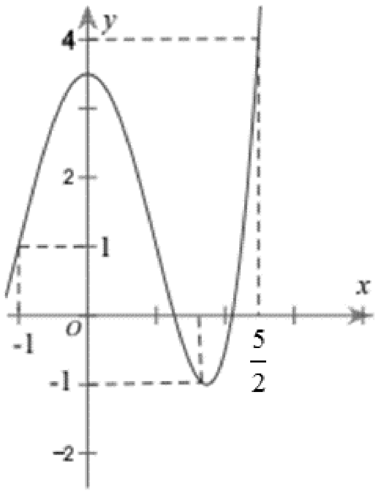
Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới.



Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

A. -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

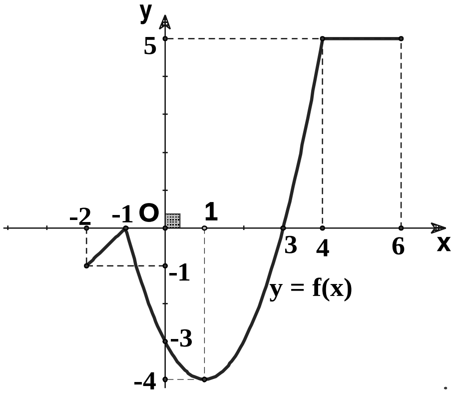
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ là:

A. $M=4, m=1$ **B.** $M=4, m=-1$ **C.** $M=\dfrac{7}{2}, m=-1$ **D.** $M=\dfrac{7}{2}, m=1$

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 9. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 8.

Câu 20. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. -12. **B.** 10. **C.** 15. **D.** -2.

Câu 21. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=5$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=4$.

Câu 22. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=x^3-3x+4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\min\limits_{[2;\,4]} y=0.$ **B.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=3.$ **C.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=5.$ **D.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=7.$

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min\limits_{[0;\,3]} y=-3.$ **B.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=-1.$ **D.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=1.$

Câu 25. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là:

A. $\dfrac{17}{3};\,3$ **B.** $\dfrac{17}{3};\,-5.$ **C.** $3;\,-5.$ **D.** $-3;\,5.$

Câu 26. Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x+\dfrac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5. **B.** $-\dfrac{29}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{2}$. **D.** 4.

Câu 27. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M-m$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 28. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;\,4]$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** $\dfrac{19}{3}$. **D.** $\dfrac{23}{3}$.

Câu 29. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 30. Hàm số $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $\sqrt{2};\,1$. **B.** $1;\,0$. **C.** $2;\,\sqrt{2}$. **D.** $2;\,1$.

Câu 31. Hàm số $y=\cos 2x-3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ bằng:

A. -4. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 32. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5\cos x-\cos 5x$ với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ là:

A. $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4.$ **B.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{2}.$ **C.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{3}.$ **D.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=-1.$

Câu 33. Hàm số $y=\cos^2 x-2\cos x-1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt bằng $y_1;y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** -4. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** 1.

Câu 34. Hàm số $y=\cos 2x-4\sin x+4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2}; 0$. **B.** $5; 1$. **C.** $5; -1$. **D.** $9; 1$.

Câu 35. Hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là *M*, giá trị nhỏ nhất là *m*. Khi đó $M-m$ bằng

A. $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}-1$. **D.** -1.

Câu 36. Hàm số $y=\sin x+\cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2; 2$. **B.** $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$. **C.** $0; 1$. **D.** $-1; 1$.

Câu 37. Hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\ 1$. **B.** $0;\ 2$. **C.** $\frac{1}{2};\ 1$. **D.** $0;\ 1$.

Câu 38. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\frac{\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{3}{e^2}$. **D.** $\frac{1}{e}$.

Câu 39. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. $2e^4$ **B.** $-e^2$ **C.** $2e^2$ **D.** $-2e^2$

Câu 40. Hàm số $y=(x-1)^2+(x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3. **B.** -1. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 41. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là:

A. $\min\limits_{(1;+\infty)} y=-1.$ **B.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=3.$ **C.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=5.$ **D.** $\min\limits_{(2;+\infty)} y=\frac{-7}{3}.$

Câu 42. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

A. $\min_{\mathbb{R}} y=3$. **B.** $\min_{\mathbb{R}} y=5$. **C.** $\min_{\mathbb{R}} y=3+\sqrt{5}$. **D.** $\min_{\mathbb{R}} y=0$.

Câu 43. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất. **B.** có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. có giá trị nhỏ nhất bằng –1. **D.** có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 44. Cho hàm số $y=x-\sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x=1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 45. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 46. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. Không tồn tại. **B.** 1. **C.** π. **D.** – 1.

Câu 47. Hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** Không tồn tại.

Câu 48. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=2025-\sin(2025x), \forall x\in\mathbb{R}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;0]$ là:

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2025)$. **D.** Không tồn tại.

Câu 49. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=\frac{1}{e^{2024x}}-e^{2024x}, \forall x\in\mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[2;3]$ là:

A. $f\left(\frac{5}{2}\right)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(3)$. **D.** Không tồn tại.

Câu 50. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=\ln(x+2025), \forall x\in\mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;2024]$ là:

A. $f(2024)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2025)$. **D.** $f(1)$.

Câu 51. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=6t^2-t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 2 (s) **B.** 12 (s) **C.** 6 (s) **D.** 4 (s)

Câu 52. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

A. $t=2$. **B.** $t=1$. **C.** $t=3$. **D.** $t=4$.

Câu 53. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=5s$ **B.** $t=6s$ **C.** $t=3s$ **D.** $t=1s$

Câu 54. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. $88(m/s)$. **B.** $25(m/s)$. **C.** $100(m/s)$. **D.** $11(m/s)$.

Câu 55. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 64 cm^2. **B.** 4 cm^2. **C.** 16 cm^2. **D.** 8 cm^2.

Câu 56. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

A. $16\sqrt{3}$ cm **B.** $4\sqrt{3}$ cm **C.** 24 cm **D.** $8\sqrt{3}$ cm

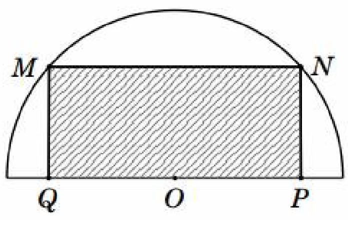
Câu 57. Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a>0$)?

A. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^2}{9}$. **C.** $\frac{2a^2}{9}$. **D.** $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Câu 58. Cho ΔABC đều cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên BC, hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất ?

A. $BM=\frac{2a}{3}$. **B.** $BM=\frac{3a}{4}$. **C.** $BM=\frac{a}{3}$. **D.** $BM=\frac{a}{4}$.

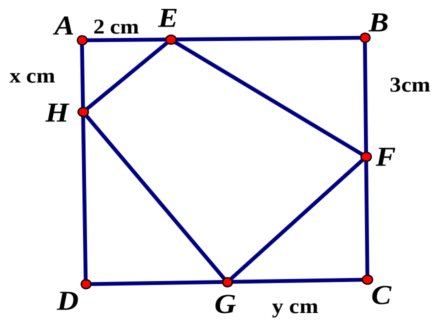
Câu 59. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên).



Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 9. **D.** $9\sqrt{2}$.

Câu 60. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



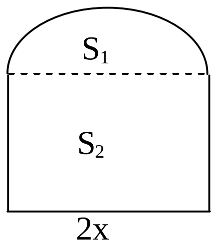
Tìm tổng x + y để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 7 **B.** 5 **C.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 61. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào . Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Khi đó, chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

A. 50 và 25 **B.** 35 và 35 **C.** 75 và 25 **D.** 50 và 50

Câu 62. Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là $a(m)$ (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?



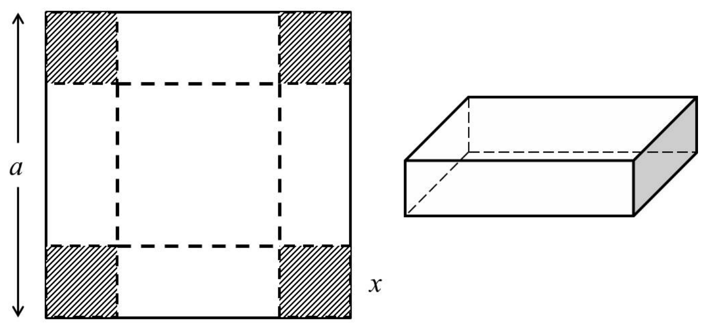
A. chiều rộng bằng $\frac{2a}{4+\pi}$, chiều cao bằng $\frac{a}{4+\pi}$

B. chiều rộng bằng $\frac{a}{4+\pi}$, chiều cao bằng $\frac{2a}{4+\pi}$

C. chiều rộng bằng $a(4+\pi)$, chiều cao bằng $2a(4+\pi)$

D. Đáp án khác

Câu 63. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh *a*. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?

A. $\frac{5a}{6}$. **B.** $\frac{a}{6}$. **C.** $\frac{a}{12}$. **D.** $\frac{a}{9}$.

Câu 64. Một Bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

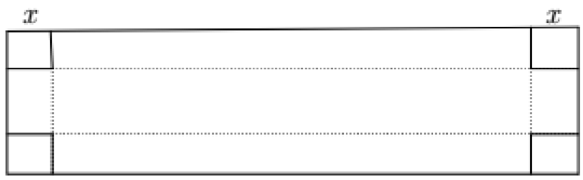
A. $1200cm^2$ **B.** $160cm^2$ **C.** $1600cm^2$ **D.** $120cm^2$

Câu 65. Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính $1m$, chiều dài $8m$ để được một cây xà hình khối chữ nhật. Hỏi thể tích cực đại của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu?

A. $V = 2m^3$ **B.** $V = 4m^3$ **C.** $V = 8m^3$ **D.** $V = 16m^3$

Câu 66. Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước $3m \times 8m$. Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là x để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp.

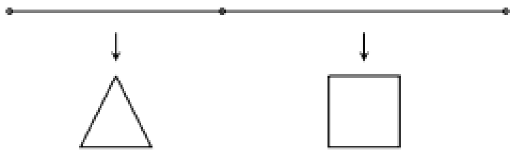
Hình vẽ :



Với giá trị nào của x thì thể tích hình hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất ?

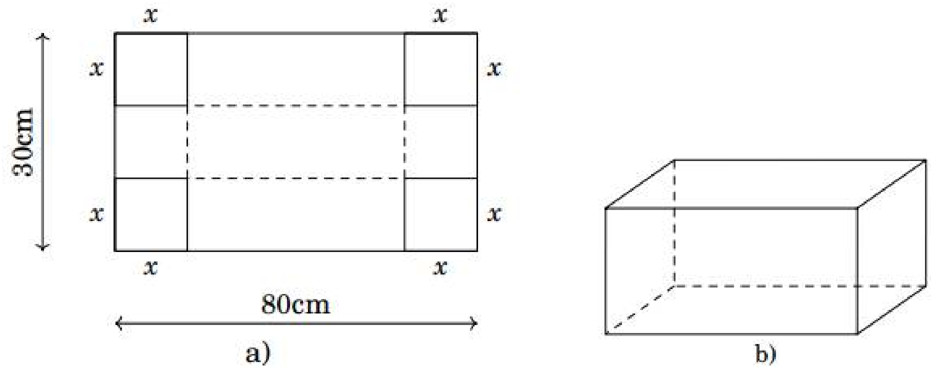
A. $x = \frac{1}{3}m$ **B.** $x = 1m$ **C.** $x = \frac{2}{3}m$ **D.** $x = \frac{4}{3}m$

Câu 67. Một sợi dây có chiều dài là 6m được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **B.** $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **C.** $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **D.** $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}\text{m}$.

Câu 68. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30cm và chiều dài 80cm (hình a) người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \le x \le 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp (hình b). Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất



A. $\frac{10}{3}\text{cm}$. **B.** $\frac{20}{3}\text{cm}$. **C.** $\frac{31}{3}\text{cm}$. **D.** $\frac{40}{3}\text{cm}$.

Câu 69. Thầy Huy dự định sử dụng hết $5,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\text{m}^3$. **B.** $1,17\text{m}^3$. **C.** $1,51\text{m}^3$. **D.** $1,40\text{m}^3$.

Câu 70. Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng

A. 5; – 8. **B.** 1; – 12. **C.** $\frac{-13}{2};\frac{13}{2}$. **D.** 6; – 7 .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 71. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4		-3		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$	6

a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 27 và giá trị nhỏ nhất bằng -5.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-3)$ và $(1;2)$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$ và cực đại tại $x = 27$

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;-1)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

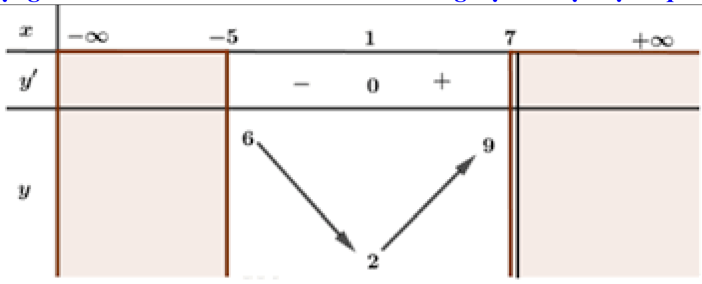
a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$; $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[-5;7)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;7)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$.

c) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(2;1)$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 9 và giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

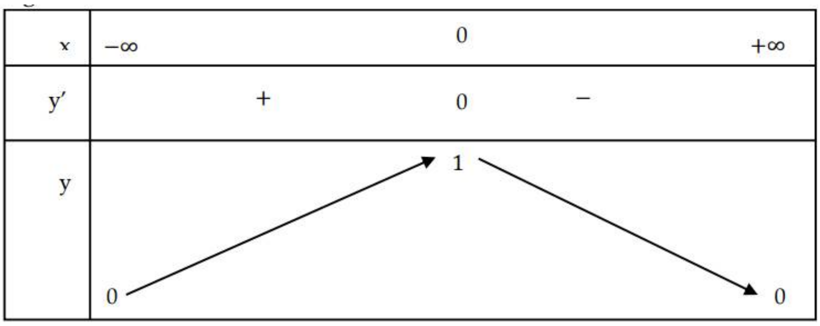
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

c) Trên nửa khoảng $(-1;1]$, hàm số có giá trị lớn nhất là $f(1)$ và có giá trị nhỏ nhất là $f(0)$.

d) Trên khoảng $(-1;+\infty)$, hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 76. Hàm số $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Xét trên tập xác định của hàm số.

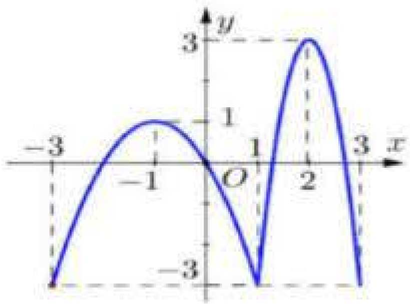
a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Hàm số có một điểm cực trị.

Câu 77. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



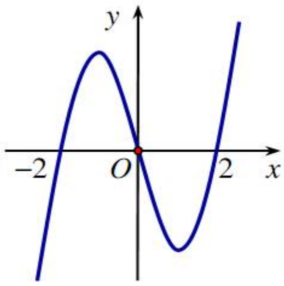
a) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng 3 tại $x = 2$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng -3 tại $x = -3$ và $x = 3$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;3)$.

d) Trên đoạn $[-3;3]$, đồ thị hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



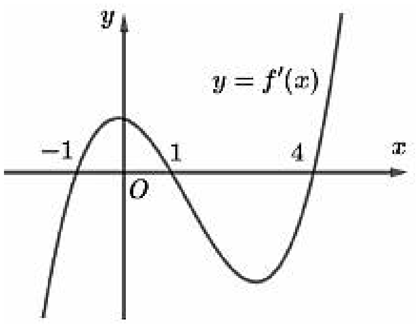
a) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $f(0)$ tại $x = 0$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên bằng $f(-2) = f(2)$ tại $x = -2$ và $x = 2$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



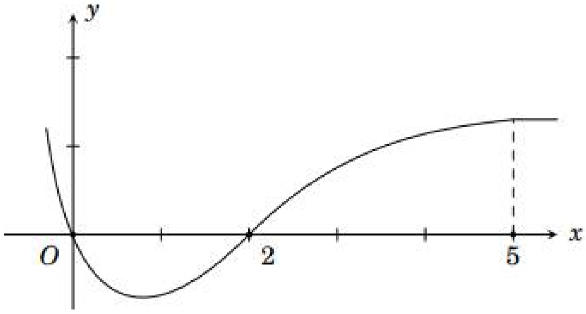
a) Hàm số có hai điểm cực trị

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

c) $f(1) > f(2) > f(4)$

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 0.

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$



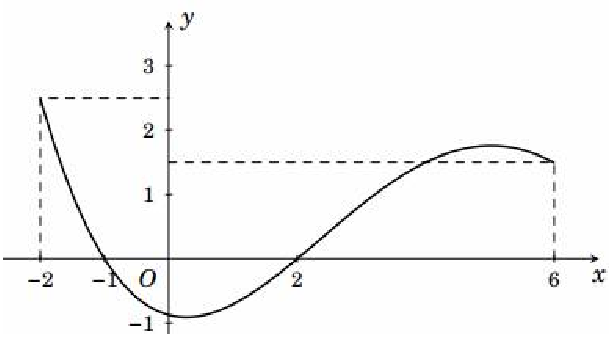
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

c) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$

d) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



a) $f(-1) > f(-2)$

b) $f(6) > f(2)$

c) Trên đoạn $[-2;6]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.

d) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$

Câu 82. Cho hàm số $y = \sqrt{5-4x}$.

a) Điều kiện xác định của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ là $x \in \left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$.

b) $y' = \dfrac{-4}{\sqrt{5-4x}}$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

d) Trên đoạn $[-1;1]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lần lượt là $\max\limits_{[-1;1]} y = 3$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = 1$.

Câu 83. Cho hàm số $y = x + \dfrac{9}{x}$.

a) Điều kiện xác định của hàm số $y = x + \dfrac{9}{x}$ là $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $y' = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$

c) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{25}{4}$ tại $x = 4$.

d) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 6 tại $x = 2$.

Câu 84. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(-1) = -12$

c) Trên đoạn $\left[-2;\dfrac{5}{2}\right]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 tại $x = -1$.

d) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -19 tại $x = 2$.

Câu 85. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y' = x^2 + 2x + 3$

c) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng -4 tại $x = 0$.

d) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\dfrac{16}{3}$ tại $x = -4$.

Câu 86. Cho hàm số $y = x + \sqrt{2 - x^2}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y' = \dfrac{\sqrt{2 - x^2} - x}{\sqrt{2 - x^2}}, \forall x \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 tại $x = 1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$ tại $x = -\sqrt{2}$.

Câu 87. Cho hàm số $y = \sqrt{2 + x} + \sqrt{4 - x}$.

a) Hàm số đã cho xác định khi $x \in (-2;4)$.

b) $f'(0) = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $2\sqrt{3}$ tại $x = 1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\sqrt{6}$ tại $x = -2$.

Câu 88. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x^2-x+1}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\frac{-x^2+2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{1}{3}$ tại $x=0$.

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 89. Cho hàm số $y=\ln(x-1)(3-x)$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\frac{-2x+4}{(x-1)(3-x)}$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 tại $x=2$.

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 90. Cho hàm số $y=2x-e^{2x}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(\ln 2)=6$

c) Trên đoạn $[-1;\ln 2]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 0 tại $x=0$.

d) Trên đoạn $[-1;\ln 2]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $2\ln 2-4$ tại $x=\ln 2$.

Câu 91. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với $t\ge 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật giảm.

b) Sau thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật tăng.

c) Vận tốc lớn nhất của vật tại thời điểm 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

d) Sau thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, gia tốc của bằng $6(m/s^2)$.

Câu 92. Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8 kể từ khi bắt đầu chuyển động, một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2$ với $t\ge 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 vận tốc của vật giảm.

b) Trong khoảng thời gian từ giây thứ 3 đến giây thứ 8 vận tốc của vật tăng.

c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8, vận tốc lớn nhất của vật bằng $3(m/s)$.

d) Ở giây thứ 4, gia tốc của bằng 1 (m/s^2).

Câu 93. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô . Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4 \text{ với } 0\le t\le 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 4 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $41,5$ lít

c) $V'(t)=300\left(2t-3t^2\right)$, với $0\le t\le 0,5$

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Câu 94. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 500 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3+15x-100$.

d) A bán cho B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 95. Bác Hồng nuôi cá tra ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước Bác Hồng với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

a) Số cá giống mà Bác Hồng đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x)=-0,0652x^2+16x+1500$ (kg)

d) Vụ tới Bác Hồng phải thả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Câu 96. Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108-x^2$ (gam).

a) Điều kiện xác định là $x\ge 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x\left(108-x^2\right)$

c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là

432 (gam).

Câu 97. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100m^3 sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

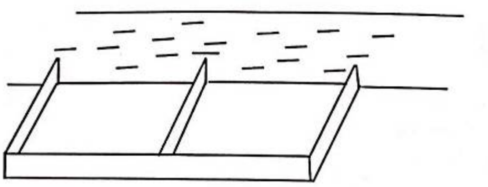
a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \le x \le 100$

b) Tổng chi phí sản xuất 100m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng

c) $\overline{C} = 0,001x + \dfrac{4}{x} + 0,2$ với $0 \le x \le 100$

d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)

Câu 98. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



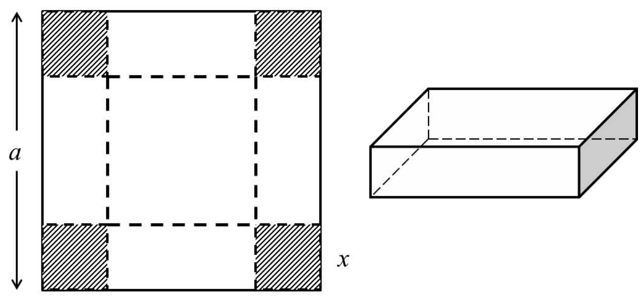
a) Số tiền phải làm là: $x.60000 + y.3.50000 = 15000000$ đồng.

b) Diện tích đất: $S = x.y = x.\dfrac{500-5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250\ \left(\text{m}^2\right)$

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

Câu 99. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp như hình vẽ. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt.



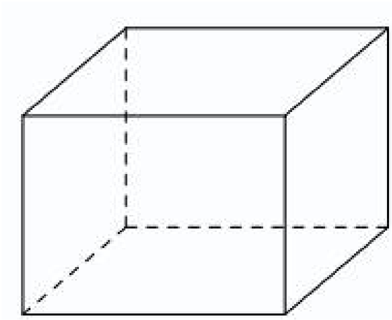
a) $0 < x < \frac{a}{2}$

b) Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2$ với $0 < x < \frac{a}{2}$.

c) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

d) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

Câu 100. Bác Tuấn muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\text{dm}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Gọi $x\,(x > 0)$ là chiều rộng của đáy bể



a) Chiều dài của đáy bể là $\frac{x}{2}$

b) Chiều cao của bể là $\frac{0{,}144}{x^2}$.

c) Diện tích cần xây là $2x^2 + \frac{0{,}864}{x}$

d) Bác Tuấn trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là 1080000 đồng.

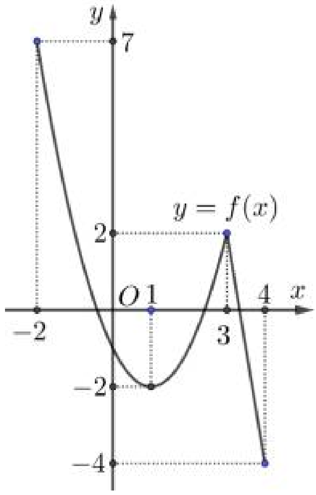
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-2;3]$ như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$.

x	-2		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

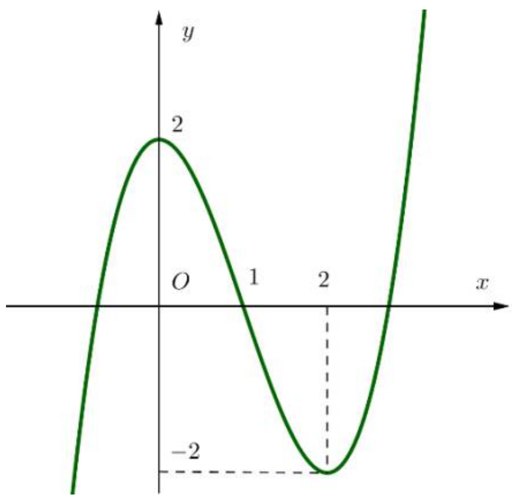
Trả lời: ………………..

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$.



Trả lời: ………………..

Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0;2]$. Tính $M + m$.

Trả lời: ………………..

Câu 104. Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 105. Biết giá trị lớn nhất hàm số $f\left(x\right)=x^{3}-8x^{2}+16x-9$ trên đoạn $\left[1;3\right]$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Tính gái trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 106. Cho hàm số $y=x+\frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\left[-1;2\right]$

Trả lời: ………………..

Câu 107. Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$ trên đoạn $\left[-5;-3\right]$ (lấy kết quả đến phần chục).

Trả lời: ………………..

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^{2}+1}}$. Tính tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-1;2\right]$ của hàm số đã cho (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ………………..

Câu 109. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$.

Trả lời: ………………..

Câu 110. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=x+\sqrt{4-x^{2}}$.

Trả lời: ………………..

Câu 111. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin x-\frac{4}{3}\sin^{3}x$ trên $\left[0;\pi\right]$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ………………..

Câu 112. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x\left(\sin x+1\right)$ trên đoạn $\left[0;\pi\right]$.

Trả lời: ………………..

Câu 113. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\frac{4}{3}\cdot 8^{x}$ trên $\left[-1;0\right]$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ………………..

Câu 114. Cho hàm số $y=e^{x}\left(x^{2}-3\right)$, gọi $M=\frac{a}{e^{b}}\left(a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}\right)$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-5;-2\right]$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 115. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}-4\sqrt{(x+4)(4-x)}+5$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ………………..

Câu 116. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x(x+2)(x+4)(x+6)+5$ trên nữa khoảng $\left[-4;+\infty\right)$.

Trả lời: ………………..

Câu 117. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$.

Trả lời: ………………..

Câu 118. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$.

Trả lời: ………………..

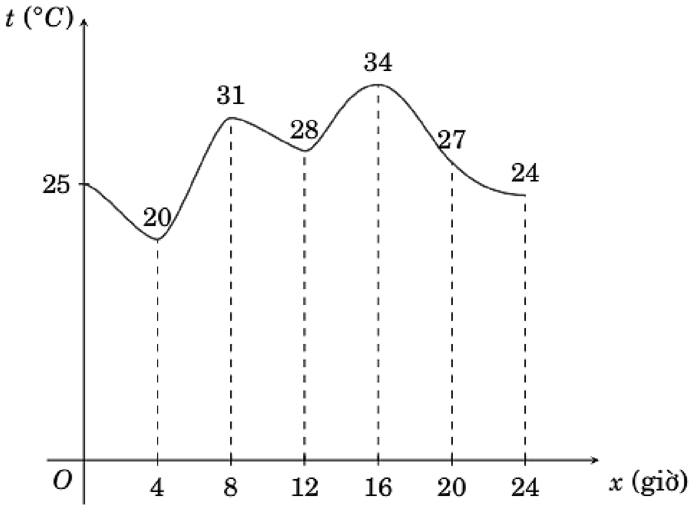
Câu 119. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$.

Trả lời: ………………..

Câu 120. Cho hàm số $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Tính $M + m$.

Trả lời: ………………..

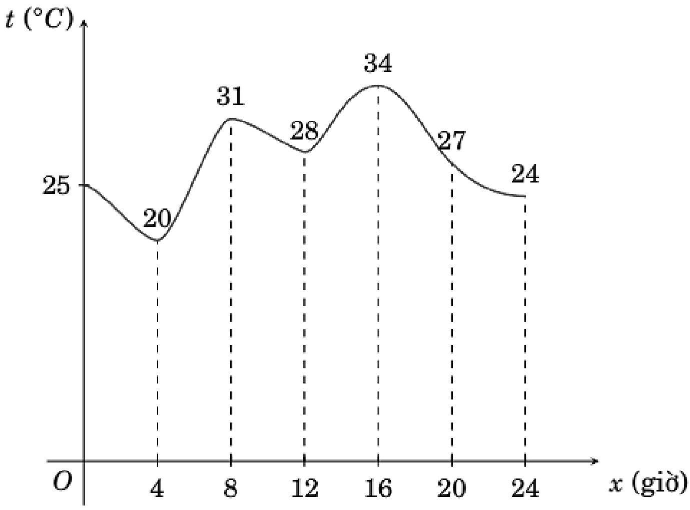
Câu 121. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày.



Nhiệt độ cao nhất trong ngày là bao nhiêu độ C?

Trả lời: ………………..

Câu 122. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày.

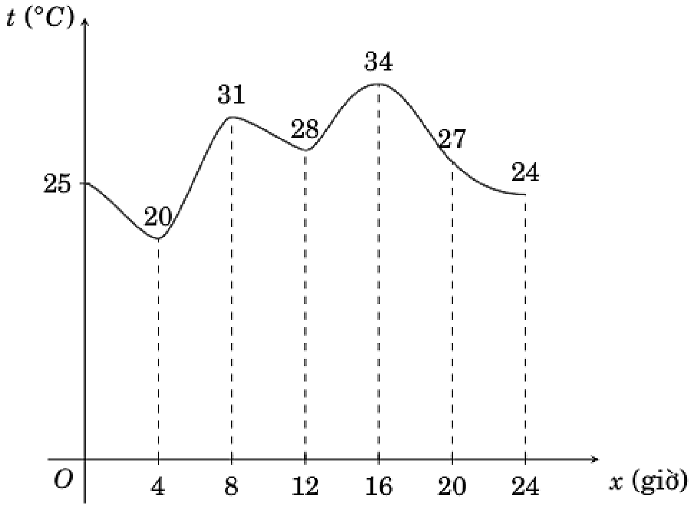


Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C?

