CHƯƠNG 1
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1
TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Nhận biết tính đơn điệu của hàm số bằng dấu của đạo hàm

Định lí 1: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'\left(x\right) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'\left(x\right) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y = f\left(x\right)$ còn được gọi là đơn điệu trên tập $K \subset \mathbb{R}$.

Định lí 2: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'\left(x\right) \geq 0,\ \forall x \in K$ và $f'\left(x\right) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'\left(x\right) \leq 0,\ \forall x \in K$ và $f'\left(x\right) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên K.

Nhận xét: Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f\left(x\right)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = f\left(x\right)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm các điểm $x_i\left(i = 1, 2, 3, ..., n\right)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

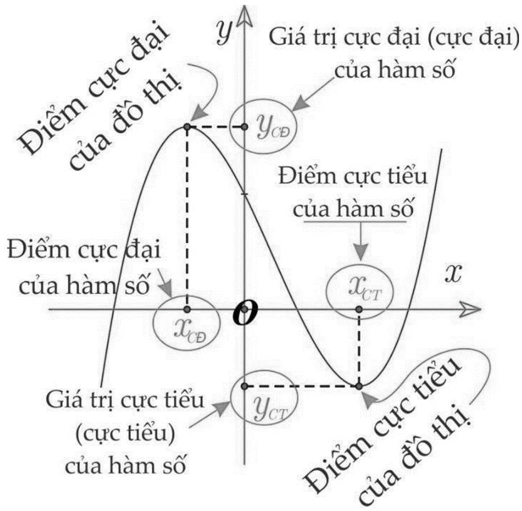
2. Điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số:

a. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in \mathbb{R}, x_1 \in K$.

- x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_o sao cho $\left(a;b\right) \subset K$ và $f(x) < f\left(x_o\right), \forall x \in \left(a;b\right) \backslash \left\{x_o\right\}$. Khi đó, $f\left(x_o\right)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $y = f\left(x\right)$, kí hiệu f_{CD}.

- x_1 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(c;d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c;d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1), \forall x \in (c;d) \setminus \{x_1\}$. Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu f_{CT}.
- Điểm cực trị đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**)

Chú ý: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì người ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, điểm $M(x_o; f(x_o))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



b. Định lý : Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_o và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_o)$ và $(x_o;b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_o)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_o;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;x_o)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_o;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Nhận xét: Để tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- *Bước 1:* Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
- *Bước 2:* Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i = 1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- *Bước 3:* Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.
- *Bước 4:* Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

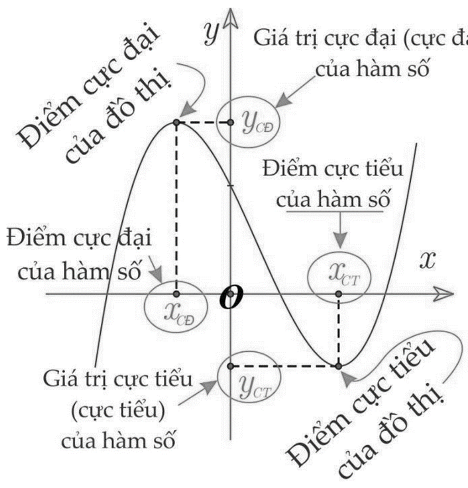
DẠNG 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ $y=f(x)$

Để xét tính đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,\dots,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.
- **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.

Chú ý:

- Cần phân biệt điểm cực trị của hàm số với điểm cực trị của đồ thị hàm số.



- Ôn lại kiến thức xét dấu tam thức bậc hai: $y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ (lớp 10)

  + Nếu $\Delta<0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a

+ Nếu $\Delta = 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	cùng dấu với a	

+ Nếu $\Delta > 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của tam thức $f(x) = 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

• Cách tính nhanh đạo hàm hàm số dạng hữu tỉ (phân thức).

+ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

+ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e} \Rightarrow y' = \dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$

Câu 1. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 + 3x^2 - 9x$. b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2025$ c) $y = -x^3 + x^2 - x$

Câu 2. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$ b) $y = x^4 - 2x^2 - 3$ c) $y = -x^4 - x^2 + 2024$

Câu 3. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. b) $y = \dfrac{3x+1}{x+1}$ c) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Câu 4. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. b) $y = \dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$. c) $y = -x + 1 - \dfrac{1}{x+2}$.

Câu 5. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{-x^3 + 3x^2}$ b) $y = x\sqrt{4 - x^2}$ c) $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2 - x + 3}}$

Câu 6. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \left|x^2 + 5x + 6\right|$.

Câu 7. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x - \sin x$ với $x \in [0;\pi]$. b) $y = 2\sin x + \cos 2x$ với $x \in [0;\pi]$.

Câu 8. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^2 e^{-x}$. b) $y = (x^2 - 2)e^{2x}$.

Câu 9. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x - 2\ln(x^2 + 3)$. b) $y = e^{2x^2 - 2x + 1}$.

DẠNG 2
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f(x)$

1. Cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết bảng biến thiên

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có bảng biến thiên sau:

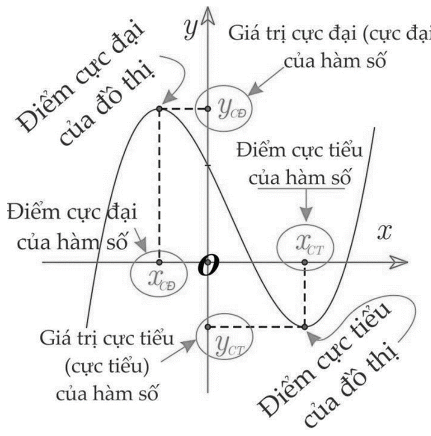
x	$-\infty$		$x_{CĐ}$		x_{CT}		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có:

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_{CĐ}; x_{CT})$.
- Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $x = x_{CĐ}$, điểm cực tiểu $x = x_{CT}$ và giá trị cực đại $y = y_{CĐ}$, giá trị cực tiểu $y = y_{CT}$.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(x_{CĐ}; y_{CĐ})$ và điểm cực tiểu $(x_{CT}; y_{CT})$.

2. Cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có đồ thị hàm số như sau:

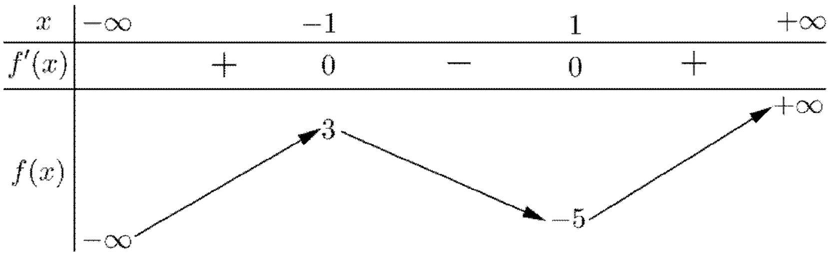


Từ đồ thị trên ta có:

- Đi từ trái sang phải đồ thị hàm số $y = f(x)$ "đi lên" trên khoảng $(-\infty; x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$

- Đi từ trái sang phải đồ thị hàm số $y = f(x)$ "đi xuống" trên khoảng $(x_{CĐ}; x_{CT})$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_{CĐ}; x_{CT})$.
- Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $x = x_{CĐ}$, điểm cực tiểu $x = x_{CT}$ và giá trị cực đại $y = y_{CĐ}$, giá trị cực tiểu $y = y_{CT}$.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(x_{CĐ}; y_{CĐ})$ và điểm cực tiểu $(x_{CT}; y_{CT})$.

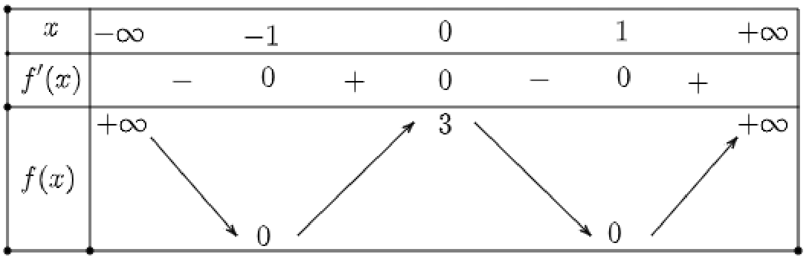
Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

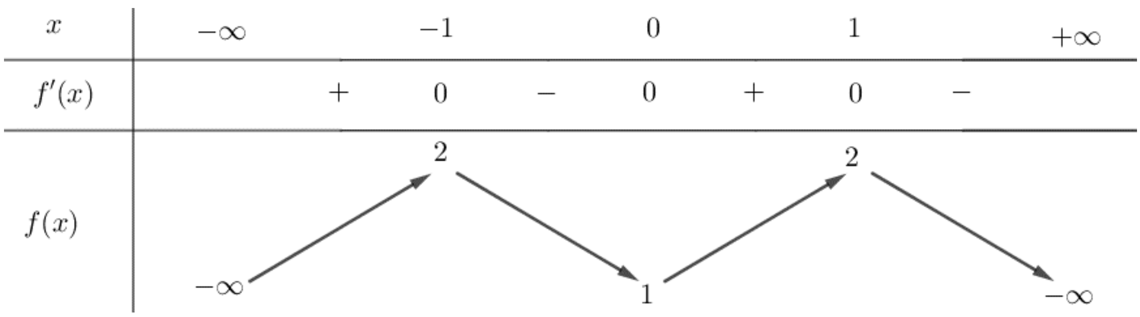
Bài 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

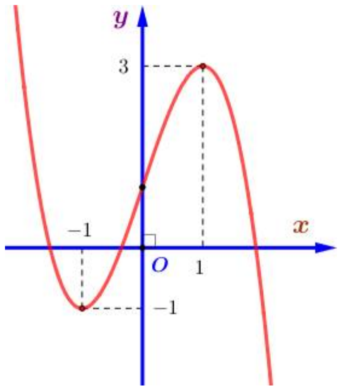
Bài 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

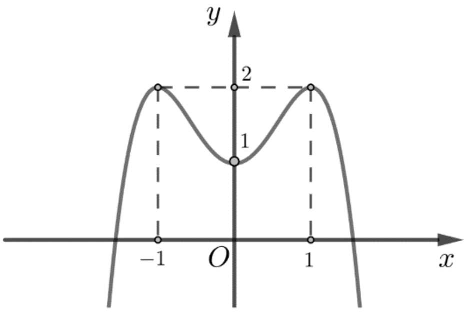
Bài 9. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

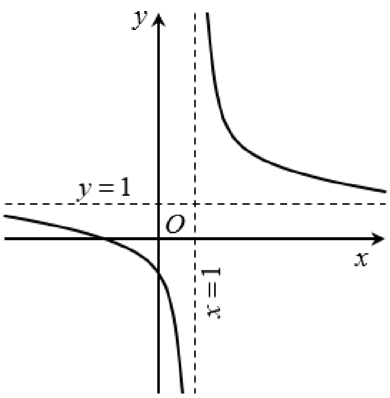
Bài 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

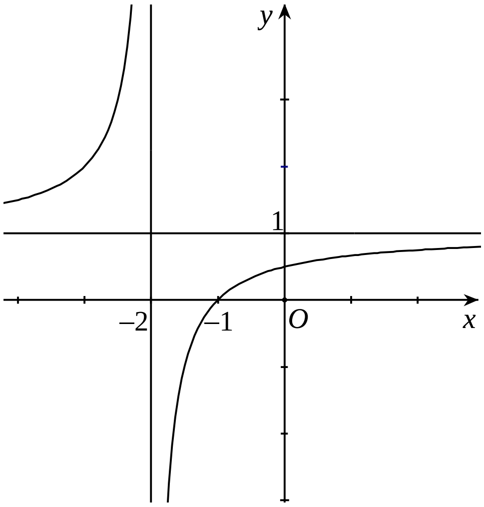
Bài 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

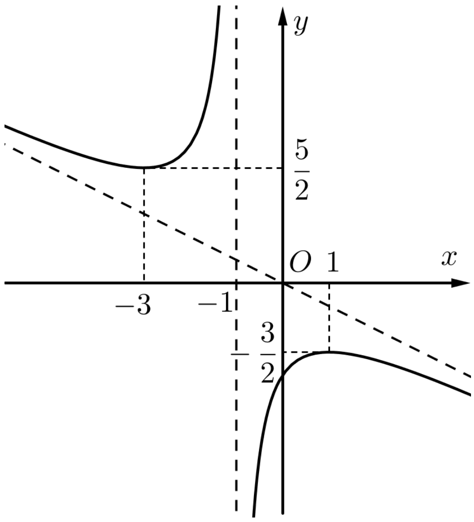
Bài 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

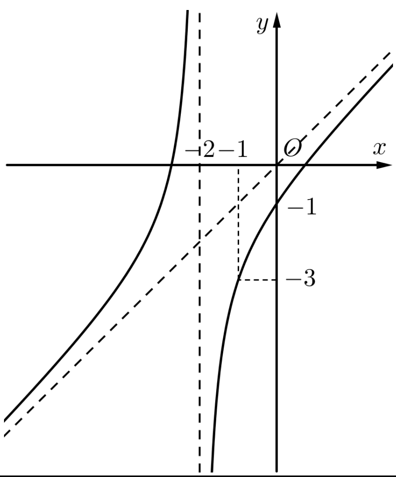
Bài 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

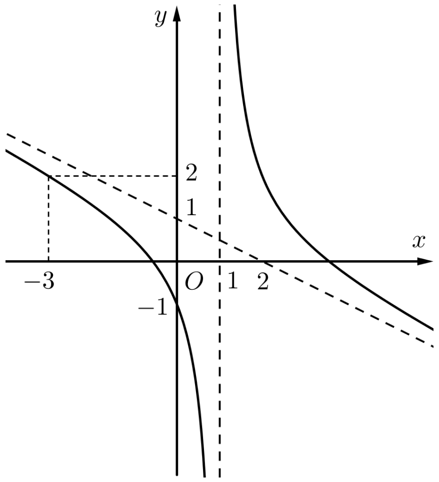
Bài 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

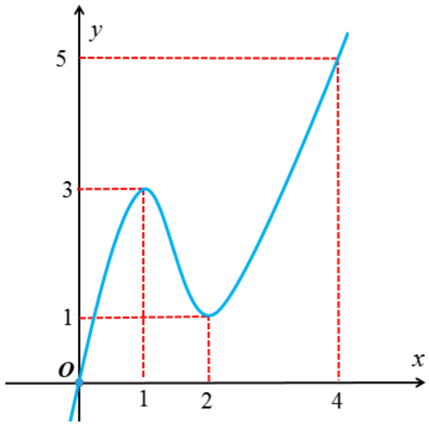
Bài 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

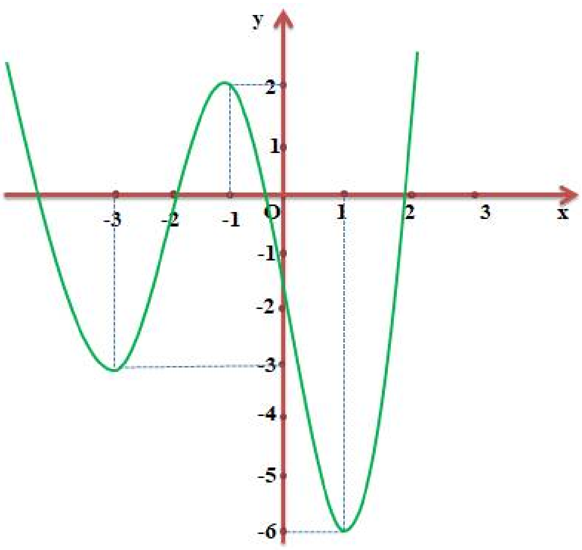
Bài 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

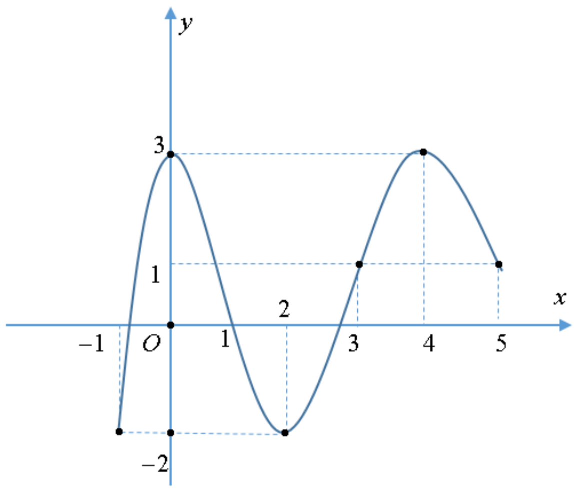
Bài 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Bài 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

DẠNG 3
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$

1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên tập $K\subset\mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Đối với $y=f(x)$ là hàm đa thức:

- Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(a;b)\subset\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Chú ý: Đối với $y=f(x)$ là hàm đa thức:

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành và những điểm thuộc trục hoành thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành và những điểm thuộc trục hoành thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+2024)(x-2025)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Bài 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

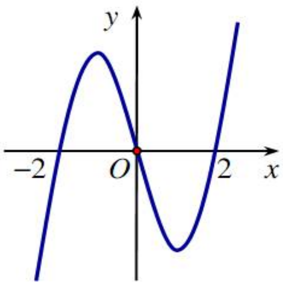
x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f\left(x\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

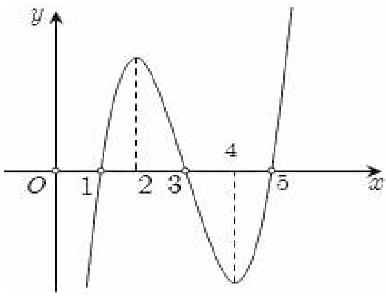
Bài 4. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f\left(x\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

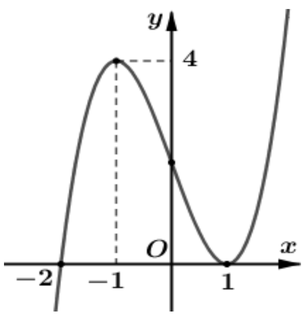
Bài 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f\left(x\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

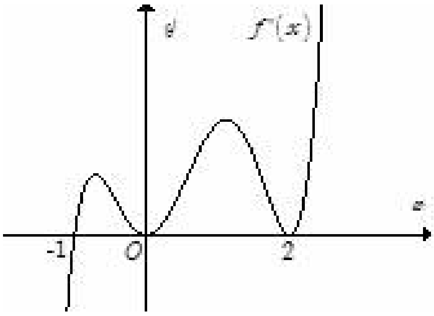
Bài 6. Hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ trên khoảng $\mathbb{R}$.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f\left(x\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Bài 7. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

DẠNG 4

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG QUA HAI ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Phương pháp viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba:

$$y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \left(a \neq 0\right)$$

Cách 1: Tự luận

Bước 1: Tìm tọa độ 2 điểm cực trị của hàm bậc ba. Giả sử 2 điểm cực trị đó là $A\left(x_A; y_A\right); B\left(x_B; y_B\right)$.

Bước 2: Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax + b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Chia y cho y' ta được: $y = g(x).y' + Ax + B$

Bước 2: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = Ax + B$

2. Phương pháp viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

Cách 1: Tự luận

Bước 1: Tìm tọa độ 2 điểm cực trị của hàm hữu tỉ. Giả sử 2 điểm cực trị đó là $A\left(x_A; y_A\right); B\left(x_B; y_B\right)$.

Bước 2: Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax + b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Tính $\dfrac{\left(ax^2 + bx + c\right)'}{\left(dx + e\right)'} = \dfrac{2ax + b}{d} = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$

Bước 2: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Bài 1. Viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$

Bài 2. Viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

b) $y = x + \dfrac{1}{x + 1}$.

DẠNG 5
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.
- Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$.
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.
- Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Bài 1. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t \ge 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m).

a) Trong 20 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng hay giảm?

b) Vận tốc của chất điểm nhỏ nhất và lớn nhất bằng bao nhiêu?

Bài 2. Một chất điểm chuyển động trong 10 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với $t \ge 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng hay giảm?

b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm lớn nhất bằng bao nhiêu?

Bài 3. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ với $t \ge 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật giảm?

c) Tính gia tốc của vật sau thời gian 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

Bài 4. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P(I) = 12I^2 - \frac{1}{2}I^3$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện và $0 \le I \le 22$.

a) Hỏi công suất P tăng khi cường độ dòng điện thuộc khoảng nào?

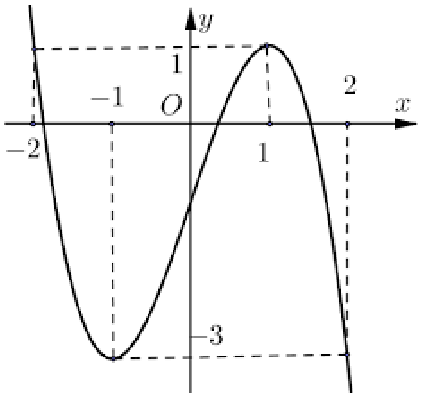
b) Hỏi công suất P giảm khi cường độ dòng điện thuộc khoảng nào?

c) Công suất P lớn nhất bằng bao nhiêu?

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

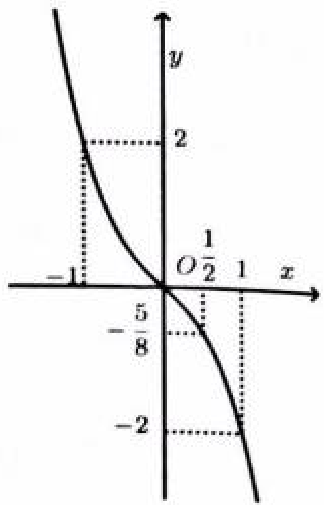
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

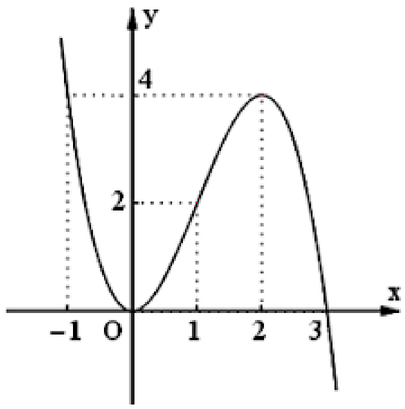
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

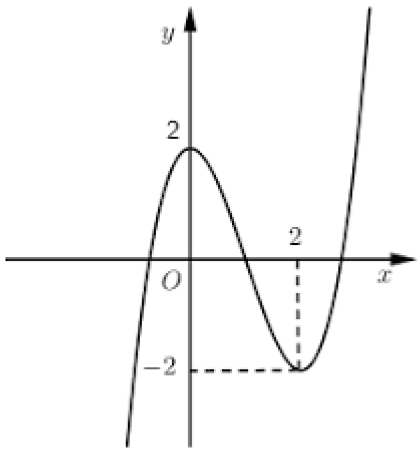
A. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

B. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng 2.

C. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 0.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

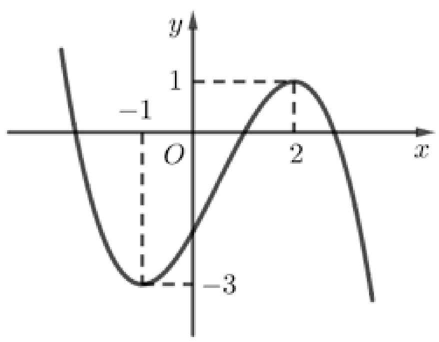
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng 2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng -2.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

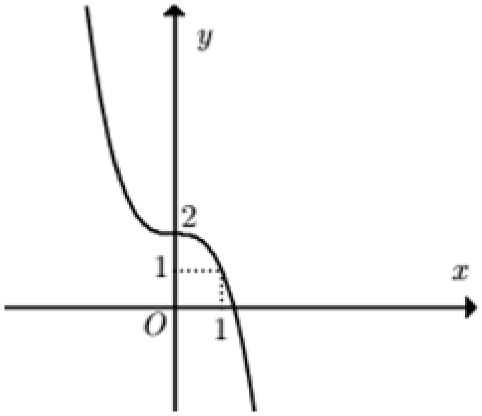
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng -3.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 1.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

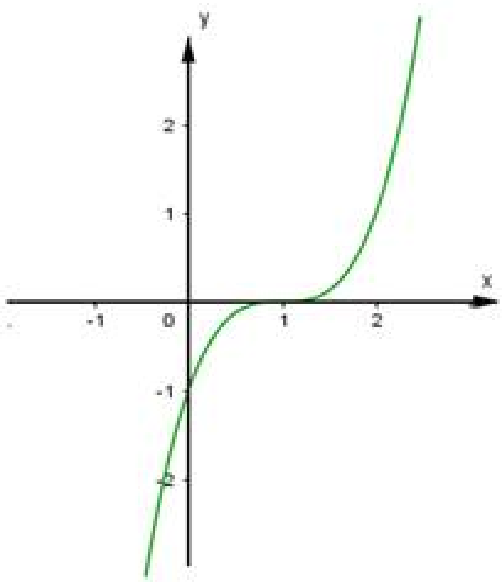
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

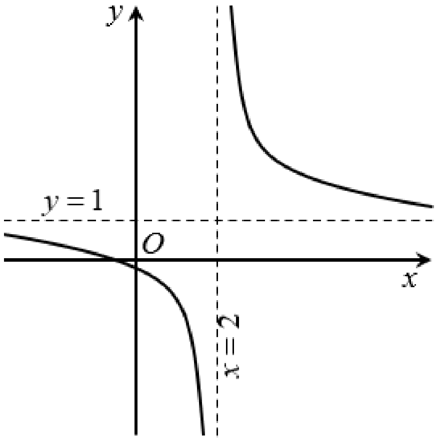
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 1.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 0.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

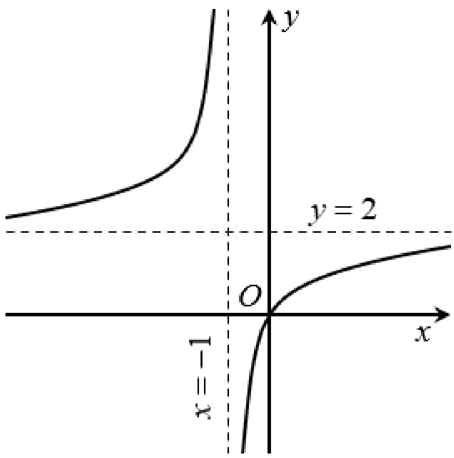
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

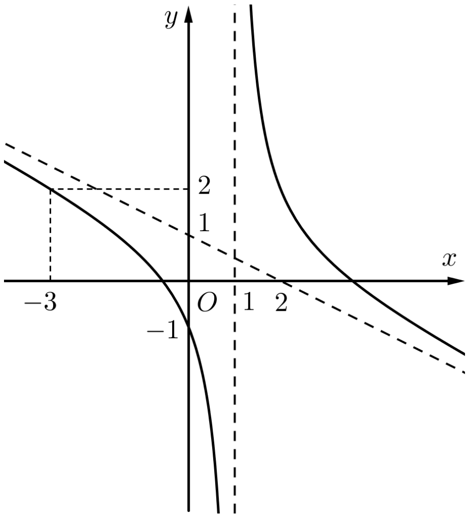
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có một cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

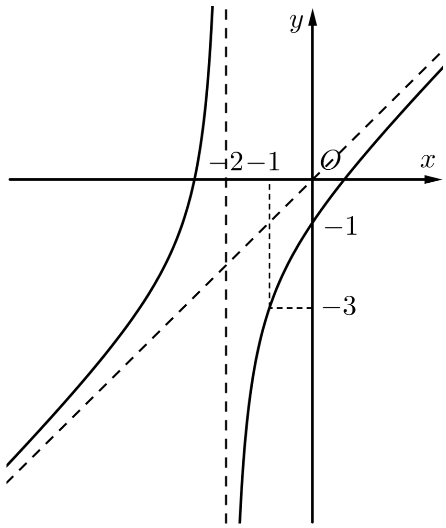
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có hai cực trị.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

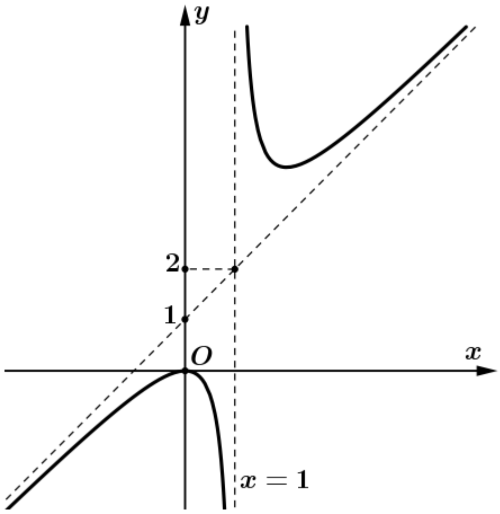
A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

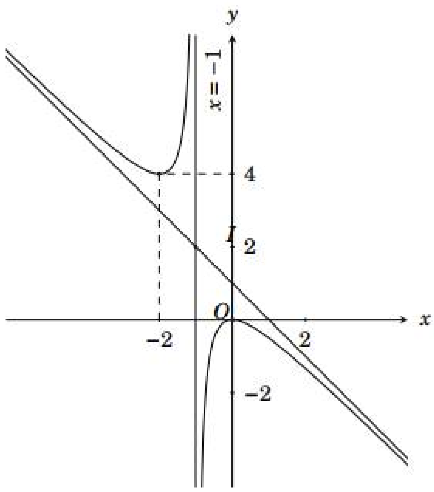
A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có hai cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

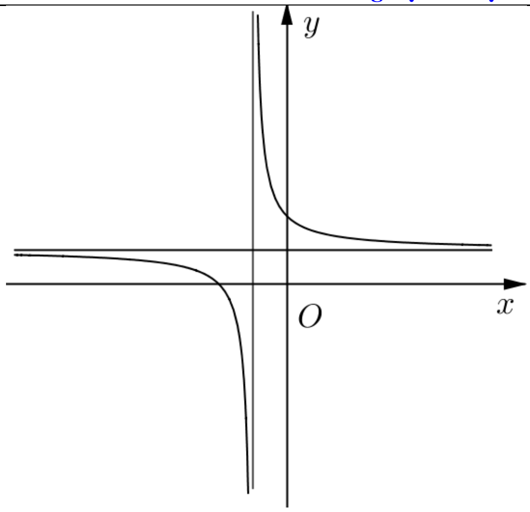
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(-2;0)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng -2.

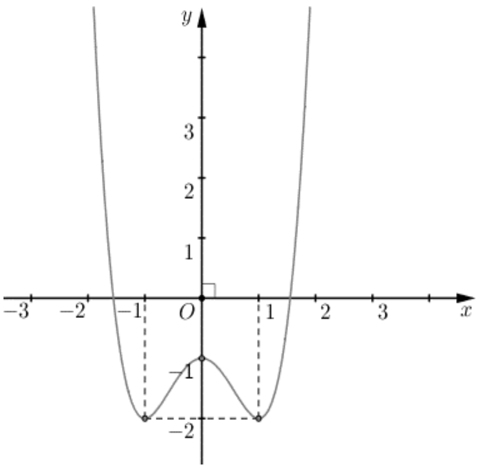
D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 4.

Câu 14. Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



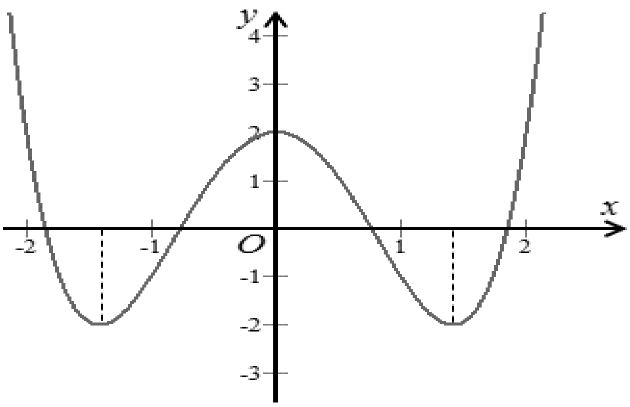
A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.   **B.** $y' > 0, \forall x \neq -1$.   **C.** $y' < 0, \forall x \neq -1$.   **D.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



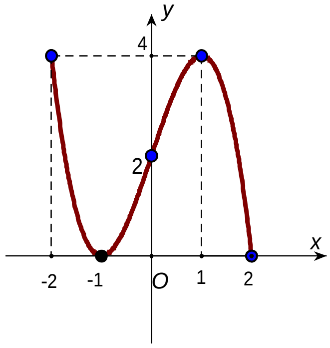
A. $(-\infty -1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(0;1)$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(0;1)$

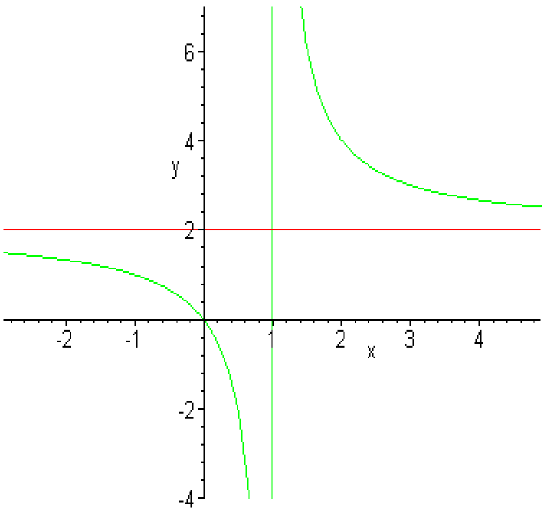
Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

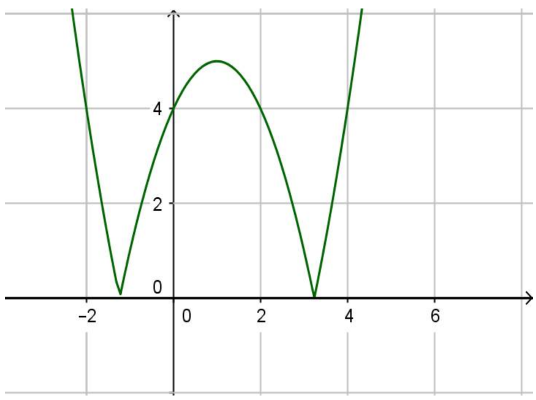
Câu 18. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Số cực trị của đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y=|f(x)|$ có mấy cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(0;1)$

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-1;0)$

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -1. **B.** 5 . **C.** -3. **D.** 1 .

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;-\infty)$ và $(+\infty;-1)$.

D. Hàm số đã cho có cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2	$-\infty$	|| $+\infty$		6		$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		5	$+\infty$	|| $-\infty$		1		$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 5.

Câu 29. Chọn phát biểu đúng khi nói về tính đơn điệu của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$.

A. Hàm số có thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

B. Khi $a > 0$ thì hàm số luôn đồng biến.

C. Hàm số luôn tồn tại đồng thời khoảng đồng biến và nghịch biến.

D. Khi $a < 0$ hàm số có thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 31. Hỏi hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=-2x^3+3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng về tính đơn điệu của hàm số

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 33. Hỏi hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 34. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x)=x^4-4x^2+4$. **B.** $g(x)=x^3+3x^2+10x+1$.

C. $f(x)=-\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3-x$. **D.** $k(x)=x^3+10x-\cos^2 x$.

Câu 35. Hỏi hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. **D.** $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Câu 36. Hỏi hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ đồng biến trên các khoảng nào ?

A. $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

C. $(-1;1)$ và $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 37. Hỏi hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-2)$ và $(-1;0)$. **B.** $(-2;-1)$ và $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Câu 38. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y=-(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y=\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 39. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ đồng biến trên mỗi khoảng:

A. $(-1;3)$ và $(3;+\infty)$.
B. $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.
C. $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.
D. $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 41. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x=1$?

A. $y=x^5-5x^2+5x-13.$
B. $y=x^4-4x+3.$
C. $y=x+\dfrac{1}{x}.$
D. $y=2\sqrt{x}-x.$

Câu 42. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y=x+\dfrac{1}{x+1}.$
B. $y=x^3+3x^2+7x-2.$
C. $y=-x^4-2x^2+3.$
D. $y=x-\dfrac{2}{x+1}.$

Câu 43. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y=2x+\dfrac{2}{x+1}.$
B. $y=x^3+3x^2.$
C. $y=-x^4+2x^2+3.$
D. $y=\dfrac{x+1}{x-2}.$

Câu 44. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD}=-2.$
B. $y_{CD}=1.$
C. $y_{CD}=-1.$
D. $y_{CD}=2.$

Câu 45. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A,B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y=x-2.$
B. $y=2x-1.$
C. $y=-2x+1.$
D. $y=-x+2.$

Câu 46. Đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(3;0).$
B. $(1;3).$
C. $(1;4).$
D. $(3;1).$

Câu 47. Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^4-2x^2+5$ là:

A. 5.
B. 4.
C. 0.
D. 1.

Câu 48. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(4;-6)$
B. $(0;-2)$
C. $(-2;0)$
D. $(-6;4)$

Câu 49. Hàm số $y=-3\sqrt[3]{x^2}+2$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2.
B. 0.
C. 1.
D. 3.

Câu 50. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ là:

A. 4.
B. -2.
C. 2.
D. -4.

Câu 51. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y = 2x^3 - 3x^2$. **B.** $y = -2x^3 - 3x^2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. **D.** $y = x^3 - 3x - 1$.

Câu 52. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 + 4x - x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 53. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a - b$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 54. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2 + b$ là:

A. -8. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 55. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 3$ đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 56. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y = -10x^4 - 5x^2 + 7$. **B.** $y = -17x^3 + 2x^2 + x + 5$.

C. $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

Câu 57. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 1 hoặc 2. **B.** 1 hoặc 2. **C.** 0 hoặc 2. **D.** 0 hoặc 1.

Câu 58. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$. Hỏi hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$.

Câu 59. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$. Hỏi hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$.

Câu 60. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $a = 0; b = 0; c > 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **B.** $a = 0; b = 0; c > 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

C. $a = 0; b = 0; c \geq 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **D.** $a = 0; b = 0; c \geq 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Câu 61. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $a = 0; b = 0; c < 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **B.** $a = 0; b = 0; c < 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

C. $a=0;b=0;c\le 0$ hoặc $\begin{cases}a>0\\b^2-3ac\le 0\end{cases}$. **D.** $a=0;b=0;c\le 0$ hoặc $\begin{cases}a<0\\b^2-3ac\le 0\end{cases}$.

Câu 62. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(3-x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.**4. **D.** 5.

Câu 64. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=-x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;+\infty\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;2\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Câu 65. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=f\left(x\right)$, biết $f'\left(x\right)=\left(x-3\right)\left(x+2\right)\left(x+5\right)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $\left(-\infty;-5\right)$. **B.** $\left(-2;3\right)$. **C.** $\left(-5;-2\right)$. **D.** $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 66. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(2-x\right)\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)^5$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;2\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;2\right)$. **D.** $\left(1;+\infty\right)$.

Câu 67. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-1\right)^4\left(2-x\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f\left(5\right)>f\left(4\right)>f\left(3\right)$. **B.** $f\left(-1\right)>f\left(0\right)>f\left(1\right)$.

C. $f\left(-3\right)<f\left(-2\right)<f\left(-1\right)$. **D.** $f\left(0\right)<f\left(1\right)<f\left(2\right)$.

Câu 68. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		-	0	+	

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\infty;-1\right)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\left(-1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-2;+\infty\right)$.

Câu 69. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-3;0\right)$. **B.** $\left(0;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(-\infty;-3\right)$.

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là

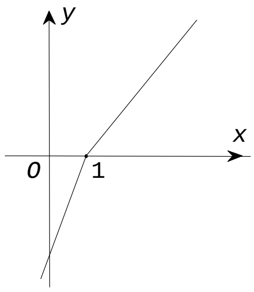
x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 72. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

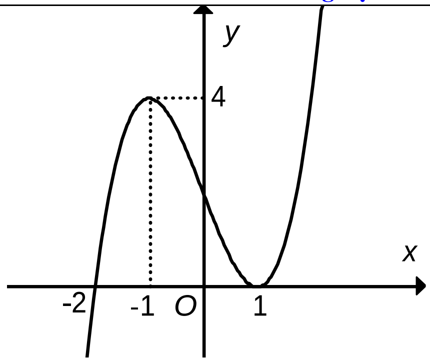
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

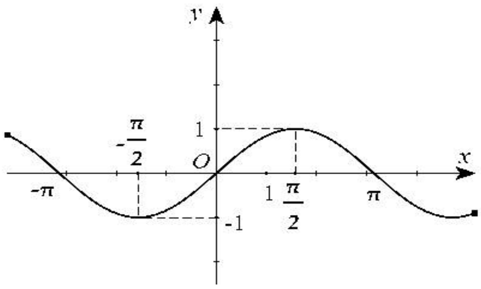
Câu 74. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?



A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng. **B.** Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. **D.** Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

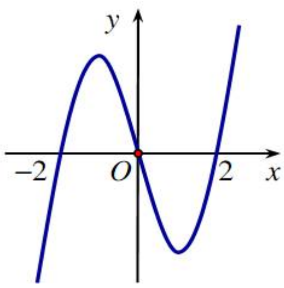
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\frac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

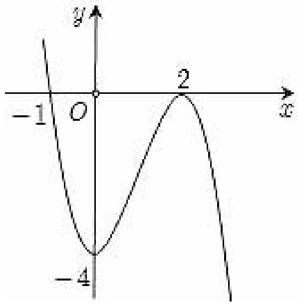
Câu 76. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. **B.** Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$. **D.** Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

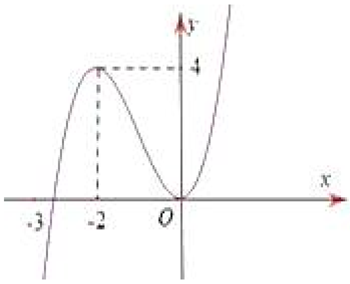
A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



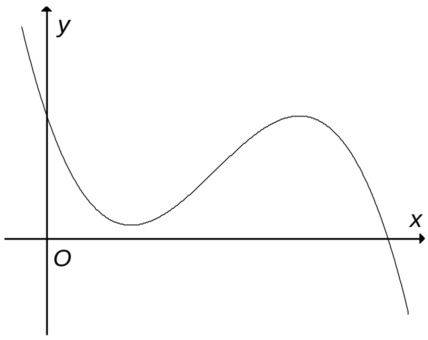
A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2);(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

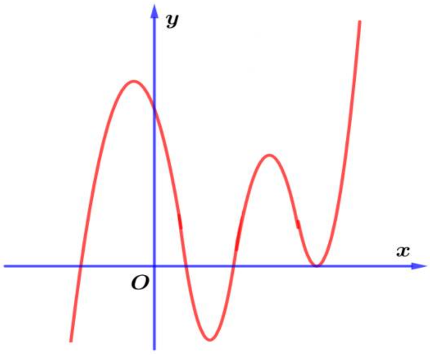
Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2025}$		$\frac{2024}{2025}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2024	$\nearrow$	2025	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2025}\right)$ và $\left(\frac{2024}{2025};+\infty\right)$.

b) $f\left(\frac{3}{2025}\right) > f\left(\frac{11}{2025}\right)$

c) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2024.

d) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $\left(\frac{2024}{2025};2025\right)$.

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và $(-2;+\infty)$.

b) $f(3) > f\left(\frac{7}{2}\right)$.

c) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác của diện tích S bằng $\frac{64}{5}$ (đvdt).

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) $f'(x) < 0$ khi $x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$

d) $f(-2024) < f(-10) < f(-1)$

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$			3		$+\infty$
y'		$+$	‖		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) $f(0) > f(1) > f(2)$.

d) Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y = 4$.

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

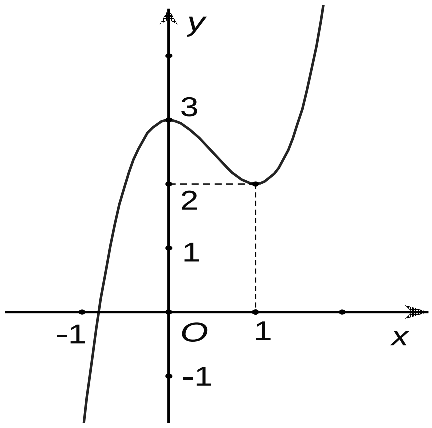
a) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

d) $f(3) > f(2024) > f(2025)$

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



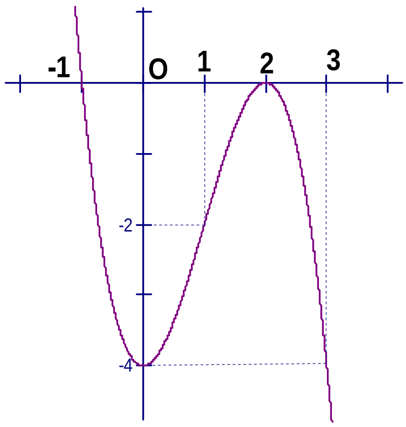
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$

c) $f'(x) > 0$ khi $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm có điểm cực đại là $(1;2)$.

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(2;0)$ và $(-1;0)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(2;3)$.

d) $f'(x) < 0$ khi $x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$

Câu 88. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$.

a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số có một điểm cực trị.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

d) $f(-3) < f(0) < f(1)$

Câu 89. Cho hàm số $y = -x^3 - x^2 + 5x + 4$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = -3x^2 - 2x + 5$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

c) $f(-10) < f(-3) < f(-2)$

d) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $\left(-\frac{5}{3};-\frac{317}{27}\right)$.

Câu 90. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

c) Đồ thị hàm số đã cho có 2 cực đại là $(-1;2),(1;2)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có 1 cực tiểu là $(0;3)$.

Câu 91. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{-4+2x}$.

a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f(3) < f(2024) < f(2025)$

c) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 92. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$.

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

d) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(1;0)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 93. Cho hàm số $y = x + \frac{4}{x}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

d) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-2;-4)$.

Câu 94. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 8x + 9}{x-5}$.

a) $y' = \frac{x^2 - 10x + 31}{(x-5)^2}$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;10)$.

d) Hàm số không có cực trị.

Câu 95. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt

c) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=x+1$

Câu 96. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

a) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên.

b) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2;5)$

c) $f(2)>f(5)>f(2025)$

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

Câu 97. Cho hàm số $y=\sqrt{9-4x^2}$.

a) Hàm số xác định khi $x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$.

Câu 98. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x\in[0;2]$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 99. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-5x+4}$.

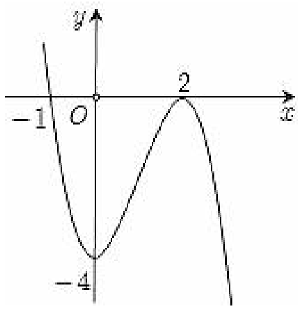
a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}$, $\forall x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Đồ thị hàm số có hai cực trị.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$

d) $f(0)>f(1)>f(2)>f(3)$

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

c) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$

d) $f(-2025)<f\left(-\dfrac{1}{2024}\right)<f\left(-\dfrac{1}{2025}\right)$

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

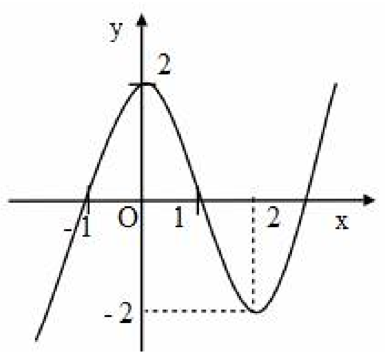
a) Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm nguyên

b) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

c) Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu $x=1$.

d) $f(1)<f(2)$

Câu 104. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y = f'(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



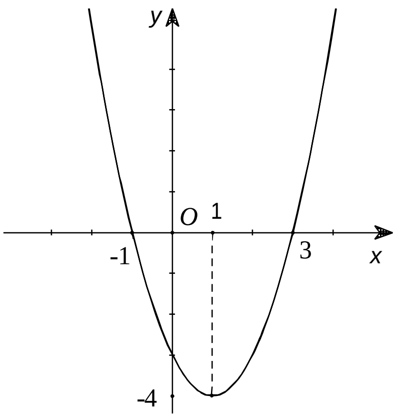
a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

d) $f(2) > f(3) > f(2024) > f(2025)$

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



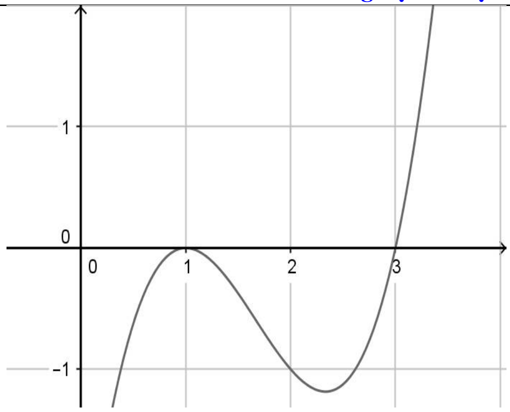
a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

d) $f(-1) < f(0) < f(2)$

Câu 106. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



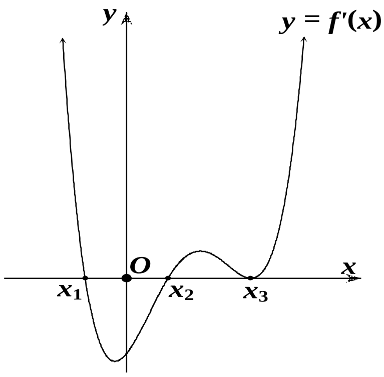
a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $x = 1$.

d) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu $x = \frac{5}{2}$.

Câu 107. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị hình vẽ bên.



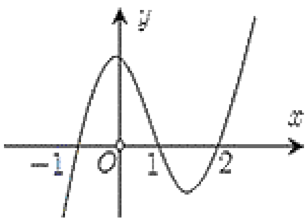
a) Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_3.

c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_2.

d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_1.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



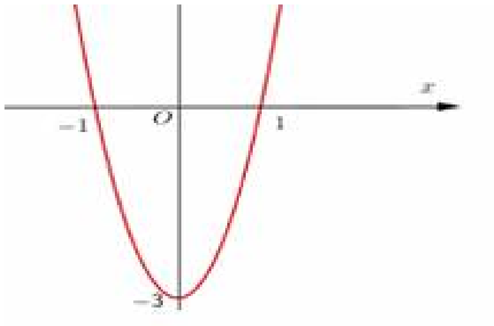
a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

c) Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{-1}{2}\right)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 110. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Phương trình hàm vận tốc là $3t^2 - 12t + 9$

b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.

c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (1;3)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (0;1) \cup (3;+\infty)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 111. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Biết liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(a;b)$ thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 112. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là *v* (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong *t* giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t,$ trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Biết vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(a;b)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 113. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t=126\ (s)$ cho bởi hàm số sau đây: $v(t)\ =\ 0,001302t^3-0,09029t^2+23$, (v được tính bằng ft/s, 1 feet = 0,3048 m)

Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi. Tính $T=a+b$?