$28°C$

Trả lời: ………………..

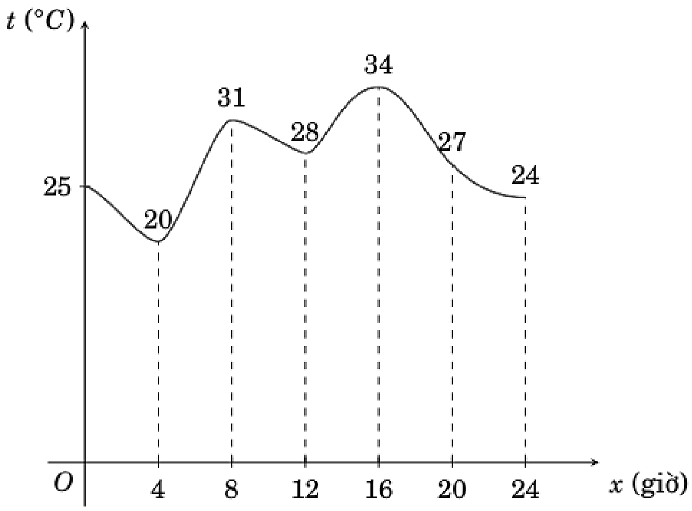
Câu 123. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày.



Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc mấy giờ?

Trả lời: ………………..

Câu 124. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày.



Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc mấy giờ?

Trả lời: ………………..

Câu 125. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây)là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 126. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2$ với là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Trả lời: ………………..

Câu 127. Một vật chuyển động theo quy luật $s=\frac{1}{3}t^3-t^2+9t,$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 128. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=t^2-\frac{1}{6}t^3\ (\text{m})$. Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v(\text{m/s})$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Trả lời: ………………..

Câu 129. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 130. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 131. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện và $0\le I\le 22$. Công suất P lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 132. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu mét trên giây?

Trả lời: ………………..

Câu 133. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin được cho bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

Trả lời: ………………..

Câu 134. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

Trả lời: ………………..

Câu 135. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

Trả lời: ………………..

Câu 136. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G\left(x\right)=0,025x^2\left(30-x\right)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng bao nhiêu miligam?

Trả lời: ………………..

Câu 137. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng bao nhiêu mét trên giây?

Trả lời: ………………..

Câu 138. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,1,2,...,25.$ Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn [0;25] thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Ngày thứ bao nhiêu thì mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

Trả lời: ………………..

Câu 139. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N\left(t\right)=1000+30t^2-t^3\left(0\le t\le 30\right)$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Trả lời: ………………..

Câu 140. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N\left(t\right)=1000+\dfrac{100}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời: ………………..

Câu 141. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f\left(v\right)=\dfrac{386v}{v^2+2v+5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ hai của kilômét/giờ)?

Trả lời: ………………..

Câu 142. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Trả lời: ………………..

Câu 143. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

Trả lời: ………………..

Câu 144. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Trả lời: ………………..

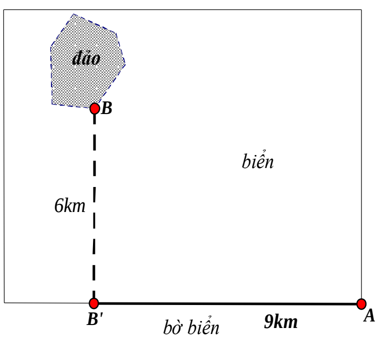
Câu 145. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}\,\mathrm{m}^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700000 đồng/m^2. Hỏi chi phí thuê nhân công ít nhất bao nhiêu triệu đồng để xây bể trên?

Trả lời: ………………..

Câu 146. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $10\,\mathrm{cm}$ x $16\,\mathrm{cm}$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng bao nhiêu mét?

Trả lời: ………………..

Câu 147. Một công ty xây dựng muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. *B'* là điểm trên bờ biển sao cho *BB'* vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ *A* đến *B'* là 9*km*. Vị trí *C* trên đoạn *AB'* sao cho khi nối ống theo *ACB* thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách *A* một đoạn bằng bao nhiêu *km*?

Trả lời: ………………..

Câu 148. Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(cm^2)$. Tổng chiều dài và chiều rộng của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

Trả lời: ………………..

Câu 149. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $120\,\text{cm}$ từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

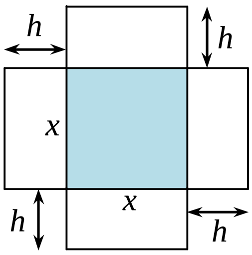
Câu 150. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét vuông?

Trả lời: ………………..

Câu 151. Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800(m)$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

Trả lời: ………………..

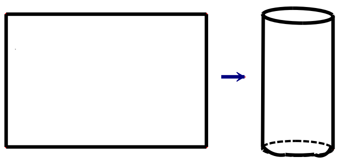
Câu 152. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh carton theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh *x* cm, chiều cao *h* cm và có thể tích 500 cm^3.



Để diện tích của mảnh carton nhỏ nhất thì giá trị của *x* bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

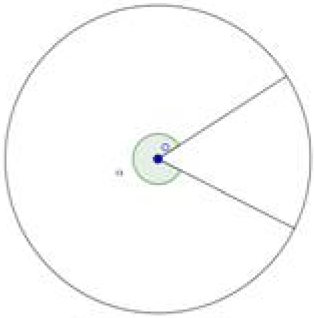
Câu 153. Bạn Hiền là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:

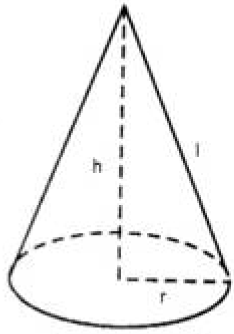


Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn Hiền chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài của mảnh tôn là bao nhiêu cemtimet?

Trả lời: ………………..

Câu 154. Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích 4π dm^2. Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là α ($0 < \alpha < 2\pi$) như Hình 1 để làm thành một cái gầu múc nước hình nón như Hình 2.


Hình 1

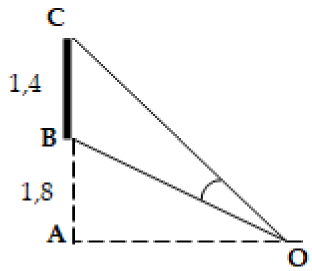


Hình 2

Thể tích lớn nhất của cái gầu là bao nhiêu decimet khối? (kết quả lấy đến phần trăm của decimet)

Trả lời: ………………..

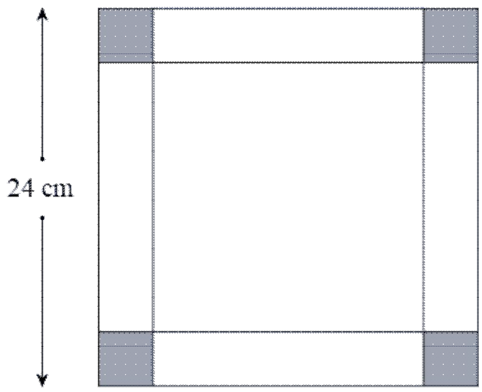
Câu 155. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ).

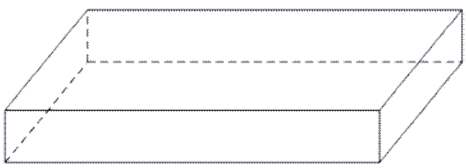


Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó.

Trả lời: ………………..

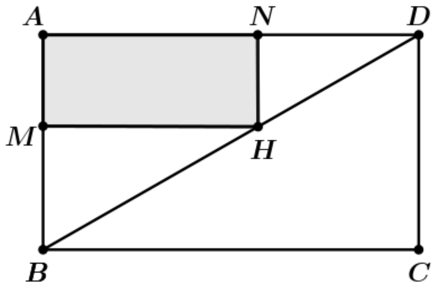
Câu 156. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





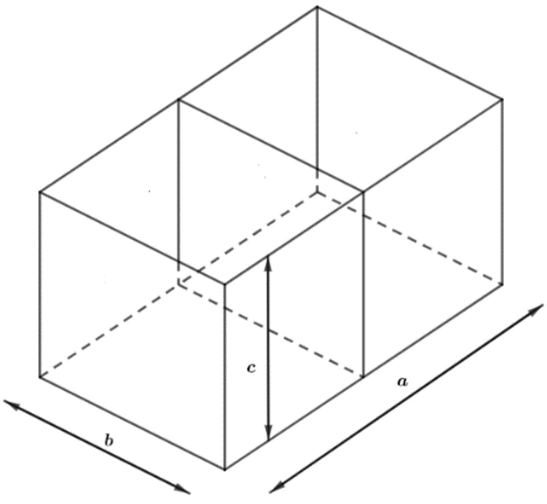
Trả lời: ………………..

Câu 157. Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu triệu đồng với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/ m^2 ? (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ hai của triệu đồng)



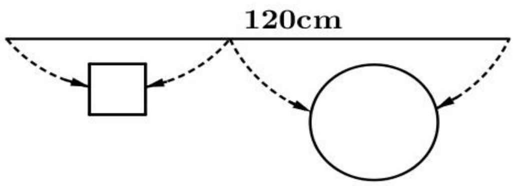
Trả lời: ………………..

Câu 158. Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296\,m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a,b,c. Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.



Trả lời: ………………..

Câu 159. Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ………………..

Câu 160. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$ nhỏ nhất bằng 3.

Trả lời: ………………..

Câu 161. Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 162. Cho hàm số $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ không vượt quá 7. Số phần tử nguyên của S là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 163. Cho hàm số $f(x)=ax^3-4(a+2)x+1$ với a là tham số. Nếu $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 164. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3?

Trả lời: ………………..

Câu 165. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$?

Trả lời: ………………..

Câu 166. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$?

Trả lời: ………………..

Câu 167. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-8$.

Trả lời: ………………..

Câu 168. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Tìm m để thoả mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$.

Trả lời: ………………..

Câu 169. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-2;0]} y=-\dfrac{1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Trả lời: ………………..

Câu 170. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 171. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;4\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-2		0		2		4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-19	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	17

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-2;4\right]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-2;4\right]$.

Câu 172. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-4;0\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4		-3		-1		0
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	-4

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-4;0\right]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-4;0\right]$.

Câu 173. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $\left[-4;-2\right)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4		-3		-2
y'		-	0	+	||
y	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$ ||

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $\left[-4;-2\right)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $\left[-4;-2\right)$.

Câu 174. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-1;3\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-1		0		1		2		3
y'		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-1;3\right]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-1;3\right]$.

Câu 175. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $\left(-\infty;1\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	-1

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $\left(-\infty;1\right]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $\left(-\infty;1\right]$.

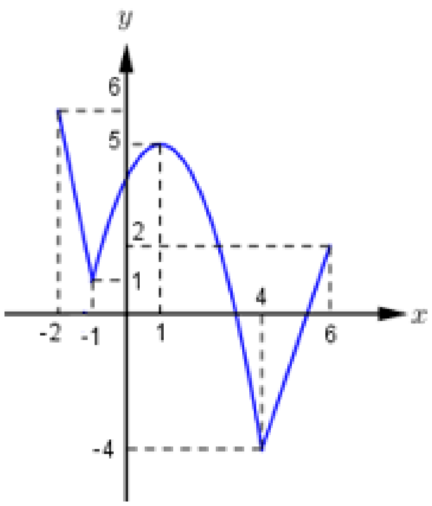
Câu 176. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(0;8\right)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	0		6		8
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	108	$\nearrow$	

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên khoảng $\left(0;8\right)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên khoảng $\left(0;8\right)$.

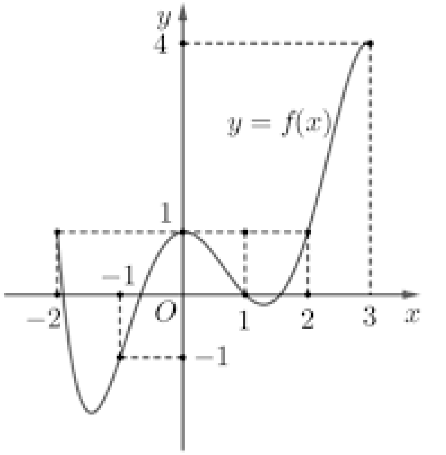
Câu 177. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;6\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-2;6\right]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-2;6\right]$.

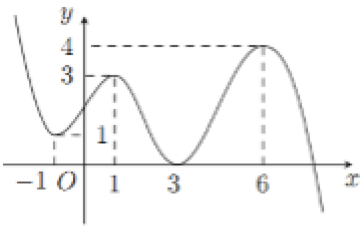
Câu 178. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-1;3\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$.

Câu 179. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;6]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;6]$.

Câu 180. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$.

Câu 181. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;1]$.

Câu 182. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$.

Câu 183. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-5;-1]$.

Câu 184. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+4}$ trên đoạn $[1;10]$.

Câu 185. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ trên đoạn $[-5;-3]$.

Câu 186. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x^3 + 3x + 3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$.

Câu 187. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1;3]$.

Câu 188. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$ trên tập xác định.

Câu 189. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+2)\sqrt{4 - x^2}$ trên tập xác định.

Câu 190. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{3+2x-x^2}$ trên tập xác định.

Câu 191. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y=\left|x^2-3x+2\right|$ trên đoạn $[-10;10]$.

Câu 192. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Câu 193. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Câu 194. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin x+\sin 2x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Câu 195. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

Câu 196. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Câu 197. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Câu 198. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}-\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Câu 199. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\sin^2 x+\dfrac{1}{2}$ trên tập xác định.

Câu 200. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+4\cos x-\sin^2 x$ trên tập xác định.

Câu 201. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x-2$ trên tập xác định.

Câu 202. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x.\cos x$ trên tập xác định.

Câu 203. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2+\sin x-1$ trên tập xác định.

Câu 204. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2 x-\cos x+1$ trên tập xác định.

Câu 205. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos 2x-2\sin x-1$ trên tập xác định.

Câu 206. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x-3\sin^2 x+2$ trên tập xác định.

Câu 207. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x+\sin^2 x-5\sin x+1$ trên tập xác định.

Câu 208. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$ trên tập xác định.

Câu 209. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^3 x-6\cos^2 x+9\cos x+5$ trên tập xác định.

Câu 210. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3-\cos 2x+\sin x+2$ trên tập xác định.

Câu 211. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x+\cos 2x+\sin x+3$ trên tập xác định.

Câu 212. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^3 x+\frac{5}{2}\sin^2 x+\cos x+2$ trên tập xác định.

Câu 213. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-2\sin^3+3\cos 2x-6\sin x$ trên tập xác định.

Câu 214. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^3 x+3\cos 2x-15\cos x+2$ trên tập xác định.

Câu 215. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$ trên tập xác định.

Câu 216. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ trên tập xác định.

Câu 217. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$ trên tập xác định.

Câu 218. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos x+1}$ trên tập xác định.

Câu 219. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{8\sin x-8}{2-\sin x-\cos^2 x}$ trên tập xác định.

Câu 220. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3+\cos x}{\cos x+\sin^2 x}$ trên tập xác định.

Câu 221. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4-\cos^2 x}{\sin^2 x+\sin x+2}$ trên tập xác định.

Câu 222. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4+3\sin x-2\cos^2 x}{3+2\sin x}$ trên tập xác định.

Câu 223. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\cos^2 x}$ trên tập xác định.

Câu 224. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ trên tập xác định.

Câu 225. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}$ trên tập xác định.

Câu 226. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{\sin^2 x+\cos x+2}$ trên tập xác định.

Câu 227. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

Câu 228. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-x-1\right)e^x$ trên đoạn $[0;2]$.

Câu 229. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2\ln x+2$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e^3};e^2\right]$.

Câu 230. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x.\ln x$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$.

Câu 231. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x}{2}-\ln\left(x^2-x+2\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

Câu 232. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[0;1]$.

Câu 233. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{-2x}\left(-x^2+x+\frac{7}{2}\right)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Câu 234. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{3x}\left(x^2+x-3\right)$ trên đoạn $[-1;2]$.

Câu 235. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{2x}-4e^x+3$ trên đoạn $[0;\ln 4]$.

Câu 236. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[0;1]$.

Câu 237. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{-2x}\left(-x^2+x+\frac{7}{2}\right)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Câu 238. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{3x}\left(x^2+x-3\right)$ trên đoạn $[-1;2]$.

Câu 239. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln\left(x^2+x+2\right)$ trên đoạn $[3;6]$.

Câu 240. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4\ln(1-x)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Câu 241. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2+4x+1\right).e^{x-2}$ trên đoạn $[-2;3]$.

Câu 242. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x(x^2-3)$ trên đoạn $[-2;2]$.

Câu 243. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ (với m là tham số thực). Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$.

Câu 244. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 1.

Câu 245. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 246. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+\left(m^2+1\right)x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$.

Câu 247. Cho hàm số $f(x)=10^x+x$ và hàm số $g(x)=x^3-mx^2+\left(m^2+1\right)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x+f(x)\right)$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Câu 248. Cho hàm số $y=x+\cos^2 x+m$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m thì $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=4$?

Câu 249. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $3\sqrt{2}$. Tìm giá trị của m .

Câu 250. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ với m là số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$ bằng 6.

Câu 251. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x-8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3.

Câu 252. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\dfrac{9}{2}$?

Câu 253. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

Câu 254. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trèn đoạn $[0;6]$ bằng -4.

Câu 255. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Tìm giá trị của tham số m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$.

Câu 256. Tìm giá trị của tham số m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 .

Câu 257. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m}{x-3}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để $\max\limits_{[-1;2]} f(x)+\min\limits_{[-1;2]} f(x)=8$.

Câu 258. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

Câu 259. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

Câu 260. Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1,m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

BÀI 2

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D, kí hiệu $M=\max\limits_{D} f\left(x\right)$ nếu:

$f\left(x\right)\le M,\forall x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f\left(x_o\right)=M$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D, kí hiệu $m=\min\limits_{D} f\left(x\right)$ nếu:

$f\left(x\right)\ge m,\forall x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f\left(x_o\right)=m$.

Chú ý: Khi tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không chỉ rõ tập D thì ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

2. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm.

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng, ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

Giả sử hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm trên khoảng $\left(a;b\right)$, có thể một số hữa hạn điểm. Nếu $f'\left(x\right)=0$ chỉ tại một số hữa hạn điểm thuộc khoảng $\left(a;b\right)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ như sau:

- ***Bước 1:*** Tìm các điểm $x_1,x_1,...,x_n$ thuộc khoảng $\left(a;b\right)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.
- ***Bước 2:*** Tính $f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(a\right),f\left(b\right)$.
- ***Bước 3:*** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

  + Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

  + Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Nhận xét:

- Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[a;b\right]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=f\left(b\right)\\ \min\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=f\left(a\right)\end{cases}$

- Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a;b\right]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=f\left(a\right)\\ \min\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=f\left(b\right)\end{cases}$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D, kí hiệu $M=\max\limits_{D} f\left(x\right)$ nếu:

$f\left(x\right)\le M,\forall x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f\left(x_o\right)=M$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D, kí hiệu $m=\min\limits_{D} f\left(x\right)$ nếu:

$f\left(x\right)\ge m,\forall x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f\left(x_o\right)=m$.

Chú ý: Khi tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không chỉ rõ tập D thì ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

1. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng hoặc nửa khoảng hoặc đoạn

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên một khoảng $\left(a;b\right)$, đoạn $\left[a;b\right]$ hay nửa khoảng $\left[a;b\right),\left(a;b\right]$, ta làm như sau:

- **Bước 1:** Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên tập xác định.
- **Bước 2:** Căn cứ vào bảng biến thiên, ta kết luận được giá trị lớn nhất (nếu có) hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f\left(x\right)$.

2. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên một đoạn $\left[a;b\right]$, ngoài cách trên, ta còn có cách sau:

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1,x_1,...,x_n$ thuộc khoảng $\left(a;b\right)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 2:** Tính $f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(a\right),f\left(b\right)$.
- **Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

$$\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=\max\left\{f\left(a\right),f\left(b\right),f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right)\right\}\\ \min\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=\min\left\{f\left(a\right),f\left(b\right),f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right)\right\}\end{cases}$$

Chú ý:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x)=f(b) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(a) \end{cases}$

- Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x)=f(a) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(b) \end{cases}$

DẠNG 1
TÌM GTLN VÀ GTNN KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-1		2		3
y'		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)=5$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)=-2$

Bài 2. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $[-1;3)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-1		0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2 ‖

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $\left[-1;3\right)$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ là: $\min\limits_{[-1;3)} f\left(x\right)=f\left(-1\right)=-2$

Bài 3. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-4;4\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-4;4\right]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $\left(-1;2\right)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-4;4\right]$ là: $\max\limits_{[-4;4]} f\left(x\right)=f\left(-3\right)=4$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-4;4\right]$ là: $\min\limits_{[-4;4]} f\left(x\right)=f\left(-4\right)=-4$

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-1;2\right)$ là: $\max\limits_{(-1;2)} f\left(x\right)=f\left(0\right)=3$

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(-1;2\right)$.

Bài 4. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $\left[0;1\right]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

d) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ là: $\max\limits_{[0;1]} f\left(x\right) = f\left(0\right) = -\dfrac{3}{4}$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ là: $\min\limits_{[0;1]} f\left(x\right) = f\left(1\right) = -1$

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ là: $\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right) = f\left(0\right) = -\dfrac{3}{4}$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ là: $\min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right) = f\left(-1\right) = f\left(1\right) = -1$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-1;1\right)$ là: $\max\limits_{(-1;1)} f\left(x\right) = f\left(0\right) = -\dfrac{3}{4}$

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$ là: $\min\limits_{[0;+\infty)} f\left(x\right) = f\left(1\right) = -1$

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Bài 5. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y			-2		|| $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ ||		2		

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên tập xác định.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ là: $\max\limits_{(-\infty;-1)} f\left(x\right) = f\left(-2\right) = -2$

Hàm số $y = f\left(x\right)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$.

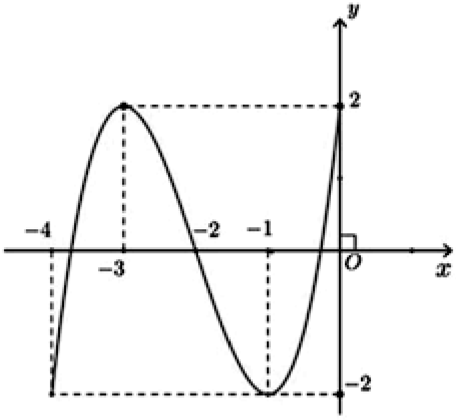
b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$ là: $\min\limits_{(-1;+\infty)} f\left(x\right) = f\left(0\right) = 2$

Hàm số $y = f\left(x\right)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$.

c) Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$

Hàm số $y = f\left(x\right)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$, $\left(-1;+\infty\right)$

Bài 6. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-4;0\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

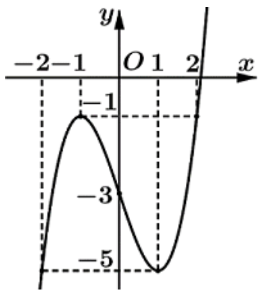
Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ là: $\max\limits_{[-4;0]} f\left(x\right) = f\left(-3\right) = 2$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ là: $\min\limits_{[-4;0]} f\left(x\right) = f\left(-4\right) = f\left(-1\right) = -2$

Bài 7. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

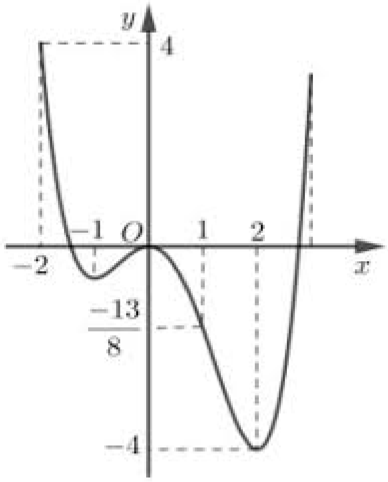
Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ là: $\max\limits_{[-2;2]} f\left(x\right) = f\left(-1\right) = f\left(2\right) = -1$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ là: $\min\limits_{[-2;2]} f\left(x\right) = f\left(-2\right) = f\left(1\right) = -5$

Bài 8. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

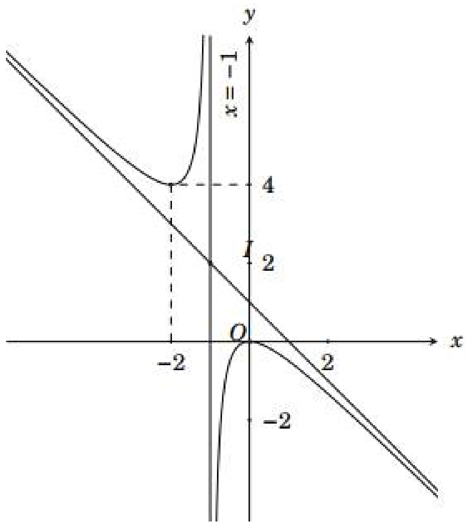
Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=4$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(2)=-4$

Bài 9. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên tập xác định.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-\infty;1)$ là: $\min\limits_{(-\infty;1)} f(x)=f(-2)=4$

Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;1)$.

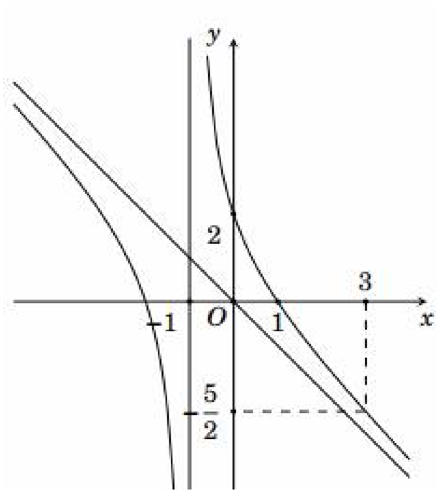
b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là: $\max\limits_{(1;+\infty)} f(x)=f(0)=0$

Hàm số $y = f\left(x\right)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

c) Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$

Hàm số $y = f\left(x\right)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên các khoảng $\left(-\infty;1\right)$, $\left(1;+\infty\right)$

Bài 10. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Hàm số $y = f\left(x\right)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$

b) Hàm số $y = f\left(x\right)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$

DẠNG 2
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a;b]$

Phương pháp :

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_1, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.
- **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.
- **Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

  + Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

  + Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

$$\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\} \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\} \end{cases}$$

Nhận xét:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$

Chú ý: Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $[a;b]$.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2;19]$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1;3]$

c) $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[0;2]$.

d) $y = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải

a) $y = f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2;19]$

- Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[2;19]$.
- Ta có $f'(x) = 3x^2 - 33$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{11}\,(N) \\ x = -\sqrt{11}\,(N) \end{array}\right.$
- Xét trên $[2;19]$ ta có $x = \sqrt{11} \in [2;19]$ ta có $f(2) = -58;\ f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11};\ f(19) = 6232$.

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x) = f\left(\sqrt{11}\right) = -22\sqrt{11}$; $\max\limits_{[2;19]} f(x) = f(19) = 6232$.

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1;3]$

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;3] \\ x = 2 \in [1;3] \end{array}\right.$.

Khi đó $f(1) = 1$; $f(2) = -1$; $f(3) = 3$.

Vậy $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -1$; $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3$

c) $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[0;2]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;2]$.

• $y' = 9x^2 - 2x - 7$

$y' = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\dfrac{7}{9}$ (loại vì $x \notin [0;2]$)

• Ta có: $f(0) = 1; f(2) = -9; f(1) = -6$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y = f(0) = 1$; $\min\limits_{[0;2]} y = f(2) = -9$

d) $y = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0;2]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;2]$.

• $y' = -8x^3 + 8x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -8x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow -8x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = -1$ (loại vì $x \notin [0;2]$)

• Ta có: $f(0) = 3; f(2) = -13; f(1) = 5$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = 5$; $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = -13$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \dfrac{3x - 1}{x - 3}$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y = x + \dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

c) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$.

d) $y = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0;2]$

Lời giải

a) $y = \dfrac{3x - 1}{x - 3}$ trên đoạn $[0;2]$.

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

• $y' = \dfrac{-10}{(x - 3)^2} < 0, \forall x \in [0;2] \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên đoạn $[0;2]$.

• Do đó: $\max\limits_{[0;2]} y = f(0) = \frac{1}{3}$; $\min\limits_{[0;2]} y = f(2) = -5$

b) $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $[2;4]$.

• $y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2}$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$ (loại vì $x \notin [2;4]$)

• Ta có: $f(2) = \frac{11}{2}; f(4) = \frac{25}{4}; f(3) = 6$

$\Rightarrow \max\limits_{[2;4]} y = f(2) = \frac{11}{2}$; $\min\limits_{[2;4]} y = f(3) = 6$

c) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

• Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

• $y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$ (loại vì $x \notin \left[-\frac{1}{2};2\right]$)

• Ta có: $f(0) = 2;\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2};\ f(2) = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow \min\limits_{\left[-\frac{1}{2};2\right]} y = f(0) = 2$; $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};2\right]} y = f(2) = \frac{10}{3}$

d) $y = \frac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

• Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Ta có $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1} = x + \frac{4}{x+1}$.

• Khi đó $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -3 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

Ta có $f(0) = 4$; $f(1) = 3$; $f(2) = \frac{10}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 3$ và $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 4$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\sqrt{4-x^2}$

b) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

c) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ trên $[-1;3]$.

d) $y=x+1+\sqrt{-3x^2+6x+9}$ trên $[-1;3]$.

Lời giải

a) $y=\sqrt{4-x^2}$

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-2;2]$.

• $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, \forall x\in(-2;2)$

$y'=0 \Leftrightarrow x=0\in[-2;2]$ (nhận).

• Ta có: $f(0)=2;\ f(-2)=0;\ f(2)=0$

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} y=f(-2)=f(2)=0,\quad \max\limits_{[-2;2]} y=f(0)=2$

b) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

• Điều kiện: $4-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 2 \Rightarrow$ Tập xác định: $D=[-2;2]$.

• $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}, \forall x\in(-2;2)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\in[-2;2]$.

• Ta có: $f(-2)=-2;\ f(2)=2;\ f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2};\ \min\limits_{[-2;2]} y=f(-2)=-2$

c) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ trên $[-1;3]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;3]$.

• $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

$y'=0 \Leftrightarrow x=1\in[-1;3]$ (nhận).

• Ta có: $f(-1)=2\sqrt{2};\ f(3)=2\sqrt{2};\ f(1)=2$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=f(-1)=f(2)=2\sqrt{2};\ \min\limits_{[-1;3]} y=f(1)=2$

d) $y=x+1+\sqrt{-3x^2+6x+9}$ trên $[-1;3]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;3]$.

• $y'=1+\dfrac{-3x+3}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}=\dfrac{\sqrt{-3x^2+6x+9}-(3x-3)}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}, \forall x\in(-1;3)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{-3x^2+6x+9}=3x-3\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3\ge 0\\-3x^2+6x+9=(3x-3)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\12x^2-24x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2\in[-1;3]\text{ (nhận).}$$

• Ta có: $f(-1)=0;\ f(3)=4;\ f(2)=6$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=f(2)=6;\ \min\limits_{[-1;3]} y=f(-1)=0$

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x+1+2\sqrt{-2x^2+2x+4}$ trên $[-1;2]$.   b) $y=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên $[0;3]$.

c) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1;2]$.   d) $y=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$

Lời giải

a) $y=x+1+2\sqrt{-2x^2+2x+4}$ trên $[-1;2]$.

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;2]$.

$$y'=1+\frac{-2x+1}{2\sqrt{-2x^2+2x+4}}=\frac{2\sqrt{-2x^2+2x+4}-(2x-1)}{2\sqrt{-2x^2+2x+4}},\forall x\in(-1;2).$$

$$y'=0\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+2x+4}=(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\4(-2x^2+2x+4)=(2x-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\12x^2-12x-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{1\pm\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{6}}{2}\in[-1;2]\text{ (nhận).}$$

Ta có: $f(-1)=0;\ f(2)=3;\ f\left(\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{2}$

$$\Rightarrow \max_{[-1;2]} y=f\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{3+2\sqrt{6}}{2};\ \min_{[-1;2]} y=f(-1)=0$$

b) $y=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên $[0;3]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

$$y'=\frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}},\ x\in[0;3]$$

$$y'=0\Leftrightarrow 2x^2-6x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\x=2\in[0;3]\end{array}\right.$$

Ta có: $y(0)=-12;\ y(3)=-3\sqrt{13};\ y(1)=-5\sqrt{5};\ y(2)=-8\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;3]} y = f(3)=-3\sqrt{13}; \min\limits_{[0;3]} y = f(0)=-12$

c) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1;2]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-1;2]$.

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1).\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},\forall x\in[-1;2].$$

$y'=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1\in[-1;2]$.

Ta có: $f(-1)=0; f(2)=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}; f(1)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} y = f(1)=\sqrt{2};\quad \min\limits_{[-1;2]} y = f(-1)=0$

d) $y=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$

Tập xác định $D=[-7;5]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+14}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+14}=2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x=1\in[-7;5]$.

$f(1)=16$; $f(-7)=2\sqrt{3}$; $f(5)=2\sqrt{6}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-7;5]} f(x)=16$ và $\min\limits_{[-7;5]} f(x)=2\sqrt{3}$

DẠNG 3
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a;b)$
NỬA KHOẢNG $(a;b]$; $[a;b)$.

Phương pháp : Dùng bảng biến thiên để tìm max – min.

- **Bước 1:** Tìm tập xác định.
- **Bước 2:** Tính $f'(x)$
- **Bước 2:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=4x^3-3x^4$

b) $y=2x^5+5x^4+\dfrac{10}{3}x^3-\dfrac{7}{3}$

c) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

d) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

Lời giải

a) $y=4x^3-3x^4$

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

• Ta có: $y'=12x^2-12x^3=12x^2(1-x)$

$$y'=0\Leftrightarrow 12x^2(1-x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

• Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max\limits_{\mathbb{R}} y=f(1)=1$ và hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

b) $y=2x^5+5x^4+\dfrac{10}{3}x^3-\dfrac{7}{3}$

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

• Ta có: $y'=10x^4+20x^3+10x^2=10x^2(x+1)^2\geq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$					$+\infty$

• Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

c) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

• Ta có: $y'=\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$

$y'=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

• Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max\limits_{\mathbb{R}} y=f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y=f(1)=\dfrac{1}{2}$.

d) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$. Suy ra $f'(x)=0$ khi $x=\pm1$. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho lần lượt là 2 và 0.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x + \dfrac{4}{x}$ với $x > 0$.

b) $y = x - \dfrac{1}{x}$ với $x \in (0;2]$

c) $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) $y = x + \dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

Lời giải

a) $y = x + \dfrac{4}{x}$ với $x > 0$.

Cách 1. Sử dụng chiều biến thiên, tìm GTLN, GTNN trên khoảng.

•Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$.

•Ta có: $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2}, \forall x \in (0;+\infty)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

• Bảng biến thiên:

x		0		2		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y		0	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

• Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y = 4$ khi $x = 2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Ta có: $\forall x > 0 : x + \dfrac{4}{x} \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{x.\dfrac{4}{x}} = 4 \Leftrightarrow y \geq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2\,(L) \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy: $\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y = 4$ khi $x = 2$.

a) $y = x - \dfrac{1}{x}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(0;2]$.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}, \forall x \in (0;2]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{(0;2]} f\left(x\right)=0$ khi $x=1$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

c) $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $y'=3-\dfrac{8}{x^3}=0 \Leftrightarrow 3-\dfrac{8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\left(0;+\infty\right)$ như sau:

x	0		$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$.

d) $y=x+\dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$

Ta có: $y=x+\dfrac{4}{x-1} \Rightarrow y=1-\dfrac{4}{\left(x-1\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1		3		$+\infty$
y'				$-$	0	$+$	
y			$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} y=5$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x\sqrt{3-x}$ b) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$

Lời giải

a) $y = x\sqrt{3-x}$

Hàm số đã cho xác định khi $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

Tập xác định: $D = (-\infty; 3]$.

Ta có: $y' = \dfrac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}, \forall x \in (-\infty; 3)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		3
y'		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{(-\infty;3]} y = 2$ khi $x = 2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2}$ khi $x = 1$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

DẠNG 4
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$ trên đoạn $[-1;1]$.

b) $y = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$ trên đoạn $[1;3]$.

Lời giải

a) $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$ trên đoạn $[-1;1]$.

Đặt $t = x^2$, vì $-1 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le t \le 1$ hay $t \in [0;1]$.

Khi đó, $f(t) = t^3 + 4\left(1 - t^3\right) = -3t^3 + 12t^2 - 12t - 4$.

Xét hàm số $f(t) = -3t^3 + 12t^2 - 12t - 4$ liên tục và xác định trên đoạn $[0;1]$.

$f'(t) = -6t^2 + 24t - 12$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t^2 + 24t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3} \notin [0;1] \ (L) \\ t = 2 \in [0;1] \ (N) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(0) = 4;\ f(1) = 1;\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} y = 4$ khi $x = 0$; $\min\limits_{[-1;1]} y = \frac{4}{9}$ khi $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $y = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$ trên đoạn $[1;3]$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}\left(2 \le t \le \frac{10}{3}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^2 + t - 2 \Rightarrow y' = 2t + 1 > 0; \forall t \in \left[2;\frac{10}{3}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t \in \left[2;\frac{10}{3}\right]$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất $= 4$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $= \frac{112}{9}$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$ trên đoạn $[0;63]$.

b) $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ trên đoạn $[0;4]$.

Lời giải

a) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}$ trên đoạn $[0;63]$

TXĐ: $D=[-1;+\infty)$.

Đặt $t=\sqrt[6]{x+1}$ $(1\le t\le 2)$

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^3+t^2 \Rightarrow y'=3t^2+2t>0;\forall t\in[1;2]$

$\Rightarrow \min y=y(1)=2;\ \max y=y(2)=12$.

b) $y=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ trên đoạn $[0;4]$.

TXĐ: $D=[0;+\infty)$.

Đặt $t=\sqrt{x};\left(x\in[0;4]\Rightarrow 0\le t\le 2\right)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y=t+\dfrac{t}{t+1}\Rightarrow y'=1+\dfrac{1}{(t+1)^2}>0$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến $\forall t\in[0;2]$

$\Rightarrow \min y=y(0)=0;\ \max y=y(2)=\dfrac{8}{3}$.

DẠNG 5
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Đạo hàm của hàm sơ cấp thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

d) $y = 2\sin x - \dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$

Lời giải

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$y' = 2\cos 2x - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Do $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6}$.

Ta có:. $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$; $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6}$; $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} y = \dfrac{\pi}{2}$ khi $x = -\dfrac{\pi}{2}$ và $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} y = -\dfrac{\pi}{2}$ khi $x = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Cách 1:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$y' = -2\sqrt{2}\sin 2x + 4\cos x = -4\sqrt{2}\sin x\cos x + 4\cos x = -4\cos x\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}; x=\dfrac{\pi}{4}$.

Tính $f\left(0\right)=\sqrt{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4-\sqrt{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=2\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{\pi}{4}$ và $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\sqrt{2}$ khi $x=0$.

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $y=\sqrt{2}\left(1-2\sin^2 x\right)+4\sin x=-2\sqrt{2}\sin^2 x+4\sin x+\sqrt{2}$.

Đặt $t=\sin x$. Do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in\left[0;1\right]$.

Khi đó, hàm số được viết lại là: $f\left(t\right)=-2\sqrt{2}t^2+4t+\sqrt{2}, \forall t\in\left[0;1\right]$.

Ta có: $f'\left(t\right)=-4\sqrt{2}t+4\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tính: $f\left(0\right)=\sqrt{2}$; $f\left(1\right)=4-\sqrt{2}$; $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=2\sqrt{2}$ khi $t=\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$ và $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\sqrt{2}$ khi $t=\sin x=0\Leftrightarrow x=0$.

c) $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ có $y'=1-2\cos x\sin x=1-\sin 2x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \sin 2x=1$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

Mặt khác $\left\{\begin{array}{l}y\left(0\right)=1\\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$; $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=1$.

d) $y=2\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$

Cách 1:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;\pi]$.

Ta có: $y'=2\cos x-4\sin^2 x.\cos x,\quad \forall x\in[0;\pi]$

$y'=0\Leftrightarrow 2\cos x(1-2\sin^2 x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin^2 x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,\quad (k\in\mathbb{Z}),\ \forall x\in[0;\pi].$$

Do $x\in[0;\pi]\Rightarrow x=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{4};x=\frac{3\pi}{4}$

Ta có:

$f(0)=0$

$f(\pi)=0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{[0,\pi]} f(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \text{khi}\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{3\pi}{4}\\ \min\limits_{[0,\ \pi]} f(x)=0\quad \text{khi}\ \ x=0,\ \ x=\pi\end{cases}.$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;\pi]$.

Đặt $t=\sin x, x\in[0;\pi]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Lúc đó, hàm số trở thành: $f(t)=2t-\frac{4}{3}t^3,\forall t\in[0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{4}{3}t^3$ liên tục và xác định trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $f'(t)=2-4t^2\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\in[0;1]\quad (N)\\ t=-\frac{\sqrt{2}}{2}\notin[0;1]\ \ (L)\end{array}\right.$

Tính $f\left(0\right)=0;\ f\left(1\right)=\frac{2}{3};\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0,1]} f\left(t\right)=\max\limits_{[0,\pi]} f\left(x\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ khi } t=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{3\pi}{4} \\ \max\limits_{[0,1]} f\left(t\right)=\min\limits_{[0,\ \pi]} f\left(x\right)=0 \ \text{ khi} t=0 \ \Leftrightarrow x=0,\ x=\pi \end{cases}$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$.

b) $y=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$

c) $y=\cos^4 x+\sin^2 x-2$

d) $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$

Lời giải

a) $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sin x, t\in\left[-1;1\right]$.

Khi đó hàm số trở thành: $f\left(t\right)=2t^2+2t-1, \forall t\in\left[-1;1\right]$.

Tìm $f'\left(t\right)=4t+2\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}\in\left[-1;1\right]\ \left(N\right)$.

Tính $f\left(-1\right)=-1;\ f\left(1\right)=3;\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1,1]} f\left(t\right)=\max\limits_{D=\mathbb{R}} y=3 \text{ khi } t=\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ \min\limits_{[-1,1]} f\left(t\right)=\min\limits_{D=\mathbb{R}} y=-\frac{3}{2} \ \text{ khi } t=\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \end{cases} ,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

b) $y=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=1-\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4=-\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+5$.

Đặt $t=\sin 2x, t\in\left[-1;1\right]$.

Khi đó, hàm số trở thành: $f\left(t\right)=-t^2-\frac{1}{2}t+5, t\in\left[-1;1\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=-t^2-\frac{1}{2}t+5$ liên tục và xác định trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

Ta có: $f'\left(t\right)=-2t-\frac{1}{2}\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}\in\left[-1;1\right]$.

Tính: $f\left(-1\right)=\frac{9}{2};\ f\left(1\right)=\frac{7}{2};\ f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{81}{16}$.

$$\max f(x)=\frac{81}{16} \text{ khi } t=\sin 2x=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\alpha}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi-\alpha}{2}+k\pi \end{array}\right. \text{ với } \sin\alpha=-\frac{1}{4} \text{ và } k\in\mathbb{Z}$$

$$\min f(x)=\frac{7}{2} \text{ khi } t=\sin 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, (k\in\mathbb{Z}).$$

c) $y=\cos^4 x+\sin^2 x-2$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Ta có : $f(x)=\cos^4 x+\sin^2 x-2=\cos^4 x-\cos^2 x-1$.

Đặt $t=\cos^2 x \Rightarrow t\in[0;1]$ và hàm số trở thành : $g(t)=t^2-t-1,\ \forall t\in[0;1]$.

$g'(t)=2t-1 \Rightarrow g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in[0;1]$.

Tính: $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4};\ g(0)=-1;\ g(1)=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max y=-1 \text{ khi } t=1;\ t=0 \\ \min y=-\frac{5}{4} \text{ khi } t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

d) $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sin x \Rightarrow y=f(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}, t\in[-1;1]$.

Hàm số $f(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$ liên tục và xác định trên đoạn $[-1;1]$.

Tìm $f'(t)=\dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2} \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0\in[-1;1]$

Ta có: $f(-1)=0;\ f(0)=1;\ f(1)=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max f(x)=\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=1 \text{ khi } t=\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}) \\ \min f(x)=\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=0 \text{ khi } t=\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

DẠNG 6
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Đạo hàm của hàm sơ cấp thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp
$\left(e^x\right)' = e^x$ $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(e^u\right)' = u'.e^u$ $\left(a^u\right)' = u'a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1;e]$

b) $y = x^2 e^{-x}$ trên đoạn $[0;\ln 8]$

c) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$

d) $y = \left(x^2 - 2\right)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$

Lời giải

a) $y = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1;e]$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = [1;e]$.

$$y' = 2x\ln x + x^2.\frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \ln x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,(L) \\ x = \sqrt{e}\,(N) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(1) = 0;\ f\left(\sqrt{e}\right) = \sqrt{e};\ f(e) = 2e$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[1;e]} y = f(e) = 2e \\ \min\limits_{[1;e]} y = f(1) = 0 \end{cases}$$

b) $y = x^2 e^{-x}$ trên đoạn $[0;\ln 8]$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = [0;\ln 8]$.

$$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow xe^{-x}(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,(N) \\ x = 2\,(N) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(0)=0; f(2)=\frac{4}{e^2}; f(\ln 8)=\frac{9}{8}.e.\ln^2 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;\ln 8]} y = f(\ln 8)=\frac{9}{8}.e.\ln^2 2 \\ \min\limits_{[0;\ln 8]} y = f(0)=0 \end{cases}$$

c) $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$.

Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Ta có $y'=1-\frac{1}{x}$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=1\in\left[\frac{1}{2};e\right]$

Xét $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2,\ y(1)=1, y(e)=e-1$.

Do đó $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=1$ và $M=\max\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=e-1$.

d) $y=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $f(x)=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow f'(x)=2x\mathrm{e}^{2x}+\left(x^2-2\right)2\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\left(x^2+x-2\right)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$$

Ta có $f(-1)=-\mathrm{e}^{-2};\ f(1)=-e^2;\ f(2)=2\mathrm{e}^4$

Vậy $M=\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=2\mathrm{e}^4;\ m=\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)=-\mathrm{e}^2$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y=\ln\left(2x^2-5x+3\right)$ trên đoạn $[2;3]$.

Lời giải

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$$y'=1-\frac{4x}{x^2+3}=\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(N) \\ x=3(L) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(0)=-2\ln 3;\ f(1)=1-4\ln 2;\ f(2)=4-2\ln 7$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;2]} y = f(2) = 4 - 2\ln 7 \\ \min\limits_{[0;2]} y = f(0) = -2\ln 3 \end{cases}$$

b) $y = \ln\left(2x^2 - 5x + 3\right)$ trên đoạn $[2;3]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$$y' = \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}(L)$$

Ta có: $f(0) = \ln 3;\ f(2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[2;3]} y = f(0) = \ln 3 \\ \min\limits_{[2;3]} y = f(2) = 0 \end{cases}$$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = e^{2x^2-2x+1}$ b) $y = e^{x-\sqrt{4-x^2}}$

Lời giải

a) $y = e^{2x^2-2x+1}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (4x-2)e^{2x^2-2x+1}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (4x-2)e^{2x^2-2x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(N)$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{\mathbb{R}} y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

b) $y = e^{x-\sqrt{4-x^2}}$

Để hàm số xác định thì: $4 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $D = [-2;2]$.

$$y'=\left(2+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)e^{x-\sqrt{4-x^2}}=\left(\frac{2\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}\right)e^{x-\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'=0\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}+x=0\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=-\frac{x}{2}\Rightarrow 5x^2=16\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{4\sqrt{5}}{5}(L) \\ x=-\frac{4\sqrt{5}}{5}(N)\end{array}\right.$$

Ta có: $f(-2)=\frac{1}{e^2};\ f\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{1}{e^{\frac{6\sqrt{5}}{5}}};\ f(2)=e^2$

$$\Rightarrow \begin{cases}\max\limits_{[-2;2]} y=f(2)=e^2 \\ \min\limits_{[-2;2]} y=f\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{1}{e^{\frac{6\sqrt{5}}{5}}}\end{cases}$$

DẠNG 7
ỨNG DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG THỰC TIỄN

Phương pháp chung:

- **Bước 1:** Chọn đặt biến x, kèm điền kiện tồn tại x.
- **Bước 2:** Dựa vào giả thiết và các quan hệ bài toán để xác lập hàm số chứa ẩn x.
- **Bước 3:** Ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số như ta đã biết và có thể phối hợp nhiều phương pháp khác.

- **Bài toán chuyển động**

Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc

Khi đó $v(t)=s'(t)$; $a(t)=v'(t)=s''(t)$

- **Bài toán thực tế**

Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$

Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

Chú ý:

- Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương:

Với $a, b \ge 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

- Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương:

Với $a, b, c \ge 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 1. Một cửa hàng bán Xoài với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số Xoài bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

Lời giải

Gọi x đồng ($30.000 < x < 50.000$) là giá bán Xoài mới để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Suy ra giá bán ra đã giảm là $(50.000-x)$ đồng.

Số lượng Xoài bán ra đã tăng thêm là $\frac{50(50000-x)}{4000}=625-0,0125.x$.

Tổng số Xoài bán được là $25+625-0,0125.x=650-0,0125.x$.

Doanh thu của cửa hàng là $(650-0,0125.x)x$.

Số tiền vốn ban đầu để mua Xoài là $(650-0,0125.x)30000$.

Vậy lợi nhuận của cửa hàng là

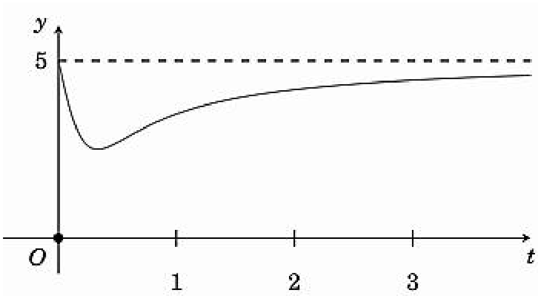
$(650-0,0125.x)x-(650-0,0125.x)30000=-0,0125x^2+1025x-19500000$.

Ta có: $f(x)=-0,0125x^2+1025x-19500000=-0,0125(x-41000)^2+1512500\le 1512500$.

Suy ra $\max f(x)=1512500$ khi $x=41.000$ đồng.

Vậy giá bán mỗi cân Xoài là 41.000 đồng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Bài 2. Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ $(t\ge 0)$ khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ như hình bên.Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?



Lời giải

Xét hàm số $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ trên $[0;+\infty)$ có $y'(t)=\dfrac{135t^2-15}{(9t^2+1)^2}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

Mặt khác: $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[5-\dfrac{15t}{9t^2+1}\right]=5$ và $\lim\limits_{t\to 0} y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[5-\dfrac{15t}{9t^2+1}\right]=5$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	5	↘	0	↗	5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[0;+\infty)} y(t)=0$ và $\max\limits_{[0;+\infty)} y(t)=5$

Bài 3. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $v = s' = -t^2 + 12t$; $v' = -2t + 12$; $v' = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

BBT

t	0		6		9
v'		+	0	–	
v		$\nearrow$	36	$\searrow$	

Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 6$. Giá trị lớn nhất là $v(6) = 36\text{m/s}$.

Bài 4. Thầy Hùng dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$ với $x > 0$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h = \dfrac{6,7 - 2x^2}{6x}$,

ta có $h > 0$ nên $x < \sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$.

Thể tích bể cá là: $V(x) = \dfrac{6,7x - 2x^3}{3}$

$V'(x) = \dfrac{6,7 - 6x^2}{3}$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 6,7 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$		$\sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$
y'		+	0	–	
y	0	$\nearrow$	$1,57m^3$	$\searrow$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57\text{m}^3$.

Bài 5. Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2024. Thầy Nam đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có thể tích chiếc hộp: $V = x^2h = 32$ (đvtt), với $x, h > 0$. Suy ra $h = \dfrac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S = 2x^2 + 8xh = 2x^2 + 8x.\dfrac{32}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$.

Cách 1.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = 4x - \dfrac{256}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 256}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 256 \Leftrightarrow x = 4$; $f(4) = 96$.

Bảng biến thiên

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	96	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào Bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt GTNN tại $x = 4$, khi đó $h = 2$.

Cách 2

Ta có $2x^2 + \dfrac{256}{x} = 2x^2 + \dfrac{128}{x} + \dfrac{128}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2.\dfrac{128}{x}.\dfrac{128}{x}} = 96$ (BĐT Cauchy).

Đẳng thức xảy ra khi $2x^2 = \dfrac{128}{x}$ hay $x = 4$, khi đó $h = 2$.

Bài 6. Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là 125m^3. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

Lời giải

Gọi chiều rộng hình hộp là a suy ra chiều dài là $3a$, chiều cao là h

$V = a.3a.h = 3a^2h \Rightarrow h = \dfrac{V}{3a^2} = \dfrac{125}{3a^2}$

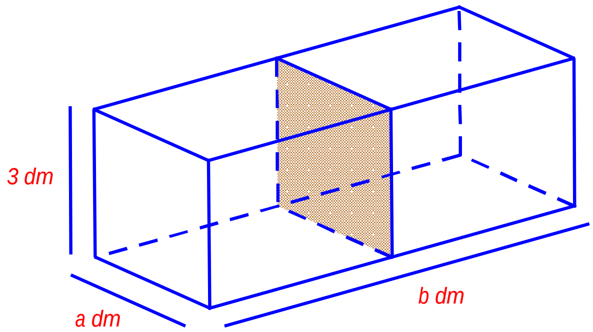
Diện tích thi công $S_{tc} = a.3a + 2(a.h) + 2(3a.h) = 3a^2 + 2ah + 6ah = 3a^2 + 2a.\dfrac{125}{3a^2} + 6a.\dfrac{125}{3a^2} = 3a^2 + \dfrac{1000}{3a}$

Áp dụng BĐT Cosi ta có $3a^2 + \dfrac{1000}{3a} = 3a^2 + \dfrac{500}{3a} + \dfrac{500}{3a} \geq 3\sqrt[3]{3a^2.\dfrac{500}{3a}.\dfrac{500}{3a}} = \sqrt[3]{\dfrac{750000}{9}}$

Diện tích thi công nhỏ nhất khi $3a^2=\frac{500}{3a}=\frac{500}{3a}\Leftrightarrow 9a^3=500\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{\frac{500}{9}}\approx 3,82$

Chú ý : Chúng ta có thể dung Phương pháp hàm số để tìm min của bài toán.

Bài 7. Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72\,\text{dm}^3$, chiều cao là 3dm. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a,b (đơn vị dm) như hình vẽ. Tính a,b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



Lời giải

Thể tích của bế cá: $V=3ab=72\,\text{dm}^3\Leftrightarrow b=\frac{72}{3a}=\frac{24}{a}$, với $a,b>0$.

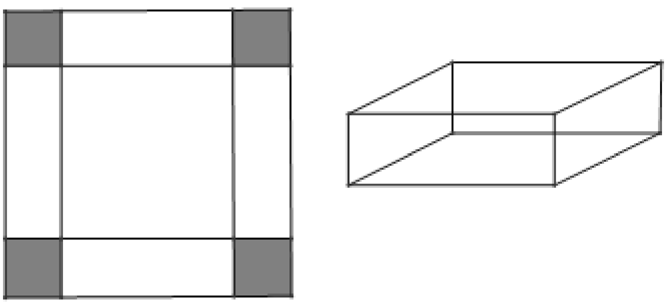
Diện tích kính để làm bể cá như hình vẽ:

$$S=3.3a+2.3b+ab=9a+6.\frac{24}{a}+a.\frac{24}{a}=9a+\frac{144}{a}+24\geq 2\sqrt{9a.\frac{144}{a}}+24\Leftrightarrow S\geq 96.$$

$$S=96\Leftrightarrow 9a=\frac{144}{a}\Leftrightarrow a=4\Rightarrow b=6.$$

Vậy để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất thì $a=4\,\text{dm}$; $b=6\,\text{dm}$.

Bài 8. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp(tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



Lời giải

Hình hộp có đáy của là hình vuông cạnh bằng $12-2x$, chiều cao bằng x.

Điều kiện $0<x<6$

Thể tích khối hộp là $V=(12-2x)^2.x=4(6-x)^2.x$.

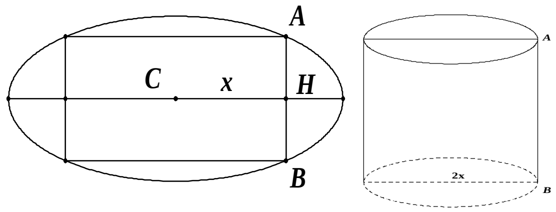
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $\sqrt[3]{(6-x)(6-x).2x} \le \dfrac{(6-x)+(6-x)+2x}{3}$

$\Leftrightarrow (6-x)(6-x).2x \le 4^3 \Leftrightarrow 4(6-x)^2.x \le 2.4^3 \Leftrightarrow V \le 128$ (hằng số).

Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow 6-x=2x \Leftrightarrow x=2$.

Vậy thể tích khối hộp lớn nhất khi $x=2$.

Bài 9. Từ một tấm tôn có hình dạng elip với độ dài trục lớn bằng 6 độ dài trục bé bằng 4. Người thợ cần cắt một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elíp, sau đó gò tấm tôn hình chữ nhật này thành một hình trụ không có đáy (như hình bên). Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó?