Trả lời: ………………..

Câu 114. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I ($I>0$, đơn vị A) là cường độ dòng điện. Biết công suất P tăng khi cường độ dòng điện I ở trong khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 115. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị $6x_0+y_0$.

Trả lời: ………………..

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 117. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 118. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số đã cho .

Trả lời: ………………..

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Trả lời: ………………..

Câu 120. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-15	↘	$-\infty$

Số cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$?

Trả lời: ………………..

Câu 121. Giả sử tồn tại hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1;1\right\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	0	↘	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực tiểu?

Trả lời: ………………..

Câu 122. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

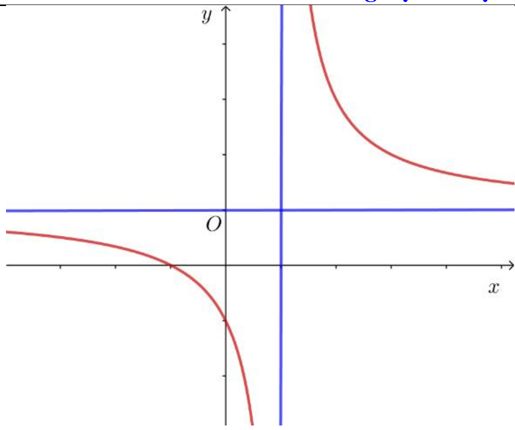
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có mấy cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Trả lời: ………………..

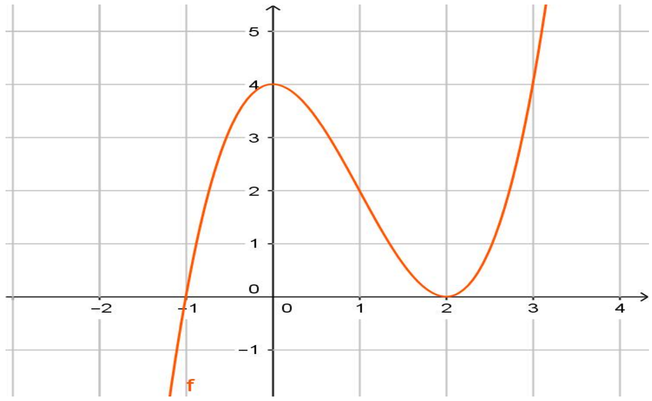
Câu 123. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a\neq -1$) có đồ thị như trong hình bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in [-2025;2025]$?

Trả lời: ………………..

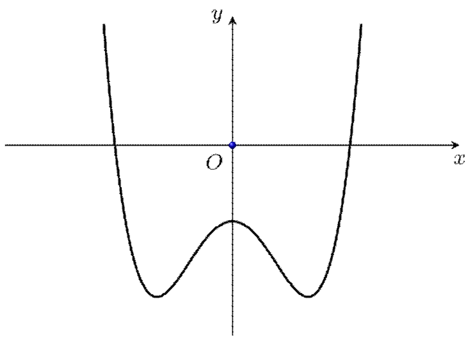
Câu 124. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

Trả lời: ………………..

Câu 125. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 126. Biết hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 44$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $a + b$.

Trả lời: ………………..

Câu 127. Biết hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $b - a$.

Trả lời: ………………..

Câu 128. Biết hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(a;+\infty)$. Tính giá trị của a.

Trả lời: ………………..

Câu 129. Cho các hàm số sau:

(I) : $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$; (II) : $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; (III) : $y=\sqrt{x^2+4}$

(IV) : $y=x^3+4x-\sin x$; (V) : $y=x^4+x^2+2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

Trả lời: ………………..

Câu 130. Cho các hàm số nào sau:

1. $y=x^3+3x^2$.
2. $y=x^3-x$.
3. $y=x^4-3x^2+2$.
4. $y=x^3$.

Có bao nhiêu hàm số không có cực trị?

Trả lời: ………………..

Câu 131. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Trả lời: ………………..

Câu 132. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ………………..

Câu 133. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 134. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $5b-4a$.

Trả lời: ………………..

Câu 135. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$ có đồ thị (C). Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C) (kết quả làm tròn đến phần trăm)

Trả lời: ………………..

Câu 136. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng AB (kết quả làm tròn đến phần trăm)

Trả lời: ………………..

Câu 137. Biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c + d$.

Trả lời: ………………..

Câu 138. Biết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y = -x + 1 - \dfrac{1}{x+2}$ có dạng $y = ax + b$. Tính giá trị $a - 2025b$.

Trả lời: ………………..

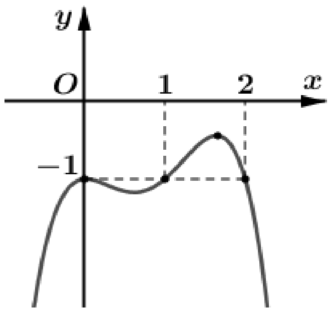
Câu 139. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục toạ độ một tam giác của diện tích S bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 140. Hàm số $y = \left|x^2 + 5x + 6\right|$ có mấy điểm cực trị ?

Trả lời: ………………..

Câu 141. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị?

Trả lời: ………………..

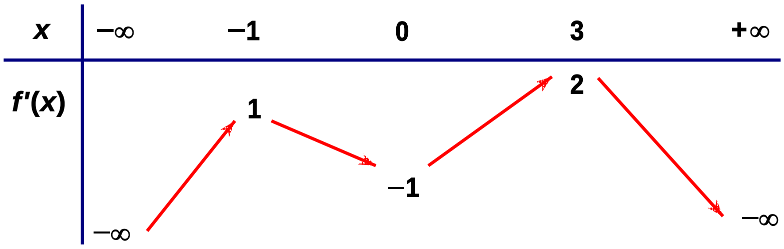
Câu 142. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $b - 2a$.

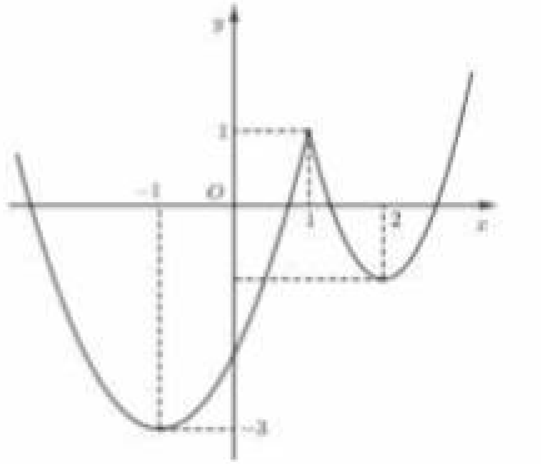
Trả lời: ………………..

Câu 143. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x\right)$

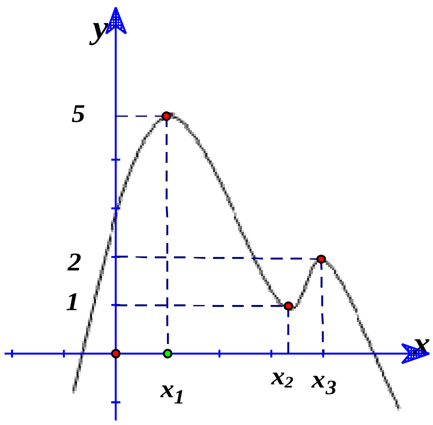
Câu 144. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực đại

Trả lời: ………………..

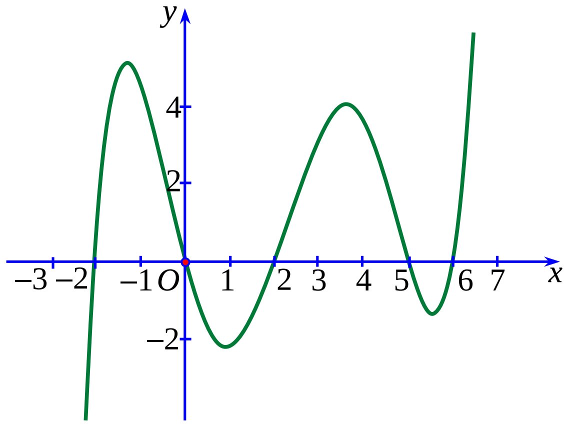
Câu 145. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị ?

Trả lời: ………………..

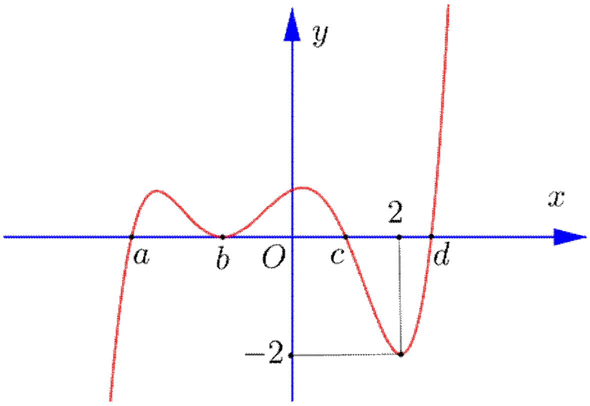
Câu 146. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực tiểu ?

Trả lời: ………………..

Câu 147. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị ?

Trả lời: ………………..

Câu 148. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 149. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

Trả lời: ………………..

Câu 150. Biết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ có dạng $y = ax + b$. Tính giá trị $4b - a$.

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 151. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

Câu 152. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

Câu 153. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$

Câu 154. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$

Câu 155. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

Câu 156. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \frac{3-2x}{x-1}$

Câu 157. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \frac{3x-4}{1-2x}$

Câu 158. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \frac{x+2}{2x+1}$

Câu 159. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = x - \frac{9}{x}$

Câu 160. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \frac{1}{x+1} - 2x$

Câu 161. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x-2}$

Câu 162. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = -x^4 + 4x^2 - 3$

Câu 163. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$

Câu 164. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = x^4 + 4x + 6$

Câu 165. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \sqrt{x^2 + 2}$

Câu 166. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \sqrt{64 - x^2}$

Câu 167. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \sqrt{x^2 + x}$

Câu 168. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \sqrt{x^2 - 4x}$

Câu 169. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

Câu 170. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

Câu 171. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = (4 - 3x)\sqrt{6x^2 + 1}$

Câu 172. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left|x^2-2x-3\right|$

Câu 173. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=|x|(x+2)$

Câu 174. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=(x-3)\sqrt{|x|}$

Câu 175. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=2\sin 2x-3$ với $x\in[0;\pi]$.

Câu 176. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sin^2 x+\cos x$ với $x\in[0;\pi]$.

Câu 177. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left(x^2-x-1\right)e^x$

Câu 178. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$

Câu 179. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\ln\left(x^2+x+2\right)$

Câu 180. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\dfrac{x}{2}-\ln\left(x^2-x+2\right)$

Câu 181. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left(x^2+4x+1\right).e^{x-2}$

Câu 182. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=e^x(x^2-3)$

Câu 183. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Câu 184. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Câu 185. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Câu 186. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

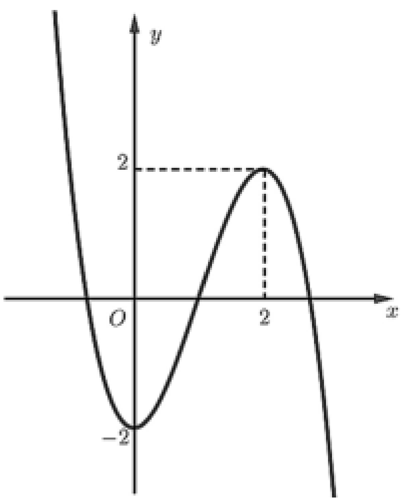
Câu 187. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

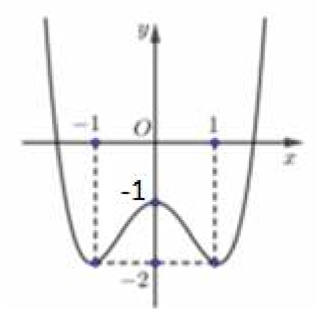
Câu 188. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

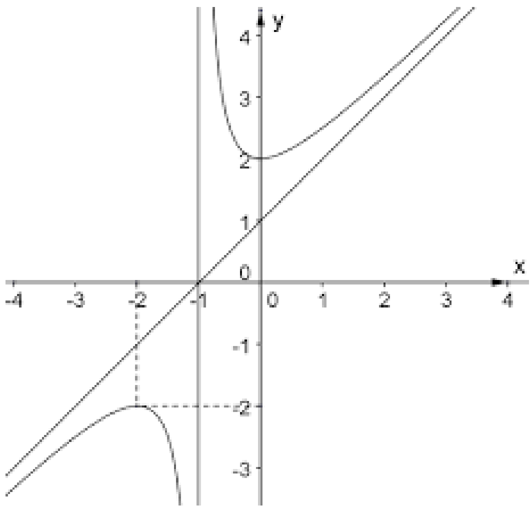
Câu 189. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Câu 190. Cho đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 191. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(x\right) = \left(1 - x\right)\left(x + 4\right)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f\left(x\right)$.

b) Hàm số $y = f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Câu 192. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'\left(x\right) = \left(x - 1\right)^2\left(3 - x\right)\left(x^2 - x - 1\right)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f\left(x\right)$.

b) Hàm số $y = f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Câu 193. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(x\right) = \left(1 - 2x\right)^{2024}.\left(x + 2\right)^{2025}$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f\left(x\right)$.

b) Hàm số $y = f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

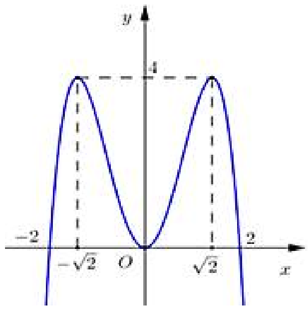
Câu 194. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

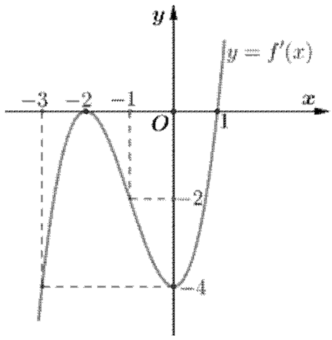
Câu 195. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

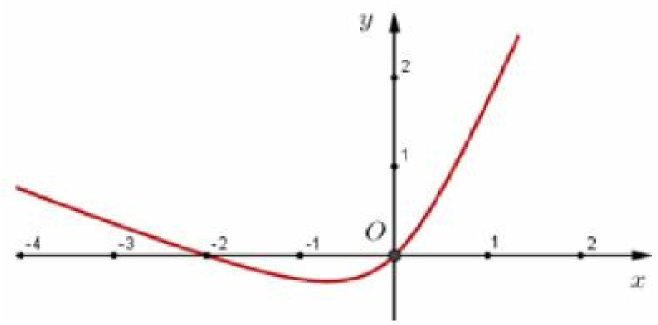
Câu 196. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.

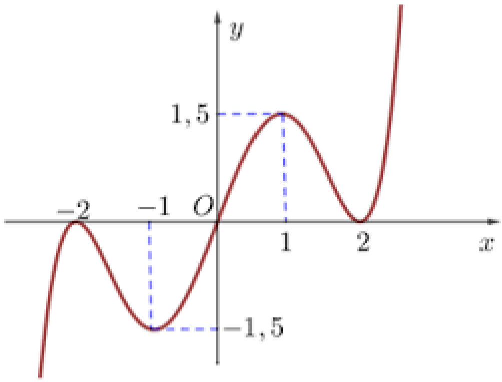


a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Câu 198. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^4(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng bao nhiêu?

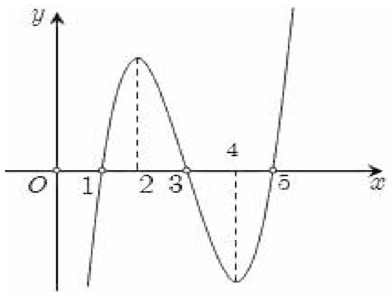
Câu 199. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x-1)$.

b) Hàm số $y = f(x-1)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Câu 200. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $g(x) = f(x+1)$.

b) Hàm số $g(x) = f(x+1)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

CHƯƠNG 1
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1
TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Nhận biết tính đơn điệu của hàm số bằng dấu của đạo hàm

Định lí 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $K\subset\mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ còn được gọi là đơn điệu trên tập $K\subset\mathbb{R}$.

Định lí 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $K\subset\mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Nhận xét: Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. Điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số:

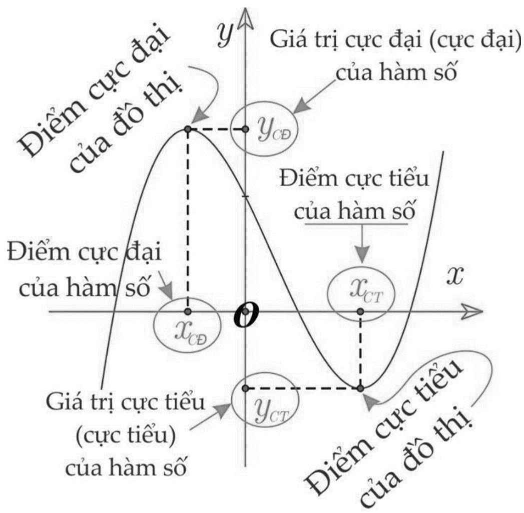
a. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập $K\subset\mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0\in\mathbb{R}, x_1\in K$.

- x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số $y=f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_o sao cho $(a;b)\subset K$ và $f(x)<f(x_o),\forall x\in(a;b)\setminus\{x_o\}$. Khi đó, $f(x_o)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $y=f(x)$, kí hiệu f_{CD}.

- x_1 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(c;d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c;d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1), \forall x \in (c;d) \setminus \{x_1\}$. Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu f_{CT}.

- Điểm cực trị đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**)

Chú ý: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì người ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, điểm $M(x_o; f(x_o))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



b. Định lý : Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_o và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_o)$ và $(x_o;b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_o)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_o;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;x_o)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_o;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Nhận xét: Để tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- *Bước 1:* Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

- *Bước 2:* Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i = 1, 2, 3, ..., n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

- *Bước 3:* Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.

- *Bước 4*: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

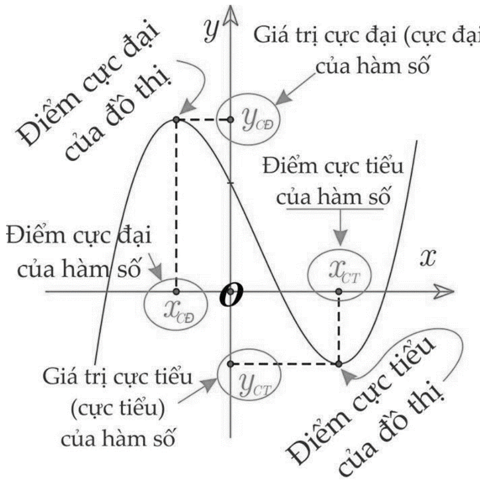
DẠNG 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ $y=f(x)$

Để xét tính đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.
- **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.

Chú ý:

- Cần phân biệt điểm cực trị của hàm số với điểm cực trị của đồ thị hàm số.



- Ôn lại kiến thức xét dấu tam thức bậc hai: $y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ (lớp 10)

+ Nếu $\Delta<0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a

+ Nếu $\Delta = 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	cùng dấu với a	

+ Nếu $\Delta > 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của tam thức $f(x) = 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

• Cách tính nhanh đạo hàm hàm số dạng hữu tỉ (phân thức).

+ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

+ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e} \Rightarrow y' = \dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$

Bài 1. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 + 3x^2 - 9x$. b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2025$ c) $y = -x^3 + x^2 - x$

Lời giải

a) $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $y' = 3x^2 + 6x - 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 1$.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	27	↘	-5	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

• Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y = f(-3) = 27$, đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y = f(-1) = -5$.

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2025$.

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $y' = 3x^2 + 6x + 3$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x+3=0 \Leftrightarrow x=-1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2024	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;+\infty)$

+ Hàm số không có cực trị.

c) $y=-x^3+x^2-x$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

- Ta có: $y'=-3x^2+2x-1<0, \forall x \in \mathbb{R}$ do $\begin{cases} a=-3<0 \\ \Delta'=1-(-3)(-1)=-2<0 \end{cases}$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

+ Hàm số không có cực trị.

Bài 2. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=-x^4+6x^2-8x+1$ b) $y=x^4-2x^2-3$ c) $y=-x^4-x^2+2024$

Lời giải

a) $y=-x^4+6x^2-8x+1$.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

- Ta có: $y'=-4x^3+12x^2-8=-4(x-1)^2(x+2)$.

$y'=0 \Leftrightarrow -4(x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	25	$\searrow$	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y=f(1)=25$, hàm số không có cực tiểu.

b) $y=x^4-2x^2-3$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=-3 \\ f(-1)=-4 \\ f(1)=-4 \end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CĐ}=y(0)=-3$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=-1$ với giá trị cực tiểu là: $y_{CT}=y(1)=y(-1)=-4$.

c) $y=-x^4-x^2+2024$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=-4x^3-2x=-2x(2x^2+1)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow -2x(2x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2024	$\searrow$	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y=f(0)=2024$, hàm số không có cực tiểu.

Bài 3. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. b) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$ c) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

Lời giải

a) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\in \mathrm{D}$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

b) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0,\forall x\in \mathrm{D}$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

c) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Bài 4. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. b) $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$. c) $y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}$.

Lời giải

a) $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2},\forall x\neq 2$.

• $y'=0\Leftrightarrow \dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow -x^2-4x+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5\\x=1\end{array}\right.$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CĐ}=y(1)=0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và $y_{CT}=y(-5)=12$.

b) $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{x^2-10x+31}{(x-5)^2}>0,\forall x\neq 5$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;5)$ và $(5;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

c) $y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

• Ta có: $y'=-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{1-(x+2)^2}{(x+2)^2},\forall x\neq -2$

$$y'=0\Leftrightarrow 1-(x+2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $y_{CT}=y(-3)=5$, cực đại tại $x=-1$ với $y_{CĐ}=y(-1)=1$.

Bài 5. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{-x^3+3x^2}$ b) $y=x\sqrt{4-x^2}$ c) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}$

Lời giải

a) $y=\sqrt{-x^3+3x^2}$.

• Tập xác định: $D=(-\infty;3]$

• Ta có: $y'=\dfrac{-3(x^2-2x)}{2\sqrt{-x^3+3x^2}}$, $x<3,\ x\neq 0$. Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x=0,\ x=3$.

Suy ra, trên khoảng $(-\infty;3)$: $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{-3(x^2-2x)}{2\sqrt{-x^3+3x^2}}=0 \Leftrightarrow x=2$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3	$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	||	
y	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;3)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và $y_{CĐ}=y(2)=2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=0$.

b) $y=x\sqrt{4-x^2}$.

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

• Ta có: $y'=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2;2)$.

- Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x=-2,\ x=2$.
- Suy ra, trên khoảng $(-2;2)$: $y'=0 \Leftrightarrow 4-2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2	$+\infty$
y'	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
y		0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-2;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2};2\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=\sqrt{2}$ và $y_{CĐ}=y\left(\sqrt{2}\right)=2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-\sqrt{2}$ và $y_{CT}=y\left(-\sqrt{2}\right)=-2$.

c) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}$

- Hàm số đã cho xác định khi: $x^2-x+3>0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.
- Ta có: $y'=\sqrt{x^2-x+3}-\dfrac{(2x-1)(x+2)}{2\sqrt{x^2-x+3}}=\dfrac{-7x+8}{2\sqrt{x^2-x+3}}$.

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{-7x+8}{2\sqrt{x^2-x+3}}=0 \Leftrightarrow -7x+8=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{7}$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{8}{7}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\frac{22\sqrt{155}}{155}$	$\searrow$	-1

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{8}{7}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{8}{7};+\infty\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{8}{7}$ và $y_{CĐ}=y\left(\frac{8}{7}\right)=\frac{22\sqrt{155}}{155}$. Hàm số không có cực tiểu.

Bài 6. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left|x^2+5x+6\right|$.

Lời giải

a) $y=\left|x^2+5x+6\right|$.

Cách 1:

$y=\left|x^2+5x+6\right|=\sqrt{\left(x^2+5x+6\right)^2}$

- Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{(2x+5)\left(x^2+5x+6\right)}{\sqrt{\left(x^2+5x+6\right)^2}}\qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-3\}$$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=-3$ và $x=-2$.

$$y'=0\Leftrightarrow(2x+5)\left(x^2+5x+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+5=0\\x^2+5x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$ và $(-2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $\left(-\frac{5}{2};-2\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-\frac{5}{2}$ và $y_{CĐ}=y\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=-2$ với $y_{CT}=y(-3)=y(-2)=0$.

Cách 2: $y=\left|x^2+5x+6\right|\quad(1)$

Trường hợp 1: xét $x^2+5x+6\geq0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq-3\\x\geq-2\end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow y = x^2 + 5x + 6 \qquad \forall x \in (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$

$\Rightarrow y' = 2x + 5$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	0				0	↗	$+\infty$

Trường hợp 2: xét $x^2 + 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -2$

$(1) \Leftrightarrow y = -(x^2 + 5x + 6) \qquad \forall x \in (-3; -2)$

$\Rightarrow y' = -2x - 5$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

- Bảng biến thiên:

x		-3		$-\frac{5}{2}$		-2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y		0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	

Kết hợp 2 trường hợp ta có: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$ và $(-2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $\left(-\frac{5}{2};-2\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-\frac{5}{2}$ và $y_{CĐ}=y\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=-2$ với $y_{CT}=y(-3)=y(-2)=0$.

Bài 7. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=x-\sin x$ với $x\in[0;\pi]$. b) $y=2\sin x+\cos 2x$ với $x\in[0;\pi]$.

Lời giải

a) $y=x-\sin x$ với $x\in[0;\pi]$.

- Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0;\pi]$.
- Ta có: $y'=1-\cos x$.

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[0;\pi]\\1-\cos x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[0;\pi]\\\cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[0;\pi]\\x=k2\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

- Bảng biến thiên:

x	0		π
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	π

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $[0;\pi]$.

+ Hàm số không có cực trị.

b) $y=2\sin x+\cos 2x$ với $x\in[0;\pi]$.

- Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0;\pi]$.
- Ta có: $y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-4\cos x.\sin x=2\cos x(1-2\sin x), x\in[0;\pi]$.

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[0;\pi]\\\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{6}\\x=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$.

- Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{\pi}{6}$ và $x=\frac{5\pi}{6}$ với $y_{CĐ}=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{\pi}{2}$ với $y_{CT}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Bài 8. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=x^2e^{-x}$.   b) $y=\left(x^2-2\right)e^{2x}$.

Lời giải

a) $y=x^2e^{-x}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

• Ta có: $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}\left(2-x\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow xe^{-x}\left(2-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ với $y_{CĐ} = y(2) = \dfrac{4}{e^2}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ với $y_{CT} = y(0) = 0$.

b) $y = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = (x^2 - 2)e^{2x} \Rightarrow y' = 2xe^{2x} + (x^2 - 2)2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{e^4}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(1;+\infty)$. , nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$

+ Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ với $y_{CĐ} = y(-2) = \dfrac{2}{e^4}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ với $y_{CT} = y(1) = \dfrac{1}{e^2}$.

Bài 9. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x - 2\ln(x^2 + 3)$.

b) $y = e^{2x^2 - 2x + 1}$.

Lời giải

a) $y = x - 2\ln(x^2 + 3)$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Ta có : $y' = 1 - \dfrac{4x}{x^2 + 3} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$1-4\ln 2$	$\searrow$	$3-2\ln 12$	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ với $y_{CĐ}=y(1)=1-4\ln 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ với $y_{CT}=y(3)=3-2\ln 12$.

b) $y=e^{2x^2-2x+1}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

• Ta có : $y'=(4x-2)e^{2x^2-2x+1}$

$$y'=0 \Leftrightarrow (4x-2)e^{2x^2-2x+1}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{1}{2}$ với $y_{CĐ}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$.

Hàm số không có cực đại

DẠNG 2
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f(x)$

1. Cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết bảng biến thiên

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có bảng biến thiên sau:

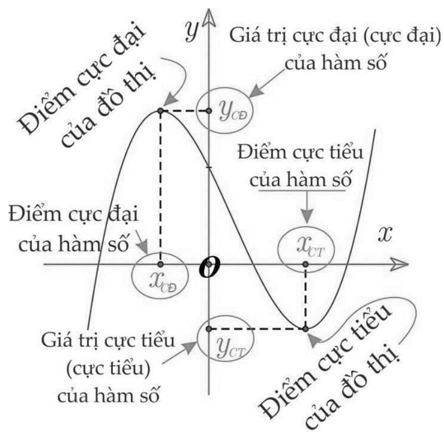
x	$-\infty$		$x_{CĐ}$		x_{CT}		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có:

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_{CĐ};x_{CT})$.
- Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $x = x_{CĐ}$, điểm cực tiểu $x = x_{CT}$ và giá trị cực đại $y = y_{CĐ}$, giá trị cực tiểu $y = y_{CT}$.
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(x_{CĐ};y_{CĐ})$ và điểm cực tiểu $(x_{CT};y_{CT})$.

2. Cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có đồ thị hàm số như sau:



Từ đồ thị trên ta có:

- Đi từ trái sang phải đồ thị hàm số $y = f(x)$ "đi lên" trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$

• Đi từ trái sang phải đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ "đi xuống" trên khoảng $\left(x_{CĐ};x_{CT}\right)$ nên hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(x_{CĐ};x_{CT}\right)$.

• Hàm số $y=f\left(x\right)$ có điểm cực đại $x=x_{CĐ}$, điểm cực tiểu $x=x_{CT}$ và giá trị cực đại $y=y_{CĐ}$, giá trị cực tiểu $y=y_{CT}$.

• Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có điểm cực đại $\left(x_{CĐ};y_{CĐ}\right)$ và điểm cực tiểu $\left(x_{CT};y_{CT}\right)$.

Bài 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CĐ}=f\left(-1\right)=3$, cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=f\left(1\right)=-5$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CĐ}=f\left(-1\right)=0$, cực tiểu tại $x=-1$ và $x=1$ với $y_{CT}=f\left(-1\right)=f\left(1\right)=0$.

Bài 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $x=1$ với $y_{CĐ}=f(-1)=f(1)=2$, cực tiểu tại $x=0$ với $y_{CT}=f(0)=1$.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$
- Hàm số không có cực trị

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$
- Hàm số không có cực trị

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CĐ}=f(-1)=1$, cực tiểu tại $x=-3$ và $y_{CT}=f(-3)=5$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $y_{CĐ}=f(-2)=-2$, cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=f(0)=2$.

Bài 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$ ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

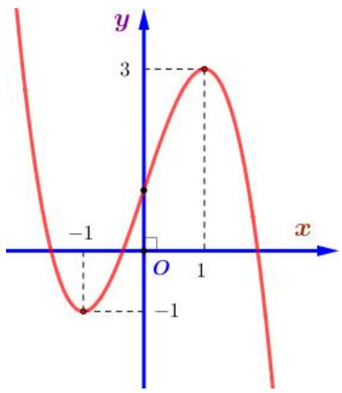
b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$
- Hàm số không có cực trị

Bài 9. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

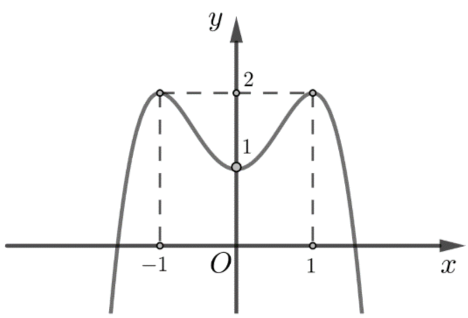
b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng và $(-1;1)$
- Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1;3)$, điểm cực tiểu là $(-1;-1)$.

Bài 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

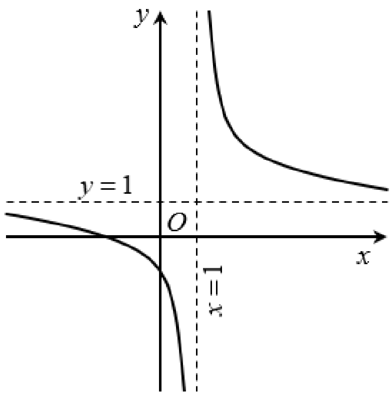
b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$
- Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1;3)$, điểm cực tiểu là $(-1;-1)$.

Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

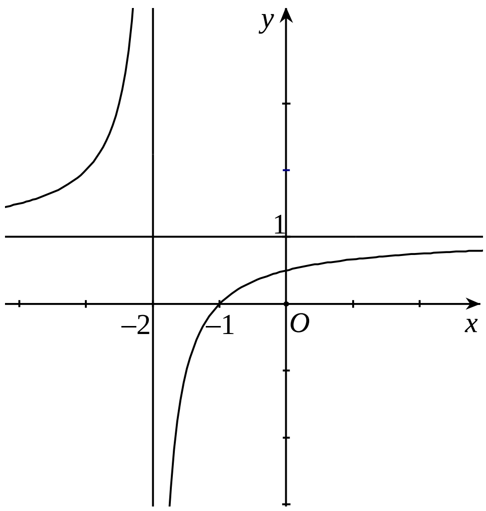
b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$
- Đồ thị hàm số không có điểm cực trị.

Bài 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

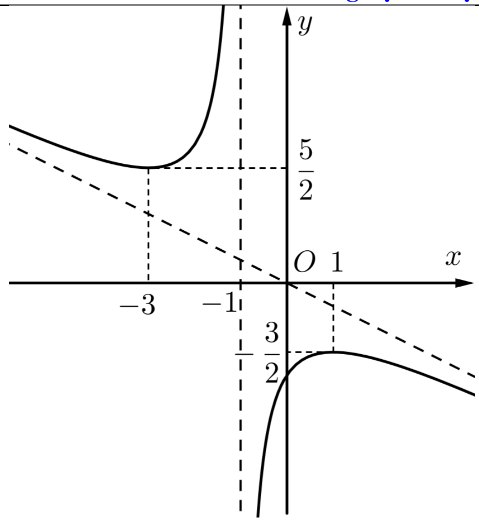
b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$
- Đồ thị hàm số không có điểm cực trị.

Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

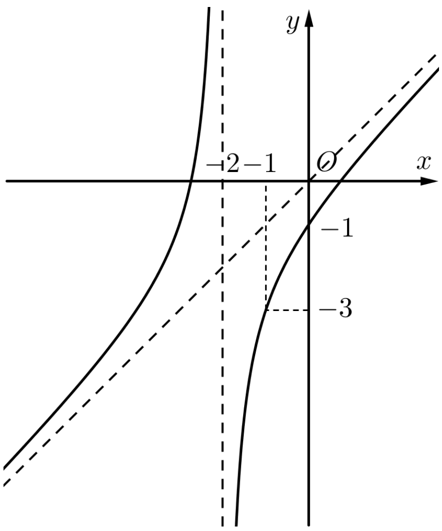
b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(-1;1)$
- Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$, điểm cực tiểu là $\left(-3;\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

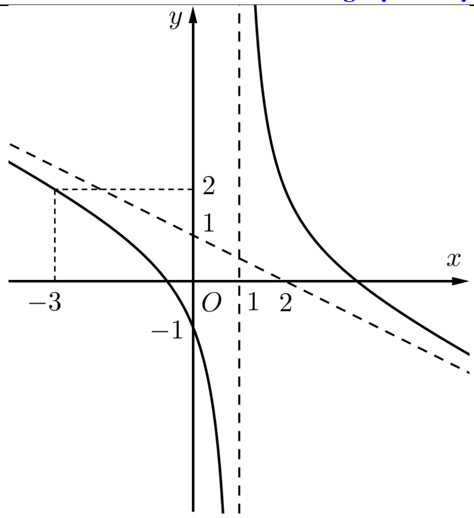
b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$
- Đồ thị hàm số không có điểm cực trị.

Bài 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

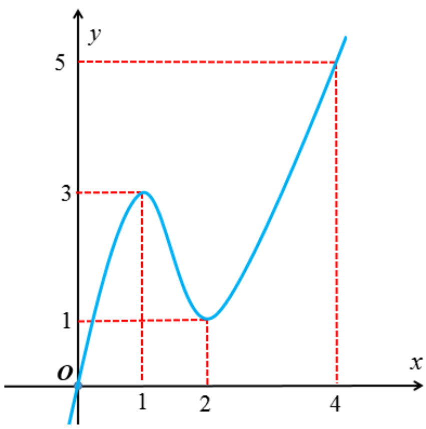
b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$
- Đồ thị hàm số không có điểm cực trị.

Bài 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

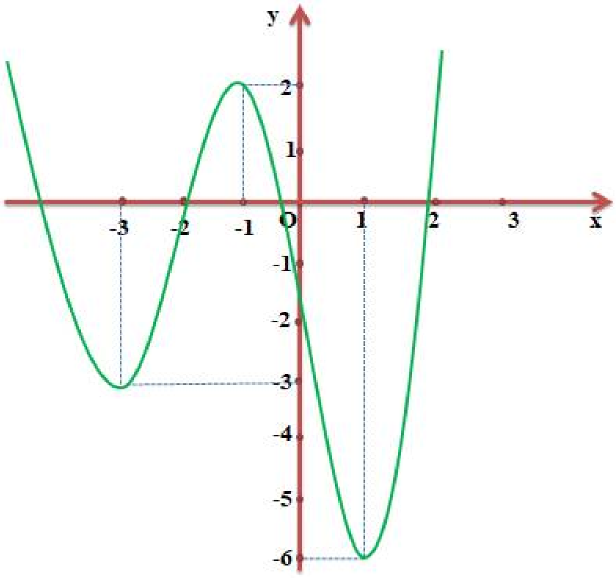
Lời giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có:

a) hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

b) đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(2;1)$; điểm cực đại $(1;3)$

Bài 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

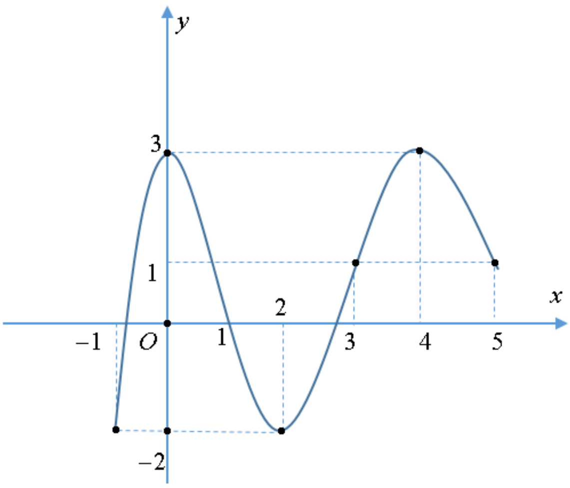
Lời giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có:

a) hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;1)$

b) đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(-3;3)$ và $(1;-6)$; điểm cực đại $(-1;2)$

Bài 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có:

a) hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(2;4)$; nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và $(4;5)$

b) đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(2;-2)$; điểm cực đại $(0;3)$ và $(4;3)$

DẠNG 3
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$

1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên tập $K\subset\mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0, \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Đối với $y=f(x)$ là hàm đa thức:

- Nếu $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)\le 0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(a;b)\subset\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Chú ý: Đối với $y=f(x)$ là hàm đa thức:

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành và những điểm thuộc trục hoành thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành và những điểm thuộc trục hoành thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+2024)(x-2025)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow (x+2024)(x-2025)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2024\\ x=2025\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được :

x	$-\infty$		-2024		2025		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng của $f'(x)$, ta có :

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2024)$ và $(2025;+\infty)$, nghịch đồng biến trên khoảng $(-2024;2025)$.

b)

• Qua $x=2025$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=2025$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Qua $x=-2024$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=-2024$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^3(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng của $f'(x)$, ta có :

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

b)

• Qua $x=1$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Qua $x=2$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=2$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ bảng của y', ta có :

a)

• $y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -3)$ và $x \in (0;3)$, do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

• $y' < 0$ khi $x \in (-3;0)$ và $x \in (3;+\infty)$, do đó hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

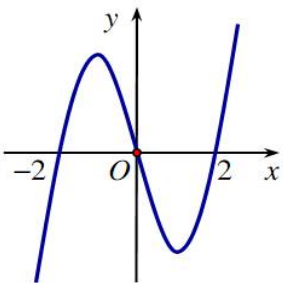
b)

• Qua $x = 0$ hàm số y' đổi dấu từ âm sang dương nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Qua $x = -3$ và $x = 3$ hàm số y' đổi dấu từ dương sang âm nên $x = -3$ và $x = 3$ là các điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 cực đại và 1 cực tiểu.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Cách 2: Cách làm tự luận (lập bảng biến thiên)

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

a) Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$

b) Từ bảng biến thiên, ta có:

- $x=-2$ và $x=2$ là các điểm cực tiểu của hàm số.
- $x=0$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

Cách 2: Cách làm trắc nghiệm

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

a) Trên khoảng: $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

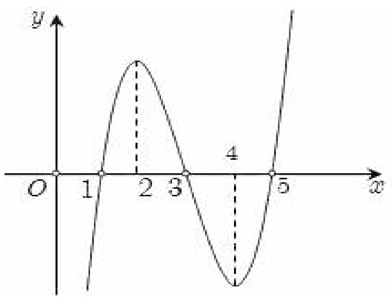
b) Trên khoảng: $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$

c) Qua $x=-2$ và $x=2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-2$ và $x=2$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

d) Qua $x=0$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=0$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

a)

- Trên khoảng: $(1;3)$ và $(5;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng: $(1;3)$ và $(5;+\infty)$
- Trên khoảng: $(-\infty;1)$ và $(3;5)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng: $(1;3)$ và $(5;+\infty)$

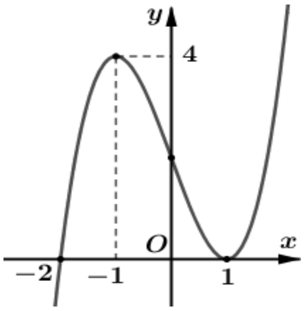
b)

• Qua $x=1$ và $x=5$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=1$ và $x=5$ là 2 điểm cực tiểu của hàm số.

• Qua $x=3$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=3$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

Bài 6. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

a)

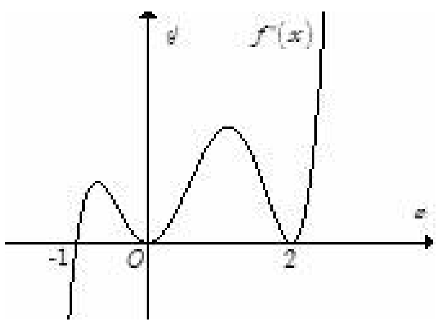
• Trên khoảng: $(-2;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$

• Trên khoảng: $(-\infty;-2)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

b) Qua $x=-2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực tiểu.

Bài 7. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có:

a)

- Trên khoảng: $(-1;+\infty)$ đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$
- Trên khoảng: $(-\infty;-1)$ đồ thị $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) Qua $x=-1$ đồ thị $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 1 cực tiểu.

DẠNG 4
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG QUA HAI ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Phương pháp viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba:

$$y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \left(a \neq 0\right)$$

Cách 1: Tự luận

Bước 1: Tìm tọa độ 2 điểm cực trị của hàm bậc ba. Giả sử 2 điểm cực trị đó là $A\left(x_A; y_A\right); B\left(x_B; y_B\right)$.

Bước 2: Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax + b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Chia y cho y' ta được: $y = g(x).y' + Ax + B$

Bước 2: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = Ax + B$

2. Phương pháp viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

Cách 1: Tự luận

Bước 1: Tìm tọa độ 2 điểm cực trị của hàm hữu tỉ. Giả sử 2 điểm cực trị đó là $A\left(x_A; y_A\right); B\left(x_B; y_B\right)$.

Bước 2: Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax + b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Tính $\dfrac{\left(ax^2 + bx + c\right)'}{\left(dx + e\right)'} = \dfrac{2ax + b}{d} = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$

Bước 2: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Bài 1. Viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Cách 1: Tự luận

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2;-2)$ và điểm đạt cực đại $B(0;2)$

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax + b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -2 = 2a + b \\ 2 = a.0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y = -2x + 2$

Cách 2: Trắc nghiệm

$$y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$$

Chia y cho y' ta được: $y = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}\right).\left(3x^2 - 6x\right) - 2x + 2$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y = -2x + 2$

b) $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$.

Cách 1: Tự luận

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

• Ta có: $y' = \dfrac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}, \forall x \neq 2$.

• $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	12	↗	$+\infty \;\|\; -\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

• Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(-5;12)$ và điểm đạt cực đại $B(1;0)$

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax + b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 12 = -5a + b \\ 0 = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y = -2x + 2$

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $\dfrac{\left(-x^2 + 2x - 1\right)'}{(x+2)'} = \dfrac{-2x+2}{1} = -2x + 2$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y = -2x + 2$

Bài 2. Viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

b) $y = x + \dfrac{1}{x+1}$.

Lời giải

Các em làm tương tự như trên.

DẠNG 5
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

• Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

• Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$.

• Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

• Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Bài 1. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t \geq 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m).

a) Trong 20 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng hay giảm?

b) Vận tốc của chất điểm nhỏ nhất và lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là $v(t) = s'(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$.

Xét hàm $v(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$

• Tập xác định: $D = [0;20]$

• Ta có: $v'(t) = t^2 - 6t + 12 = (t-3)^2 + 3 > 0$.

• Bảng biến thiên:

t	0				20
$v'(t)$		+	0	+	
$v(t)$	10	↗			$\frac{5150}{3}$

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Trong 20 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng.

b) Vận tốc của chất điểm nhỏ nhất bằng $v(t)=10(m/s)$ và lớn nhất bằng $v(t)=\dfrac{5150}{3}\approx 1716,7(m/s)$

Bài 2. Một chất điểm chuyển động trong 10 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với $t\ge 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng hay giảm?

b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là $v(t)=s'(t)=-t^2+12t$.

Xét hàm $v(t)=-t^2+12t$

• Tập xác định: $D=[0;10]$

• Ta có: $v'(t)=-2t+12$.

$v'(t)=0\Leftrightarrow t=6$.

• Bảng biến thiên:

t	0		6		10
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	↗	36	↘	20

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật tăng.

+ Trong khoảng thời gian 6 giây đến 10 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật giảm.

+ Vận tốc lớn nhất của vật bằng $v(6)=36(m/s)$ tại thời điểm 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

Bài 3. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=\dfrac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2$ với $t\ge 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật giảm?

c) Tính gia tốc của vật sau thời gian 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

Lời giải

Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2\right)'=t^2-6t+5$$

Xét hàm $v(t)=t^2-6t+5$ với $t\ge 0$

$v'(t)=2t-6$

$v'(t)=0\Leftrightarrow 2t-6=0\Leftrightarrow t=3$

- Bảng biến thiên:

t		0		3		$+\infty$
$v'(t)$			$-$	0	$+$	
$v(t)$		5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

a) Trong khoảng thời gian $(3;+\infty)$ thì vận tốc của vật tăng

b) Trong khoảng thời gian $(0;3)$ thì vận tốc của vật giảm.

c) Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình vận tốc tại thời điểm t hay $a(t)=v'(t)=2t-6$

Với $t=5\Rightarrow a(5)=2.5-6=4(m/s^2)$

Bài 4. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện và $0\le I\le 22$.

a) Hỏi công suất P tăng khi cường độ dòng điện thuộc khoảng nào?

b) Hỏi công suất P giảm khi cường độ dòng điện thuộc khoảng nào?

c) Công suất P lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

- Xét hàm số $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với $0\le I\le 22$.

- $P'(I)=24I-\frac{3}{2}I^2$

$$P'(I)=0\Leftrightarrow 24I-\frac{3}{2}I^2=0\Leftrightarrow(48-3I)I=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}I=0\\I=16\end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:

I	0		16		22
$P'(I)$		+	0	−	
$P(I)$			1024		
	0	↗		↘	484

Từ bảng biến thiên ta có:

a) Công suất P tăng khi cường độ dòng điện thuộc khoảng $(0;16)$.

b) Công suất P giảm khi cường độ dòng điện thuộc khoảng $(16;22)$.

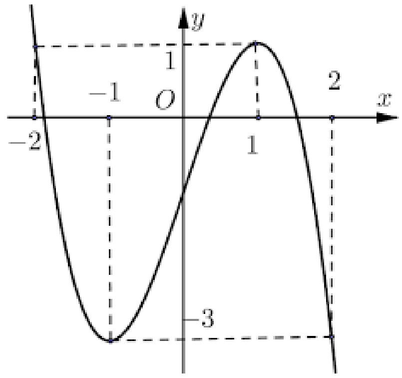
c) Công suất P lớn nhất bằng $P(16)=1024(\mathrm{w})$.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

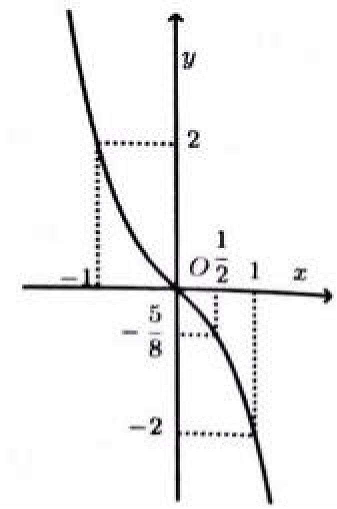
Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $(0;1)$

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

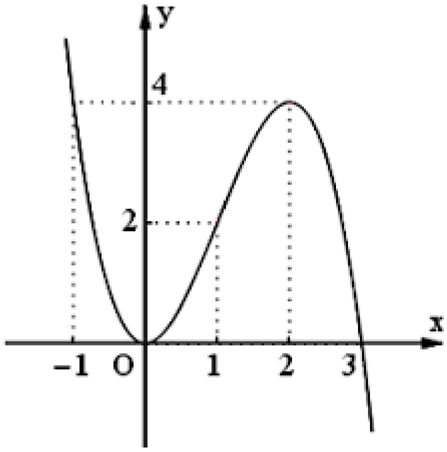
Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

B. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng 2.

C. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 0.

Lời giải

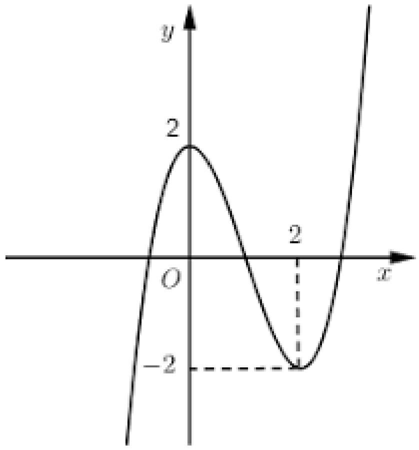
Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng $x=0$ và giá trị cực tiểu bằng $y=0$.

Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng $x=2$ và giá trị cực đại bằng $y=4$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng 2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng -2.

Lời giải

Chọn C.

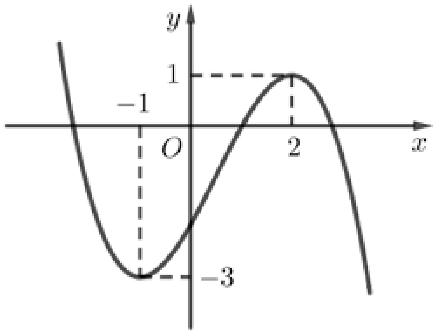
Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;2)$; đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=2$ và giá trị cực tiểu bằng $y=-2$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=0$ và giá trị cực đại bằng $y=2$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng -3.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 1.

Lời giải

Chọn D.

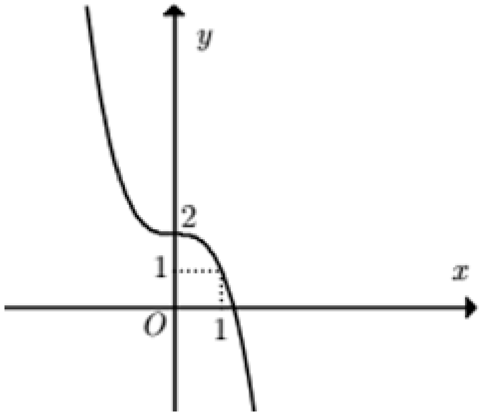
Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;2)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=-1$ và giá trị cực tiểu bằng $y=-3$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=2$ và giá trị cực đại bằng $y=1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

Lời giải

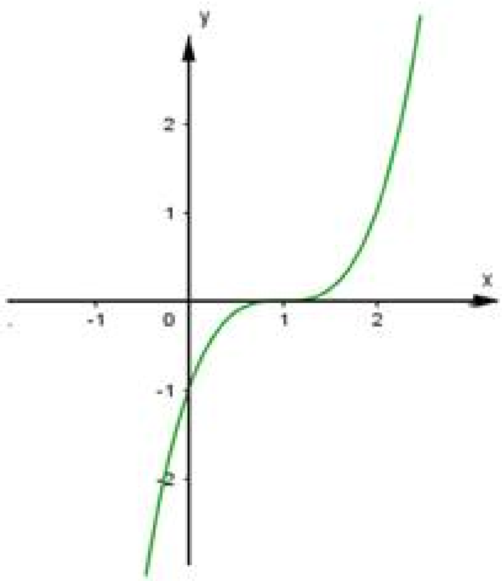
Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Hàm số đã cho không có điểm cực trị

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 1.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 0.

Lời giải

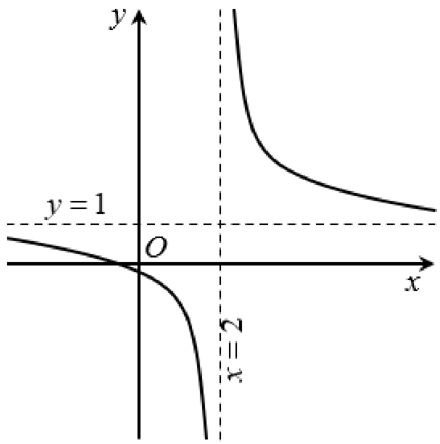
Chọn B.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Hàm số đã cho không có điểm cực trị

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

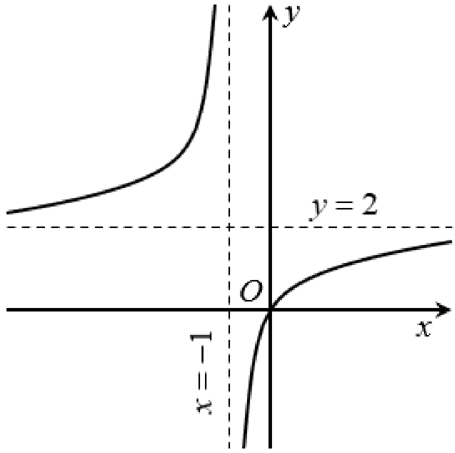
Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có một cực trị.

Lời giải

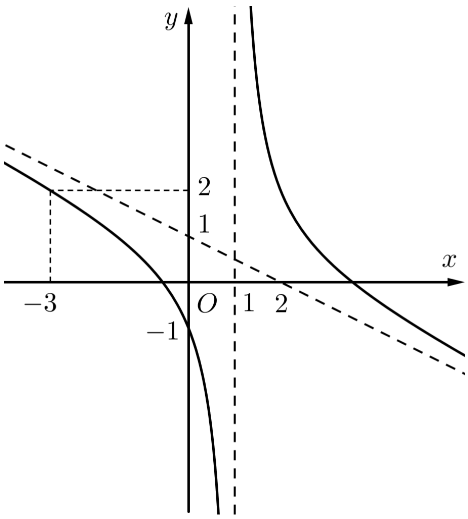
Chọn B.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có điểm cực trị

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có hai cực trị.

Lời giải

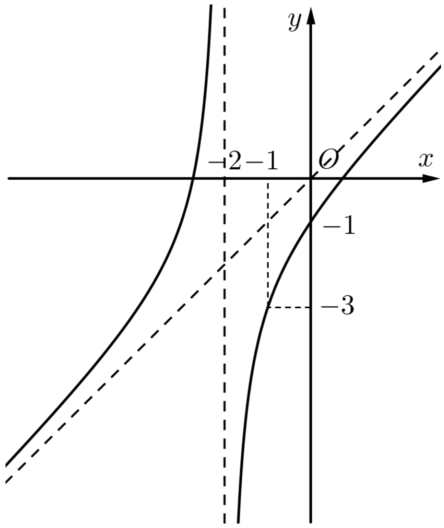
Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho không có cực trị.

Lời giải

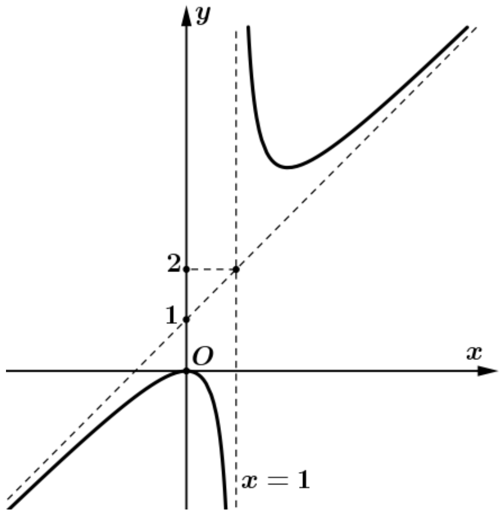
Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có hai cực trị.

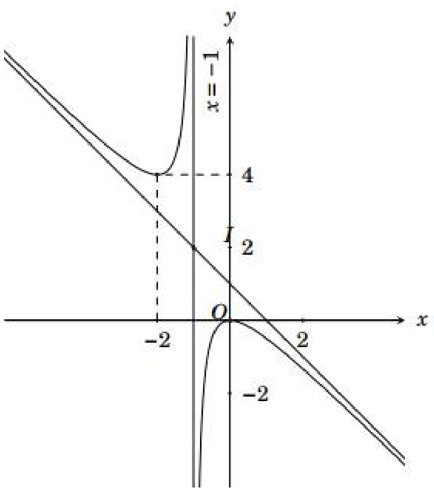
Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho có hai cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(-2;0)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng -2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 4.

Lời giải

Chọn C.

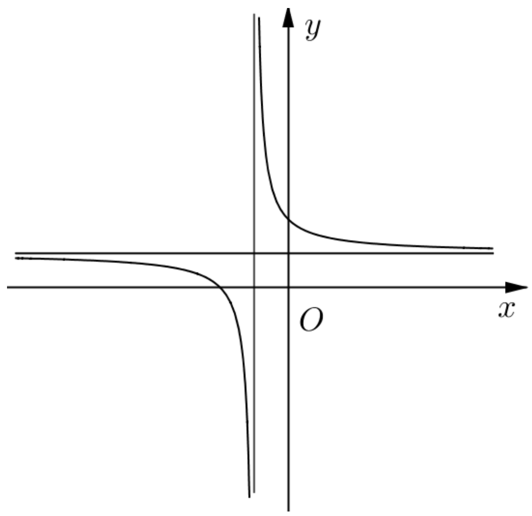
Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$; đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(-2;0)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=-2$ và giá trị cực tiểu bằng $y=4$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=0$ và giá trị cực đại bằng $y=0$.

Câu 14. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'<0,\forall x\neq -1$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

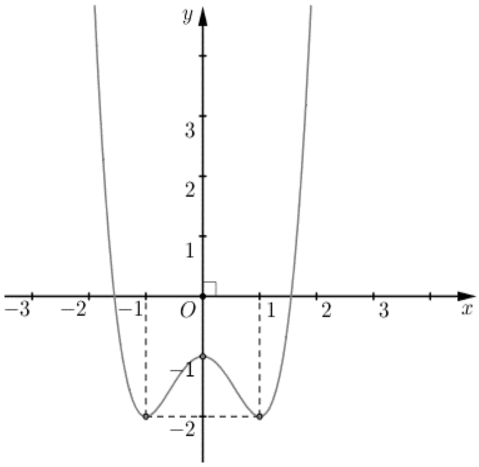
Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên loại đáp án A và D.

Dạng đồ thị đi xuống thì $y'<0$ nên loại đáp án B.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



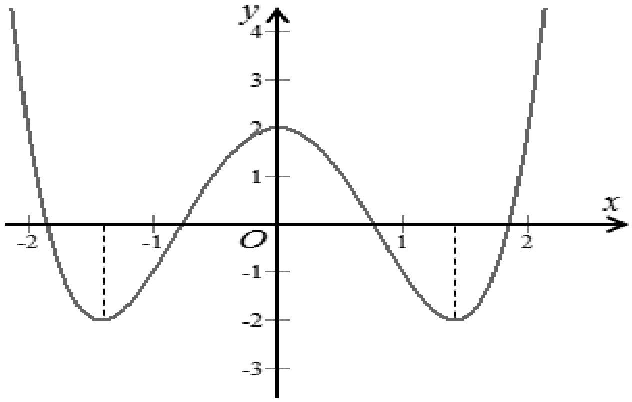
A. $(-\infty -1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



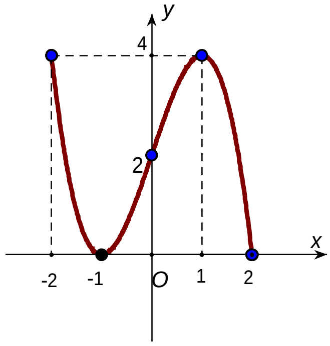
A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn D.

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số đi xuống (theo chiều từ trái qua phải) nên nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại điểm

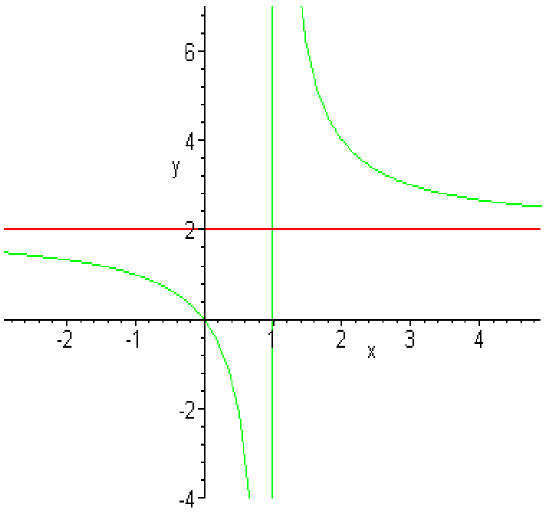
A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị đã cho, ta có hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$

Câu 18. Cho đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ.



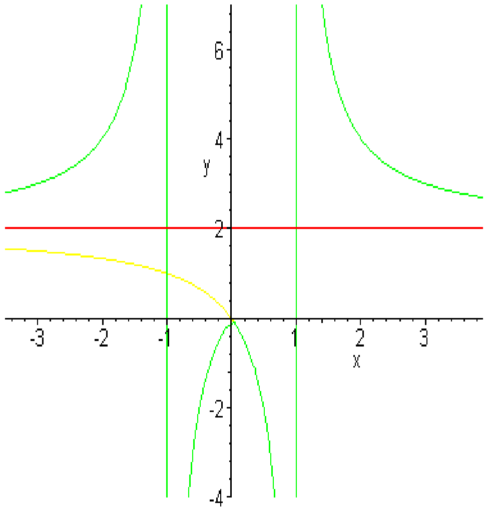
Số cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

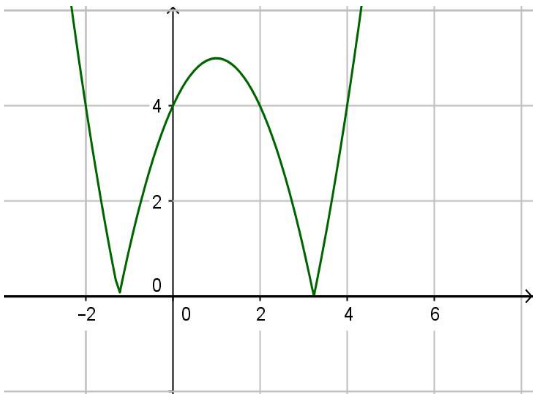
Chọn A.

Đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là:



Từ đồ thị trên suy ra đồ thị hàm số $y = f\left(|x|\right)$ có 1 cực trị

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



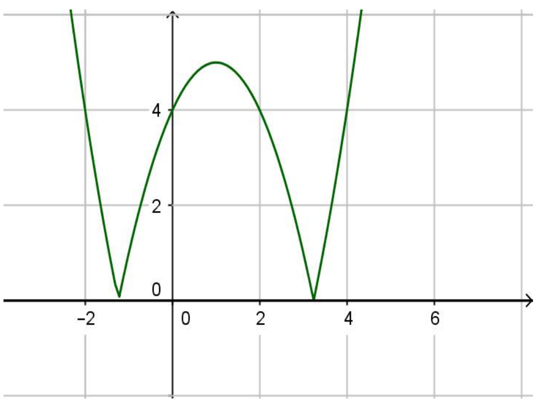
Hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$ có mấy cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C.

đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm bên trên trục hoành nên đồ thị hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$ là:



Hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$ có 3 cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-1;0)$

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $f'(x)>0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x)<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -1. **B.** 5 . **C.** -3. **D.** 1 .

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua nghiệm $x=-1$ nên hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy hàm số đã cho có giá trị cực tiểu là $y=-3$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-5	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số bằng -5.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có cực trị.

Lời giải

Chọn B.

Từ bảng biến thiên, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$			1			$+\infty$
y'		$-$		||		$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$	||	$+\infty$	$\searrow$	-1

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;-\infty)$ và $(+\infty;-1)$.

D. Hàm số đã cho có cực trị.

Lời giải

Chọn B.

Từ bảng biến thiên, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=2$ và giá trị cực tiểu bằng $y=6$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=0$ và giá trị cực đại bằng $y=2$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		5	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	1	↘	$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 5.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$; đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=-2$ và giá trị cực tiểu bằng $y=5$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=0$ và giá trị cực đại bằng $y=1$.

Câu 29. Chọn phát biểu đúng khi nói về tính đơn điệu của hàm số $y=ax^4+bx^2+c, a\neq 0$.

A. Hàm số có thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

B. Khi $a>0$ thì hàm số luôn đồng biến.

C. Hàm số luôn tồn tại đồng thời khoảng đồng biến và nghịch biến.

D. Khi $a<0$ hàm số có thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$ luôn đổi dấu khi $a\neq 0$.

Câu 30. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 31. Hỏi hàm số $y=\frac{3}{5}x^5-3x^4+4x^3-2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B**. $(-\infty;+\infty)$. **C**. $(0;2)$. **D**. $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^4-12x^3+12x^2=3x^2(x-2)^2\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 32. Cho hàm số $y=-2x^3+3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng về tính đơn điệu của hàm số

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+ $y'=-6x^2+6x.$

+ $y'=0\Leftrightarrow -6x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$

Câu 33. Hỏi hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Hàm số $y = x^3 - 3x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 34. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

B. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$.

C. $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x$.

D. $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x) = -4x^4 + 4x^2 - 1 = -(2x^2 - 1)^2 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 35. Hỏi hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

B. $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y' = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$. Giải $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right.$

y' không xác định khi $x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-1)$ và $(-1;2)$

Câu 36. Hỏi hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ đồng biến trên các khoảng nào ?

A. $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

B. $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

C. $(-1;1)$ và $(1;3)$.

D. $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1)-\left(x^2-2x+5\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$.

Câu 37. Hỏi hàm số $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-2)$ và $(-1;0)$.

B. $(-2;-1)$ và $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

D. $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1),(-1;0)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$.

Câu 38. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \dfrac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

(I) $y'=\left(-(x-1)^3\right)'=-3(x-1)^2\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

(II) $y'=\left(\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}\right)'=\dfrac{x}{\left(x-1\right)^2}>0,\forall x>1$

(III) $y'=\dfrac{1.\sqrt{x^2+1}-x.\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x.\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 39. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ đồng biến trên mỗi khoảng:

A. $\left(-1;3\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

B. $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;3\right)$.

C. $\left(-\infty;3\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y'=3x^2-6x-9$ nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y' là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Lời giải

Chọn B.

$y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại tại $x=0$

Câu 41. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x=1$?

A. $y=x^5-5x^2+5x-13.$ **B.** $y=x^4-4x+3.$

C. $y=x+\dfrac{1}{x}.$ **D.** $y=2\sqrt{x}-x.$

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y=2\sqrt{x}-x$ có TXĐ $D=[0;+\infty)$

$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)=-\dfrac{1}{2}<0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 42. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y=x+\dfrac{1}{x+1}.$ **B.** $y=x^3+3x^2+7x-2.$

C. $y=-x^4-2x^2+3.$ **D.** $y=x-\dfrac{2}{x+1}.$

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$y'=1-\frac{1}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$$

y' đổi dấu khi x chạy qua -2 và 0 nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 43. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y=2x+\dfrac{2}{x+1}.$ **B.** $y=x^3+3x^2.$ **C.** $y=-x^4+2x^2+3.$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}.$

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}<0,\forall x\in D$ nên hàm số không có cực trị

Câu 44. Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD} = -2.$ **B.** $y_{CD} = 1.$ **C.** $y_{CD} = -1.$ **D.** $y_{CD} = 2.$

Lời giải

Chọn B.

$$y' = 12x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 1$.

Câu 45. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y = x - 2.$ **B.** $y = 2x - 1.$ **C.** $y = -2x + 1.$ **D.** $y = -x + 2.$

Lời giải

Chọn C.

Phương pháp tự luận:

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow A(1;-1), \mathrm{B}(-1;3)$ $\Rightarrow$ Phương trình $AB: y = -2x + 1$

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1:

Lấy $\dfrac{y}{y'} = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3} = \left(\dfrac{1}{3}x\right).\left(3x^2 - 3\right) - 2x + 1$

$\Rightarrow$ Phương trình $AB: y = -2x + 1$

Cách 2:

Lấy $y - \dfrac{y'.y''}{18a} = x^3 - 3x + 1 - \dfrac{\left(3x^2 - 3\right).6x}{18} = -2x + 1$

$\Rightarrow$ Phương trình $AB: y = -2x + 1$

Cách 3: Bấm máy tính:

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $x^3 - 3x + 1 - \left(3x^2 - 3\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Bước 3 : CALC $x = i$

Kết quả : $1 - 2i \Rightarrow$ phương trình AB: $y = 1 - 2x$

Câu 46. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(3;0).$ **B.** $(1;3).$ **C.** $(1;4).$ **D.** $(3;1).$

Lời giải

Chọn B.

$y'=3x^2-12x+9$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Rightarrow y_{CD}=3$.

Câu 47. Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^4-2x^2+5$ là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

$y'=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và $y_{CT}=4$.

Câu 48. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(4;-6)$ **B.** $(0;-2)$ **C.** $(-2;0)$ **D.** $(-6;4)$

Lời giải

Chọn B.

d) $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Vậy tọa độ điểm cực đại của hàm số là $(0;-2)$.

Câu 49. Hàm số $y=-3\sqrt[3]{x^2}+2$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có: $y'=-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Dễ dàng nhận thấy $x=0$ là điểm tới hạn của hàm số, và y' đổi dấu khi đi qua $x=0$. Nên $x=0$ là cực trị của hàm số. Hơn nữa, ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó, $x=0$ là cực đại của hàm số.

Câu 50. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ là:

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A.

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$y_{CD}-y_{CT}=y(0)-y(2)=4$.

Câu 51. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y=2x^3-3x^2$. **B.** $y=-2x^3-3x^2$.

C. $y=x^3+3x^2+3x$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Lời giải

Chọn B.

$y'=3ax^2+2bx+c$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là gốc tọa độ, ta có:

$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow c=d=0$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(-1;-1)$, ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y(-1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=0 \\ b-a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$

Vậy hàm số là: $y=-2x^3-3x^2$.

Câu 52. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\sqrt{1+4x-x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=\frac{2-2x^3}{\sqrt{1+4x-x^4}}$. $y'=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y(1)=2$

Câu 53. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+ax+b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a-b$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-4x+a$

Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(1;3)$, ta có: $\begin{cases} y'(1)=-1+a=0 \\ y(1)=-1+a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Khi đó ta có, $4a-b=1$.

Câu 54. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-2$. Gọi a,b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2+b$ là:

A. -8. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

$y'=3x^2-6x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ta có: $a=y(0)=-2; b=y(2)=-6 \Rightarrow 2a^2+b=2$.

Câu 55. Cho hàm số $y=x^4-5x^2+3$ đạt cực trị tại x_1,x_2,x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

+ Hàm số trùng phương luôn đạt cực trị tại $x=0$. Do đó: $x_1x_2x_3=0$.

Câu 56. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7$. **B.** $y=-17x^3+2x^2+x+5$.

C. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $y=-10x^4-5x^2+7$ có $y'=-40x^3-10x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $y''(0)=-10<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 57. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 1 hoặc 2. **B.** 1 hoặc 2. **C.** 0 hoặc 2. **D.** 0 hoặc 1.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d, (a\neq 0)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3ax^2+2bx+c$

$\Delta'=b^2-3ac$

Nếu $\Delta'\leq 0$ thì y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1,x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2.

Câu 58. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$. Hỏi hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\ge 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$y=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y'\ge 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c\ge 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a>0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$

Câu 59. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$. Hỏi hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\ge 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$y=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$

Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y'\le 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c\le 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a<0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$

Câu 60. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hỏi hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $a=0;b=0;c>0$ hoặc $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$. **B.** $a=0;b=0;c>0$ hoặc $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac<0 \end{cases}$.

C. $a=0;b=0;c\ge 0$ hoặc $\begin{cases} a<0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$. **D.** $a=0;b=0;c\ge 0$ hoặc $\begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

• **Trường hợp 1:** $a = 0 \Rightarrow y' = 2bx + c$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' = 2bx + c \geq 0 \Rightarrow b = 0; c \geq 0$

Do đó $a = 0; b = 0; c \geq 0$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

• **Trường hợp 2:** $a \neq 0$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Kết hợp hai trường hợp để hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $a = 0; b = 0; c \geq 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Câu 61. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $a = 0; b = 0; c < 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

B. $a = 0; b = 0; c < 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

C. $a = 0; b = 0; c \leq 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

D. $a = 0; b = 0; c \leq 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

• **Trường hợp 1:** $a = 0 \Rightarrow y' = 2bx + c$

Để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' = 2bx + c \leq 0 \Rightarrow b = 0; c \leq 0$

Do đó $a = 0; b = 0; c \leq 0$ thì hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$

• **Trường hợp 2:** $a \neq 0$

Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$ thì hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Kết hợp hai trường hợp để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $a = 0; b = 0; c \le 0$ hoặc

$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(3-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại

A. $x = 0$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.**4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua -1 và 3 nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; +\infty)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 2)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x) = -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 65. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, biết $f'(x) = (x-3)(x+2)(x+5)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(-5;-2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

$f'(x) = (x-3)(x+2)(x+5)^2 < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) < 0, (x \neq -5) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-2;3)$.