Lời giải

Ta có phương trình đường $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \Rightarrow y=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

Gọi bán kính đáy hình trụ là r, đường cao là h

Chu vi một đáy của hình trụ là: $2\pi r = 2x \Leftrightarrow r=\dfrac{x}{\pi}$

$AH=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \Rightarrow h=2AH=\dfrac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$

$V_{tru}=\pi.r^2.h=\pi\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2.\dfrac{4}{3}\sqrt{9-x^2}=\dfrac{4}{3\pi}x^2\sqrt{9-x^2}$

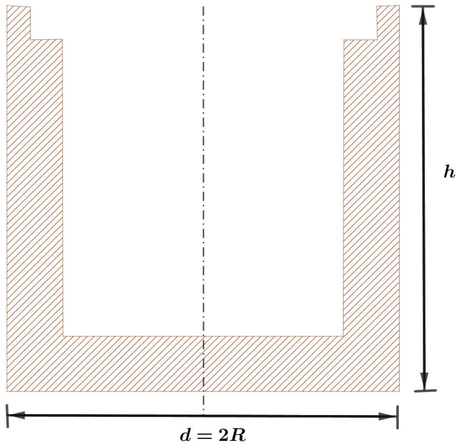
Đặt $f(x)=\dfrac{4}{3\pi}x^2\sqrt{9-x^2}$ $(0<x<3)$

$f'(x)=\dfrac{4}{3\pi}\left[\dfrac{18x-3x^3}{\sqrt{9-x^2}}\right] \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\,(L) \\ x=\sqrt{6}\,(N) \\ x=-\sqrt{6}\,(L) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên:

Suy ra $V_{\max}=\dfrac{8\sqrt{3}}{\pi} \Leftrightarrow x=\sqrt{6}$

Bài 10. Bác Hà muốn xây dựng một hố ga không nắp hình trụ với dung tích $3m^3$. Hãy tính chi phí ít nhất mà bác Hà phải bỏ ra xây dựng hố ga, biết tiền công và vật liệu cho $1m^2$ thành bê tông của hố ga (thành bê tông đáy và thành bê tông xung quang) là 685000 đồng.



Lời giải

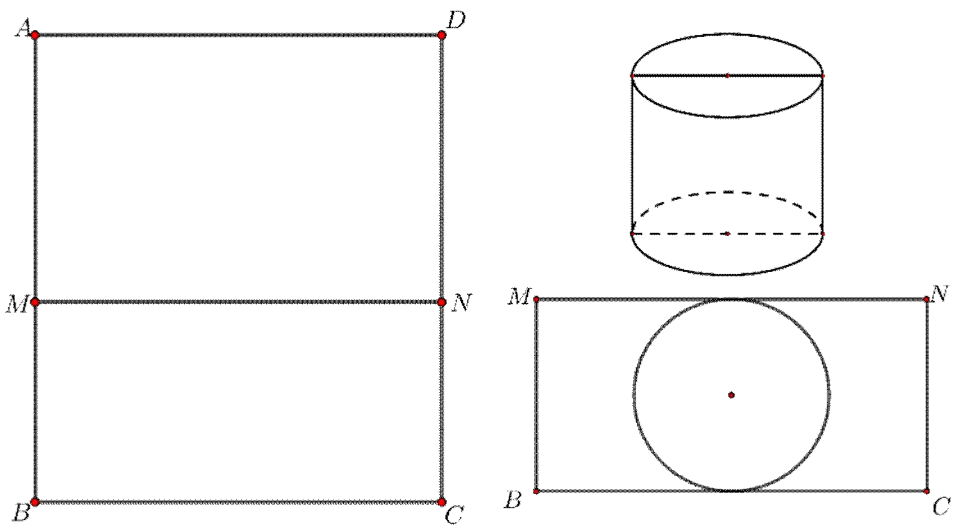
Ta có: $V=\pi R^2 h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}=\dfrac{3}{\pi R^2}$.

Mặt khác: $S_{xd}=2\pi Rh+\pi R^2=\dfrac{6}{R}+\pi R^2=\dfrac{3}{R}+\dfrac{3}{R}+\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{9\pi}\left(m^2\right)$ (áp dụng BĐT Cô-si).

Để chi phí bác Hà bỏ ra nhỏ nhất khi và chỉ khi diện tích xây dựng hố ga hình trụ nhỏ nhất, và khi đó $S_{xd}=3\sqrt[3]{9\pi}\left(m^2\right)$.

Vậy số tiền bác Hà phải bỏ ra là: $685000.3\sqrt[3]{9\pi}\approx 6260000$ đồng.

Bài 11. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1m^2 và cạnh $BC=x\left(\text{m}\right)$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2 hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox thừa được bỏ đi) Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



Lời giải

Ta có $AB.BC=1 \Rightarrow AB=\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{x}(\mathrm{m})$.

Gọi $r(\mathrm{m})$ là bán kính đáy hình trụ inox

gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC=x(\mathrm{m})$. Do đó $2\pi r=x \Leftrightarrow r=\dfrac{x}{2\pi}(\mathrm{m})$.

Như vậy $BM=2r=\dfrac{x}{\pi} \Rightarrow AM=AB-BM=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\pi}(\mathrm{m})$.

Thể tích khối trụ inox gò được là $V=\pi r^2 h=\pi.\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2.\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\pi}\right)=\dfrac{1}{4\pi^2}x\left(\pi-x^2\right)$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(\pi-x^2\right)$ với $x>0$.

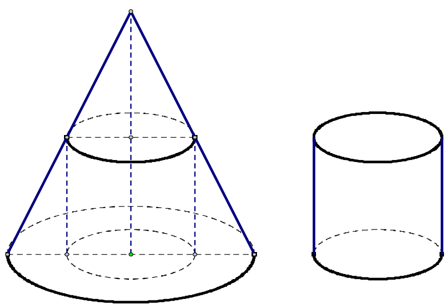
$f'(x)=\pi-3x^2$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$;

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(0;\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

nên $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

Suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)=\dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9} \Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow f(x)_{\max} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\approx 1,02(\mathrm{m})$.

Bài 12. Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r=2\mathrm{m}$, chiều cao $h=6\mathrm{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



Lời giải

Gọi r_t, h_t lần lượt là bán kính và chiều cao của khối trụ.

Ta có: $\dfrac{r_t}{2}=\dfrac{6-h_t}{6} \Rightarrow h_t=6=3r_t$.

Ta lại có: $V=\pi r_t^2.h_t=\pi\left(6r_t^2-3r_t^3\right)$.

Xét hàm số $f(r_t)=6r_t^2-3r_t^3$, với $r_t\in(0;2)$

có $f'(r_t)=12r_t-9r_t^2$; $f'(r_t)=0 \Leftrightarrow r_t=\dfrac{4}{3}$ (vì $r_t>0$).

Bảng biến thiên

r_t	0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(r_t)$		$+$	0	$-$	
$f(r_t)$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{9}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(r_t)_{\max} = \dfrac{32}{9}$ đạt tại $r_t = \dfrac{4}{3}$.

Vậy $V = \dfrac{32}{9}\pi$.

Bài 13. Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8\left(m^3\right)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\dfrac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\dfrac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải

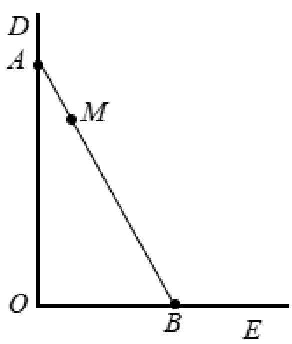
Gọi chiều rộng của bể là $3x\ (m)$, chiều dài bể là $4x\ (\text{m})$ và chiều cao của bể là $\dfrac{2}{3x^2}\ (m)$.

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T = (3x+4x).2.\frac{2}{3x^2} + 2.3x.4x - \frac{2}{9}.3x.4x = \frac{28}{3x^2} + \frac{64x^2}{3} \geq 2.\sqrt{\frac{28}{3x^2}.\frac{64x^2}{3}} = \frac{32\sqrt{7}}{3}\ \left(m^2\right).$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: $C = T.980000 \geq \dfrac{32\sqrt{7}}{3}.980000 \approx 27657000$ (đồng).

Bài 14. Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?

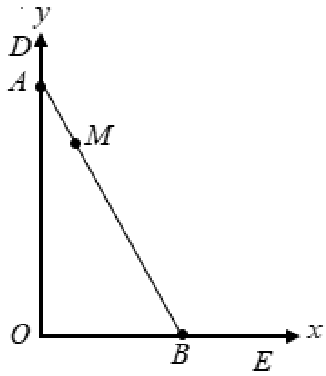


Lời giải

Đề hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất thì phải chọn A,B sao cho đoạn thẳng AB là bé nhất.

Thiết lập khoảng cách giữa hai điểm A,B và tìm giá trị nhỏ nhất.

Chọn hệ toạ độ xOy như hình dưới đây với OD nằm trên tia Oy. Khi đó điểm $M\left(\frac{1}{8};1\right)$.



Gọi $B(m;0), A(0;n)\quad (m,n>0)$. Khi đó ta có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

Do đường thẳng đi qua $M\left(\frac{1}{8};1\right)$ nên $\frac{1}{8m}+\frac{1}{n}=1 \Rightarrow \frac{1}{n}=1-\frac{1}{8m}=\frac{8m-1}{8m} \Rightarrow n=\frac{8m}{8m-1}$.

Có $AB^2=m^2+n^2=m^2+\left(\frac{8m}{8m-1}\right)=f(m)$.

Xét hàm số $f(m)$, ta có : $f'(m)=2m+2.\frac{8m}{8m-1}.\frac{-8}{(8m-1)^2}=2m.\left(1-\frac{64}{(8m-1)^3}\right)$

$$f'(m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0(loai) \\ 1-\frac{64}{(8m-1)^2}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (8m-1)^3=64 \Leftrightarrow m=\frac{5}{8}$$

$$f(m)\ge f\left(\frac{5}{8}\right)=\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{8.\frac{5}{8}}{8.\frac{5}{8}-1}\right)^2=\frac{25}{64}+\frac{25}{16}=\frac{125}{64} \Rightarrow AB\ge\sqrt{\frac{125}{64}}=\frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

Vậy quãng đường ngắn nhất là $\frac{5\sqrt{5}}{8}(\text{km})$

Giá để làm $1\,\text{km}$ đường là 1500 triệu đồng $=1{,}5$ tỷ đồng nên khi đó chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là $\frac{5\sqrt{5}}{8}.1{,}5\approx 2{,}0963$ (tỷ đồng).

DẠNG 8
TÌM (GTLN) VÀ (GTNN) CỦA HÀM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

c) Hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+2024$ có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

Lời giải

a) $y=-x^3+3x^2-1-m^2$

Ta có $y'=-3x^2+6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ \ (\text{nhan}) \\ x=2\ \ (\text{loai}) \end{array}\right.$.

Khi đó $f(-2)=19-m^2$; $f(0)=-1-m^2$ và $f(1)=1-m^2$.

Do đó $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(0)=-1-m^2$ suy ra $-1-m^2=-1\Leftrightarrow m^2=0\Leftrightarrow m=0$.

a) $y=-x^3-3x^2+m$

Hàm số liên tục và xác định trên $[-1;1]$ và có đạo hàm $f'(x)=-3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=-2\notin[-1;1] \end{array}\right.$

Xét $f(-1)=-2+m$; $f(1)=-4+m$ suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=-2+m$

Theo đề bài $-2+m=0\Leftrightarrow m=2$.

c) $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+2024$

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=m-1 \\ x_2=m+1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1\le 0<x_2$ hoặc $0<x_1<x_2$.

TH1: $x_1\le 0<x_2\Leftrightarrow m-1\le 0<m+1\Leftrightarrow -1<m\le 1$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1\}$.

BBT của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

TH2: $0<x_1<x_2$.

BBT của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1>0 \\ y(m+1)\le y(0) \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^3-3m(m+1)^2+3(m^2-1)(m+1)+2024\le 2024 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^2(m-2)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 2 \\ m=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 2.$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+5m}{x-3}$ trên $[1;2]$ bằng 4

b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8

Lời giải

a) $y=\dfrac{x+5m}{x-3}$

$y'=\dfrac{-3-5m}{(x-3)^2}$

Trường hợp 1: $-3-5m>0\Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{5}$

Suy ra $y'>0$ thì $\min\limits_{[1;2]} y=y(1)\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(1+5m)=4\Leftrightarrow m=-\dfrac{9}{5}$ (nhận)

Trường hợp 2: $-3-5m<0\Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{5}$

Suy ra $y'<0$ thì $\min\limits_{[1;4]} y=y(2)\Leftrightarrow -2+5m=4\Leftrightarrow m=-\dfrac{6}{5}$ (loại)

b) $y=\dfrac{x-m}{x+2}$

Ta có $y(0)=-\dfrac{m}{2};y(2)=\dfrac{2-m}{4}$.

Hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ xác định trên $[0;2]$ và đạt các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại hai đầu mút.

Do đó $\max\limits_{[0;2]} y + \min\limits_{[0;2]} y = -\dfrac{m}{2} + \dfrac{2-m}{4} = \dfrac{-3m+2}{4}$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{-3m+2}{4} = 8 \Leftrightarrow -3m+2 = 32 \Leftrightarrow m = -10$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y = \dfrac{x - m^2 - 2}{x - m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

b) Hàm số $y = \dfrac{mx - m^2 - 1}{x + 2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng $\dfrac{1}{5}$.

c) Hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0,2)$

Lời giải

a) Ta có $y' = \dfrac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} > 0, \forall m$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m < 0 \\ f(4) = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

b) $y = \dfrac{mx - m^2 - 1}{x + 2m}$

Ta có $y' = \dfrac{3m^2 + 1}{(x + 2m)^2} > 0, \forall x \neq -2m$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[1;3]$ khi $\begin{cases} -2m \notin [1;3] \\ y(3) = \dfrac{-m^2 + 3m - 1}{2m + 3} = \dfrac{1}{5}\ (*) \end{cases}$

Giải $(*)$: $\dfrac{-m^2 + 3m - 1}{2m + 3} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow -5m^2 + 15m - 5 = 2m + 3 \Leftrightarrow -5m^2 + 13m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1\ (tm) \\ m = \dfrac{8}{5}\ (tm) \end{array}\right.$

c) $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$

Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m \notin [0;2] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -m < 0 \\ -m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -2 \end{array}\right.$ $(*)$

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \dfrac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{array}\right.$

Vì $x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0,2)$.

Ta thấy: $-m+1 > -m-1, \forall m$ do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0,2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1\,(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $0 < m < 1$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x+m}$ (tham số m).

a) Tìm tham số m để hàm số liên tục trên $[0;2]$.

b) Tìm tham số m để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$

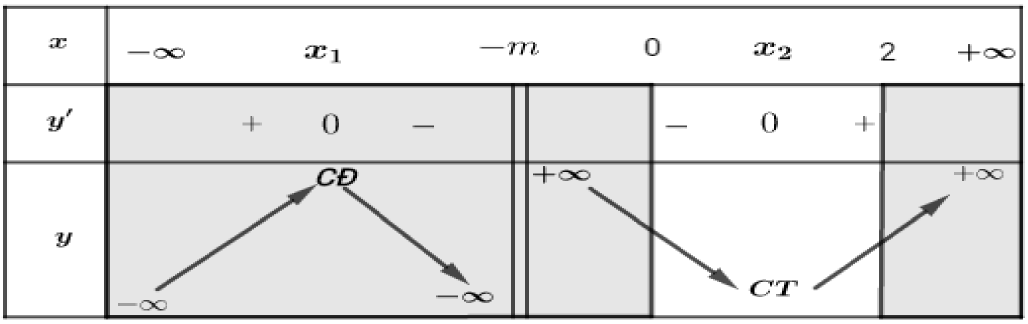
Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hàm số liên tục trên $[0;2]$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m < 0 \\ -m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -2 \end{array}\right. \Rightarrow m \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$

b) Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \dfrac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -m-1 \\ x_2 = -m+1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0;2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ là $m \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$, ta đươc $0 < m < 1$.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	5	↘	1	↗	4

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)$.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)=5$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $M.m$.

x	-3		0		1		2
$f(x)$	-4	↗	2	↘	0	↗	1

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -8.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M=2$ và $m=-4$.

Từ đó suy ra $M.m=2.(-4)=-8$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	-3		-1		0		1		2
y	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$.

Tính $M + m$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $M = 3, m = -2 \Rightarrow M + m = 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	0		3		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0. Khi đó tích $x_0.f(x_0)$ bằng

A. 30. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất là 10 tại $x = 3$ nên $x_0.f(x_0) = 30$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$ **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ **C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

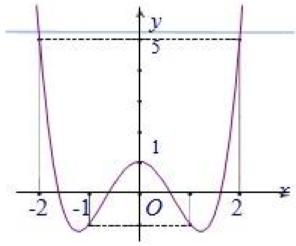
Lời giải

Chọn B.

Từ bảng xét dấu, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$.

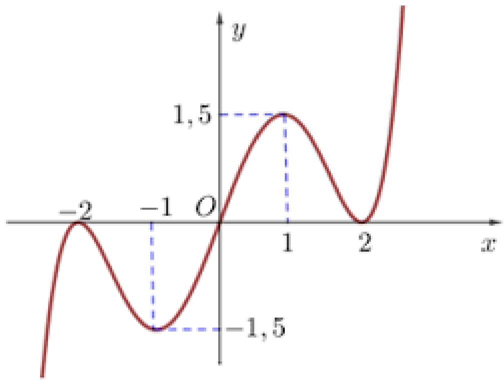
A. 1.   **B.** 2.   **C.** 5.   **D.** 0.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị ta có: $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 5$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + 2024$ cho trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị $M - m$ bằng:

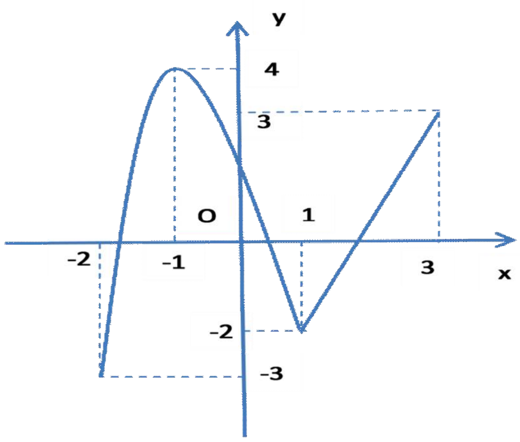
A. $M - m = 0$ **B.** $M - m = -2024$ **C.** $M - m = 4048$ **D.** $M - m = 3$

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} \min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = -1,5 \\ \max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(1) = 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min\limits_{[-2;2]} g(x) = f(-1) = -1,5 + 2024 \\ M = \max\limits_{[-2;2]} g(x) = f(1) = 1,5 + 2024 \end{cases} \Rightarrow M - m = 3$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [-2;3] có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $2m-3M$ bằng:

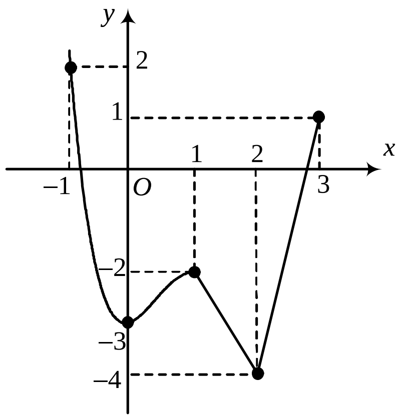
A. -13. **B.** -18. **C.** -16. **D.** -15.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-2)=-3 \\ M=\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-1)=4 \end{cases} \Rightarrow 2m-3M=-18$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là

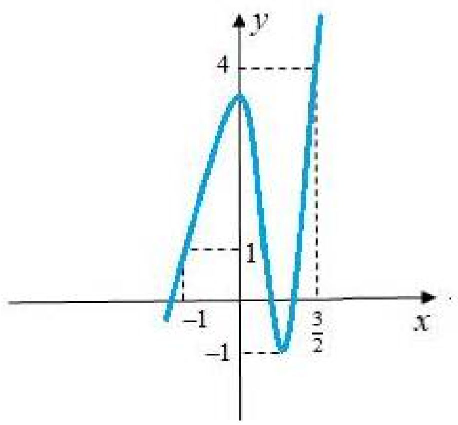
A. 2. **B.** -6. **C.** -5. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-2)=-4 \\ M=\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow M+m=-2$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng

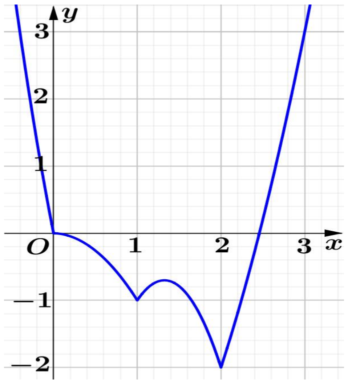
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m = \min\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x) = -1 \\ M = \max\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \end{cases} \Rightarrow M+m=3$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?



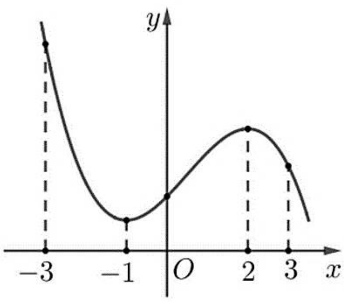
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m = \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2) = -2 \\ M = \max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow M+m=1$

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

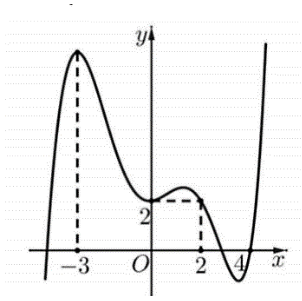
A. $f(2)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(-3)$. **D.** $f(3)$

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng $f(-3)$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng:

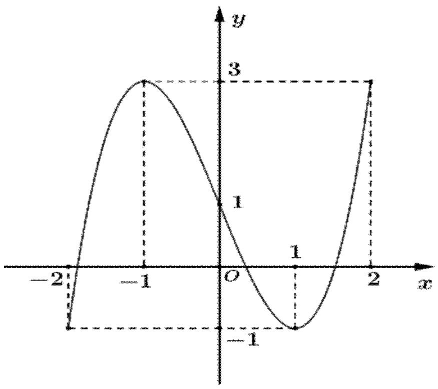
A. $f(2)$. **B.** $f(-3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$

Lời giải

Chọn B.

Quan sát hình vẽ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng $f(-3)$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 3.

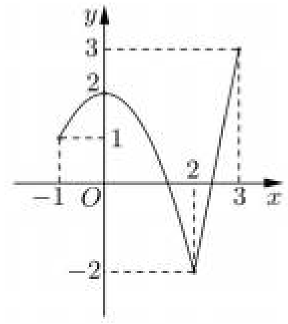
Lời giải

Chọn B.

Trên đoạn $[-2;2]$ ta có $f(x) \ge -1$ và $f(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vậy $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = -1$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 1 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 0

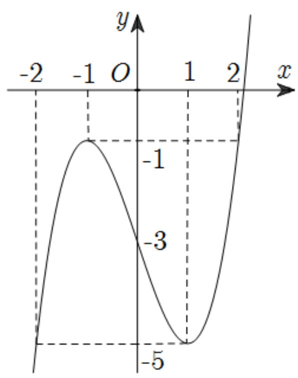
Lời giải

Chọn C.

Dựa và đồ thị suy ra $M=f(3)=3;\ m=f(2)=-2$

Vậy $M-m=5$

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $m=-5;M=-1$. **B.** $m=-2;M=2$. **C.** $m=-1;M=0$. **D.** $m=-5;M=0$.

Lời giải

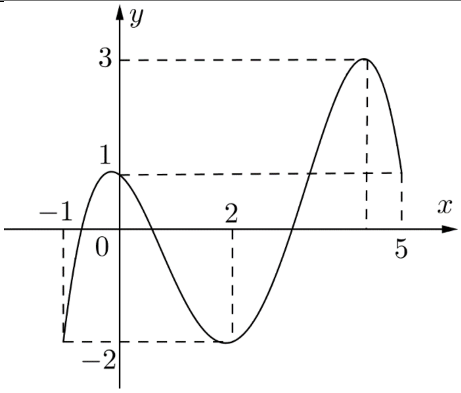
Chọn A.

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$M=\max\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$ khi $x=-1$ hoặc $x=2$.

$m=\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-5$ khi $x=-2$ hoặc $x=1$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới.



Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;5\right]$ bằng

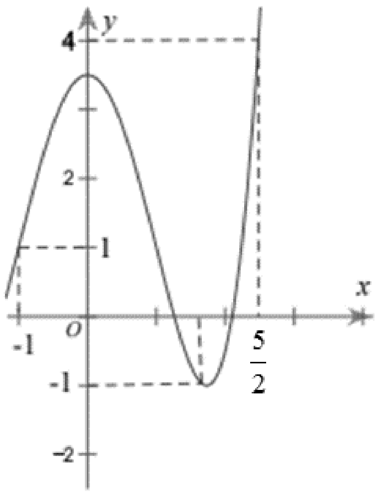
A. -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta thấy: $\begin{cases} M=\max\limits_{[-1;5]} f\left(x\right)=3 \\ n=\min\limits_{[-1;5]} f\left(x\right)=-2 \end{cases} \Rightarrow M+n=1.$

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ là:

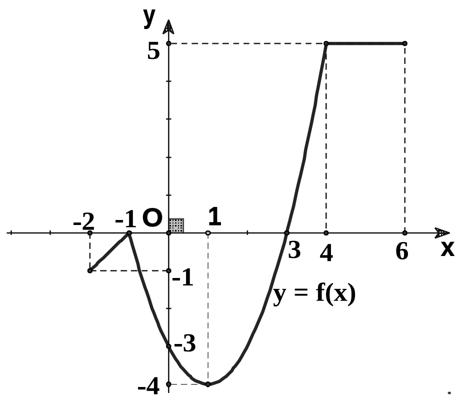
A. $M=4, m=1$ **B.** $M=4, m=-1$ **C.** $M=\frac{7}{2}, m=-1$ **D.** $M=\frac{7}{2}, m=1$

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị $M=4$, $m=-1$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;6\right]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 9.　　**B.** -8.　　**C.** -9.　　**D.** 8.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị suy ra $-4 \le f(x) \le 5 \ \ \forall x \in [-2;6];\ f(1)=-4;\ f(4)=5$

$$\Rightarrow \begin{cases} M=5 \\ m=-4 \end{cases} \Rightarrow M-m=9.$$

Câu 20. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. -12.　　**B.** 10.　　**C.** 15.　　**D.** -2.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$, ta có:

$f'(x)=3x^2-6x-9$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2;2] \\ x=3\notin[-2;2] \end{array}\right..$$

$f(-2)=8$; $f(-1)=15$; $f(2)=-12$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-1)=15$.

Câu 21. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=5$.　　**B.** $x=2$.　　**C.** $x=1$.　　**D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $x\in[1;5]$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$x+\dfrac{4}{x}\ge 2\sqrt{x.\dfrac{4}{x}}=4$ suy ra hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 khi $x=\dfrac{4}{x}\Rightarrow x=2$.

Cách 2: Ta có $y'=1-\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$ (vì $x\in[1;5]$).

Khi đó $y(1)=5$, $y(2)=4$ và $y(5)=\dfrac{29}{5}$.

Do đó $\min\limits_{[1;5]} y=4$ tại $x=2$.

Cách 3: Dùng Casio

Câu 22. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=x^3-3x+4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-3$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;3] \\ x=-1\notin[0;3]\end{array}\right.$

Lại có $y(0)=4; y(1)=2; y(3)=22$.

Vậy $\min_{[0;3]} y=y(1)=2$.

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\min\limits_{[2;\,4]} y=0.$ **B.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=3.$ **C.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=5.$ **D.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=7.$

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$

Ta có $y'=3x^2-3=3(x^2-1)$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad \in(0;2) \\ x=-1\notin(0;2)\end{array}\right.$

$y(1)=3; y(0)=5; y(2)=7$. Do đó $\min\limits_{[0;2]} y=y(1)=3$

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min\limits_{[0;\,3]} y=-3.$ **B.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=-1.$ **D.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=1.$

Lời giải

Chọn C.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;3]$

Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ với $\forall x\in[0;3]$. $y(0)=-1; y(3)=\dfrac{1}{2}$. Do đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(0)=-1$

Câu 25. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là:

A. $\frac{17}{3}; 3$ **B.** $\frac{17}{3}; -5$. **C.** $3; -5$. **D.** $-3; 5$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số xác định, liên tục trên đoạn $[0;2]$

Ta có $y' = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad \notin (0;2) \\ x=-2 \notin (0;2) \end{array}\right.$

$\Rightarrow y(0)=3;\ y(2)=\frac{17}{3}$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3};\ \min\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = 3$

Câu 26. Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y = x + \frac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5. **B.** $-\frac{29}{5}$. **C.** $-\frac{11}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = 1 - \frac{9}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \notin [-4;-1] \\ x=-2 \in [-4;-1] \end{array}\right.$.

Ta thấy $y(-4) = -\frac{29}{5}$; $y(-2) = -5$; $y(-1) = -\frac{11}{2}$. Vậy $\max\limits_{[-4;-1]} y = y(-2) = -5$.

Câu 27. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M - m$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y' = -\frac{4}{x^2} + 1 = \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \in [1;3] \\ x=-2 \notin [1;3] \end{array}\right.$

Ta có: $y(1)=6,\ y(2)=5,\ y(3)=\frac{16}{3} \Rightarrow M=6,\ m=5 \Rightarrow M-m=1$.

Câu 28. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;\ 4]$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** $\frac{23}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[2;4] \\ x=3\in[2;4] \end{array}\right.$.

Lại có $f(2)=7>f(4)=\dfrac{19}{3}>f(3)=6$ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;\,4]$ là 7.

Câu 29. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D=[-1;1]$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

$y'=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; với $-1<x<1$. $y'=0 \Leftrightarrow 1-2x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y(\pm1)=0; y\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}; y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

Do đó $M=\max\limits_{[-1;1]} y=y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}; m=\min\limits_{[-1;1]} y=y\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow M+m=0$

Câu 30. Hàm số $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $\sqrt{2};\ 1$. **B.** $1;\ 0$. **C.** $2;\ \sqrt{2}$. **D.** $2;\ 1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D=[-1;1]$.