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (2-x)(x+1)^2(x-1)^5$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (2-x)(x+1)^2(x-1)^5 < 0 \Leftrightarrow (2-x)(x-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^4(2-x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(5) > f(4) > f(3)$. **B.** $f(-1) > f(0) > f(1)$.

C. $f(-3) < f(-2) < f(-1)$. **D.** $f(0) < f(1) < f(2)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;2)$, vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-3;0)$

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta thấy đạo hàm đổi dấu qua các điểm $-3,-2,3,5$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-3$ và $x=3$ nên số điểm cực tiểu của hàm số là 2.

Câu 72. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

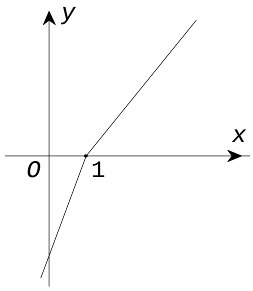
Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)^2(2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Nhận thấy $x^2>0\ \forall x\neq 0 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x=0$ nên $x=0$ không phải là điểm cực trị hàm số.

Tương tự $(x+1)^2>0\ \forall x\neq -1 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x=-1$ nên $x=-1$ không phải là điểm cực trị hàm số.

$f'(x)$ cùng dấu với nhị thức $2x-1$ nên $x=\dfrac{1}{2}$ là điểm cực trị của hàm số.

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

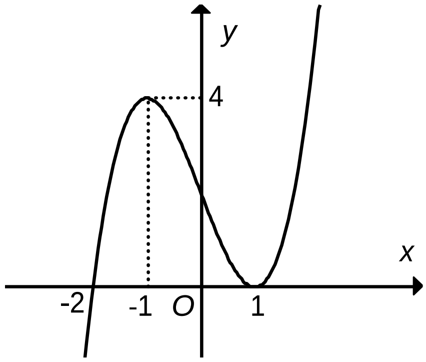
Lời giải

Chọn C.

Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là

$f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?



A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

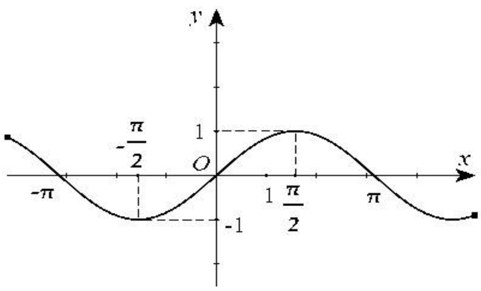
D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Lời giải

Chọn B.

Trên khoảng $[-1;1]$đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\frac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

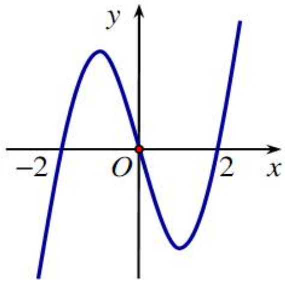
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Lời giải

Chọn D.

Trong khoảng $(0;\pi)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$nằm phía trên trục hoành nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Câu 76. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: sử dụng bảng biến thiên.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Cách 2: Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$

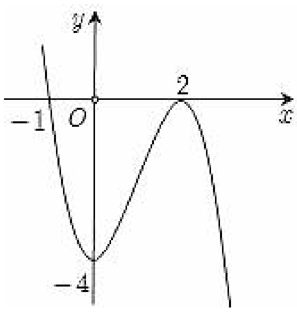
Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ nghịch biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ vừa có phần nằm dưới trục hoành vừa có phần nằm trên trục hoành thì loại phương án đó.

Trên khoảng $(0;\ 2)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành.

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

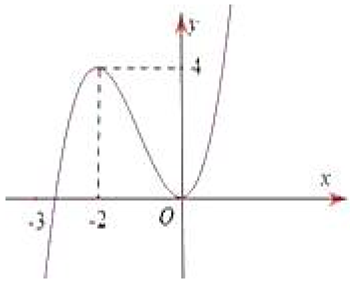
D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Trong khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $(-\infty;-1)$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2);(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

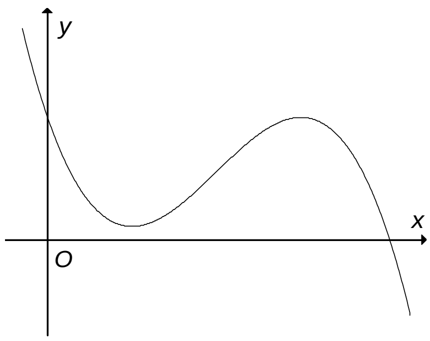
D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn C.

Trên khoảng $(-3;+\infty)$ ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành.

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



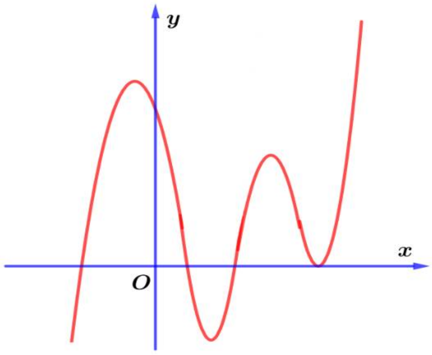
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

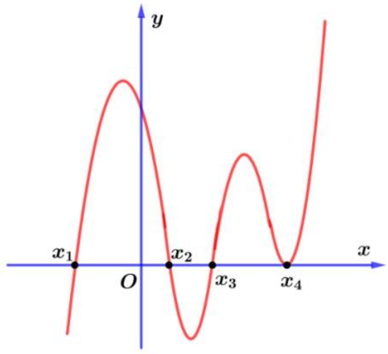
Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn A.



Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ giao với trục hoành tại 4 điểm. x_1, x_2, x_3, x_4.

Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_1 và x_3 nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 và x_3.

Và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_2 nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_2.

$f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua x_4 nên x_4 không là điểm cực trị của hàm số.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2025}$		$\frac{2024}{2025}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2024	$\nearrow$	2025	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2025}\right)$ và $\left(\frac{2024}{2025};+\infty\right)$.

b) $f\left(\frac{3}{2025}\right) > f\left(\frac{11}{2025}\right)$

c) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2024.

d) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $\left(\frac{2024}{2025};2025\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2025}\right)$ và $\left(\frac{2024}{2025};+\infty\right)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2025};\frac{2024}{2025}\right)$ nên $f\left(\frac{3}{2025}\right) < f\left(\frac{11}{2025}\right)$

c) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng $\frac{1}{2025}$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $\left(\frac{2024}{2025};2025\right)$.

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và $(-2;+\infty)$.

b) $f(3) > f\left(\frac{7}{2}\right)$.

c) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác của diện tích S bằng $\frac{64}{5}$ (đvdt).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(4;+\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$ nên $f(3) < f\left(\frac{7}{2}\right)$

c) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

d) đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $(2;3)$ và $(4;-2)$

Gọi đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng: $y = ax + b$

Ta có hệ $\begin{cases} 3 = 2a + b \\ -2 = 4a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 8$

Từ đó ta có phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -\frac{5}{2}x + 8$

Toạ độ giao điểm của d với hai trục toạ độ là $C\left(\frac{16}{5};0\right)$ và $D(0;8)$.

Diện tích tam giác cần tính là $S = \frac{1}{2}OC.OD = \frac{1}{2}.\frac{16}{5}.8 = \frac{64}{5}$.

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) $f'(x)<0$ khi $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$

d) $f(-2024)<f(-10)<f(-1)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên, ta có:

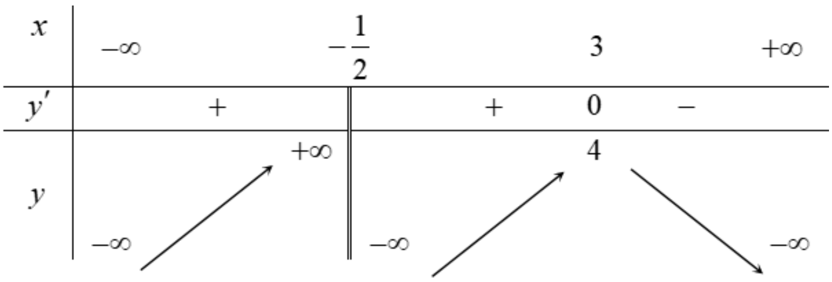
a) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực đại là $(0;3)$.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu là $(-1;0)$ và $(1;0)$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$ nên $f'(x)>0$ khi $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$ nên $f(-2024)<f(-10)<f(-1)$

Câu 84. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.



a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) $f(0)>f(1)>f(2)$.

d) Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y=4$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};3\right)$ nên $f(0)<f(1)<f(2)$

d) Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y=4$

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

a) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

d) $f(3) > f(2024) > f(2025)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ bảng xét dấu, ta có:

thì $y' < 0$ khi $x \in (0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

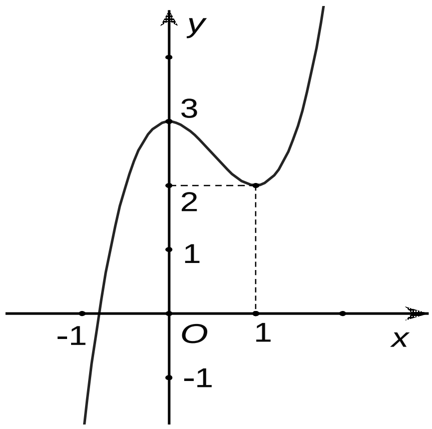
a) Qua nghiệm $x = -2$ ta có đổi dấu từ dương sang âm nên đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

b) Qua nghiệm $x = 2$ ta có đổi dấu từ âm sang dương nên đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$ vì $y' < 0$ khi $x \in (-2;0)$ và $x \in (0;2)$

d) vì $y' > 0$ khi $x \in (-\infty;-2)$ và $x \in (2;+\infty)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$, do đó $f(3) < f(2024) < f(2025)$

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$

c) $f'(x) > 0$ khi $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm có điểm cực đại là $(1;2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ đồ thị, ta thấy

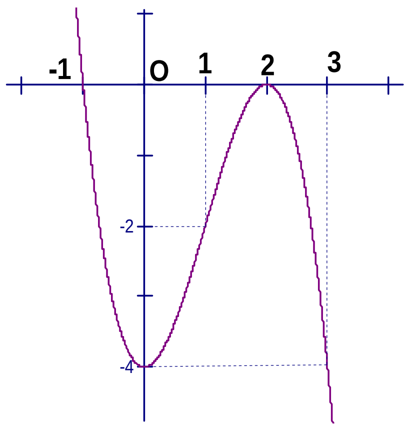
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=0$ và $x=1$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$ nên $f'(x)>0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm có điểm cực đại là $(0;3)$.

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(2;0)$ và $(-1;0)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(2;3)$.

d) $f'(x)<0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị, ta thấy

a) Đồ thì hàm số có điểm cực đại là $(2;0)$ và điểm cực tiểu là $(0;-1)$, suy ra a) sai

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nên cũng nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(2;3)$.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nên $f'(x)<0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Câu 88. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$.

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số có một điểm cực trị.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

d) $f(-3)<f(0)<f(1)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

Do $y'=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$ nên $f(-3)>f(0)>f(1)$

Câu 89. Cho hàm số $y=-x^3-x^2+5x+4$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=-3x^2-2x+5$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\dfrac{5}{3};1\right)$.

c) $f(-10)<f(-3)<f(-2)$

d) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{317}{27}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

- $y=-x^3-x^2+5x+4 \Rightarrow y'=-3x^2-2x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{317}{27}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$ và $(1;+\infty)$ nên $f(-10)<f(-3)<f(-2)$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1;7)$ và điểm cực tiểu $\left(-\frac{5}{3};-\frac{317}{27}\right)$

Câu 90. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

c) Đồ thị hàm số đã cho có 2 cực đại là $(-1;2),(1;2)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có 1 cực tiểu là $(0;3)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

$$y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Đồ thị hàm số có 1 cực đại là $(0;3)$ và 2 cực tiểu là $(-1;2),(1;2)$

Câu 91. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{-4+2x}$.

a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f(3)<f(2024)<f(2025)$

c) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $y'=-\dfrac{10}{(-4+2x)^2}<0,\forall x\in D$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên $f(3)<f(2024)<f(2025)$

Đồ thị hàm số không có cực trị.

Câu 92. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

d) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(1;0)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số không có cực trị.

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung nên $x=0\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành nên $y=0 \Rightarrow x=1$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

Câu 93. Cho hàm số $y=x+\frac{4}{x}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

d) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-2;-4)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

• Ta có: $y'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}, \forall x\neq 0$

$y'=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $y_{CT}=y(-2)=-4$, cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=y(2)=4$.

Câu 94. Cho hàm số $y=\frac{x^2-8x+9}{x-5}$.

a) $y'=\frac{x^2-10x+31}{(x-5)^2}$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;10)$.

d) Hàm số không có cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$

• $y'=\dfrac{x^2-10x+31}{(x-5)^2}<0, \forall x\neq 5$ do $g(x)=x^2-10x+31$ có $\begin{cases} a=1<0 \\ \Delta'=-6<0 \end{cases}$ nên $x^2-10x+31<0\ \forall \in\mathbb{R}$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty \searrow$	$-\infty$	||	$+\infty \searrow$	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;5)$ và $(5;+\infty)$ nên cũng nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

+Do nên $x\neq 5$ nên hàm số không nghịch biến trên khoảng $(4;10)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 95. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt

c) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=x+1$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) $y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y(1)=2 \\ x=-2, y(-2)=-1 \end{array}\right.$.

c) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(-2;-1)$ và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M, N của đồ thị hàm số đã cho là: $y = x+1$.

Câu 96. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

a) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên.

b) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2;5)$

c) $f(2) > f(5) > f(2025)$

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có: $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

b) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Vậy đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0;1)$

hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1),(1;2)$.

c) hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$ nên $f(2) < f(5) < f(2025)$

d) Đồ thị hàm số cắt trục hoành nên $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Suy ra đồ thị hàm số cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

Câu 97. Cho hàm số $y = \sqrt{9-4x^2}$.

a) Hàm số xác định khi $x \in \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

• Tập xác định: $D=\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$

• Ta có: $y'=\dfrac{-4x}{\sqrt{9-4x^2}},\ x\in D\backslash\left\{-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$

$y'=0\Leftrightarrow x=0$

• Bảng biến thiên:

x		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y		0		3		0	

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=3$. Hàm số không có cực tiểu.

Câu 98. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},\ x\in[0;2]$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải

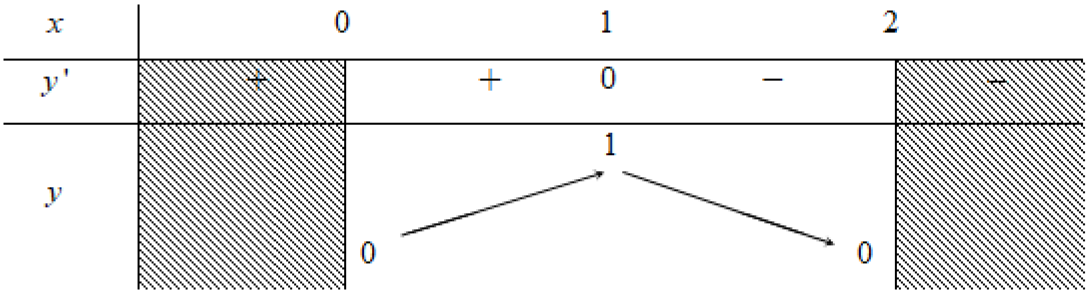
a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

• Tập xác định: $D=[0;2]$

• Ta có: $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},\ x\in(0;2)$

$y'=0\Leftrightarrow 2-2x=0\Leftrightarrow x=1$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$, nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CT}=y(1)=1$. Hàm số không có cực tiểu.

Câu 99. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-5x+4}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}$, $\forall x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Đồ thị hàm số có hai cực trị.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

Lời giải

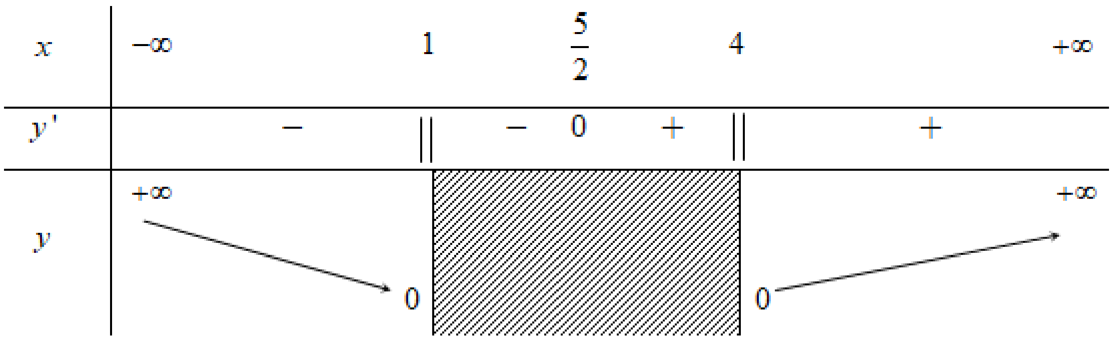
a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

• Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

• Ta có: $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}$, $\forall x\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$

$y'=0\Leftrightarrow 2x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

• Bảng biến thiên:

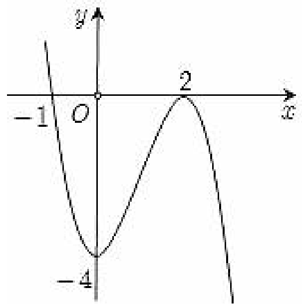


• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

+ Trong khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $(-\infty;-1)$.

+Trên khoảng $(-1;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

+ đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm nên có một điểm cực trị

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$

d) $f(0)>f(1)>f(2)>f(3)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có : $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Suy ra phương trình $f'(x)=0$ có bốn nghiệm nguyên

b) Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$

d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ nên $f(0)>f(1)>f(2)>f(3)$

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

c) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$

d) $f(-2025)<f\left(-\dfrac{1}{2024}\right)<f\left(-\dfrac{1}{2025}\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Suy ra phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên: hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

c) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$

d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên $f(-2025)<f\left(-\dfrac{1}{2024}\right)<f\left(-\dfrac{1}{2025}\right)$

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm nguyên

b) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

c) Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu $x=1$.

d) $f(1)<f(2)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$$

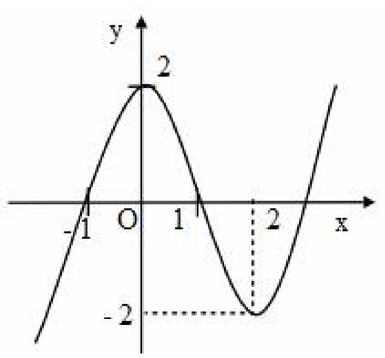
b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

c) Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu $x=3$.

d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ nên $f(1)<f(2)$

Câu 104. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y=f'(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

d) $f(2)>f(3)>f(2024)>f(2025)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

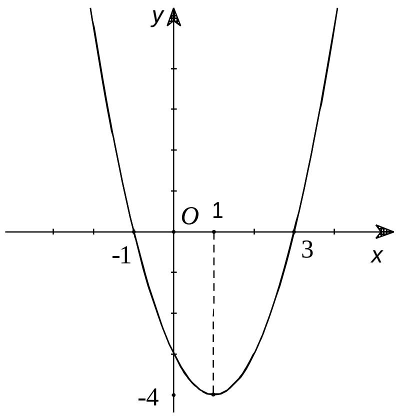
a) hàm số nghịch biến mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;2)$.

b) hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

c) đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm nên có ba điểm cực trị

d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ nên $f(2) > f(3) > f(2024) > f(2025)$

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

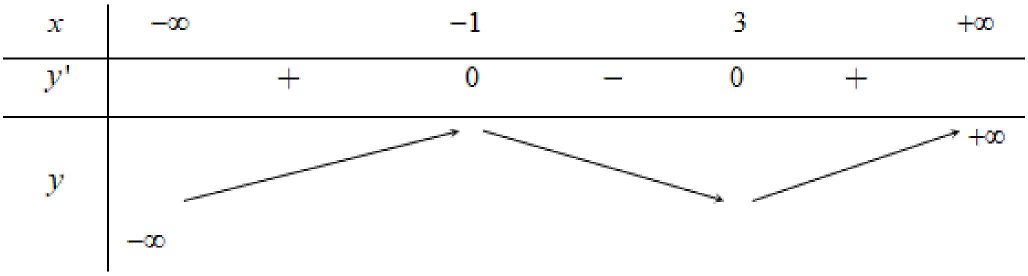
c) Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

d) $f(-1) < f(0) < f(2)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:



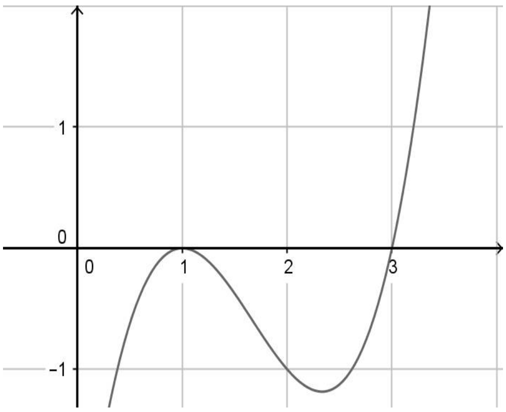
a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

c) đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$ nên $f(-1) < f(0) < f(2)$

Câu 106. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $x = 1$.

d) Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu $x = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải

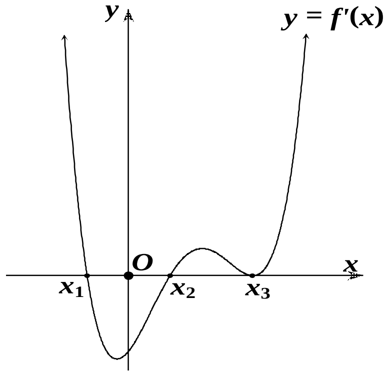
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có:

- Trên khoảng $(3;+\infty)$ đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$
- Trên khoảng $(-\infty;3)$ đồ thị $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$

- Qua nghiệm $x=3$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=3$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị hình vẽ bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_3.

c) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_2.

d) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_1.

Lời giải

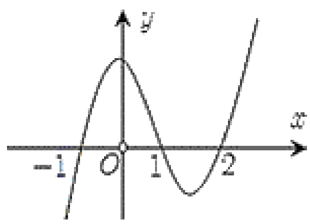
a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	

Như vậy: trên K, hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là x_1 và điểm cực tiểu là x_2, x_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

c) Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

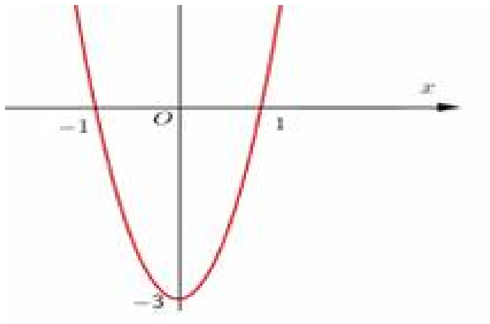
a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$, $(2;+\infty)$.

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, $(1;2)$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{-1}{2}\right)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị đúng vì đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{-1}{2}\right)$ đúng vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$ đúng vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$ **sai** vì trên khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 110. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\ge 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Phương trình hàm vận tốc là $3t^2-12t+9$

b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t)=6t-12$.

c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(1;3)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$

b) $a(t)=v'(t)=6t-12$.

c) d) Xét $v(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

t	0		1		3		$+\infty$
$v(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$ và giảm khi $t\in(1;3)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 111. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Biết liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(a;b)$ thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20.

Ta có: $G(x)=0,025x^2(30-x)=0,75x^2-0,025x^3, x>0$

$G'(x)=1,5x-0,075x^2$

$G'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=20$

Bảng biến thiên:

x		0		20		$+\infty$
$G'(x)$			$+$	0	$-$	
$G(x)$			↗		↘	

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ thì huyết áp bệnh nhân giảm

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=20 \end{cases} \Rightarrow a+b=20$$

Câu 112. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Biết vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(a;b)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 15.

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}\,(v>6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v)=cv^3\dfrac{300}{v-6}=300c\dfrac{v^3}{v-6}$

$E'(v)=600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2}$; $E'(v)=0 \Leftrightarrow v=9$ do $(v>6)$

Bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(6;9)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm

$$\Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow a+b=15$$

Câu 113. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t=126\ (s)$ cho bởi hàm số sau đây: $v(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23$, (v được tính bằng ft/s, 1 feet = 0,3048 m)

Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi. Tính $T=a+b$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 149.

Xét hàm số vận tốc của tàu con thoi $v(t)=0{,}001302t^3-0{,}09029t^2+23$ với $t\in[0;126]$.

Gia tốc của tàu con thoi là $a(t)=v'(t)=\ 0{,}003906t^2-0{,}18058t$.

Ta có $a'(t)=0{,}007812t-0{,}18058=0 \Leftrightarrow t\approx 23$.

Bảng biến thiên của hàm số $a(t)$ như sau:

t	0		23		126
$a'(t)$		$-$	0	$+$	
$a(t)$	0	$\searrow$	$-2{,}087$	$\nearrow$	$39{,}259$

Vậy gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian $(23;126)$ tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

Do đó: $T=a+b=23+126=149$.

Câu 114. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I ($I > 0$, đơn vị A) là cường độ dòng điện. Biết công suất P tăng khi cường độ dòng điện I ở trong khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 12.

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$.

$P' = 12 - I$. $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:

I	0		12		$+\infty$
P		$\nearrow$	72	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện $(0;12)$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow a + b = 12$

Câu 115. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị $6x_0 + y_0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 10

Từ bảng biến thiên ta thấy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là $(1;4)$

$\Rightarrow 6x_0 + y_0 = 10$

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 1

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 1$.

Câu 117. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án $y = 1$

Câu 118. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số đã cho .

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 4

Dựa vào bảng xét dấu, $f'(x)$ đổi dấu khi qua các điểm $x \in \{-2;-1;1;4\}$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4 .

Câu 119. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

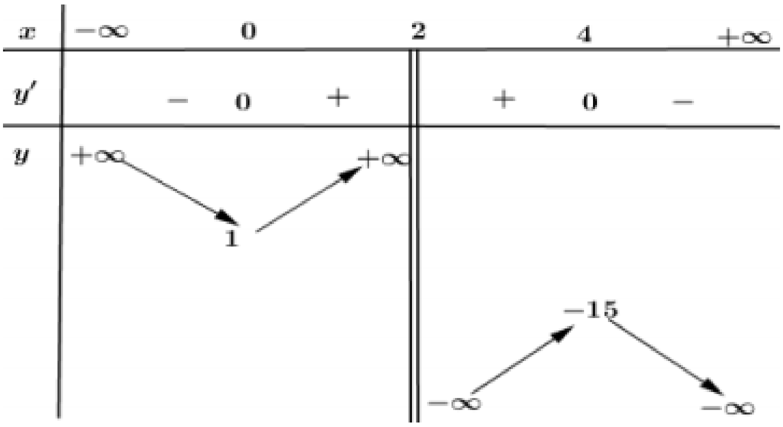
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 3

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 3 với 2 cực đại $(0;3);(2;2)$ và 1cực tiểu $(1;-1)$

Câu 120. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$?

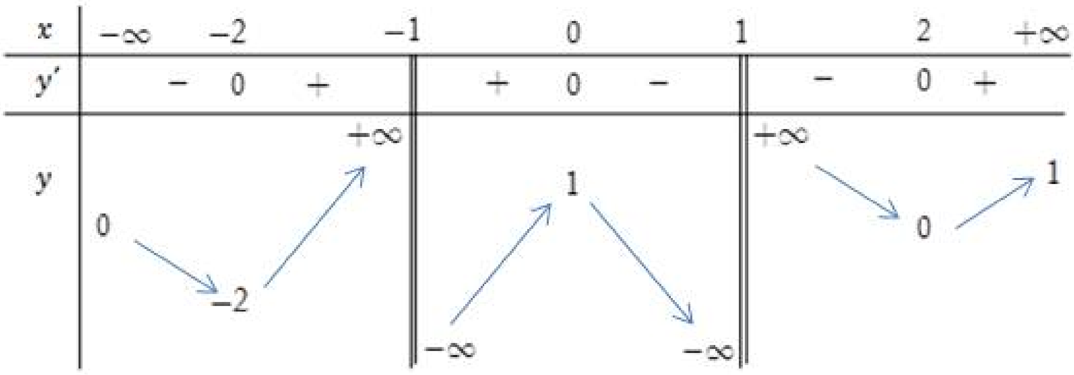
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 2

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 2 với 1 cực đại $(4;-15)$ và 1cực tiểu $(0;1)$

Câu 121. Giả sử tồn tại hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 2

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 3 với 1 cực đại $(0;1)$ và 2 cực tiểu $(-2;2);(2;0)$

Câu 122. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có mấy cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

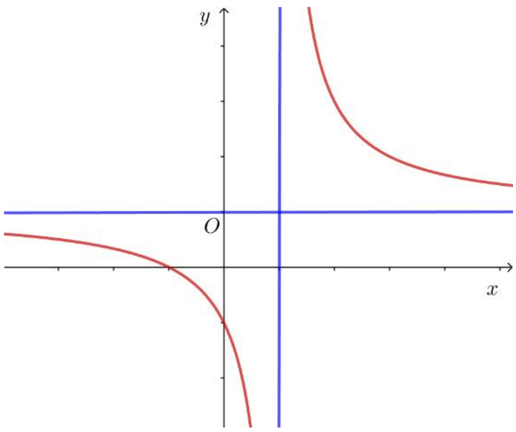
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 3

Đồ thị $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là phần đối xứng phần nằm dưới trục Ox của đồ thị $y=f(x)$ nên có 3 cực trị

Câu 123. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a\neq -1$) có đồ thị như trong hình bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in\left[-2025;2025\right]$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 2026

TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Khi đó: $y'=\dfrac{-1-a}{(x-1)^2}$ $\forall x\neq 1$.

Hai nhánh của đồ thị có chiều đi xuống nên

$y'<0,\forall x\neq 1$.

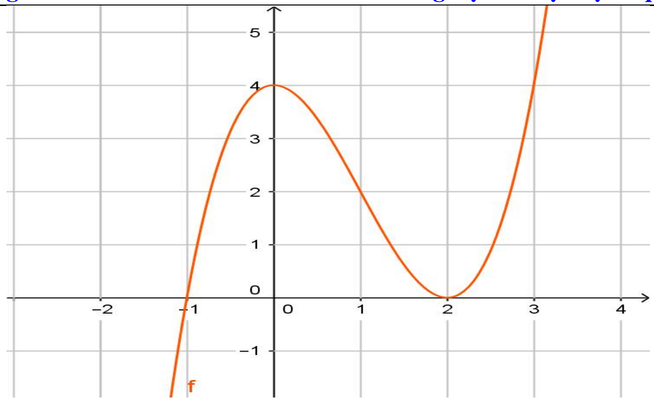
$\Leftrightarrow \dfrac{-1-a}{(x-1)^2}<0$

$\Leftrightarrow -1-a<0$

$\Leftrightarrow a>-1$

Mà $a\in\mathbb{Z}, a\in\left[-2025;2025\right]\Rightarrow a=\{0;1;...;2024;2025\}$, suy ra có 2026 số cần tìm

Câu 124. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

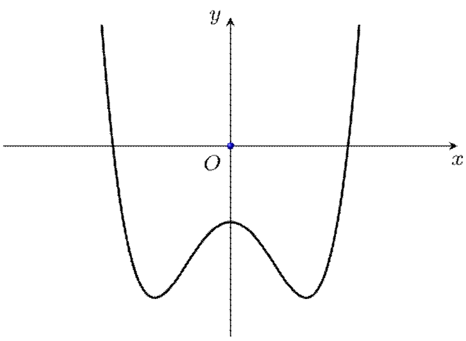
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 2

Dựa vào đồ thị ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 2 .

Câu 125. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án 3

Dựa vào đồ thị ta suy ra số điểm cực trị của hàm số đã là 3.

Câu 126. Biết hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+5x-44$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

$y'=-x^2+4x+5$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{140}{3}$	$\nearrow$	$-\dfrac{32}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;5)$.

$\Rightarrow a+b=4$

Câu 127. Biết hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+4$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

$y=-x^3+3x^2+9x+4$. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+6x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

Dựa vào bảng xét dấu tam thức bậc hai thấy $y'>0\Leftrightarrow x\in(-1;3)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

$\Rightarrow b-a=4$

Câu 128. Biết hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(a;+\infty)$. Tính giá trị của a.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)\Rightarrow a=3$

Câu 129. Cho các hàm số sau:

$(\text{I}): y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$; $(\text{II}): y=\dfrac{x-1}{x+1}$; $(\text{III}): y=\sqrt{x^2+4}$

$(\text{IV}): y=x^3+4x-\sin x$; $(\text{V}): y=x^4+x^2+2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

(I): $y' = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(II): $y' = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \neq -1$

(III): $y' = \left(\sqrt{x^2+4}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

(IV): $y' = 3x^2 + 4 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(V): $y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2+1)$

Câu 130. Cho các hàm số nào sau:

1. $y = x^3 + 3x^2$.

2. $y = x^3 - x$.

3. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

4. $y = x^3$.

Có bao nhiêu hàm số không có cực trị?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

1. $y = x^3 + 3x^2$.

Có $y' = 3x^2 \geq 0 \forall x \in R$. Do đó, hàm số này luôn đồng biến trên R. Hay nói cách khác, hàm số này không có cực trị.

2. $y = x^3 - x$.

Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 3 > 0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

3. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

4. $y = x^3$.

Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 9 > 0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

Câu 131. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0.

$y=\sqrt{x^2-2x}$

TXĐ: $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

$y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=0\Leftrightarrow x=1(l)$.

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 132. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

$y=x^3-3x^2+2\Rightarrow y'=3x^2-6x$

Chia y cho y' ta được: $y=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}\right).\left(3x^2-6x\right)-2x+2$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-2x+2$

$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}\Rightarrow b-a=4$

Câu 133. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 19

Phương pháp tự luận:

$y'=\dfrac{3x^2+18x+20}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-9+\sqrt{21}}{3}\\x=\dfrac{-9-\sqrt{21}}{3}\end{array}\right.\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=6x+13$.

$\Rightarrow a+b=19$

Phương pháp trắc nghiệm:

Tại điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức , ta có: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$y=\dfrac{\left(3x^2+13x+19\right)'}{(x+3)'}\Leftrightarrow y=6x+13\Rightarrow a+b=19$

Câu 134. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $5b-4a$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 18

Ta có: $\dfrac{\left(-x^2+2x-1\right)'}{(x+2)'}=\dfrac{-2x+2}{1}=-2x+2$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-2x+2$

$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}\Rightarrow 5b-4a=18$

Câu 135. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$ có đồ thị (C). Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C) (kết quả làm tròn đến phần trăm)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $4,47$

Ta có: $y'=3x^2-6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y(0)=5\\x=2\Rightarrow y(2)=1\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;5)$, $B(2;1)$

Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị bằng $AB=\sqrt{(2-0)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}\approx 4,47$.

Câu 136. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng AB (kết quả làm tròn đến phần trăm)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $0,25$

Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có $y'=3x^2-6x-9$ nên có hai điểm cực trị $A(-1;6)$ và $B(3;-26)$

Phương trình đường thẳng qua AB là $8x+y+2=0$. Khi đó $d(O;AB)=\dfrac{2}{\sqrt{65}}\approx 0,25$.

Câu 137. Biết hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c+d$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $y' = 3x^2 + 2bx + c$

Theo giả thiết suy ra: $\begin{cases} y'(1) = 3a - 2b + c = 0 \\ y(-1) = -a + b - c + d = 18 \\ y'(3) = 27a + 6b + c = 0 \\ y(3) = 27a + 9b + 3x + d = 16 \end{cases}$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 18 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3x + d = 16 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{17}{16}; b = \frac{51}{16}; c = -\frac{153}{16}; d = \frac{101}{16} \Rightarrow P = 1.$

Câu 138. Biết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y = -x + 1 - \frac{1}{x+2}$ có dạng $y = ax + b$. Tính giá trị $a - 2025b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2023.

$y = -x + 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{-x^2 - x + 1}{x+2}$

Ta có: $\frac{\left(-x^2 - x + 1\right)'}{(x+2)'} = \frac{-2x-1}{1} = -2x - 1$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y = -2x - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a - 2025b = 2023$

Câu 139. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục toạ độ một tam giác của diện tích S bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$ nên hàm số có hai điểm cực trị là $x_1 = 1 - \sqrt{2}; x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A\left(1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2\right)$ và $B\left(1 - \sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 2x - 4$

Toạ độ giao điểm của d với hai trục toạ độ là $C(2;0)$ và $D(0;-4)$.

Diện tích tam giác cần tính là $S = \frac{1}{2} OC.OD = 4$.

Câu 140. Hàm số $y=\left|x^2+5x+6\right|$ có mấy điểm cực trị ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

$$y=\left|x^2+5x+6\right|=\sqrt{\left(x^2+5x+6\right)^2}$$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{(2x+5)\left(x^2+5x+6\right)}{\sqrt{\left(x^2+5x+6\right)^2}} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-3\}$$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ và $x=2$.

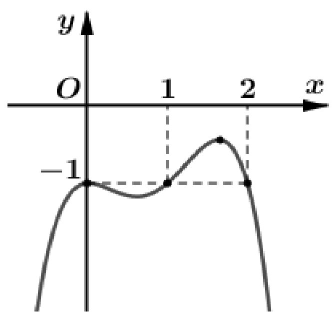
Cho $y'=0\Leftrightarrow(2x+5)\left(x^2+5x+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+5=0\\x^2+5x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
$x\ y'$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$y=f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: Hàm số có 2 cực tiểu $(-3,0);(-2,0)$; Hàm số có 1 cực đại $\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$

Câu 141. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực trị?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có $f'(x)$ không cắt trục hoành nên hàm số không có cực trị.

Câu 142. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $b-2a$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

Từ bảng biến thiên $y=f'(x)$ ta có: trên khoảng $(-2;3)$ có $f'(x)\geq 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng: $(-2;3)$

$\Rightarrow b-2a=7$

Câu 143. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

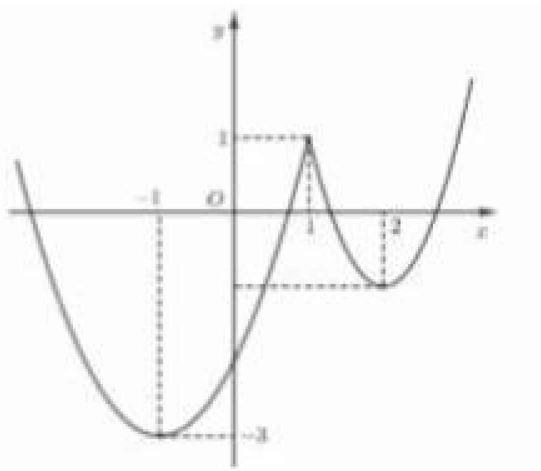
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

Lời giải

Đáp án: 4.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành 4 điểm nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị

Câu 144. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực đại

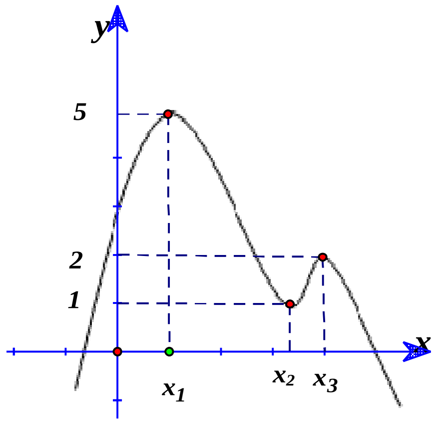
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm nên có 4 cực trị gồm 2 cực tiểu và 2 cực đại

Câu 145. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị ?

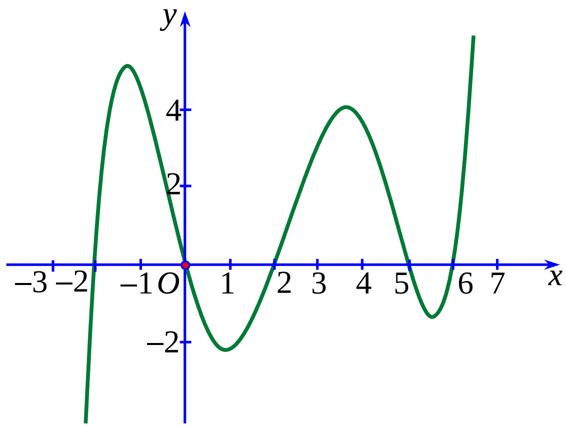
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm nên có 2cực trị

Câu 146. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực tiểu ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3.

Số cực trị là số giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ với trục ox và qua giao điểm đó $f'(x)$ phải đổi dấu

Từ đồ thị:

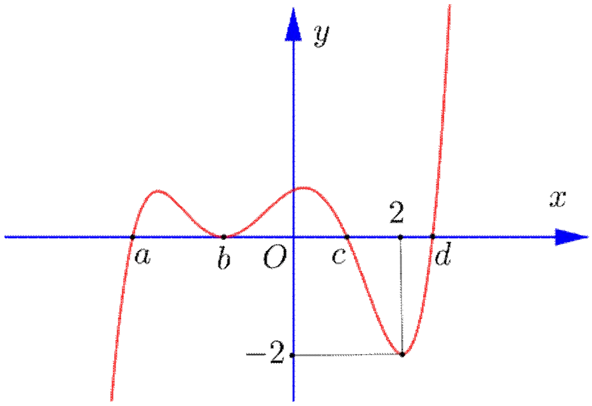
+ Qua nghiệm $x = -2$ đồ thị $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x = -2$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y = f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=2$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=5$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=5$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

Vậy Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 147. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực trị ?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm nên có 3 cực trị

Câu 148. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3.

Số cực trị là số giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ với trục ox và qua giao điểm đó $f'(x)$ phải đổi dấu

Từ bảng biến thiên:

+ Qua nghiệm $x=-3$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-3$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=2$ là hoành độ cực đại của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=5$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=5$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

Vậy Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 149. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua điểm $x=0$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Câu 150. Biết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y=x^3+3x^2-9x$ có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $4b-a$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20.

$y=x^3+3x^2-9x$.

$y'=3x^2+6x-9$

Chia y cho y' ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right).(3x^2+6x-9)-8x+3$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-8x+3$

$\Rightarrow 4b-a=20$

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 151. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

Lời giải

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$.

$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10]$.

• Bảng biến thiên:

t		0		10	
T'			$-$		
T			$\searrow$		

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

nhiệt độ trong phòng giảm

Câu 152. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

Lời giải

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng: $f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2$ (gam).

$f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$		$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có: trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, thả cá trong khoảng $(0;12)$ thì số gam tăng

Câu 153. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$

Lời giải

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 9$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y(1)=-1 \\ y(-3)=31 \end{array}\right.$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	31	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3;1)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ với $y_{CĐ}=y(-3)=31$, cực tiểu tại $x=1$ với $y_{CT}=y(1)=-1$.

Câu 154. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=-2x^2+5x-2$.

Cho: $y'=0 \Leftrightarrow -2x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{4} \\ y(2)=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	31	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};2\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ với $y_{CĐ}=y(2)=\frac{2}{3}$, cực tiểu tại $x=\frac{1}{2}$ với $y_{CT}=y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{4}$.

Câu 155. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x-1$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=4x^2-12x+9=(2x-3)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$y'=0 \Leftrightarrow (2x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 156. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\frac{3-2x}{x-1}$

Lời giải

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

- Ta có: $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-2

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 157. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\frac{3x-4}{1-2x}$

Lời giải

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

- Ta có: $y'=\frac{5}{(1-2x)^2}>0, \forall x\neq \frac{1}{2}$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 158. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\dfrac{x+2}{2x+1}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{-3}{(2x+1)^2}<0,\forall x\neq-\dfrac{1}{2}$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 159. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=x-\dfrac{9}{x}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

• Ta có: $y'=1+\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2+9}{x^2}>0,\forall x\neq0$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

  + Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$

  + Hàm số không có cực trị.

Câu 160. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\dfrac{1}{x+1}-2x$

Lời giải

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- Ta có: $y'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-2<0,\forall x\neq -1$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 161. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\dfrac{x^2-5x+3}{x-2}$

Lời giải

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$
- $y'=\dfrac{x^2-4x+7}{(x-2)^2}>0,\forall x\neq 2$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 162. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=-x^4+4x^2-3$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Tính $y'=-4x^3+8x$.

$$y'=0\Leftrightarrow -4x^3+8x=0\Leftrightarrow 4x(-x^2+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=0\\-x^2+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right..$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=-3$. Hàm số đạt cực đại tại $x=-\sqrt{2}$ và $x=\sqrt{2}$ với giá trị cực đại là: $y_{CĐ}=y\left(-\sqrt{2}\right)=y\left(\sqrt{2}\right)=1$.

Câu 163. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=x^4-6x^2+8x+1$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Tính $y'=4x^3-12x+8=0=4(x-1)^2(x+2)$.

$y'=0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-23	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ và $y_{CT}=y(-2)=-23$. Hàm số không có cực đại.

Câu 164. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=x^4+4x+6$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Tính: $y'=4x^3+4$.

$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3+4=0 \Leftrightarrow x=-1$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $y_{CT}=y(-1)=3$. Hàm số không có cực đại.

Câu 165. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sqrt{x^2+2}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$y'=0 \Leftrightarrow x=0$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=\sqrt{2}$. Hàm số không có cực đại.

Câu 166. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sqrt{64-x^2}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=[-8;8]$

• Ta có: $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{64-x^2}}$, $x\in D\setminus\{-8;8\}$

$y'=0\Leftrightarrow x=0$

• Bảng biến thiên:

x		-8		0		8	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y		0	$\nearrow$	8	$\searrow$	0	

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;0)$, nghịch biến trên khoảng $(0;8)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=8$. Hàm số không có cực tiểu.

Câu 167. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sqrt{x^2+x}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$

• Ta có: $y'=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$, $\forall\in D\setminus\{-1;0\}$

$y'=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0				0	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 168. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sqrt{x^2-4x}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$

• Ta có: $y'=\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}}$, $\forall\in D\backslash\{0;4\}$

$y'=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0				0	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 169. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sqrt{x^2-2x+3}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}$

$y'=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=y(1)=\sqrt{2}$. Hàm số không có cực đại.

Câu 170. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sqrt{3-2x-x^2}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=[-3;1]$

• Ta có: $y'=\dfrac{-2-2x}{2\sqrt{3-2x-x^2}}$, $x\in D\setminus\{-3;1\}$

$y'=0\Leftrightarrow -2-2x=0\Leftrightarrow x=-1$

• Bảng biến thiên:

x	-3		-1		1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CT}=y(-1)=2$. Hàm số không có cực tiểu.

Câu 171. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=(4-3x)\sqrt{6x^2+1}$

Lời giải

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=-3\sqrt{6x^2+1}+\dfrac{6x(4-3x)}{\sqrt{6x^2+1}}=\dfrac{-36x^2+24x+24}{\sqrt{6x^2+1}}$.

$$y'=0\Leftrightarrow \frac{-36x^2+24x+24}{\sqrt{6x^2+1}}=0\Leftrightarrow -36x^2+24x+24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{-3} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{-3} \end{array}\right..$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{1+\sqrt{7}}{-3}$		$\dfrac{1-\sqrt{7}}{-3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1+\sqrt{7}}{-3}\right)$ và $\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{-3};+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{-3};\dfrac{1-\sqrt{7}}{-3}\right)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{-3}$ và $y_{CT}=y\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{-3}\right)$. Hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{-3}$ và giá trị cực đại là: $y_{CĐ}=y\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{-3}\right)$.

Câu 172. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left|x^2-2x-3\right|$

Lời giải

• Ta có: $y=\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases} x^2-2x-3 & khi \quad x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty) \\ -x^2+2x+3 & khi \quad x\in(-1;3) \end{cases}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=\begin{cases} 2x-2 & khi \quad x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty) \\ -2x+2 & khi \quad x\in(-1;3) \end{cases}$.

• Hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$ và $x=3$

• Ta lại có:

Trên khoảng $(-1;3)$: $y'=0\Leftrightarrow x=1$

Trên khoảng $(-\infty;-1)$: $y'<0$

Trên khoảng $(3;+\infty)$: $y'>0$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$, đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=3$ với $y_{CT}=y(-1)=y(3)=0$. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và giá trị cực đại là: $y_{CĐ}=y(1)=4$.

Câu 173. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=|x|(x+2)$

Lời giải

• Ta có: $y=|x|(x+2)=\begin{cases} x(x+2) & \text{khi } x\ge 0 \\ -x(x+2) & \text{khi } x<0 \end{cases}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=\begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x>0 \\ -2x-2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

• Hàm số liên tục tại $x=0$ và không có đạo hàm tại $x=0$.

• Trên khoảng $(-\infty;0)$: $y'=0 \Leftrightarrow x=-1$ và trên khoảng $(0;+\infty)$: $y'>0$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$, đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=0$. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và giá trị cực đại là: $y_{CĐ}=y(-1)=1$.

Câu 174. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=(x-3)\sqrt{|x|}$

Lời giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

- Ta có: $y = \begin{cases} (x-3)\sqrt{x} & \text{khi } x \ge 0 \\ (x-3)\sqrt{-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} & \text{khi } x > 0 \\ \dfrac{3-x}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} & \text{khi } x > 0 \\ \dfrac{3-x}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{-x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Trên khoảng $(-\infty;0)$: $y' > 0$, trên khoảng $(0;+\infty)$: $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = y(0) = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu là: $y_{CT} = y(1) = -2$.

Câu 175. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y = 2\sin 2x - 3$ với $x \in [0;\pi]$.

Lời giải

- Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;\pi]$.

- Ta có: $y' = 2\cos 2x - 1$

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}; x = \dfrac{5\pi}{6}$.

- Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	$\nearrow$	$\sqrt{3}-3$	$\searrow$	$-\sqrt{3}-3$	$\nearrow$	-3

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ và $\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{\pi}{6}$ và $y_{CĐ}=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-3$, cực tiểu tại $x=\frac{5\pi}{6}$ và $y_{CT}=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-3$.

Câu 176. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\sin^2 x+\cos x$ với $x\in[0;\pi]$.