Ta có: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-1)=\sqrt{2};\ y(0)=2;\ y(1)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Câu 31. Hàm số $y=\cos 2x-3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ bằng:

A. -4. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D=R$. Ta có: $y'=-2\sin 2x$; $y'=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2};(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x \in [0;\pi] \Rightarrow x \in \left\{0;\dfrac{\pi}{2};\pi\right\}$. Do đó: $y(0) = -2;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -4 \ \Rightarrow \min y = -4$

Câu 32. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\cos x - \cos 5x$ với $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ là:

A. $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y = 4.$ **B.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{2}.$ **C.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{3}.$ **D.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y = -1.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y = 5\cos x - \cos 5x$ nên $y' = -5\sin x + 5\sin 5x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right.$$

Trên $\left[\dfrac{-\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$, $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0;-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right\}$

$y(0) = 4$; $y\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$; $y\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y = 4 = y(0)$

Câu 33. Hàm số $y = \cos^2 x - 2\cos x - 1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt bằng $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** -4. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin x\cos x + 2\sin x = -2\sin x(\cos x - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2\sin x(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$$

Vì $x \in [0;\pi] \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = \pi$.

Khi đó: $y(0) = -2;\ y(\pi) = 2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1.y_2 = -4$.

Câu 34. Hàm số $y = \cos 2x - 4\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\dfrac{\pi}{2}; 0$. **B.** $5; 1$. **C.** $5; -1$. **D.** $9; 1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-2\sin 2x-4\cos x=-4\cos x(\sin x+1)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vì $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$. Khi đó $y(0)=5$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Câu 35. Hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là *M*, giá trị nhỏ nhất là *m*. Khi đó $M-m$ bằng

A. $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}-1$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B.

$f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\left(x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2$.

Vậy $\underset{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)}{max}f(x)=2$, $\underset{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)}{min}f(x)=1$.

Câu 36. Hàm số $y=\sin x+\cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\ 2$. **B.** $-\sqrt{2};\ \sqrt{2}$. **C.** $0;\ 1$. **D.** $-1;\ 1$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Vì $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow-\sqrt{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\Rightarrow$ $\min y=-\sqrt{2};\max y=\sqrt{2}$

Câu 37. Hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\ 1$. **B.** $0;\ 2$. **C.** $\frac{1}{2};\ 1$. **D.** $0;\ 1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mà $0 \le \sin^2 2x \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \le 1 \Rightarrow \min y = \frac{1}{2}$, $\max y = 1$.

Câu 38. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\frac{\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{3}{e^2}$. **D.** $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;3]$

$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e \in [2;3]$

Có $f(2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,3466$; $f(e) = \frac{1}{e} \approx 0,3679$; $f(3) = \frac{\ln 3}{3} \approx 0,366$,

Suy ra $\underset{x \in [2;3]}{\text{Min}} f(x) = \frac{\ln 2}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

Câu 39. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. $2e^4$ **B.** $-e^2$ **C.** $2e^2$ **D.** $-2e^2$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x) = 2(x^2 - 2)e^{2x} + 2xe^{2x} = 2(x^2 + x - 2)e^{2x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-1;2] \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{array}\right.$.

Và $f(-1) = -e^{-2}$; $f(2) = 2e^4$; $f(1) = -e^2$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng $-e^2$ tại $x = 1$.

Câu 40. Hàm số $y = (x-1)^2 + (x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3. **B.** -1. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = (x-1)^2 + (x+3)^2 = 2x^2 + 4x + 10$.

Ta có: $y' = 4x + 4$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 41. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ là:

A. $\min\limits_{(1;+\infty)} y=-1$.   **B.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=3$.   **C.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=5$.   **D.** $\min\limits_{(2;+\infty)} y=\dfrac{-7}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số xác định với $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$

Nhận xét: Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(1;+\infty\right)$

Ta có $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x-1}$

$$f'\left(x\right)=1-\frac{1}{\left(x-1\right)^2}=\frac{x^2-2x}{\left(x-1\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

Bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x)=f(2)=3$

Câu 42. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3$.   **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=5$.   **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3+\sqrt{5}$.   **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $y'=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y = y(1) = 5$

Câu 43. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất.

B. có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. có giá trị nhỏ nhất bằng –1.

D. có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = [-1;+\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0,\ \forall x \in (-1;+\infty)$

Bảng biến thiên:

x	-1		$+\infty$
y'	$\|$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = -1$

Câu 44. Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x = 1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = [1;+\infty)$.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$

Bảng biến thiên:

x	1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1

Câu 45. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y=\frac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$.

Hàm số y đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi hàm số $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=\frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=0\\x\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6\sqrt{2}}$

$$\min_{(0;+\infty)} f(x)=f\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\max_{(0;+\infty)} y=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Câu 46. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. Không tồn tại. **B.** 1. **C.** π. **D.** – 1.

Lời giải

Chọn D.

$y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y'=0\Leftrightarrow x=\pi\left(x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y'	||	$+$	0	$-$	||
y	|| $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ||

Vậy $\max\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y = -1$ và $\min\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y$ không tồn tại.

Câu 47. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -\cos 2x$

Mà $-1 \le \cos 2x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\cos 2x \le 1 \Rightarrow \max y = 1$.

Câu 48. Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(x\right) = 2025 - \sin\left(2025x\right), \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;0\right]$ là:

A. $f\left(-1\right)$. **B.** $f\left(0\right)$. **C.** $f\left(2025\right)$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $2025 - \sin\left(2025x\right) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'\left(x\right) > 0 \Rightarrow$ hàm số $y = f\left(x\right)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[-1;0\right]$

Vậy $\max\limits_{[-1;0]} y = f\left(0\right)$ và $\min\limits_{[-1;0]} y = f\left(-1\right)$.

Câu 49. Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(x\right) = \frac{1}{e^{2024x}} - e^{2024x}, \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[2;3\right]$ là:

A. $f\left(\frac{5}{2}\right)$. **B.** $f\left(2\right)$. **C.** $f\left(3\right)$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\frac{1}{e^{2024x}} - e^{2024x} < 0, \forall x \in \left[2;3\right] \Rightarrow f'\left(x\right) < 0, \forall x \in \left[2;3\right] \Rightarrow$ hàm số $y = f\left(x\right)$ luôn nghịch biến trên đoạn $\left[2;3\right]$

Vậy $\max\limits_{[2;3]} y = f\left(2\right)$ và $\min\limits_{[2;3]} y = f\left(3\right)$.

Câu 50. Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(x\right) = \ln\left(x + 2025\right), \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;2024\right]$ là:

A. $f\left(2024\right)$. **B.** $f\left(0\right)$. **C.** $f\left(2025\right)$. **D.** $f\left(1\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\ln(x+2025)>0, \forall x\in[0;2024] \Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in[0;2024] \Rightarrow$ hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[0;2024]$

Vậy $\max\limits_{[0;2024]} y=f(2024)$ và $\min\limits_{[0;2024]} y=f(0)$.

Câu 51. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=6t^2-t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 2 (s) **B.** 12 (s) **C.** 6 (s) **D.** 4 (s)

Lời giải

Chọn A.

Vận tốc của chuyển động là $v=s'$ tức là $v(t)=12t-3t^2, t>0$

$v'(t)=12-6t,\ v'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		+	0	−	
$v(t)$		↗	12	↘	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng (0;2) và nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Suy ra Max $v(t)=12$ khi $t=2$.

Vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $t=2$.

Câu 52. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

A. $t=2$. **B.** $t=1$. **C.** $t=3$. **D.** $t=4$.

Lời giải

Chọn B

Chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm t chính là $S'(t)$; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S'(t)$.

Ta có $S'(t)=\left(1+3t^2-t^3\right)'=6t-3t^2 = -3\left(t^2-2t\right)=3-3(t-1)^2\le 3, \forall t\in\mathbb{R}$

$\max\limits_{\mathbb{R}} S'(t)=3$ khi $t-1=0 \Leftrightarrow t=1$.

Câu 53. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $\mathrm{S}=-2\mathrm{t}^3+18\mathrm{t}^2+2\mathrm{t}+1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

A. $\mathrm{t}=5\mathrm{s}$ **B.** $\mathrm{t}=6\mathrm{s}$ **C.** $\mathrm{t}=3\mathrm{s}$ **D.** $\mathrm{t}=1\mathrm{s}$

Lời giải

Chọn C

Có $v(t)=S'=-6t^2+36t+2$. Đây là hàm số bậc hai có $a<0$ nên nó sẽ đạt giá trị lớn nhất tại $t=-\frac{b}{2a}=3(s)$.

Câu 54. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. $88(\text{m/s})$. **B.** $25(\text{m/s})$. **C.** $100(\text{m/s})$. **D.** $11(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $v=S'=-t^2+8t+9,\ t\in(0;10)$

$v'=-2t+8$. Xét $v'=0\Rightarrow t=4\in(0;10)$

Bảng biến thiên:

t	0		4		10
v'		+	0	−	
v	$v(0)$	↗	25	↘	$v(10)$

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là $25(\text{m/s})$ tại tại $t=4$.

Câu 55. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 64 cm^2. **B.** 4 cm^2. **C.** 16 cm^2. **D.** 8 cm^2.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b; $0 < a, b < 8$.

Ta có: $2(a+b)=16\Leftrightarrow a+b=8\Leftrightarrow b=8-a$

Diện tích: $S(a)=a(8-a)=-a^2+8a$; $S'(a)=-2a+8$; $S'(a)=0\Leftrightarrow a=4$

Bảng biến thiên:

a	0		4		8
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$	0	↗	16	↘	0

Cách 2

Áp dụng Côsi: $a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\Leftrightarrow ab\le 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=4$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi cạnh bằng 4

Câu 56. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

A. $16\sqrt{3}$ cm **B.** $4\sqrt{3}$ cm **C.** 24 cm **D.** $8\sqrt{3}$ cm

Lời giải

Chọn A.

Cách 1

Gọi cạnh của hình chữ nhật: *a*, *b*; $0 < a, b \le 48$

Ta có: $ab=48\Leftrightarrow b=\dfrac{48}{a}$.

Chu vi: $P(a)=2\left(a+\dfrac{48}{a}\right)$

$P'(a)=2\left(1-\dfrac{48}{a^2}\right)$; $P'(a)=0\Leftrightarrow a=4\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

a	0		$4\sqrt{3}$		48
$P'(a)$		$-$	0	$+$	
$P(a)$		$\searrow$	$16\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Cách 2

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow$ chu vi nhỏ nhất: $2(a+b)=16\sqrt{3}$

- Hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 57. Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số *a* (*a* > 0)?

A. $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{9}$. **C.** $\dfrac{2a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A.

Cạnh góc vuông $x, 0<x<\dfrac{a}{2}$; cạnh huyền: $a-x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(a-x)^2-x^2}$

Diện tích tam giác $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}$. $S'(x)=\frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2-2ax}}$; $S'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

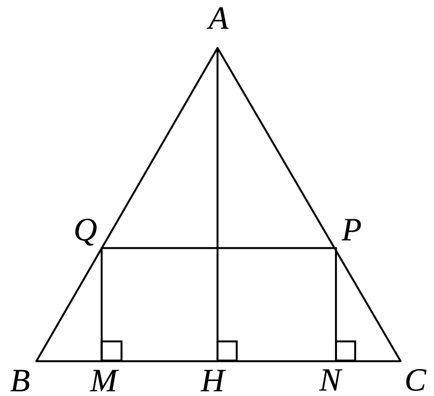
Tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi cạnh góc vuông $\frac{a}{3}$, cạnh huyền $\frac{2a}{3}$.

Câu 58. Cho ΔABC đều cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên BC, hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất ?

A. $BM=\frac{2a}{3}$. **B.** $BM=\frac{3a}{4}$. **C.** $BM=\frac{a}{3}$. **D.** $BM=\frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow BH=CH=\frac{a}{2}$.

Đặt $BM=x\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$

Ta có: $MN=2MH=a-2x, QM=BM\tan 60^0=x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$S(x)=(a-2x)x\sqrt{3}=a\sqrt{3}x-2\sqrt{3}x^2$

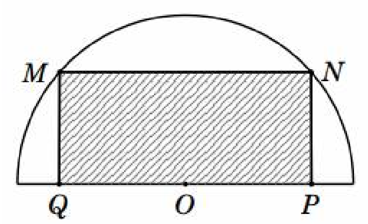
$S'(x)=\sqrt{3}(a-4x), S'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{4}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	$\searrow$	

Vị trí điểm M: $BM = \frac{a}{4}$

Câu 59. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên).



Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 9. **D.** $9\sqrt{2}$.

Lời giải

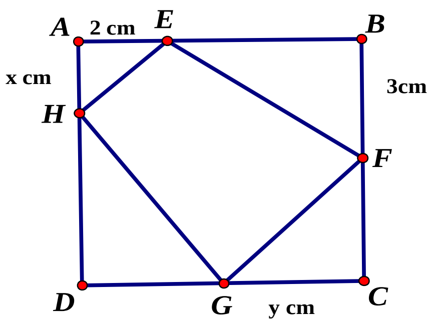
Chọn C.

Đặt $OQ = x$, $(0 < x < 3) \Rightarrow MQ = \sqrt{MO^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - x^2}$

Ta có $S_{MNPQ} = PQ.MQ = 2x.\sqrt{9 - x^2} \le 2.\frac{x^2 + 9 - x^2}{2} = 9$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 60. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng x + y để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 7 **B.** 5 **C.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.

Tính được $2S = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36$ (1)

Mặt khác ΔAEH đồng dạng ΔCGF nên $\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - (4x + \dfrac{18}{x})$.

Ta có 2S lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \dfrac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Biểu thức $4x + \dfrac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \dfrac{18}{x} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$.

Vậy đáp án cần chọn là C.

Câu 61. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào . Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Khi đó, chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

A. 50 và 25 **B.** 35 và 35 **C.** 75 và 25 **D.** 50 và 50

Lời giải

Chọn A.

Gọi $x\ (m)\ (0 < x < 50)$ là chiều rộng của hình chữ nhật

Khi đó, chiều dài của hình chữ nhật là $100 - 2x$

Nên diện tích của hình chữ nhật là $x(100-2x) = -2x^2 + 100x$

Gọi $f(x) = -2x^2 + 100x$ với điều kiện $0 < x < 100$

$\Rightarrow f'(x) = -4x + 100$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 100 = 0 \Rightarrow x = 25$

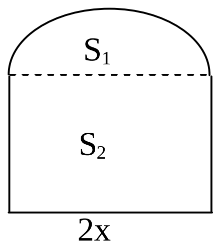
Bảng biến thiên:

x	0		25		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1250	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;50)} f(x) = f(25) = 1250$

Vậy: Để rào khu đất ấy có diện tích lớn nhất theo hình chữ nhật có chiều rộng bằng 25 và chiều dài bằng 50

Câu 62. Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là $a(m)$ (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?



A. chiều rộng bằng $\dfrac{2a}{4+\pi}$, chiều cao bằng $\dfrac{a}{4+\pi}$

B. chiều rộng bằng $\dfrac{a}{4+\pi}$, chiều cao bằng $\dfrac{2a}{4+\pi}$

C. chiều rộng bằng $a(4+\pi)$, chiều cao bằng $2a(4+\pi)$

D. Đáp án khác

Lời giải

Chọn A.

Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt.

Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx, tổng ba cạnh của hình chữ nhật là $a-\pi x$.

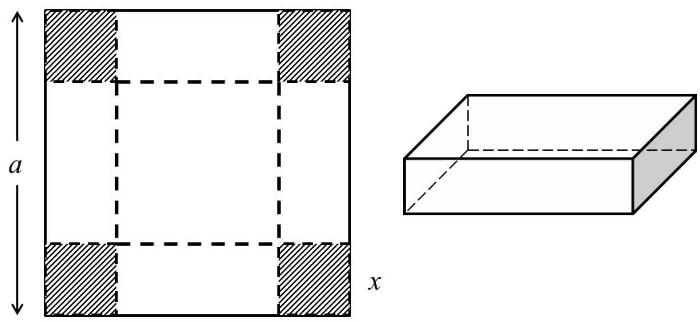
Diện tích cửa sổ là:

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi x^2}{2}+2x\frac{a-\pi x-2x}{2}=ax-(\frac{\pi}{2}+2)x^2=(\frac{\pi}{2}+2)x(\frac{a}{\frac{\pi}{2}+2}-x).$$

Dễ thấy S lớn nhất khi $x=\dfrac{a}{\frac{\pi}{2}+2}-x$ hay $x=\dfrac{a}{4+\pi}$.(Có thể dùng đạo hàm hoặc đỉnh Parabol)

Vậy để S_{max} thì các kích thước của nó là: chiều cao bằng $\dfrac{a}{4+\pi}$; chiều rộng bằng $\dfrac{2a}{4+\pi}$

Câu 63. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh *a*. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?

A. $\dfrac{5a}{6}$. **B.** $\dfrac{a}{6}$. **C.** $\dfrac{a}{12}$. **D.** $\dfrac{a}{9}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là:

$V(x)=x(a-2x)^2\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$.

$\Rightarrow\ V'(x)=(a-2x)^2+x.2(a-2x).(-2)=(a-2x)(a-6x)$;

$V'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{6}\ \left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{a}{6}$		$\dfrac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

Vậy trong khoảng $\left(0;\dfrac{a}{2}\right)$ có 1 điểm cực đại duy nhất là $x=\dfrac{a}{6}$ tại đó $V(x)=\dfrac{2a^3}{27}$.

Câu 64. Một Bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. $1200cm^2$ **B.** $160cm^2$ **C.** $1600cm^2$ **D.** $120cm^2$

Lời giải

Chọn B.

Gọi $x,y\ (x,y>0)$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài của đáy hố ga.

Gọi h là chiều cao của hố ga ($h>0$). Ta có $\dfrac{h}{x}=2 => h=2x\ (1)$

suy ra thể tích của hố ga là : $V=xyh=3200 => y=\dfrac{3200}{xh}=\dfrac{1600}{x^2}\ (2)$

Diện tích toàn phần của hố ga là: $S=2xh+2yh+xy=4x^2+\dfrac{6400}{x}+\dfrac{1600}{x}=4x^2+\dfrac{8000}{x}=f(x)$

Khảo sát hàm số $y=f(x),(x>0)$ suy ra diện tích toàn phần của hố ga nhỏ nhất bằng $1200cm^2$ khi

$x=10cm => y=16cm$

Suy ra diện tích đáy của hố ga là $10.16=160cm^2$

Câu 65. Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính $1m$, chiều dài $8m$ để được một cây xà hình khối chữ nhật. Hỏi thể tích cực đại của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu?

A. $V = 2m^3$ **B.** $V = 4m^3$ **C.** $V = 8m^3$ **D.** $V = 16m^3$

Lời giải

Chọn B.

Gọi $x, y(m)$ là các cạnh của tiết diện.

Theo Định lí Pitago ta có: $x^2 + y^2 = 1^2$ (đường kính của thân cây là $1m$).

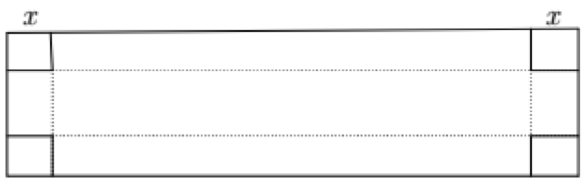
Thể tích của cây xà sẽ cực đại khi diện tích của tiết diện là cực đại, nghĩa là khi $x.y$ cực đại.

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Thể tích khối gỗ sau khi cưa xong: $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 = 4m^3$ (tiết diện là hình vuông).

Câu 66. Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước $3m \times 8m$. Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là x để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp.

Hình vẽ :



Với giá trị nào của x thì thể tích hình hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất ?

A. $x = \frac{1}{3}m$ **B.** $x = 1m$ **C.** $x = \frac{2}{3}m$ **D.** $x = \frac{4}{3}m$

Lời giải

Chọn C.

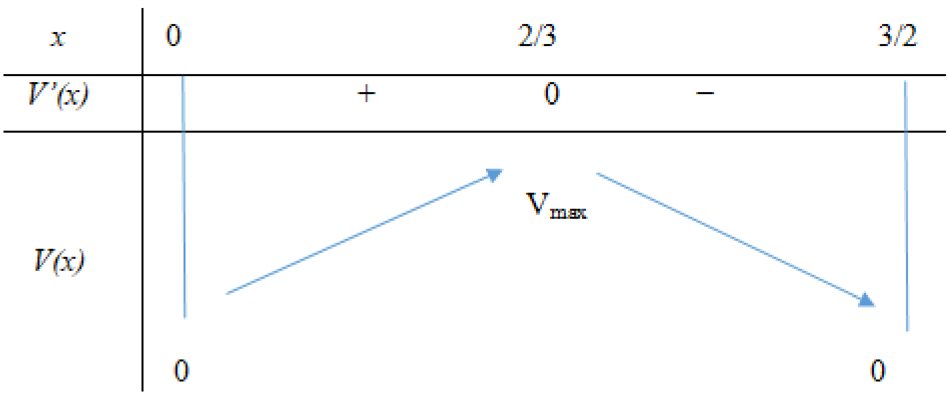
Ta có: $0 < x < \frac{3}{2}$ Gọi thể tích hình hộp là: *V(x)*. Khi đó:

$$V(x) = x(3-2x)(8-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

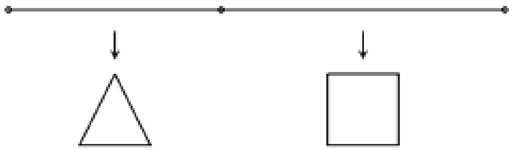
$$V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x^2 - 11x + 6)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Câu 67. Một sợi dây có chiều dài là 6m được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\dfrac{12}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **B.** $\dfrac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **C.** $\dfrac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\text{m}$. **D.** $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}\text{m}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là $x(\text{m})$. Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\dfrac{6-3x}{4}$

Tổng diện tích khi đó là: $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\left(\dfrac{6-3x}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36\right]$

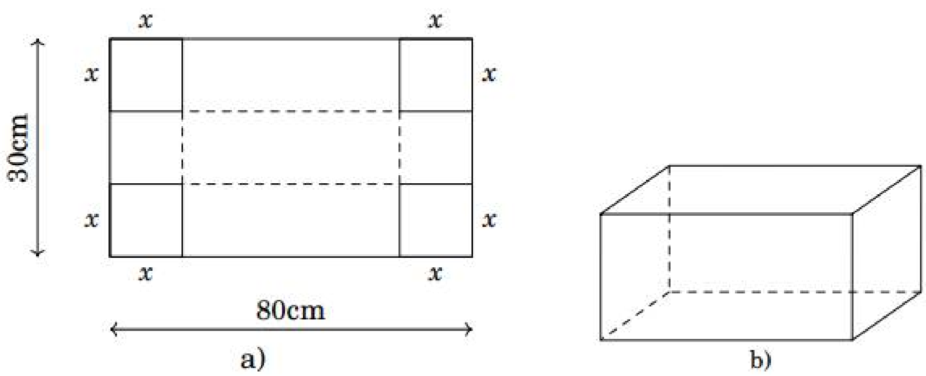
Xét hàm số $f(x)=\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36, x\in(0;6)$

Ta có $f(x)$ là hàm tam thức bậc hai có $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}\in(0;6)$ và $a>0$

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}\in(0;6)$

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x=\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}\text{m}$

Câu 68. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30cm và chiều dài 80cm (hình a) người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5\le x\le 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp (hình b). Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất



A. $\dfrac{10}{3}\text{cm}$. **B.** $\dfrac{20}{3}\text{cm}$. **C.** $\dfrac{31}{3}\text{cm}$. **D.** $\dfrac{40}{3}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích chiếc hộp là: $V(x)=x(30-2x)(80-2x)=2400x-220x^2+4x^3$ với $5\le x\le 10$

Ta có $V'(x)=12x^2-440x+2400=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{20}{3}\in[5;10]\\x=30\notin[5;10]\end{array}\right.$

$V(5)=700;V\left(\dfrac{20}{3}\right)=\dfrac{200000}{27};V(10)=6000$

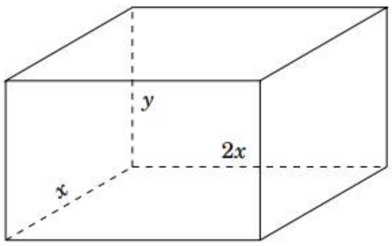
Do đó $\max\limits_{[5;10]}V(x)=\dfrac{200000}{27}$ khi $x=\dfrac{20}{3}$. Vậy để thể tích hộp là lớn nhất khi $x=\dfrac{20}{3}$cm.

Câu 69. Thầy Huy dự định sử dụng hết $5,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\text{m}^3$. **B.** $1,17\text{m}^3$. **C.** $1,51\text{m}^3$. **D.** $1,40\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi $x,2x,y$ với $x,y>0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá.

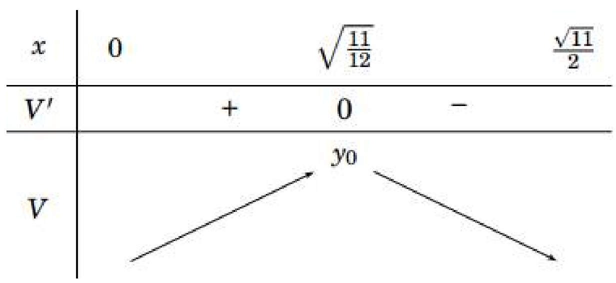
Theo giả thiết ta có: $2.2xy+2.xy+2x^2=5,5\Leftrightarrow 6xy+2x^2=5,5\Leftrightarrow y=\dfrac{5,5-2x^2}{6x}$

Do $y>0$ nên $5,5-2x^2>0\Rightarrow 0<x<\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

Thể tích bể cá là: $V(x)=2x^2y=2x^2.\dfrac{5,5-2x^2}{6x}=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{11}{6}x$

Xét hàm số $V(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{11}{6}x$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$ có $V'(x)=-2x^2+\dfrac{11}{6}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{11}{12}}$

Bảng biến thiên:



Thể tích lớn nhất của bể cá là $V\left(\sqrt{\dfrac{11}{12}}\right)\approx 1,17\text{m}^3$

Câu 70. Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng

A. 5; – 8. **B.** 1; – 12. **C.** $\frac{-13}{2};\frac{13}{2}$. **D.** 6; – 7 .

Lời giải

Chọn C.

Gọi một trong hai số phải tìm là *x*, số còn lại: *x* + 13.

Tích hai số $P(x)=x(x+13)=x^2+13x$.

$P'(x)=2x+13,\ P'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-13}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{-13}{2}$		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{-169}{4}$	↗	$+\infty$

Tích của chúng bé nhất bằng $\frac{-169}{4}$ khi hai số là $\frac{13}{2}$ và $\frac{-13}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 71. Hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-4;2\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4		-3		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$	6

a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 27 và giá trị nhỏ nhất bằng -5.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-3;-1\right)$.

c) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-4;-3\right)$ và $\left(1;2\right)$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$ và cực đại tại $x = 27$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 27 và giá trị nhỏ nhất bằng -5.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-4;-3\right)$ và $\left(1;2\right)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-3;-1\right)$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và cực đại tại $x = -3$

Câu 72. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;-1\right)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ bảng biến thiên, ta có:

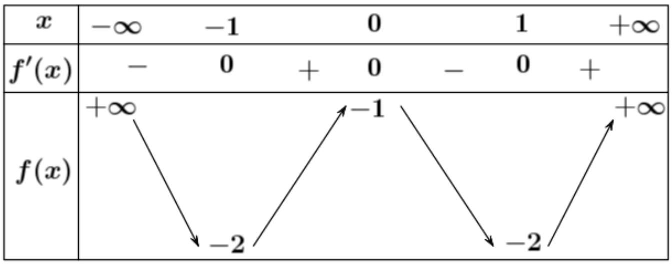
a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:



a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$; $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y=-2$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

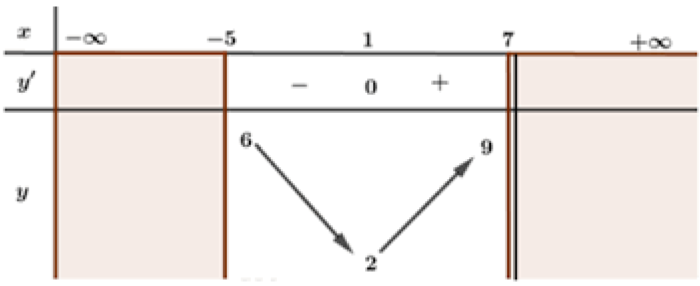
a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$; $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y=-2$

c) Hàm số không có giá trị lớn nhất

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[-5;7)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;7)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$.

c) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(2;1)$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 9 và giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;7)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$.

c) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1;2)$.

d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2 và không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $[-5;7)$

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

c) Trên nửa khoảng $(-1;1]$, hàm số có giá trị lớn nhất là $f(1)$ và có giá trị nhỏ nhất là $f(0)$.

d) Trên khoảng $(-1;+\infty)$, hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ bảng xét dấu đạo, ta có:

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

c) Trên nửa khoảng $(-1;1]$, hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất là $f(0)$.

d) Trên khoảng $(-1;+\infty)$, hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 76. Hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Xét trên tập xác định của hàm số.

a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Hàm số có một điểm cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên, ta có:

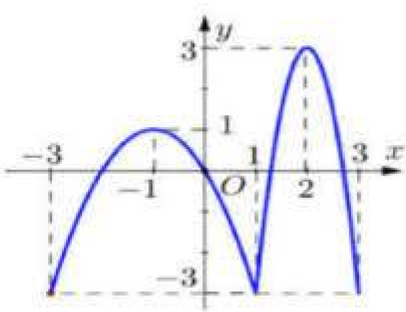
a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Hàm số có một điểm cực trị tại $x=0$.

Câu 77. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng 3 tại $x=2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng -3 tại $x=-3$ và $x=3$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;3)$.

d) Trên đoạn $[-3;3]$, đồ thị hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ đồ thị, ta có:

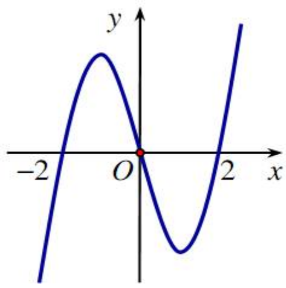
a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ là: $\max\limits_{[-3;3]} f\left(x\right)=f\left(2\right)=3$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ là: $\min\limits_{[-3;3]} f\left(x\right)=f\left(-3\right)=f\left(1\right)=f\left(3\right)=-3$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ và $\left(2;3\right)$.

d) Trên đoạn $\left[-3;3\right]$, đồ thị hàm số có hai điểm cực đại là $\left(-1;1\right)$ và $\left(2;3\right)$, một điểm cực tiểu là $\left(-1;3\right)$

Câu 78. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình bên.



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị lớn nhất bằng $f\left(0\right)$ tại $x=0$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên bằng $f\left(-2\right)=f\left(2\right)$ tại $x=-2$ và $x=2$.

c) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(0;2\right)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta có:

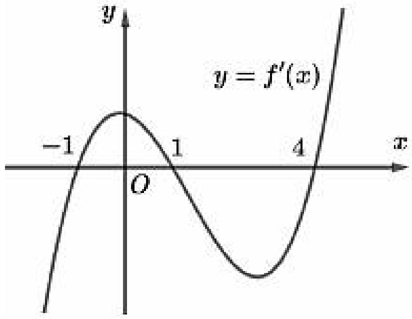
a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ không có giá trị lớn nhất

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên bằng $f\left(-2\right)=f\left(2\right)$ tại $x=-2$ và $x=2$.

c) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực đại tại $x=0$ và hai điểm cực tiểu tại $x=-2$, $x=2$.

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

c) $f(1) > f(2) > f(4)$

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 0.

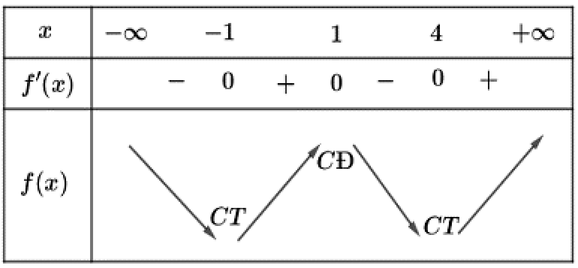
Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Khi đó $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (-\infty;-1) \cup (1;4)$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;1) \cup (4;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



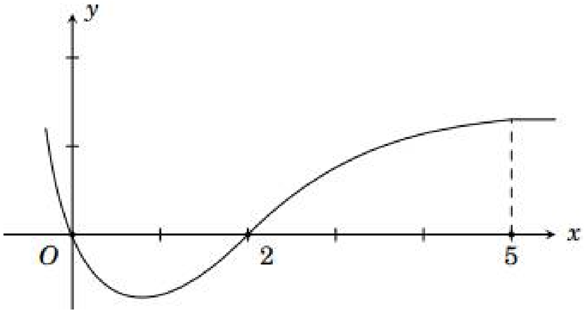
a) Hàm số có ba điểm cực trị

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(4;+\infty)$

c) $f(1) > f(2) > f(4)$

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1) = f(4) = 0$

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

c) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$

d) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;5]$

x	0		2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$

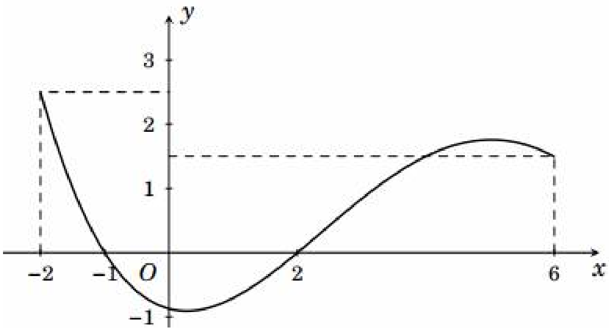
Theo bảng biến thiên thì $f(3) > f(2)$ nên $f(3) - f(2) > 0$

Theo giả thiết ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) = f(0) - [f(3) + f(2)] > f(0)$

Suy ra $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



a) $f(-1) > f(-2)$

b) $f(6) > f(2)$

c) Trên đoạn $[-2;6]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.

d) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Hàm số đồng biến trên $(-2;-1)$ và $(2;6)$ do $f'(x) > 0$ nên $f(-1) > f(-2)$ và $f(6) > f(2)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ do $f'(x) < 0$ suy ra $f(-1) > f(2)$

Trên đoạn $[-2;6]$, đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành 2 điểm nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.

Trên đoạn $[-2;6]$ chưa đủ dữ kiện xác định giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$

Câu 82. Cho hàm số $y = \sqrt{5-4x}$.

a) Điều kiện xác định của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ là $x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{4}\right)$.

b) $y' = \dfrac{-4}{\sqrt{5-4x}}$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

d) Trên đoạn $[-1;1]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lần lượt là $\max\limits_{[-1;1]} y = 3$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = 1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Điều kiện xác định: $5-4x\ge 0 \Leftrightarrow x\le \frac{5}{4}$ hay $x\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right]$

Suy ra hàm số xác định với $\forall x\in[-1;1]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

Ta có $y'=\frac{-2}{\sqrt{5-4x}}<0,\forall x\in[-1;1]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Do đó $\max\limits_{[-1;1]} y=y(-1)=3;\ \min\limits_{[-1;1]} y=y(1)=1$

Câu 83. Cho hàm số $y=x+\frac{9}{x}$.

a) Điều kiện xác định của hàm số $y=x+\frac{9}{x}$ là $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $y'=\frac{x^2-9}{x^2}$

c) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{25}{4}$ tại $x=4$.

d) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 6 tại $x=2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Điều kiện xác định của hàm số $y=x+\frac{9}{x}$ là $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$y'=1-\frac{9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}$

Hàm số đã cho liên tục trên [2;4]

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \quad \notin(2;4) \\ x=3 \quad \in(2;4) \end{array}\right.$

Ta có $y(2)=\frac{13}{2};y(3)=6;y(4)=\frac{25}{4}$.

Do đó $\min\limits_{x\in[2;4]} y=y(3)=6$; $\max\limits_{[2;4]} y=y(2)=\frac{13}{2}$

Câu 84. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-12x+1$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(-1) = -12$

c) Trên đoạn $\left[-2;\frac{5}{2}\right]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 tại $x = -1$.

d) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -19 tại $x = 2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Hàm số đã cho là hàm đa thức nên luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

$y' = 6x^2 - 6x - 12 \Rightarrow f'(-1) = 0$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[-2;\frac{5}{2}\right]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in \left[-2;\frac{5}{2}\right] \ (N) \\ x = 2 \in \left[-2;\frac{5}{2}\right] \ (N) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(-2) = -3;\ f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{33}{2};\ f(-1) = 8;\ f(2) = -19$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[-2;\frac{5}{2}\right]} y = f(-1) = 8;\ \min\limits_{\left[-2;\frac{5}{2}\right]} y = f(2) = -19$

Câu 85. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y' = x^2 + 2x + 3$

c) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng -4 tại $x = 0$.

d) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{16}{3}$ tại $x = -4$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Hàm số đã cho là hàm đa thức nên luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

$y' = x^2 + 4x + 3$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-4;0]$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-4;0]\ (N) \\ x=-3\in[-4;0]\ (N) \end{array}\right.$

Ta có: $f(-4)=-\dfrac{16}{3}; f(0)=-4; f(-1)=-\dfrac{16}{3}; f(-3)=-4$

$\Rightarrow \max\limits_{[-4;0]} y=f(-3)=f(0)=-4; \min\limits_{[-4;0]} f(x)=f(-4)=f(-1)=-\dfrac{16}{3}$

Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng -4 tại $x=-3; x=0$.

Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\dfrac{16}{3}$ tại $x=-4; x=-1$.

Câu 86. Cho hàm số $y=x+\sqrt{2-x^2}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\dfrac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}}, \forall x\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 tại $x=1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$ tại $x=-\sqrt{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

• $y'=1+\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}}=\dfrac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}}, \forall x\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

• Ta có: $f\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}; f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}; f(1)=2$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} y=f(1)=2; \min\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} y=f\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}$

Câu 87. Cho hàm số $y=\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}$.

a) Hàm số đã cho xác định khi $x\in(-2;4)$.

b) $f'(0)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $2\sqrt{3}$ tại $x=1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\sqrt{6}$ tại $x=-2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

$y=\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}$

• Tập xác định: $D=[-2;4]$.

• $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{2+x}}{2\sqrt{4-x}.\sqrt{2+x}},\forall x\in(-2;4)$.

$\Rightarrow f'(0)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x}=\sqrt{2+x}\Rightarrow 4-x=2+x\Rightarrow x=1\in[-2;4]$ (N).

• Ta có: $f(-2)=\sqrt{6};\ f(4)=\sqrt{6};\ f(1)=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} y=f(1)=2\sqrt{3};\ \min\limits_{[-2;4]} y=f(-2)=f(4)=\sqrt{6}$

Câu 88. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\dfrac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{1}{3}$ tại $x=0$.

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

$y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$ do $x^2-x+1>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=\dfrac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow -x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

• Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max\limits_{\mathbb{R}} y = f(2) = \frac{1}{3}$ và $\min\limits_{\mathbb{R}} y = f(0) = -1$.

Cách khác: Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 để tìm min, max

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \frac{x-1}{x^2-x+1} \Leftrightarrow y\left(x^2-x+1\right) = x-1 \Leftrightarrow yx^2-(y+1)x+y+1=0 \ (*)$

Để $(*)$ có nghiệm thì: $\begin{cases} y \neq 0 \\ \Delta = (y+1)^2 - 4y(y+1) = -3y^2-2y+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{3}$.

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} y = f(2) = \frac{1}{3}$ và $\min\limits_{\mathbb{R}} y = f(0) = -1$.

Câu 89. Cho hàm số $y = \ln(x-1)(3-x)$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y' = \frac{-2x+4}{(x-1)(3-x)}$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 tại $x = 2$.

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $y = \ln(x-1)(3-x)$

Đề hàm số xác định thì: $(x-1)(3-x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(1;3)$.

$y' = \frac{-2x+4}{(x-1)(3-x)}$

$y' = 0 \Leftrightarrow -2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 2\,(N)$

Bảng biến thiên:

x		1		2		3	
y'			$+$	0	$-$		
y			$\nearrow$	0	$\searrow$		

Từ bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{(1;3)} y = f(2) = 0$ và hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 90. Cho hàm số $y = 2x - e^{2x}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(\ln 2) = 6$

c) Trên đoạn $[-1;\ln 2]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 0 tại $x = 0$.

d) Trên đoạn $[-1;\ln 2]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $2\ln 2 - 4$ tại $x = \ln 2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

$y = 2x - e^{2x}$

Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

$y' = 2 - 2e^{2x} \Rightarrow f'(\ln 2) = -6$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-1;\ln 2]$.

$y' = 2 - 2e^{2x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2 - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0\,(N)$

Ta có: $f(-1) = -2 - \dfrac{1}{e^2}$; $f(0) = 0$; $f(\ln 2) = 2\ln 2 - 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1;\ln 2]} y = f(0) = 0 \\ \min\limits_{[-1;\ln 2]} y = f(\ln 2) = 2\ln 2 - 4 \end{cases}$$

Câu 91. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với $t \ge 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật giảm.

b) Sau thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật tăng.

c) Vận tốc lớn nhất của vật tại thời điểm 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

d) Sau thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, gia tốc của bằng $6(m/s^2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Vận tốc của chuyển động là $v(t) = s'(t) = -t^2 + 12t$.

Xét hàm $v(t) = -t^2 + 12t$

• Tập xác định: $D = [0; +\infty)$

• Ta có: $v'(t) = -2t + 12$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

• Bảng biến thiên:

t	0		6		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	$\nearrow$	36	$\searrow$	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật tăng. Suy ra a) sai

+ Sau thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật giảm. Suy ra b) sai

+ Vận tốc lớn nhất của vật tại thời điểm 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động. Suy ra c) đúng

• Gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = -2t + 12$.

Với $t = 3 \Rightarrow a(3) = -2.3 + 12 = 6(m/s^2)$. Suy ra d) đúng

Câu 92. Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8 kể từ khi bắt đầu chuyển động, một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ với $t \ge 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 vận tốc của vật giảm.

b) Trong khoảng thời gian từ giây thứ 3 đến giây thứ 8 vận tốc của vật tăng.

c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8, vận tốc lớn nhất của vật bằng $3(m/s)$.

d) Ở giây thứ 4, gia tốc của bằng $1\ (m/s^2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2\right)'=t^2-6t+5$$

Xét hàm $v(t)=t^2-6t+5$

• Tập xác định: $D=[1;8]$

$v'(t)=2t-6$

$v'(t)=0\Leftrightarrow 2t-6=0\Leftrightarrow t=3$

• Bảng biến thiên:

t		1		3		8	
$v'(t)$			$-$	0	$+$		
$v(t)$		0	↘	-4	↗	21	

Từ bảng biến thiên ta có:

a) Trong khoảng thời gian $(3;+\infty)$ thì vận tốc của vật tăng

b) Trong khoảng thời gian $(0;3)$ thì vận tốc của vật giảm.

c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8, vận tốc lớn nhất của vật bằng $21(m/s)$.

d) Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình vận tốc tại thời điểm t hay $a(t)=v'(t)=2t-6$

Với $t=4\Rightarrow a(4)=2.4-6=2(m/s^2)$

Câu 93. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô . Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4 \text{ với } 0\le t\le 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 4 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $41,5$ lít

c) $V'(t)=300\left(2t-3t^2\right)$, với $0\le t\le 0,5$

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Số xăng trong bình ban đầu là $V(0)=4$ lít

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $V=V\left(\frac{1}{2}\right)=41,5$ lít

c) Xét hàm số $V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4$ với $0\le t\le 0,5$

Đạo hàm $V'(t)=300t(2-3t)$

d) Cho $V'(t)=0\Leftrightarrow 300t(2-3t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\in[0;0,5]\\ t=\frac{2}{3}\in[0;0,5]\end{array}\right.$

Các giá trị $V(0)=4;V\left(\frac{1}{2}\right)=41,5$

Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Câu 94. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 500 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3+15x-100$.

d) A bán cho B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là $C(10)=10+30.10=400$ triệu.

b) Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B là:

$R(x)=x.P(x)=x\left(45-0,001x^2\right)=45x-0,001x^3$ triệu đồng

Thay $x=10$ ta được $R(10)=449$ triệu đồng

c) Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là:

$$P(x)=R(x)-C(x)=x\left(45-0,001x^2\right)-(100+30x)=-0,001x^3+15x-100$$

d) Xét hàm số $P(x)=-0,001x^3+15x-100$ với $(0\le x\le 100)$ ta có:

$$P'(x)=-0,003x^2+15=0\Leftrightarrow x^2=5000\Leftrightarrow x=50\sqrt{2}\in[0;100]$$

Ta có $P(0)=-100$; $P\left(50\sqrt{2}\right)=500\sqrt{2}-100\approx 607$; $P(100)=400$

Bảng biến thiên

x	0		$50\sqrt{2}$		100
y'		$+$	0	$-$	
y			$500\sqrt{2}-100$		
		↗		↘	
	100				400

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[0;100]} P=P\left(50\sqrt{2}\right)=500\sqrt{2}-100\approx 667$

Vậy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2}\approx 70,7$ tấn sản phẩm cho B mỗi tháng và lợi nhuận lớn nhất thu được khoảng 607 triệu đồng.

Câu 95. Bác Hồng nuôi cá tra ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước Bác Hồng với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

a) Số cá giống mà Bác Hồng đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x)=-0,0652x^2+16x+1500$ (kg)

d) Vụ tới Bác Hồng phải thả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Số cá giống mà Bác Hồng đã thả trong vụ vừa qua là $50.20=1000$ con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là: $\dfrac{1500}{1000}=1,5$ (kg).

c) Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x (com), $(x>0)$

Theo đề bài cứ giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5$ (kg/con)

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x$ (kg/con).

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này được tính bằng công thức:

$$F(x)=(1000-x)(1,5+0,0625x)=-0,0625x^2+61x+1500.$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $F'(x) = -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$

Bảng biến thiên như sau:

x	0		488		1000
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$F(max)$	$\searrow$	

Vậy Bác Hồng phải thả số cá giống trong vụ tới là: $1000 - 488 = 512$ con.

d) Vụ tới Bác Hồng phải thả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Câu 96. Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Điều kiện xác định là $x \geq 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x(108 - x^2)$

c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là 432 (gam).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Điều kiện xác định là $x \geq 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x(108 - x^2)$

c) Xét hàm số $f(x) = 108x - x^3$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có

$$f'(x) = 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -6 < 0 \end{array}\right.$$

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(6)$	$\searrow$	

Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $f(x) = 108x - x^3$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 6$.

Vậy nên thả 6 con tôm giống trên mỗi mét vuông mặt hồ thì cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất.

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là $f(6) = 108.6 - 6^3 = 432$ (gam).

Câu 97. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x\left(\mathrm{m}^3\right)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; $0,2$ triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa $100\mathrm{m}^3$ sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x\left(\mathrm{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \le x \le 100$

b) Tổng chi phí sản xuất $100\mathrm{m}^3$ sản phẩm là 34 triệu đồng

c) $\overline{C} = 0,001x + \dfrac{4}{x} + 0,2$ với $0 \le x \le 100$

d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng $0,326$ triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất $x\left(\mathrm{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày là :

$$C = C(x) = 4 + 0,2x + 0,001x^2 \text{ với } 0 \le x \le 100$$

b) Thay $x = 100$ vào hàm $C(x)$ ta thu được kết quả là 34 triệu đồng

c) Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là

$$\overline{C} = \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{4 + 0,2x + 0,001x^2}{x} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2 \text{ với } 0 \le x \le 100$$

d) Ta có $\overline{C}'(x) = 0,001 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 0,001 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4000 \Leftrightarrow x = 20\sqrt{10} \in (0;100]$

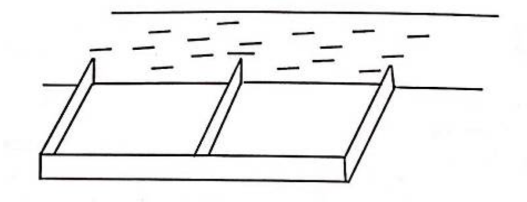
$\overline{C}\left(20\sqrt{10}\right) = \dfrac{\sqrt{10}}{25} + \dfrac{1}{5} \approx 0,326$

Bảng biến thiên

x	0		$20\sqrt{10}$		100
$\overline{C}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{10}}{25} + \dfrac{1}{5}$	$\nearrow$	$0,34$

Từ bảng biến thiên, ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là $\overline{C}\left(20\sqrt{10}\right) \approx 0,326$ (triệu đồng/ m^3 sản phẩm), đạt được khi $x = 20\sqrt{10} \approx 63\ \text{m}^3$.

Câu 98. Một người nông dân có $15.000.000$ đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



a) Số tiền phải làm là: $x.60000 + y.3.50000 = 15000000$ đồng.

b) Diện tích đất: $S = x.y = x.\dfrac{500-5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250\ \left(\text{m}^2\right)$

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Số tiền phải làm là: $x.3.50000 + y.60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \dfrac{500-5x}{2}$.

b) Diện tích đất: $S = x.y = x.\dfrac{500-5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$

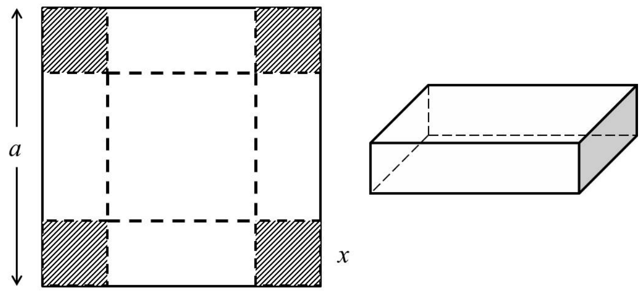
c) Ta có: $S' = 250 - 5x$; $S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

x	0		50		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	6250	$\searrow$	$-\infty$

d) Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250\ \left(\text{m}^2\right)$ khi $x = 50$.

Câu 99. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp như hình vẽ. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt.



a) $0 < x < \frac{a}{2}$

b) Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2$ với $0 < x < \frac{a}{2}$.

c) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

d) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt thì $0 < x < \frac{a}{2}$

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

$V'(x) = (a-2x)^2 + x.2(a-2x).(-2) = (a-2x)(a-6x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

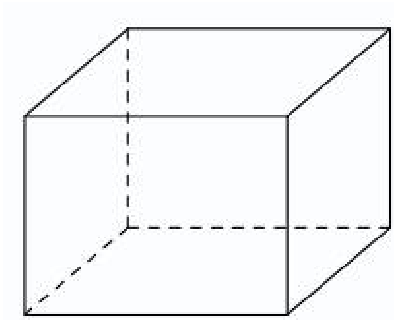
Bảng biến thiên:

x	0		$a/6$		$a/2$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

Vậy $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$.

Vậy thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$ khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

Câu 100. Bác Tuấn muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\mathrm{dm}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Gọi $x\left(x>0\right)$ là chiều rộng của đáy bể



a) Chiều dài của đáy bể là $\dfrac{x}{2}$

b) Chiều cao của bể là $\dfrac{0,144}{x^2}$.

c) Diện tích cần xây là $2x^2+\dfrac{0,864}{x}$

d) Bác Tuấn trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là 1080000 đồng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Gọi $x\left(x>0\right)$ là chiều rộng của đáy bể.

Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ là chiều cao của bể là $\dfrac{0,144}{x^2}$.

Khi đó diện tích cần xây là $2x^2+\dfrac{0,864}{x}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=2x^2+\dfrac{0,864}{x}$ có $f'\left(x\right)=4x-\dfrac{0,864}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0,6$

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ như sau:

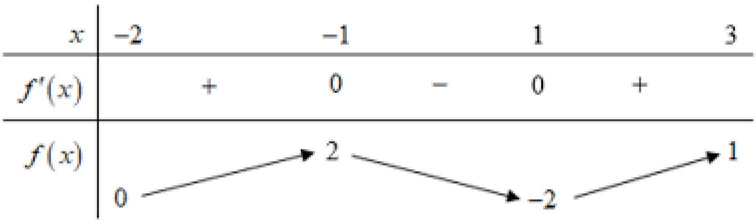
x	0		$0,6$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2,16$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min f\left(x\right)=f\left(0,6\right)=2,16$

Vậy chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là: $500000.2,16=1080000$ đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-2;3]$ như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$.



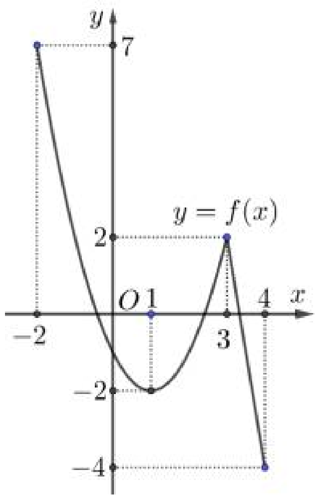
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m = \min\limits_{[-2;3]} f(x) = f(1) = -2 \\ M = \max\limits_{[-2;3]} f(x) = f(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow M + m = 0$

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$.



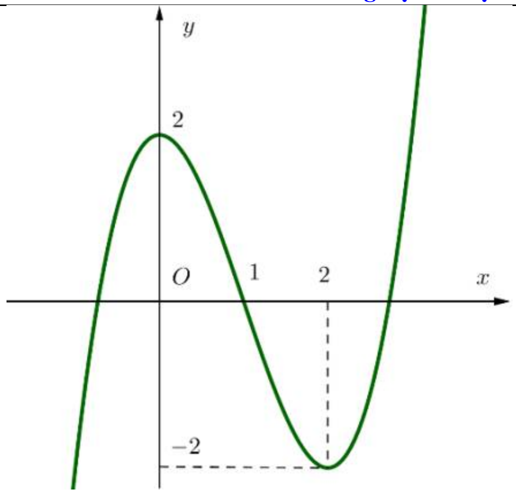
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m = \min\limits_{[-2;4]} f(x) = f(4) = -4 \\ M = \max\limits_{[-2;4]} f(x) = f(-2) = 7 \end{cases} \Rightarrow M + m = 3$

Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0;2]$. Tính $M+m$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}f(t)$ với $t\in[0;1]$

Mà trên đoạn $[0;1]$ ta có: $\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(t)=0;\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(t)=2$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=\frac{3}{2}f(1)=0;\max\limits_{[0;1]} y=\frac{3}{2}f(0)=3$

Câu 104. Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y=x^3+3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

$y=x^3+3x^2+1$

$y'=3x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\notin[-1;2]\end{array}\right.$.

$y(-1)=3;y(0)=1;y(2)=21$.

Vậy GTNN trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số bằng 1 tại $x=0$.

Câu 105. Biết giá trị lớn nhất hàm số $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Tính gái trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 40

a) $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên [1;3]

Ta có $f'(x)=3x^2-16x+16$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & \notin(1;3) \\ x=\dfrac{4}{3} & \in(1;3) \end{array}\right.$

$f(1)=0;\ f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{13}{27};\ f(3)=-6$.

Do đó $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=13 \\ b=27 \end{cases} \Rightarrow a+b=40$

Câu 106. Cho hàm số $y=x+\dfrac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;2]$

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Ta có: $y=x+\dfrac{1}{x+2} \Rightarrow y'=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(N) \\ x=-3(L) \end{array}\right.$.

Khi đó: $y(-1)=0$ và $y(2)=\dfrac{9}{4}$.

Do đó: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $y(-1)=0$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $y(2)=\dfrac{9}{4}$.

Câu 107. Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$ trên đoạn $[-5;-3]$ (lấy kết quả đến phần chục).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $-0,8$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0\}$

Ta có: $y'=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0;\forall x\in D$

BBT:

x	-5	-3
y'	$-$	
y	$-\dfrac{47}{60}$ $\searrow$	$\dfrac{-11}{6}$

Từ BBT ta thấy, hàm số có giá trị lớn nhất bằng $-\dfrac{47}{60} \approx -0,8$

Câu 108. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Tính tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số đã cho (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $1,41$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $y' = \dfrac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do $y(-1) = 0, y(1) = \sqrt{2}, y(2) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ nên

$\max\limits_{[-1;2]} y = y(1) = \sqrt{2}$, $\min\limits_{[-1;2]} y = y(-1) = 0$

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{2} \approx 1,41$

Câu 109. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ có tập xác định $D = [2;4]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ x \in (2;4) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y(2) = \sqrt{2}, y(3) = 2, y(4) = \sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ là 2

Câu 110. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -2

TXĐ: $D = [-2;2]$. Hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

$y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;

$y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

$y(-2)=-2$; $y(2)=2$; $y(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{[-2;2]} y = y(-2)=-2$

Câu 111. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0;\pi]$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $0,94$

Ta có $y'=2\cos x-4\sin^2 x.\cos x=2\cos x(1-2\sin^2 x)=2\cos x.\cos 2x$

Nên $y'=0 \Leftrightarrow 2\cos x.\cos 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos 2x=0 \end{array}\right.$

Trên $(0;\pi)$, $y'=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

$y(0)=0;\ y(\pi)=0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3};\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\max\limits_{[0;\pi]} y=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0,94$

Câu 112. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x(\sin x+1)$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-\sin x(\sin x+1)+\cos^2 x=-2\sin^2 x-\sin x+1$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-1 \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

Vì $x\in[0;\pi] \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}$

Khi đó: $y(0)=1;\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4};\ y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4};\ y(\pi)=-1$

$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=0$

Câu 113. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\frac{4}{3}\cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0,67

$$y' = 2^{x+1}\ln 2 - \frac{4}{3}\cdot 8^x \ln 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2\cdot\left(2^x\right)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 0 \\ 2^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1/2 \end{array}\right.$$

Xét $y(-1) = \frac{5}{6}$; $y(-\frac{1}{2}) = 0,9428$; $y(0) = \frac{2}{3}$.

Ta có: $y_{\min} = \frac{2}{3} \approx 0,67$.

Câu 114. Cho hàm số $y = e^x\left(x^2 - 3\right)$, gọi $M = \frac{a}{e^b}\left(a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\right)$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-5;-2\right]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có: $y' = e^x\left(x^2 + 2x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \in \left[-5;-2\right] \\ x = 1 \notin \left[-5;-2\right] \end{array}\right.$

Ta có $y\left(-5\right) = \frac{22}{e^5}; y\left(-3\right) = \frac{6}{e^3}; y\left(-2\right) = \frac{1}{e^2}$.

Khi đó $\max\limits_{[-5;-2]} y = \frac{6}{e^3} \Rightarrow a = 6; b = 3 \Rightarrow a + b = 9$.

Câu 115. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - 4\sqrt{(x+4)(4-x)} + 5$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7,83

Điều kiện $-4 \le x \le 4$. Nhận xét: Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-4;4\right]$

Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = x + 4 + 4 - x + 2\sqrt{(x+4)(4-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+4)(4-x)} = \frac{t^2 - 8}{2}$

Ta có $y = t - 4\left(\frac{t^2 - 8}{2}\right) + 5 = -2t^2 + t + 21 = f\left(t\right)$

Tìm điều kiện của *t*: Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ với $x \in [-4;4]$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $g(-4) = 2\sqrt{2}$; $g(0) = 4$; $g(4) = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[-4;4]} g(x) = 2\sqrt{2}$; $\max\limits_{x\in[-4;4]} g(x) = 4 \Rightarrow t \in [2\sqrt{2};4]$

$f'(t) = -4t + 1 < 0\ \forall t \in [2\sqrt{2};4] \Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm nghịch biến trên $[2\sqrt{2};4]$

$\underset{[-4;4]}{Max}\, y = f(2\sqrt{2}) = 5 + 2\sqrt{2}$ $y_{\min} = \dfrac{2}{3} \approx 7{,}83$

Câu 116. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6)+5$ trên nữa khoảng $[-4;+\infty)$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -11

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4;+\infty)$

Ta có: $y = (x^2+6x)(x^2+6x+8)+5$.

Đặt $t = x^2+6x$. Khi đó $y = t^2+8t+5$

Xét hàm số $g(x) = x^2+6x$ với $x \ge -4$.

Ta có $g'(x) = 2x+6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4		-3		$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0	$+$	
$g(x)$		-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $t \in [-9;+\infty)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = h(t) = t^2+8t+5$ với $t \in [-9;+\infty)$.

Ta có $h'(t) = 2t+8$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$;

$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-9		-4		$+\infty$
$h'(t)$			$-$	0	$+$	
$h(t)$		14	$\searrow$	-11	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -11$

Câu 117. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1$.

Khi đó $y=f(t)=2t^2+2t-1$

$f'(t)=4t+2; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{-1}{2}\in[-1;1] \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-3}{2}; f(-1)=-1; f(1)=3$

Vậy $\min\limits_{R} y=\frac{-3}{2}, \max\limits_{R} y=3.$

Câu 118. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sin^4 x-4\sin^2 x+5$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Đặt $t=\sin^2 x, 0\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=t^2-4t+5$. $f'(t)=2t-4; f'(t)=0\Leftrightarrow t=2\notin[0;1]$

$f(0)=5; f(1)=2$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=2, \max\limits_{\mathbb{R}} y=5$

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là 7

Câu 119. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y=-2\sin^3 x+3\cos 2x-6\sin x+4$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9

$y=-2\sin^3 x+3\cos 2x-6\sin x+4=-2\sin^3 x-6\sin^2 x-6\sin x+7$

Đặt $t=\sin x(-1\le t\le 1)$.

Xét hàm $y=-2t^3-6t^2-6t+7$ trên đoạn $[-1;1]$

$y'=-6t^2-12t-6\Rightarrow y'=0$ vô nghiệm.

Ta có: $y(-1)=9, y(1)=-7$

Vậy hàm số $y=-2\sin^3 x+3\cos 2x-6\sin x+4$ có giá trị lớn nhất bằng 9.

Câu 120. Cho hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Tính $M+m$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

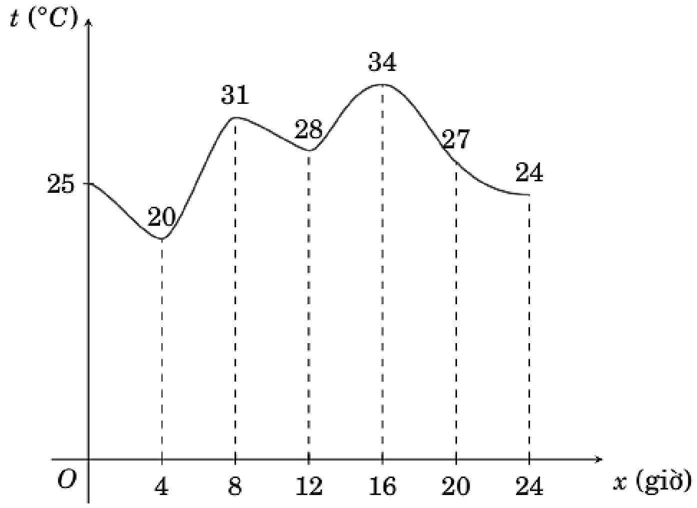
Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\frac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t)=\frac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-1;1] \\ t=-2\notin[-1;1] \end{array}\right. \Rightarrow f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=\dfrac{2}{3}.$

Vậy $M=1, m=0$

$\Rightarrow M+m=1$

Câu 121. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày.



Nhiệt độ cao nhất trong ngày là bao nhiêu độ C?

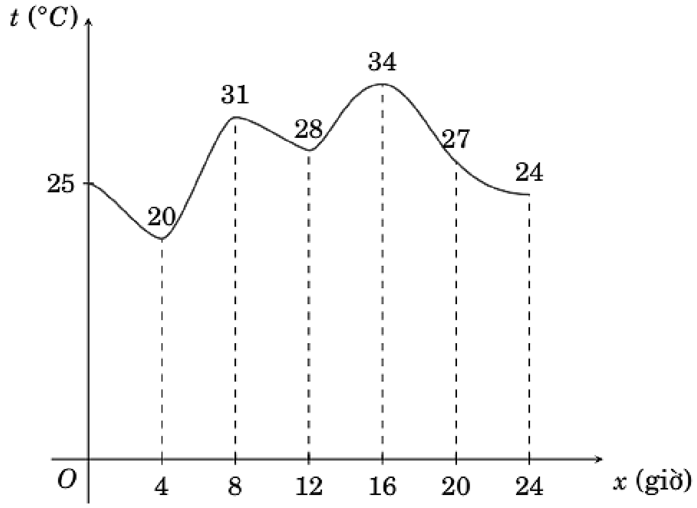
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 34

Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $34°C$

Câu 122. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày.



Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C?

$28°C$

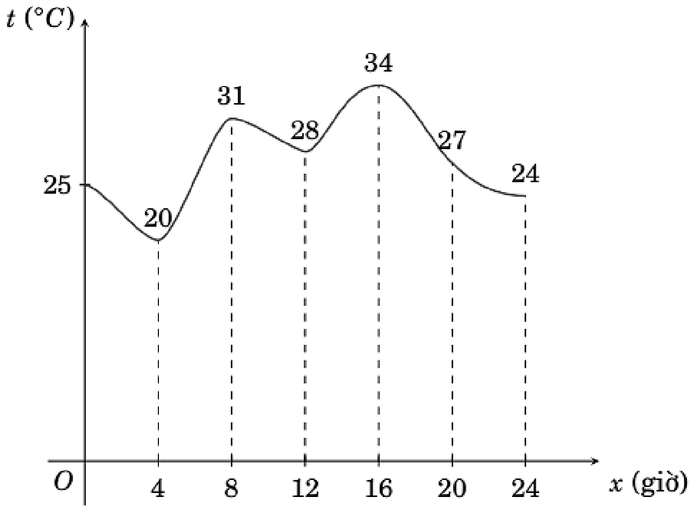
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20

Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20°C$

Câu 123. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày.



Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc mấy giờ?

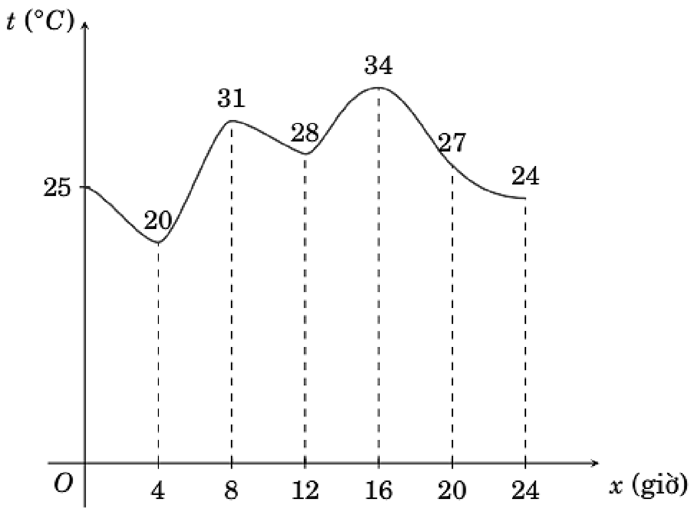
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 16

Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ

Câu 124. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày.



Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc mấy giờ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Đúng: Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

Câu 125. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây)là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 24

Ta có $v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = -\frac{3}{2}\left(t^2 - 8t + 16\right) + 24 = 24 - \frac{3}{2}(t-4)^2 \le 24$

Vậy $\max\limits_{[0;6]} v(t) = 24\left(\text{m/s}\right)$ tại thời điểm $t = 4$ (giây).

Câu 126. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

$s(t) = -t^3 + 6t^2$

$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$

$v_{\max} = \frac{-12^2}{4.(-3)} = 12 \Leftrightarrow t = \frac{-12}{2.(-3)} = 2$.

Câu 127. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t,$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 89.

Ta có $v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9$.

Ta có: $v' = 2t - 2 \Rightarrow v' = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Tính: $v(1) = 8$; $v(10) = 89$, $v(0) = 9$.

Vậy vận tốc lớn nhất là $89\left(\text{m/s}\right)$.

Câu 128. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3\ (\text{m})$. Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v\left(\text{m/s}\right)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Vận tốc của chất điểm chuyển động theo quy luật: $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$.

Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi $v(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow t = 2$.

Câu 129. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 28

Vận tốc của chuyển động là $v(t)=s'(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+12t+10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t)=v'(t)=t^2-6t+12=(t-3)^2+3$.

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=3$. Khi đó vận tốc của vật bằng $v(3)=28(\text{m/s})$.

Câu 130. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 25

Ta có $v=S'=-t^2+8t+9,\ t\in(0;10)$

$v'=-2t+8$.

Xét $v'=0\Rightarrow t=4\in(0;10)$

Bảng biến thiên:

t	0		4		10
v'		$+$	0	$-$	
v	$v(0)$	$\nearrow$	25	$\searrow$	$v(10)$

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là $25(\text{m/s})$ tại tại $t=4$.

Câu 131. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện và $0\le I\le 22$. Công suất P lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1024.

- Xét hàm số $P(I) = 12I^2 - \frac{1}{2}I^3$ với $0 \le I \le 22$.

- $P'(I) = 24I - \frac{3}{2}I^2$

$P'(I) = 0 \Leftrightarrow 24I - \frac{3}{2}I^2 = 0 \Leftrightarrow (48 - 3I)I = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I = 0 \\ I = 16 \end{array}\right.$

- Bảng biến thiên:

I		0		16		22	
$P'(I)$			$+$	0	$-$		
$P(I)$		0	$\nearrow$	1024	$\searrow$	484	

Từ bảng biến thiên ta có: Công suất P lớn nhất bằng $P(16) = 1024(\text{w})$.

Câu 132. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu mét trên giây?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 24

Ta có $v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$; $v'(t) = -3t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ và có bảng biến thiên

t	0		4		6
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$	24	$\searrow$	

Vậy $\max v(t) = 24(m/s)$ khi $t = 4$.

Câu 133. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 72

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \ge 0$.

$P' = 12 - I$. $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:

I	0		12		$+\infty$
P		$\nearrow$	72	$\searrow$	

Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.

Câu 134. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $18,4$

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$.

$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10]$.

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

Nhiệt độ thấp nhất trong phong đạt được là $T_{\min} = T(10) = 18,4^0C$.

Câu 135. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 12

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng:

$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2$(gam).

$f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$		$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$	

Trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, cần thả 12 con cá thì sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất.

Câu 136. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng bao nhiêu miligam?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20

Ta có: $G(x)=0,025x^2(30-x)=0,75x^2-0,025x^3, x>0$

$G'(x)=1,5x-0,075x^2$

$G'(x)=0$

$\Leftrightarrow 1,5x-0,075x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\,(L) \\ x=20\,(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg, độ giảm là 100.

Câu 137. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t,$ trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng bao nhiêu mét trên giây?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}\,(v>6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v)=cv^3\dfrac{300}{v-6}=300c\dfrac{v^3}{v-6}$

$E'(v)=600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2};\ E'(v)=0 \Leftrightarrow v=9$ do $(v>6)$

Bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

Cá phải bơi với vận tốc 9 (km/h) thì ít tiêu hao năng lượng nhất.

Câu 138. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ *t* là $f(t)=45t^2-t^3, t=0,1,2,...,25$. Nếu coi *f(t)* là hàm số xác định trên đoạn [0;25] thì đạo hàm *f'(t)* được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm *t*. Ngày thứ bao nhiêu thì mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 15

$f'(t)=90t-3t^2$; $f''(t)=90-6t$, $f''(t)=0 \Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên

t	0		15		25
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$	675	$\searrow$	

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là vào ngày thứ 15.

Câu 139. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t)=1000+30t^2-t^3\left(0\le t\le 30\right)$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20

Xét hàm số $N(t)=1000+30t^2-t^3\left(0\le t\le 30\right)$.

Ta có: $N'(t)=60t-3t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=20 \end{array}\right.$

t	0		20		30
N'		$+$	0	$-$	
N		$\nearrow$	5000	$\searrow$	

Với $t=20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

Câu 140. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$N(t)=1000+\dfrac{100}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1005

Xét hàm số $N(t)=1000+\dfrac{100}{100+t^2}$

$$N'(t)=\frac{100.\left(100+t^2\right)-100t.2t}{\left(100+t^2\right)^2}=\frac{100\left(100-t^2\right)}{\left(100+t^2\right)^2}$$

Khi đó với $t>0$ $N'(t)=0\Leftrightarrow 100-t^2=0\Leftrightarrow t=10$

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$	1000	$\nearrow$	1005	$\searrow$	1000

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t=10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện nuôi cấy vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 141. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{386v}{v^2+2v+5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ hai của kilômét/giờ)?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $2,24$

Vì v là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm $\Rightarrow v>0$ và $\dfrac{5}{v}>0$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $v+\dfrac{5}{v}\ge 2\sqrt{5}\Rightarrow v+\dfrac{5}{v}+2\ge 2\sqrt{5}+2$

$$\Rightarrow \frac{386}{v+\frac{5}{v}+2}\le\frac{386}{2\sqrt{5}+2}\Rightarrow f(v)=\frac{386v}{v^2+2v+5}\le\frac{386}{2\sqrt{5}+2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow v=\dfrac{5}{v}\Leftrightarrow v^2=5\Rightarrow v=\sqrt{5}\approx 2,24km/h$ (vì $v>0$)

Vậy vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm là $2,24km/h$ thì lưu lượng xe là lớn nhất.

Câu 142. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}\ (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $c'(t)=\frac{-t^2+1}{\left(t^2+1\right)^2}, \forall t\in(0;+\infty)$.

$c'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy sau khi tiêm 1 giờ, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân cao nhất.

Câu 143. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Xét $P'(t)=\frac{-t^2-2t+3}{\left(t^2+t+4\right)^2}=\frac{(t-1)(-t-3)}{\left(t^2+t+4\right)^2}$.

$P'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t=1$ và $P'(t)<0, \forall t\in(1;+\infty)$ nên sau 1 giờ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 144. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $30,5$

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $27 \le x \le 31$

Khi đó số xe bán ra là $600+(31-x).200$

Lợi nhuận thu được là: $f(x)=\left[600+(31-x).200\right](x-27)=(-200x+6800)(x-27)$

$$=-200x^2+12200x-183600=-200\left(x-\frac{61}{2}\right)^2+2450 \le 2450$$

Dấu $"="$ xảy ta khi $x-\frac{61}{2}=0 \Leftrightarrow x=30,5$

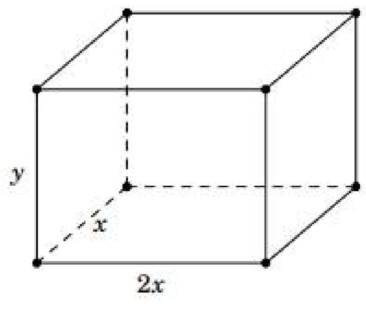
Vậy giá bán mới là $30,5$ triệu đồng thì lợi nhuận lớn nhất thu được là 2450 triệu đồng.

Câu 145. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}\,\text{m}^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700000 đồng/m^2. Hỏi chi phí thuê nhân công ít nhất bao nhiêu triệu đồng để xây bể trên?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 105



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện x, y).

Với giả thiết của bài toán, thể tích bể cá là: $V=2x^2y=\frac{500}{3} \Rightarrow y=\frac{250}{3x^2}$

Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì tổng diện tích các mặt của bể cá phải nhỏ nhất.

Tổng diện tích các mặt của bể cá $S=2xy+2.2xy+2x^2=6xy+2x^2=\frac{500}{x}+2x^2$

Xét hàm số $S(x)=\frac{500}{x}+2x^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$ có $S'(x)=-\frac{500}{x^2}+4x=0 \Leftrightarrow x=5$

Bảng biến thiên:

x	0		5		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	150	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min S = 150$ tại $x = 5$.

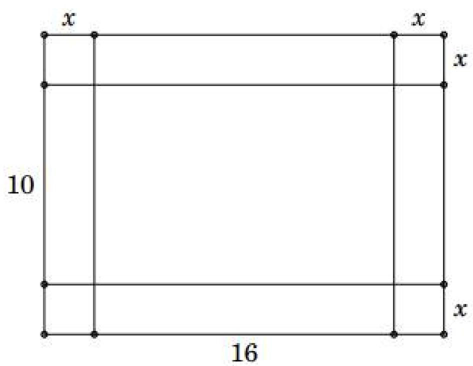
Khi đó chi phí thuê nhân công là: $T = 150.700000 = 105$ triệu đồng.

Câu 146. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $10\text{cm} \text{ x } 16\text{cm}$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng bao nhiêu mét?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2



Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng $x, \left(0 < 2x < 10, 0 < x < 5\right)$.

Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x, chiều rộng bằng $10 - 2x$ và chiều dài bằng $16 - 2x$

Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$

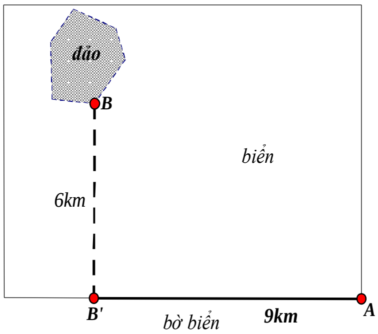
Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ trên $(0;5)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{20}{3} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0;5)$ như sau:

x	0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0;5)$ tại $x = 2$ hay hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi độ dài cạnh hình vuông của miếng tôn bị cắt bỏ bằng 2m.

Câu 147. Một công ty xây dựng muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm *A* trên bờ đến một điểm *B* trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. *B'* là điểm trên bờ biển sao cho *BB'* vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ *A* đến *B'* là 9*km*. Vị trí *C* trên đoạn *AB'* sao cho khi nối ống theo *ACB* thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách *A* một đoạn bằng bao nhiêu *km*?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6,5.

Đặt $x = B'C \quad (km)$, $x \in [0;9]$

$BC = \sqrt{x^2 + 36}; AC = 9 - x$

Chi phí xây dựng đường ống là $C(x) = 130.000\sqrt{x^2 + 36} + 50.000(9 - x) \qquad (USD)$

Hàm $C(x)$, xác định, liên tục trên $[0;9]$ và $C'(x) = 10000.\left(\dfrac{13x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5\right)$

$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow 169x^2 = 25(x^2 + 36) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

$C(0) = 1.230.000$; $C\left(\dfrac{5}{2}\right) = 1.170.000$; $C(9) \approx 1.406.165$

Vậy chi phí thấp nhất khi $x = 2,5$.

Vậy *C* cần cách *A* một khoảng 6,5km.

Câu 148. Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(cm^2)$. Tổng chiều dài và chiều rộng của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là: $x(cm)$ và $y(cm)$ $(x, y > 0)$.

Chu vi hình chữ nhật là: $P = 2(x + y) = 2x + 2y$

Theo đề bài thì: $xy = 100$ hay $y = \dfrac{100}{x}$.

Do đó: $P = 2(x+y) = 2x + \dfrac{200}{x}$ với $x > 0$

Đạo hàm: $P'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 200}{x^2}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Lập bảng biến thiên ta được: $P_{\min} = 40$ khi $x = 10 \Rightarrow y = 10$.

Kích thước của hình chữ nhật là 10×10 (là hình vuông).

Tổng chiều dài và chiều rộng là 20

Lưu ý: Có thể đánh giá bằng BĐT Cauchy: $P = 2(x+y) \geq 2.2\sqrt{xy} = 4\sqrt{100} = 40.$

Câu 149. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $120\,\text{cm}$ từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 80

Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x, 0 < x < 60$

Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$, cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$

Diện tích tam giác ABC là: $S(x) = \dfrac{1}{2}x.\sqrt{120^2 - 240x}$. Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên khoảng $(0;60)$

Ta có $S,(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \dfrac{1}{2}x.\dfrac{-240}{2\sqrt{120^2 - 240x}} = \dfrac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0		40		60
$S'(x)$	‖	+	0	−	‖
$S(x)$	‖	↗	$S(40)$	↘	‖

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $BC = 80$.

Vậy cạnh huyền của tấm gỗ này là $80cm$

Câu 150. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét vuông?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4050

Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu, theo bài ra ta có $x+2y=180$.

Diện tích của miếng đất là $S=y(180-2y)$.

Ta có: $y(180-2y)=\frac{1}{2}\cdot 2y(180-2y)\le\frac{1}{2}\cdot\frac{(2y+180-2y)^2}{4}=\frac{180^2}{8}=4050$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2y=180-2y\Leftrightarrow y=45m$.

Vậy $S_{max}=4050m^2$ khi $x=90m, y=45m$.

Câu 151. Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800(m)$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: Kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là: $x(m)$ và $y(m)$ $(x,y>0)$.

Diện tích miếng đất: $S=xy$

Theo đề bài thì: $2(x+y)=800$ hay $y=400-x$.

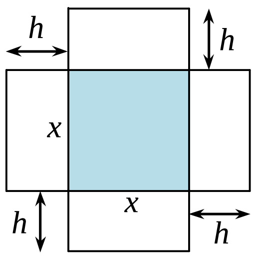
Do đó: $S=x(400-x)=-x^2+400x$ với $x>0$

Đạo hàm: $S'(x)=-2x+400$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x=200$.

Lập bảng biến thiên ta được: $S_{\max}=40000$ khi $x=200\Rightarrow y=200$.

Kết luận: Kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

Câu 152. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh carton theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh *x* cm, chiều cao *h* cm và có thể tích 500 cm^3.



Để diện tích của mảnh carton nhỏ nhất thì giá trị của *x* bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10

Thể tích của hộp là: $V=x^2h=500(cm^3)$.

Do đó $h=\frac{500}{x^2}, x>0$.

Diện tích của mảnh carton dùng làm hộp là: $S(x)=x^2+4hx=x^2+\frac{2000}{x}, x>0$

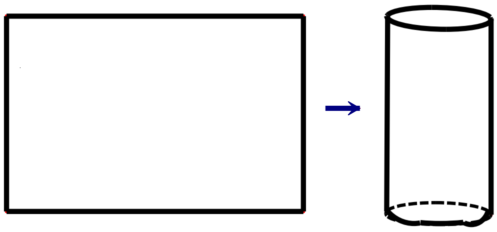
$S'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 1000)}{x^2}$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Bảng biến thiên

x	0		10		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	300	$\nearrow$	

Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là $x = 10$ (cm).

Câu 153. Bạn Hiền là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn Hiền chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài của mảnh tôn là bao nhiêu cemtimet?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 40

Gọi một chiều dài là $x(cm)$ $(0 < x < 60)$, khi đó chiều còn lại là $60 - x(cm)$, giả sử quấn cạnh có chiều dài là x lại thì bán kính đáy là $r = \dfrac{x}{2\pi}; h = 60 - x$.

Ta có: $V = \pi r^2.h = \dfrac{-x^3 + 60x^2}{4\pi}$.

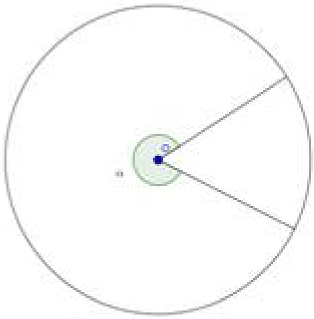
Xét hàm số: $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in (0;60)$

$f'(x) = -3x^2 + 120x;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 40 \end{array}\right.$

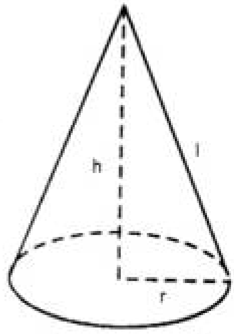
Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in (0;60)$ lớn nhất khi x = 40

Khi đó chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm.

Câu 154. Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích 4π dm^2. Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là α ($0 < \alpha < 2\pi$) như Hình 1 để làm thành một cái gầu múc nước hình nón như Hình 2.



Hình 1



Hình 2

Thể tích lớn nhất của cái gầu là bao nhiêu decimet khối? (kết quả lấy đến phần trăm của decimet)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3,22

Ta có: đường sinh l của hình nón là bán kính $R=\frac{4\pi}{2\pi}=2dm$ của hình tròn

Bán kính đáy của hình nón: $r=\frac{2\alpha}{2\pi}=\frac{\alpha}{\pi}$

Đường cao của hình nón: $h=\sqrt{2^2-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$

Khi đó thể tích hình nón: $V(\alpha)=\frac{1}{3}\pi\frac{\alpha^2}{\pi^2}\frac{1}{\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}=\frac{1}{3\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$

$$V'(\alpha)=\frac{1}{3\pi^2}\left(2\alpha\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}\right)=\frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{-3\alpha^2+8\alpha\pi^2}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}\right)$$

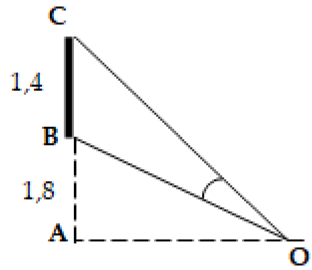
$$V'(\alpha)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=0\notin(0;2\pi)\\ \alpha=\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}\\ \alpha=-\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}\notin(0;2\pi)\end{array}\right. \qquad \Rightarrow V=\frac{1}{3\pi^2}\times\frac{8}{3}\pi^2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}(dm^3)$$

Bảng biến thiên:

α	0		$\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$		2π
$V'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$V(\alpha)$		$\nearrow$	$V_{max}=\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$	$\searrow$	

Thể tích lớn nhất của cái gầu $\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}\approx 3,22(dm^3)$

Câu 155. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ).



Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2,4

Với bài toán này ta cần xác định OA để góc BOC lớn nhất.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi tanBOC lớn nhất. Đặt OA = x (m) với x > 0,

ta có tanBOC = tan(AOC - AOB) = $\dfrac{\tan AOC - \tan AOB}{1 + \tan AOC.\tan AOB}$

$$= \dfrac{\dfrac{AC}{OA} - \dfrac{AB}{OA}}{1 + \dfrac{AC.AB}{OA^2}} = \dfrac{\dfrac{1,4}{x}}{1 + \dfrac{3,2.1,8}{x^2}} = \dfrac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1,4x}{x^2 + 5,76}$

Bài toán trở thành tìm x > 0 để f(x) đạt giá trị lớn nhất. Ta có

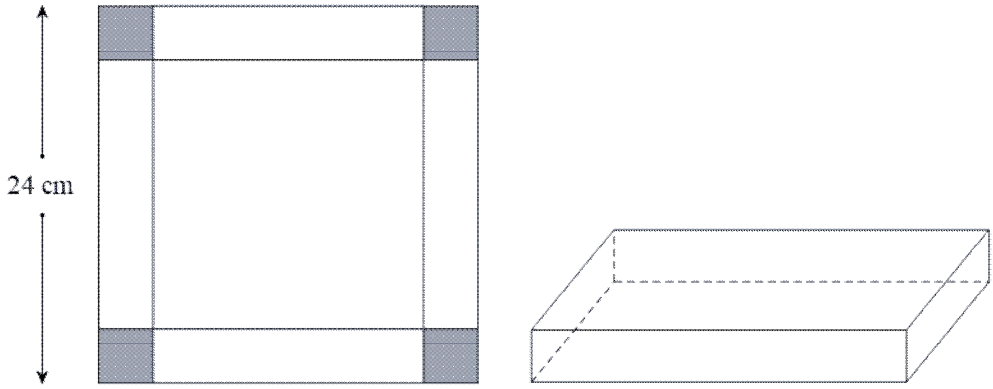
$f'(x) = \dfrac{-1,4x^2 + 1,4.5,76}{(x^2 + 5,76)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$

Ta có bảng biến thiên

x	0		2,4		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{84}{193}$	↘	0

Vậy vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4 m.

Câu 156. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Gọi $x(\text{cm})$ là cạnh hình vuông bị cắt $(0 < x < 12)$.

Thể tích của hộp không nắp bằng $V(x) = x(24-2x)^2$.

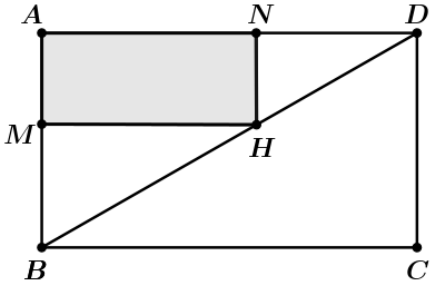
Ta có $V'(x) = (24-2x)(24-6x)$ có $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Bảng biến thiên

x	0		4		12
$V'(x)$		+	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	1024	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 4$.

Câu 157. Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu triệu đồng với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/m^2 ? (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ hai của triệu đồng)



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $0,44$

Ta có $AB.AD = 25\left(m^2\right); \dfrac{NH}{AB} = \dfrac{DN}{DA}$. Đặt $\dfrac{NH}{AB} = \dfrac{DN}{DA} = x \Rightarrow NH = x.AB; AN = (1-x)AD$

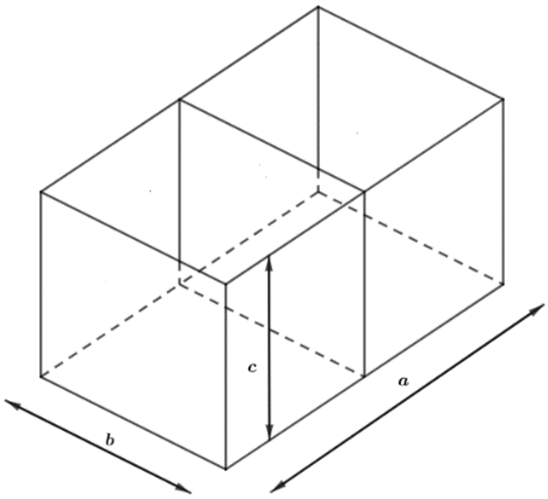
Diện tích đất trồng cỏ là: $S = AN.NH = x.(1-x).AB.AD = 25.x.(1-x)$

Diện tích lớn nhất khi $x.(1-x)$ lớn nhất mà $x.(1-x) \le \dfrac{(x+1-x)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$

Diện tích đất trồng cỏ lớn nhất $S = \dfrac{1}{4}.25 = \dfrac{25}{4}$

Số tiền lớn nhất để trồng cỏ: $T = \dfrac{25}{4}.70000 = 437500$ đồng hay $0,44$ triệu đồng

Câu 158. Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296\,m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a,b,c. Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a+b+c$.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $3,6$

Thể tích bể cá là $V = abc = 1,296$.

Kể cả miếng kính ở giữa, diện tích tổng các miếng kính là $S = ab + 2ac + 3bc$.

Suy ra $\dfrac{S}{V} = \dfrac{S}{1,296} = \dfrac{ab+2ac+3bc}{abc} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{a}$.

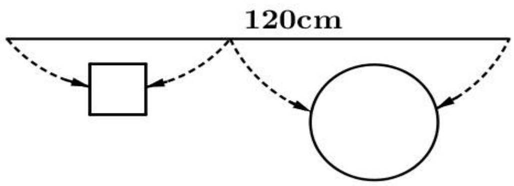
Áp dụng Cauchy cho 3 số $\dfrac{1}{c};\dfrac{2}{b};\dfrac{3}{a}$ ta có $\dfrac{1}{c} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{a} \ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{c}.\dfrac{2}{b}.\dfrac{3}{a}} = 3.\sqrt[3]{\dfrac{6}{1,296}} = 5.$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} abc = 1,296 \\ \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b} = \dfrac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,8 \\ b = 1,2 \\ c = 0,6 \end{cases}$.

Vậy để đỡ tốn kính nhất thì $a = 1,8\text{m}; b = 1,2\text{m}; c = 0,6\text{m}$.

Khi đó $T = a+b+c = 1,8+1,2+0,6 = 3,6$.

Câu 159. Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 504

Gọi độ là của đoạn dây thứ hai là x cm.

Khi đó, độ dài của đoạn dây thứ nhất là $(120-x)$ cm $(0<x<120)$.

Diện tích của hình vuông bằng $\left(\dfrac{120-x}{4}\right)^2$ và diện tích của hình tròn bằng $\pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2=\dfrac{x^2}{4\pi}$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$S(x)=\left(\dfrac{120-x}{4}\right)^2+\dfrac{x^2}{4\pi}=\left(\dfrac{1}{4\pi}+\dfrac{1}{16}\right)x^2-15x+900$, $(0<x<120)$.

Ta có $S(x)$ là một hàm số bậc hai, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\dfrac{120\pi}{4+\pi}\in(0;120)$.

Vậy $\min S(x)=S\left(\dfrac{120\pi}{4+\pi}\right)\approx 504\,\text{cm}^2$.

Câu 160. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$ nhỏ nhất bằng 3.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=2m-1$, $f(1)=2m-3$ và $f(2)=2m+1$

$\min\limits_{[0;2]}f(x)=f(1)=2m-3=3\Rightarrow m=3$

Câu 161. Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]}f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]}f(x)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -17

Từ giả thiết ta có $f'(1)=0$

$\Rightarrow 4a+4(a+4)=0$

$\Leftrightarrow a=-2$

và $f(x)=-2x^4+4x^2-1$

Ta có $f(0)=-1;\ f(1)=1;\ f(2)=-17$

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-17$

Câu 162. Cho hàm số $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ không vượt quá 7. Số phần tử nguyên của S là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+1+m^2>0,\ x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $[0;1]$

$\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=m^2+3$. Yêu cầu bài toán tương đương $m^2+3\le 7 \Leftrightarrow -2\le m\le 2$

Vậy $S=\{-2,-1,0,1,2\}$ hay S có 5 phần tử.

Câu 163. Cho hàm số $f(x)=ax^3-4(a+2)x+1$ với a là tham số. Nếu $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=3ax^2-4(a+2)$

Khi đó: $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2) \Rightarrow f'(-2)=0 \Leftrightarrow 12a-4(a+2)=0 \Leftrightarrow a=1$.

Suy ra $f(x)=x^3-12x+1;\ f'(x)=3x^2-12;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$			$f(-2)$						$+\infty$
					1				
	$-\infty$						-13		

Vậy với $a=1$ thì hàm số đạt $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2)$ và khi đó $\max\limits_{[0;3]} f(x)=1$.

Câu 164. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ do đó $y_{CT} = y(1) = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = 3$.

Thấy ngay với $m > 0$ thì trên đoạn $[m+1; m+2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy GTNN của hàm số đã cho trên đoạn $[m+1; m+2]$ là $y(m+1) = (m+1)^3 - 3(m+1) + 1$.

GTNN luôn bé hơn $3 \Leftrightarrow (m+1)^3 - 3(m+1) - 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 2 \\ m+1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10) \Rightarrow m = \{-9;-8;...;-1;0\} \setminus \{-2\}$

Câu 165. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y = \dfrac{1}{2}$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

+TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m^2\}, [-3;-2] \subset D$.

+ Ta có $y' = \dfrac{-m^2 - 1}{(x-m^2)^2} < 0, \forall x \in D$. Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Nên $\min\limits_{[-3;-2]} y = \dfrac{1}{2} = y(-2) = \dfrac{-2+1}{-2-m^2} \Rightarrow -2 - m^2 = -2 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow -2 < m \leq 3$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1;0;1;2;3\}$

Câu 166. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y = 3$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Với $m = 1 \Rightarrow y = 1\ \forall x \in [0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y \neq 3$.

Với $m \neq 1$. Khi đó $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

TH 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

Câu 167. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max\limits_{[1;2]} f(x) + \min\limits_{[1;2]} f(x) = -8$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 11

Đạo hàm: $y' = \dfrac{1+m}{(x+1)^2}$.

Do hàm số $y = f(x) = \dfrac{x-m}{x+1}$ chỉ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1;2]$ khi $m \neq -1$.

Do đó $\max\limits_{[1;2]} f(x) + \min\limits_{[1;2]} f(x) = -8$

$\Leftrightarrow y(1) + y(2) = -8 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{2} + \dfrac{2-m}{3} = -8 \Leftrightarrow 3(1-m) + 2(2-m) = -48 \Leftrightarrow m = 11$

Câu 168. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) . Tìm m để thoả mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3}$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1,\ \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(1) = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2+m}{3} + \dfrac{1+m}{2} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (nhận)

Câu 169. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - m^2 - 2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-2;0]} y = -\dfrac{1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-1)^2}>0$ với $\forall x\in[-2;0]$

$\Rightarrow$ hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{-x+1}$ đồng biến trên $[-2;0]$ $\Rightarrow \max\limits_{[-2;0]} y=y(0)=m^2+2$.

Theo đề bài ta có $\Rightarrow m^2+2=3 \Rightarrow m=\pm 1$ mà $m>0$ nên ta nhận giá trị $m=1$.

Vậy có 1 giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 170. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

$y=mx+\dfrac{36}{x+1} \Rightarrow y'=m-\dfrac{36}{(x+1)^2}$

Trường hợp 1: $m=0$, ta có $y'=-\dfrac{36}{(x+1)^2}<0, \forall x\neq -1$. Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(3)=9$ (loại).

Trường hợp 2: $m\neq 0$

Nếu $m<0$, ta có $y'<0$, $\forall x\neq -1$ Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(3) \Leftrightarrow 20=3m+9 \Leftrightarrow m=\dfrac{11}{3}$ (loại).

Nếu $m>0$, khi đó $y'=0 \Leftrightarrow m-\dfrac{36}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=\dfrac{36}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1 \\ x=-\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1\ (l) \end{array}\right.$.

Với $0<\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1\leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9}<m\leq 36$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y\left(\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1\right)=12\sqrt{m}-m=20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4(nhan) \\ m=100(loai) \end{array}\right.$.

Với $\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1>3 \Leftrightarrow m<\dfrac{9}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(3) \Leftrightarrow 20=3m+9 \Leftrightarrow m=\dfrac{11}{3}(l)$.

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 171. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-2		0		2		4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-19	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	17

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;4]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;4]$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\max\limits_{[-4;4]} f(x) = f(4) = 17$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = f(-2) = -19$

Câu 172. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;0]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4		-3		-1		0
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	-4

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-4;0]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-4;0]$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\max\limits_{[-4;0]} f(x) = f(-3) = f(0) = -4$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\min\limits_{[-4;0]} f(x) = f(-4) = f(-1) = -\frac{16}{3}$

Câu 173. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $[-4;-2)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4		-3		-2
y'		-	0	+	‖
y	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $[-4;-2)$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\min\limits_{[-4;-2)} f(x)=f(-3)=7$

Câu 174. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-1		0		1		2		3
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)=0$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)=-4$

Câu 175. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $(-\infty;1]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	-1

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $(-\infty;1]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $(-\infty;1]$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\max\limits_{(-\infty;1]} f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=8$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\min\limits_{(-\infty;1]} f(x)=f(1)=-1$

Câu 176. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(0;8)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	0		6		8
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	108	$\nearrow$	

a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(0;8)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(0;8)$.

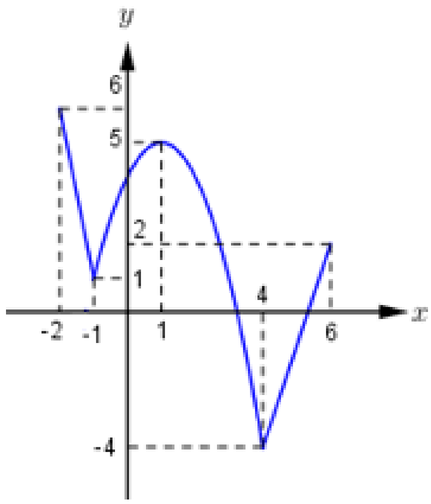
Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;8)$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\min\limits_{(0;8)} f(x) = f(6) = 108$

Câu 177. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$.

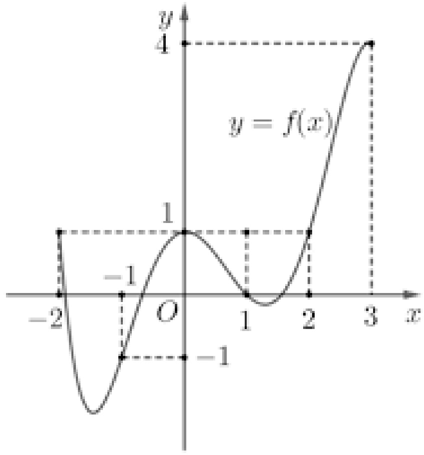
Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2) = 6$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\min\limits_{[-2;6]} f(x) = f(4) = -4$

Câu 178. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$.

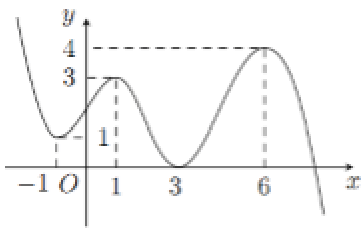
Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 4$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1) = -1$

Câu 179. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;6]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;6]$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\max\limits_{[-1;6]} f(x) = f(6) = 4$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ là: $\min\limits_{[-1;6]} f(x) = f(3) = 0$

Câu 180. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[1;3]$.

$$y' = 3x^2 - 16x + 16 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \notin [1;3]\ (L) \\ x = \dfrac{4}{3} \in [1;3]\ (N) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(1)=0;\ f(3)=-6;\ f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{27}$

$\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} y = f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{27};\ \min\limits_{[1;3]} y = f(3)=-6$

Câu 181. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-6x^2+1$ trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;1]$.

$y'=6x^2-12x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1]\ (N) \\ x=2\notin[-1;1]\ (L)\end{array}\right.$.

Ta có: $f(-1)=-7;\ f(1)=-3;\ f(0)=1$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} y = f(0)=1; \min\limits_{[-1;1]} y = f(-1)=-7$

Câu 182. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-4;4]$.

$y'=3x^2-6x-9$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-4;4]\ (N) \\ x=3\in[-4;4]\ \ (N)\end{array}\right.$

Ta có: $f(-4)=-41;\ f(4)=15;\ f(-1)=40;\ f(3)=8$

$\Rightarrow \max\limits_{[-4;4]} y = f(-1)=40;\ \min\limits_{[-4;4]} y = f(-4)=-41$

Câu 183. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=x^3+3x^2+10$ trên đoạn $[-5;-1]$.

Lời giải

Trên đoạn $[-5;-1]$ ta có hàm số đã cho liên tục và có

$y'=3x^2+6x \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2\end{array}\right. \Rightarrow x=-2$;

$y(-5)=-40; y(-2)=14; y(-1)=12$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-5;-1]} y = f(-2)=14; \min\limits_{[-5;-1]} y = f(-5)=-40$

Câu 184. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+1}{x+4}$ trên đoạn $[1;10]$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;10]$.

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+4)^2}>0,\forall x\in[1;10]\Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên đoạn $[1;10]$.

Do đó: $\max\limits_{[1;10]} y=f(10)=\dfrac{11}{14}$ và $\min\limits_{[1;10]} y=f(1)=\dfrac{2}{5}$.

Câu 185. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2}{x+2}$ trên đoạn $[-5;-3]$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-5;-3]$.

$y'=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2},\forall x\in[-5;-3]$

$y'=0\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[-5;-3]\ \ (L)\\x=-4\in[-5;-3](N)\end{array}\right.$

Ta có: $f(-5)=-\dfrac{25}{3};\ f(-3)=-9;\ f(-4)=-8$

$\Rightarrow \max\limits_{[-5;-3]} y=f(-4)=-8;\quad \min\limits_{[-5;-3]} y=f(-3)=-9$

Câu 186. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x^3+3x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;2]$.

$y'=\dfrac{4x^3+6x^2}{(x+1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3+6x^2=0\Leftrightarrow x^2(4x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[0;2]\ \ (N)\\x=-\dfrac{3}{2}\in[0;2]\ \ (L)\end{array}\right.$

Ta có: $f(0)=3;\ f(2)=\dfrac{25}{3}$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y=f(2)=\dfrac{25}{3};\ \min\limits_{[0;2]} y=f(0)=3$

Câu 187. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$ và có đạo hàm $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}+1$

Giải $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\notin(1;3) \\ x=2\in(1;3)\end{array}\right.$.Ta có $f(1)=6; f(2)=5; f(3)=\dfrac{16}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[1;3]} f(x)=5$; $\max\limits_{[1;3]} f(x)=6$.

Câu 188. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\sqrt{10-x^2}$ trên tập xác định.

Lời giải

Điều kiện: $10-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10} \Rightarrow$ Miền xác định của hàm số là: $D=\left[-\sqrt{10};\sqrt{10}\right]$.

$y'=3-\dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}=\dfrac{3\sqrt{10-x^2}-x}{\sqrt{10-x^2}};\forall x\in\left(-\sqrt{10};\sqrt{10}\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow 3\sqrt{10-x^2}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 9\left(10-x^2\right)=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\pm 3\end{cases} \Leftrightarrow x=3\in\left[-\sqrt{10};\sqrt{10}\right]$ (nhận).

Ta có: $f\left(-\sqrt{10}\right)=-3\sqrt{10}; f\left(\sqrt{10}\right)=3\sqrt{10}; f(3)=10$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{10};\sqrt{10}\right]} y=f(3)=10; \min\limits_{\left[-\sqrt{10};\sqrt{10}\right]} y=f\left(-\sqrt{10}\right)=-3\sqrt{10}$

Câu 189. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+2)\sqrt{4-x^2}$ trên tập xác định.

Lời giải

Điều kiện: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2\Rightarrow$ Miền xác định của hàm số là: $D=[-2;2]$.

$y'=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.(x+2)=\dfrac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}};\forall x\in(-2;2)$.

$y'=0\Leftrightarrow -2x^2-2x+4=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $f(-2)=0; f(2)=0; f(1)=3\sqrt{3}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=f(1)=3\sqrt{3};\quad \min\limits_{[-2;2]} y=f(-2)=f(2)=0$

Câu 190. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{3+2x-x^2}$ trên tập xác định.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;3]$.

$y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}},\forall x\in(-1;3)$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1\in[-1;3]$ (nhận).

Ta có: $f(-1)=0; f(3)=0 ;f(1)=2$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=f(1)=2;\quad \min\limits_{[-1;3]} y=f(-1)=f(3)=0$

Câu 191. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y=\left|x^2-3x+2\right|$ trên đoạn $[-10;10]$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-10;10]$.

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & khi \left[\begin{array}{l} x\le 1\\ x\ge 2\end{array}\right. \quad (1)\\ -\left(x^2-3x+2\right) & khi\ \ 1<x<2 \quad (2)\end{cases}$$

- Trường hợp 1: Xét $y=x^2-3x+2$ trên đoạn $[-10;1]\cup[2;10]$.

$y'=2x-3$ cho $y'=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (loại)

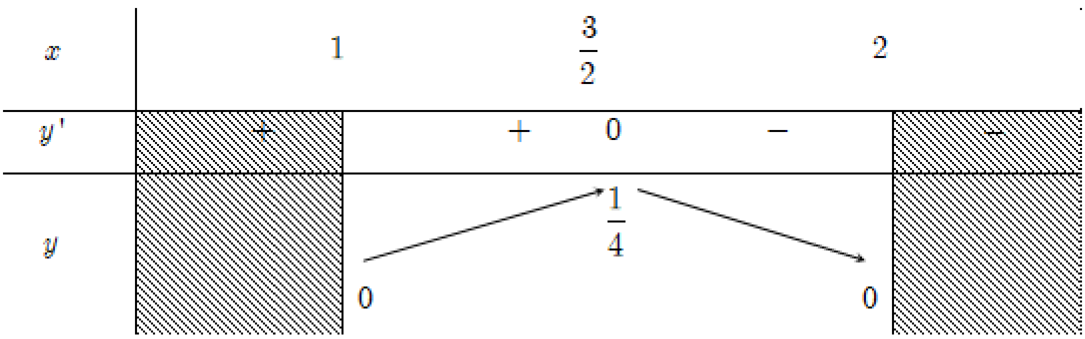
Ta có: $f(-10)=132; f(1)=0; f(2)=0; f(10)=72$

$\min\limits_{[-10;1]\cup[2;10]} y=f(1)=f(2)=0;\ \max\limits_{[-10;1]\cup[2;10]} y=f(-10)=132$

- Trường hợp 2: Xét $y=-\left(x^2-3x+2\right)$ trên khoảng $(1;2)$.

Ta có: $y'=-2x+3$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x=3/2$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên: $\max\limits_{(1;2)} y=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Kết hợp 2 trường hợp ta có: $\min\limits_{[-10;10]} y=f(1)=f(2)=0;\ \ \max\limits_{[-10;10]} y=f(-10)=132$

Câu 192. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$.

Lời giải

Câu 193. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Câu 194. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin x+\sin 2x$ trên đoạn $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Câu 195. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Lời giải

Câu 196. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Lời giải

Câu 197. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Lời giải

Câu 198. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}-\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Lời giải

Câu 199. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\sin^2 x+\frac{1}{2}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 200. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+4\cos x-\sin^2 x$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 201. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x-2$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 202. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x.\cos x$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 203. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2+\sin x-1$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 204. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2 x-\cos x+1$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 205. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos 2x-2\sin x-1$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 206. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x-3\sin^2 x+2$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 207. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x+\sin^2 x-5\sin x+1$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 208. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 209. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^3 x-6\cos^2 x+9\cos x+5$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 210. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3-\cos 2x+\sin x+2$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 211. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x+\cos 2x+\sin x+3$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 212. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^3 x+\frac{5}{2}\sin^2 x+\cos x+2$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 213. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-2\sin^3+3\cos 2x-6\sin x$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 214. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos^3 x+3\cos 2x-15\cos x+2$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 215. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 216. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 217. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 218. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos x+1}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 219. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{8\sin x-8}{2-\sin x-\cos^2 x}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 220. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3+\cos x}{\cos x+\sin^2 x}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 221. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4-\cos^2 x}{\sin^2 x+\sin x+2}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 222. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4+3\sin x-2\cos^2 x}{3+2\sin x}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 223. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\cos^2 x}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 224. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 225. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 226. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{\sin^2 x+\cos x+2}$ trên tập xác định.

Lời giải

Câu 227. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải

Câu 228. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-x-1\right)e^x$ trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải

Câu 229. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2\ln x+2$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{e^3};e^2\right]$.

Lời giải

Câu 230. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x.\ln x$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$.

Lời giải

Câu 231. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x}{2}-\ln\left(x^2-x+2\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$.

Lời giải

Câu 232. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[0;1]$.

Lời giải

Câu 233. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{-2x}\left(-x^2+x+\dfrac{7}{2}\right)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Lời giải

Câu 234. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{3x}\left(x^2+x-3\right)$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải

Câu 235. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{2x}-4e^x+3$ trên đoạn $[0;\ln 4]$.

Lời giải

Câu 236. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[0;1]$.

Lời giải

Câu 237. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^{-2x}\left(-x^2 + x + \frac{7}{2}\right)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Lời giải

Câu 238. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^{3x}\left(x^2 + x - 3\right)$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải

Câu 239. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \ln\left(x^2 + x + 2\right)$ trên đoạn $[3;6]$.

Lời giải

Câu 240. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1-x)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Lời giải

Câu 241. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left(x^2 + 4x + 1\right).e^{x-2}$ trên đoạn $[-2;3]$.

Lời giải

Câu 242. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

Câu 243. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ (với m là tham số thực). Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x) = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$m+2$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x) = f(-1) \Rightarrow f(-1) = 5 \Leftrightarrow m + 2 = 5 \Leftrightarrow m = 3.$

$\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = m - 2 = 3 - 2 = 1.$

Câu 244. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 1.

Lời giải

Hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và $y'=-3x^2-6x$

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$

$y(-1)=m-2; y(0)=m;\ y(2)=m-20$

Suy ra: $\min\limits_{x\in[-1;2]} y=1 \Leftrightarrow m-20=1 \Leftrightarrow m=21$.

Câu 245. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

$y'=3x^2-6x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Trên $[-1;1]$ thì $y'_{(-1)}=m-4; y'_{(0)}=m; y'_{(1)}=m-2$

nên $\underset{[-1;1]}{Min}y=\sqrt{2} \Leftrightarrow m-4=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=4+\sqrt{2}$

Câu 246. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(m^2+1)x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$.

Lời giải

+ Đặt $f(x)=x^3+(m^2+1)x+m+1$.

+ Ta có: $y'=3x^2+m^2+1$. Dễ thấy rằng $y'>0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min\limits_{[0;1]} y=\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=m+1$.

+ Theo bài ra ta có: $m+1=5$, suy ra $m=4$.

Câu 247. Cho hàm số $f(x)=10^x+x$ và hàm số $g(x)=x^3-mx^2+(m^2+1)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x+f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $t=x+f(x)$ vì $x\in[0;1] \Rightarrow t\in[1;12]$.

Xét $g(t)=t^3-mt^2+(m^2+1)t-2$ trên $[1;12]$

$\Rightarrow g'(t)=3t^2-2mt+m^2+1$ có $\Delta'=m^2-3(m^2+1)=-2m^2-3<0\ \forall m$.

$\Rightarrow g'(t)>0 \forall t\in[1;12] \Rightarrow y=g(t)$ đồng biến trên $[1;12]$.

Vậy $M=\max\limits_{t\in[1;12]} g(t)=g(12)=12m^2-144m+1738 \Rightarrow M$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=\dfrac{144}{2.12}=6$.

Câu 248. Cho hàm số $y = x + \cos^2 x + m$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m thì $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y = 4$?

Lời giải

Ta có: $y' = 1 - 2\sin x.\cos x = 1 - \sin 2x \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = x + \cos^2 x + m$

Do đó $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y = y(0) = 1 + m = 4 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 249. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Tìm giá trị của m.

Lời giải

Điều kiện xác định: $-2 \le x \le 2$.

Ta có: $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m \Rightarrow y' = 1 + \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	-2		$\sqrt{2}$		2
y'		$+$	0	$-$	
y	$-2+m$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}+m$	$\searrow$	$2+m$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + m = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 250. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m}{x + 1}$ với m là số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[0;2\right]$ bằng 6.

Lời giải

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 6 khi:

$$y(0) + y(2) = 6 \Leftrightarrow -m + \frac{2 - m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -4.$$

Câu 251. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x - 8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3.

Lời giải

Ta có : $y' = \dfrac{8 + m^2}{\left(x + 8\right)^2} > 0, \forall x \ne -8$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y = y(0) = \dfrac{-m^2}{8}$. Theo giả thiết $\min\limits_{[0;3]} y = -3 \Rightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$

Câu 252. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\dfrac{9}{2}$?

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$ nên hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0,\forall m\in\mathbb{R},x\neq -8$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Suy ra $\underset{[0;3]}{\text{Min}}\,y=y(0)=-\dfrac{m^2}{8}$. Từ giả thiết suy ra $-\dfrac{m^2}{8}=-\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow m^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-6\end{array}\right.$.

Câu 253. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x+m)^2}>0,\forall x\neq m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;4]}y=-1\Leftrightarrow\begin{cases}y(4)=-1\\m\notin[0;4]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-6=0\\\left[\begin{array}{l}m>4\\m<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-3\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m>4\\m<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 254. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;6]$ bằng -4.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{m^2+4}{(x+4)^2}>0,\forall m$. Hàm số đồng biến trên $[0;6]$.

Suy ra: $\min\limits_{[0;6]}f(x)=f(0)=-\dfrac{m^2}{4}=-4\Leftrightarrow m^2=16\Leftrightarrow m=\pm4$

Câu 255. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Tìm giá trị của tham số m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]}y=3$.

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{-m-1}{(x-1)^2}$. Với $x\neq1$.

Nếu $-m-1>0\Leftrightarrow m<-1$

$\Rightarrow y'>0\Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $[2;4]\Rightarrow\min\limits_{[2;4]}y=y(2)=m+2$.

Theo giả thiết: $m+2=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

Nếu $-m-1<0\Leftrightarrow m>-1$

$\Rightarrow y'<0 \Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;4] \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(4) = \dfrac{4+m}{3}$.

Theo giả thiết: $\dfrac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 256. Tìm giá trị của tham số m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8.

Lời giải

Nếu $m=1$ thì $y=1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

Do vậy $\underset{x\in[1;2]}{Min}\, y + \underset{x\in[1;2]}{Max}\, y = y(1) + y(2) = \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{41}{5}$.

Câu 257. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+m}{x-3}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để $\max\limits_{[-1;2]} f(x) + \min\limits_{[-1;2]} f(x) = 8$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \dfrac{-6-m}{(x-3)^2}$.

Nếu $m=-6 \Rightarrow y=2$ (loại).

Nếu $m \neq -6$ khi đó $y'<0, \forall x \in [-1;2]$ hoặc $y'>0, \forall x \in [-1;2]$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại $x=1, x=2$.

Theo bài ra ta có: $\max\limits_{[-1;2]} f(x) + \min\limits_{[-1;2]} f(x) = 8 \Leftrightarrow f(-1) + f(2) = 8 \Leftrightarrow \dfrac{-2+m}{-4} + \dfrac{4+m}{-1} = 8 \Leftrightarrow m = -\dfrac{46}{5}$

Câu 258. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y' = \dfrac{1-(-m^2+m)}{(x+1)^2} = \dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2} > 0;\ \forall x \in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$.

Ta có: $y(0)=-2 \Leftrightarrow -m^2+m=-2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 259. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\dfrac{8-m}{\left(\sqrt{x+1}+4\right)^2}$.

Trường hợp 1: Nếu $m<8 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-1;8)$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=f(8)=\dfrac{6+m}{7}<3 \Leftrightarrow m<15$ mà $m<8; m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Trường hợp 2: Nếu $m>8 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1;8)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=f(-1)=\dfrac{m}{4}<3 \Leftrightarrow m<12$ mà $m>8; m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m\in\{9;10;11\}$.

Trường hợp 3: Nếu $m=8 \Rightarrow f(x)=2 \Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=2<3$ (thỏa mãn) $\Rightarrow m=8$ thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$.

Câu 260. Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=m.\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m\neq 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x\in(1;+\infty)$.

Nếu $m>0$ thì $f'(x)>0, \forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m$.

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$

$\Leftrightarrow m+2m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=5 \end{array}\right.$

Do $m>0$ nên nhận $m_1=5$.

Nếu $m<0$ thì $f'(x)<0, \forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m$.

$\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$

$\Leftrightarrow 2m + m = m^2 - 10$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 5 \end{array}\right.$

Do $m < 0$ nên nhận $m_2 = -2$.

Vậy $m_1 + m_2 = 3$.