Lời giải

• Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0;\pi]$.

• Ta có: $y'=2\sin x.\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1), x\in[0;\pi]$.

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[0;\pi]\\ \sin x(2\cos x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[0;\pi]\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$.

• Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3};\pi\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{\pi}{3}$ và $y_{CĐ}=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{4}$. Hàm số không có cực tiểu.

Câu 177. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left(x^2-x-1\right)e^x$

Lời giải

Câu 178. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$

Lời giải

Câu 179. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\ln\left(x^2+x+2\right)$

Lời giải

Câu 180. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\frac{x}{2}-\ln\left(x^2-x+2\right)$

Lời giải

Câu 181. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left(x^2+4x+1\right).e^{x-2}$

Lời giải

Câu 182. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=e^x(x^2-3)$

Lời giải

Câu 183. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(3;+\infty)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và $y_{CĐ}=f(3)=2$, cực tiểu tại $x=-2$ và $y_{CT}=f(-2)=-3$.

Câu 184. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=0$; $y_{CĐ}=y(0)=4$, cực tiểu tại $x=-1$ và $x=1$ với $y_{CT}=f(-1)=f(1)=-1$.

Câu 185. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$; $y_{CĐ}=y(-2)=-2$, cực tiểu tại $x=0$; $y_{CT}=f(0)=2$.

Câu 186. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	$\parallel$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$
- Hàm số không có cực trị.

Câu 187. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

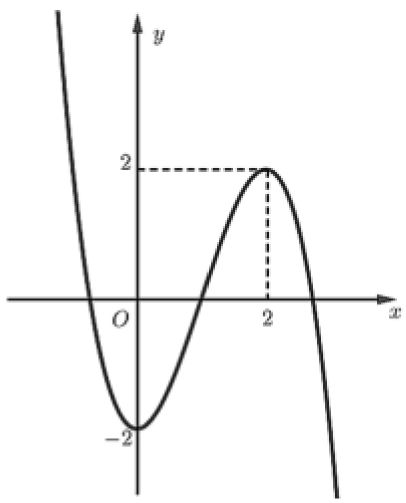
b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$
- Hàm số có 2 cực đại $(0;3);(2;2)$ và 1 cực tiểu $(1;-1)$

Câu 188. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

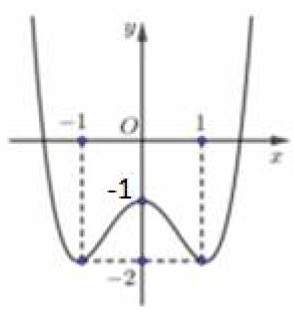
b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và $y_{CĐ}=f(2)=2$, cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=f(0)=-2$.

Câu 189. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

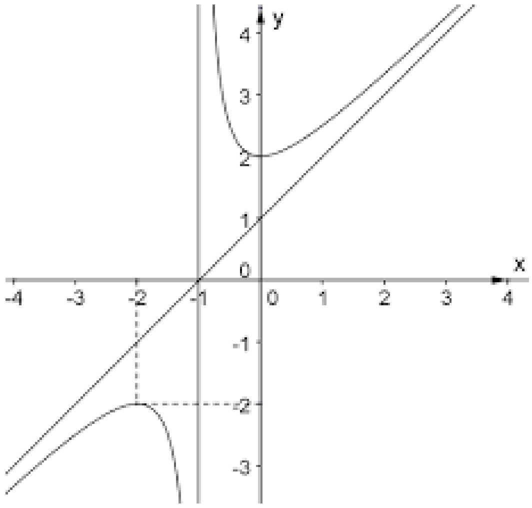
b) Tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CĐ}=f(0)=-1$, cực tiểu tại $x=-1$ và $x=1$ với $y_{CT}=f(-1)=f(1)=-2$.

Câu 190. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$
- Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(-2;-2)$, điểm cực tiểu là $(0;2)$.

Câu 191. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(1-x)(x+4)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng của $f'(x)$, ta có :

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-4)$ và $(1;+\infty)$.

b)

• Qua $x=-4$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-4$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Qua $x=1$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=1$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

Câu 192. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)^2(3-x)(x^2-x-1)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)^2(3-x)(x^2-x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=3\\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta suy ra các khoảng đồng biến, nghịch biến và cực tiểu.

Câu 193. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(1-2x)^{2024}.(x+2)^{2025}$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow (1-2x)^{2024}.(x+2)^{2025}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\\ x=-2\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng của $f'(x)$, ta có :

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Qua $x=-2$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực tiểu.

Câu 194. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	+	||	+	||	$-$	0	+	

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ bảng của $f'(x)$, ta có :

a)

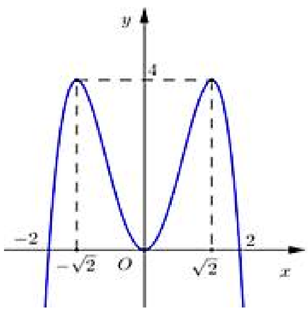
- $f'(x)>0$ khi $x\in(1;2)$; $x\in(2;3)$ và $x\in(4;+\infty)$, do đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(1;2)$; $(2;3)$ và $(4;+\infty)$.
- $f'(x)<0$ khi $x\in(-\infty;1)$ và $x\in(3;4)$, do đó hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;4)$.

b)

- Qua $x=1$ và $x=4$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=1$ và $x=4$ là 2 điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 2 cực tiểu.

Câu 195. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

a)

• Trên khoảng: $(-2;2)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$

• Trên khoảng: $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$

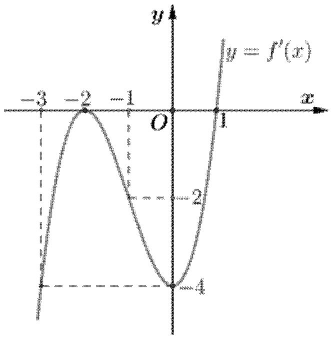
b)

• Qua $x=-2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Qua $x=2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=2$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

Câu 196. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.

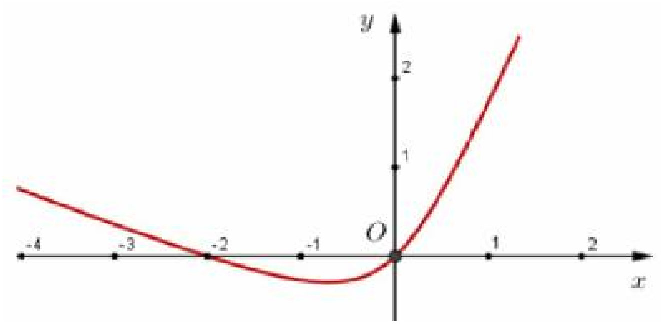


a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Câu 197. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Câu 198. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^4(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ bằng bao nhiêu?

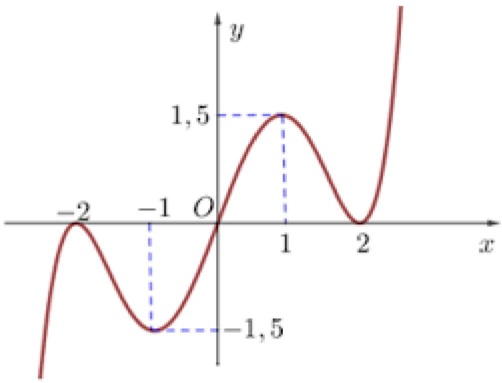
Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^4(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua 3 điểm $x=1$ và $x=\pm 2$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị nhưng có 2 điểm cực trị dương $x=1$ và $x=2$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị đó là $x=\pm 1$, $x=\pm 2$ và $x=0$.

Câu 199. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x-1)$.

b) Hàm số $y=f(x-1)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Ta có: $y=(x-1)'f'(x-1)=f'(x-1)$

+ Đồ thị $f'(x-1)$ là phép tịnh tiến của đồ thị $f'(x)$ theo phương trục Ox qua bên phải 1 đơn vị.

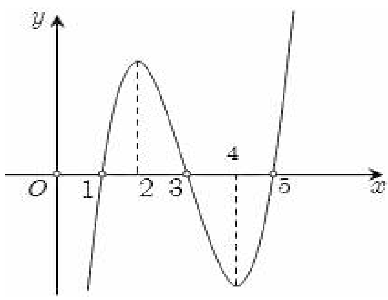
a) đồ thị $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ đồ thị $f'(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

đồ thị $f'(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ $\Rightarrow$ đồ thị $f'(x-1)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) đồ thị $f'(x-1)$ cắt trục Ox tại $x=1$ và đổi dấu từ âm sang dương nên $x=1$ là giá trị cực tiểu.

Đồ thị không có cực đại

Câu 200. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

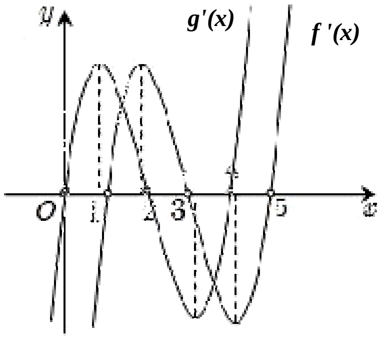


a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $g(x)=f(x+1)$.

b) Hàm số $g(x)=f(x+1)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Cách 1: Đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x+1)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương trục hoành sang trái 1 đơn vị.



Từ đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x+1)$, ta có:

a) hàm số $g(x)=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;4)$

b) đồ thị $g(x)=f(x+1)$ cắt trục Ox tại $x=0, x=4$ và đổi dấu từ âm sang dương nên $x=0, x=4$ là hai giá trị cực tiểu.

đồ thị $g(x)=f(x+1)$ cắt trục Ox tại $x=2$ và đổi dấu từ dương sang âm nên $x=2$ là giá trị cực đại.

Cách 2 :

$$g'(x)=f'(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=3 \\ x+1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

$$g'(x)=f'(x-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x+1<3 \\ x+1>5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x>4 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) hàm số $g(x)=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;4)$

b) đồ thị $g(x)=f(x+1)$ có $x=0, x=4$ là hai giá trị cực tiểu.

đồ thị $g(x)=f(x+1)$ có $x=2$ là giá trị cực đại.

CHỦ ĐỀ 2

TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f\left(x\right)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG

DẠNG 1

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG XÁC ĐỊNH

1. Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

Chú ý: Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số thì ta kiểm tra thêm trường hợp $a = 0$

2. Xét hàm phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$, với $ad - bc \neq 0,\ c \neq 0$.

- Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' > 0,\ \forall x \neq -\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow ad - bc > 0$

- Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' < 0,\ \forall x \neq -\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow ad - bc < 0$

3. Xét hàm phân thức $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{adx^2 + 2aex + be - dc}{\left(dx+e\right)^2}$, với $ad \neq 0$

- Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y' \geq 0,\ \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \geq 0,\ \forall x \neq -\frac{e}{d}$$

- Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y' \leq 0,\ \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \leq 0,\ \forall x \neq -\frac{e}{d}$$

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số:

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

c) $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = \frac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

b) $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = x + 1 + \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) $y = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định .

c) $y = \frac{x^2 + (m+1)x - 1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định.

DẠNG 2
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG CHO TRƯỚC

Nếu $y' = f'(x)$ là một hàm bất kỳ nào khác, mà ta cần $y' = f'(x) \geq 0$ hay $y' = f'(x) \leq 0$ trên khoảng $(a;b)$ (hoặc đoạn hoặc trên nửa đoạn hay nửa khoảng nào đó). Thì ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định của $y' = f'(x)$.

Bước 2: Độc lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g(x)$. Lưu ý khi chuyển vế thành phân thức thì phải để ý điều kiện xác định của biểu thức để khi xét dấu $g'(x)$ ta đưa vào bảng xét dấu $g'(x)$.

Bước 3: Tính $g'(x)$. Cho $g'(x) = 0$ và tìm nghiệm.

Bước 4: Lập bảng biến thiên của $g'(x)$.

Bước 5: Kết luận: **"Lớn hơn số lớn – Bé hơn số bé"**. Nghĩa là:

- Khi ta đặt $m \geq g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m \geq$ **số lớn nhất** trong bảng biến thiên
- Khi ta đặt $m \leq g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m \leq$ **số nhỏ nhất** trong bảng biến thiên

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

b) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{mx^2}{2} + x + 6$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

c) $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$

d) $y = x^3 + mx^2 + m$ nghịch biến trên $(0;2)$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = \dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

b) $y = \dfrac{x+7}{2x+m}$ nghịch biến trên $(-2;+\infty)$

c) $y = \dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

d) $y = \dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+5x+m+6}{x+2}$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

b) $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$.

c) $y=x+3-\dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$.

d) $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên $\left(-8;5\right)$

b) $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ đồng biến trên $\left(1;\mathrm{e}\right)$

c) $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

d) $y=\dfrac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

DẠNG 3

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI x_0

BIỆN LUẬN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

I. Tìm tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x=x_0$.

Bài toán 1: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $f'(x_0,m)=0\Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y=f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x=x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m); y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)\neq 0 \end{cases}\Rightarrow m$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $f'(x_0,m)=0\Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y=f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x=x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m); y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)<0 \end{cases}\Rightarrow m$

Bài toán 3: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $f'(x_0,m) = 0 \Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y = f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x = x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x,m); y'' = f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m) = 0 \\ f''(x_0,m) > 0 \end{cases} \Rightarrow m$

II. Biện luận số cực trị của hàm số

1. Biện luận số cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0) \ (*)$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$$

Cách 1: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$.

Cách 2: Chia y cho y' ta được: $y = Q(x).y' + Ax + B$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị : $y = Ax + B$

2. Biện luận số cực trị của hàm hữu tỉ: $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (*)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{e}{d} \right\}$

Ta có: $y' = \dfrac{adx^2 + 2aex + bc - cd}{(dx+e)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow adx^2 + 2acx + bc - cd = 0 = g(x) \quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \\ g\left(-\frac{e}{d}\right) \neq 0 \end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

+ Giả sử (x_o, y_o) là điểm cực trị thì $y_o = \frac{Q'(x_o)}{P'(x_o)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là:

$y = \frac{Q'(x)}{P'(x)} = \frac{2ax + b}{d} = \frac{2a}{d}.x + \frac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$

c) $y = -x^3 + mx^2 + (m^2 - 12)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

d) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y = \frac{x^2 + (m-1)x + 3 - 2m}{x + m}$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

b) $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y = \frac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x - 1$ có hai điểm cực trị.

b) $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(3m+7)x + 1$ có cực trị.

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2024$ không có cực trị.

d) $y=\frac{1}{3}\left(m^2-1\right)x^3+mx^2+3x+1$ có cực đại.

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=\frac{x^2+mx-2m-4}{x+2}$ có hai điểm cực trị.

b) $y=\frac{-x^2+2\left(m-1\right)x-m-5}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

DẠNG 4
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC CỦA BÀI TOÁN
(liên quan hệ thức Viète)

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$.

b) $y=\frac{1}{3}x^3-(m+3)x^2+(12-m)x+2025$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung.

c) $y=\frac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(m^2+4m+3)x-2024m+2025$ có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung.

d) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ có hai điểm cực trị dương.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=x^3+4(m-2)x^2-7x+1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-4$.

b) $y=x^3-3(m-1)x^2-3(m+1)x+3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho O,A,B thẳng hàng.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=\frac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$ để diện tích ΔOAB bằng 2 với $A;B$ là hai điểm cực trị .

b) $y=\frac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ bằng nhau.

c) $y=\frac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$ có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+2024$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10)$ để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-2025$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$ là:

A. 27. **B.** 35. **C.** 44. **D.** 54.

Câu 3. Biết giá trị tham số $m\in\left[a;\frac{b}{c}\right]$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì hàm số $y=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P=\frac{a^2+b^2}{c}$

A. $P=\frac{9}{4}$. **B.** $P=\frac{13}{2}$. **C.** $P=4$. **D.** $P=\frac{13}{4}$.

Câu 4. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\frac{-3}{4}x^4+\frac{9}{2}x^2-(2m+15)x-m+3$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 7. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 8. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx+(m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D=[2;+\infty)$ là

A. $m \le -1$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m < -1$. **D.** $-2 \le m \le 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 2m + 3}{x + m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 11. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \dfrac{x - 2}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x + 2m + 12}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = \dfrac{1 - 2\sin x}{2\sin x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. 18. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1) + 2m - 1}{x - m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m > 1$. **B.** $m \le 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1; 20]$ để ứng với mỗi, hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x - m - 1}{3x - m}$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$?

A. 20. **B.** 18. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \cos 2x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. m > 4. **B.** m < 2. **C.** $m \ge 1$ **D.** $m \ge 2$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 19. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?

A. $m > 0$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m = 0$. **D.** $m < 0$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + \left(3m^2 + 1\right)x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m - 1)x - 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m < \frac{1}{2}$. **B.** Với mọi m, hàm số luôn có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m \neq \frac{1}{2}$. **D.** Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.

Câu 22. Với giá trị tham số $m \in (a; b) \setminus \{c\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$) thì hàm số $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$ có 2 cực trị. Giá trị biểu thức $P = a + b + c$ là:

A. $P = -4$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = -5$.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m \in [-2020; 2020)$ để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m - 1)x - 1$ có cực trị ?

A. 2038. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2021.

Câu 24. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

A. $-\frac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Câu 25. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + \frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

A. $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{array}\right.$.

C. $m \in \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \{0\}$. **D.** $m = 2$.

Câu 26. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để : $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

A. $m = \pm\sqrt{2}$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = \pm 1$.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$.

A. $m<2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $0<m<2$.

Câu 28. Với các giá trị thực của tham số $m\in\left(\frac{a}{b};+\infty\right)\backslash\{c\}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x+2$ có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2}$

A. $P=-\frac{1}{2}$ **B.** $P=\frac{3}{5}$ **C.** $P=\frac{3}{2}$. **D.** $P=\frac{1}{4}$

Câu 29. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ (với $a\in\mathbb{Z}$) thì đồ thị hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này cách đều trục tung Oy. Biết t thoả mãn phương trình sau: $4t^2+3at+a^2+3a-9=0$. Tính giá trị của t.

A. $t=3$ **B.** $t=\pm\frac{3}{2}$ **C.** $t=\frac{3}{2}$. **D.** $t=\pm3$

Câu 30. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y=-4x$ (d).

A. $m\in\{1\}$. **B.** $m\in\{0;1\}$. **C.** $m\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$. **D.** $m\in\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 - (m+1)x + 1$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) $y' = 3mx^2 + 2mx - (m+1)$

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \geq 0$.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\frac{3}{4} < m < 0$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -m$ và $x = -m - 2$

c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ khi và chỉ khi $m \geq 0$.

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$, với m là tham số

a) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $-2 < m < 2$

b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m = 2$

c) Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$

d) Hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD} < x_{CT}$ và chỉ khi $0 < m < 2$

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 1$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 2.

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ (m là tham số).

a) $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

b) Với $m = -1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

d) Có 4 số nguyên của tham số m thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ (m là tham số).

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Khi $m=1$ thì $f\left(2025\right)<f\left(2024\right)$

c) Khi $m<-3$ hoặc $m>3$ thì hàm số có 2 điểm cực trị

d) Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|\le 5$. Biết $S=\left(a;b\right]$. Khi đó $2b-a=\sqrt{61}-1$.

Câu 37. Cho hàm số $y=2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6m\left(1-2m\right)x$ (m là tham số).

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) $y'=6x^2+\left(m-1\right)x+6m\left(1-2m\right)$

c) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-m$ và $x=1-2m$

d) Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho song song đường thẳng $y=-4x$, khi đó tổng tất cả các giá trị thực của tham số m bằng $-\dfrac{1}{3}$

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$, với m là tham số.

a) $y'=\dfrac{m-5}{\left(x+m\right)^2}$

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\ge 5$.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\le 5$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-8\right)$ khi và chỉ khi $m\in\left(5;8\right]$.

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$, với m là tham số

a) $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{\left(x-m\right)^2}$

b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ khi $m=2$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=2x+2m$

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$, với $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và m là tham số

a) Nếu đặt $t=\cot x$ thì hàm số đã cho trở thành $y=f\left(t\right)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ với $t\in\left(0;1\right)$.

b) Nếu đặt $t=\cot x$ thì tập xác định của hàm số $y=f\left(t\right)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m\right\}$

c) Nếu đặt $t=\cot x$ thì $f'\left(t\right)=\dfrac{t^2-2mt+1}{\left(t-m\right)^2}$

d) Có 2026 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2024;2024\right]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 41. Cho hàm số sau $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ………………..

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2024;2025)$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Trả lời: ………………..

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Trả lời: ………………..

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để $y=\frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

Trả lời: ………………..

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

Trả lời: ………………..

Câu 46. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{mx+18}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2;5)$?

Trả lời: ………………..

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{m\text{x}+9}{4\text{x}+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

Trả lời: ………………..

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\frac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;\,7)$?

Trả lời: ………………..

Câu 49. Số các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y=\frac{-mx-2025}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

Trả lời: ………………..

Câu 51. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-10;10\right]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-3;0\right)$?

Trả lời: ………………..

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-10;10\right]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

Trả lời: ………………..

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-10;10\right]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

Trả lời: ………………..

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1+m}{5x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$?

Trả lời: ………………..

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+2x-1-5m}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;5\right)$?

Trả lời: ………………..

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;3\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(4;6\right)$.

Trả lời: ………………..

Câu 57. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{m\sin x+4}{\sin x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ………………..

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-2025;2025\right]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ………………..

Câu 59. Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3+(m-1)x^2+3x-2$ không có cực trị.

Trả lời: ………………..

Câu 60. Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3x^2-(m+1)x+3m^2-m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-100;100]$ để hàm số có cực đại, cực tiểu?

Trả lời: ………………..

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=mx^4-(m+1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị?

Trả lời: ………………..

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số: $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$ có 2 cực trị?

Trả lời: ………………..

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số đã cho cũng đi qua điểm $A(1;-1)$.

Trả lời: ………………..

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-5;10)$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx}{1-x}$ có 2 điểm cực trị?

Trả lời: ………………..

Câu 65. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-5;10)$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu?

Trả lời: ………………..

Câu 66. Biết đồ thị của hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có một điểm cực trị là $A(-1;29)$ và đi qua điểm $B(2;2)$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Câu 67. Đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+n$ có điểm cực tiểu là $I(1;3)$. Tính $m+n$.

Trả lời: ………………..

Câu 68. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời: ………………..

Câu 69. Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b \in \mathbb{N}*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$. Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b$.

Trả lời: ………………..

Câu 70. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2;4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\left(m^2+5m\right)x^3+6mx^2+6x-6$ có cực trị tại $x=1$.

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 74. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

Câu 75. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ có cực đại và cực tiểu.

Câu 76. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-2}{mx-1}$ có cực trị.

Câu 77. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}(3-m)x^3-(m+3)x^2+(m+2)x-2024$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Câu 78. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 79. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Câu 80. Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$?

Câu 81. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\dfrac{\cos x+1}{10\cos x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 82. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$. Tính số phần tử của tập S.

Câu 83. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

Câu 86. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu .

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx-3m+4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B và hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\dfrac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3(m+1)x^2-(3m^2+7m-1)x+m^2-1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

Câu 91. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$.

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A, B và thoả mãn $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ) .

Câu 93. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ tạo với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ (C) một góc α, biết $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$.

Câu 94. Cho hàm số $y=2x^3-9x^2+12x+m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa đọ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

Câu 95. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx}{1-x}$. Tìm m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

Câu 96. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$. Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị, tìm tham số m để diện tích ΔOAB bằng 2.

Câu 97. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ bằng nhau.

Câu 98. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

Câu 99. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta : y=2x$.

Câu 100. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

CHỦ ĐỀ 2

TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG

DẠNG 1

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG XÁC ĐỊNH

1. Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta_{y'}\leq 0\end{cases}$

- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta_{y'}\leq 0\end{cases}$

Chú ý: Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số thì ta kiểm tra thêm trường hợp $a=0$

2. Xét hàm phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, với $ad-bc\neq 0,\ c\neq 0$.

- Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y'>0,\ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow ad-bc>0$

- Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y'<0,\ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow ad-bc<0$

3. Xét hàm phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$, với $ad\neq 0$

- Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y'\geq 0,\ \forall x\neq -\frac{e}{d}\Leftrightarrow adx^2+2aex+be-dc\geq 0,\ \forall x\neq -\frac{e}{d}$$

- Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y'\leq 0,\ \forall x\neq -\frac{e}{d}\Leftrightarrow adx^2+2aex+be-dc\leq 0,\ \forall x\neq -\frac{e}{d}$$

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số:

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

c) $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 + 2mx + 2m$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 6m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 6$.

b) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 + 2m - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le 1.$$

h) $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ \begin{cases} m>1 \\ 9(m-1)^2 - 9(m-1) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ \begin{cases} m>1 \\ 1 \le m \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le m \le 2.$$

d) $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$

TH1: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m=1$. Ta có: $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.

Với $m=-1$. Ta có: $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.

TH2: $m \ne \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x - 1 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)^2+3(m^2-1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)(4m+2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ -\frac{1}{2}\le m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1$.

Vậy có giá trị m cần tìm là $-\frac{1}{2}\le m\le 1$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y=\frac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

b) $y=\frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

a) $y=\frac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ta xét $y'>0 \Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2$

b) $y=\frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{3-m\}$ và có đạo hàm $y'=\frac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y'<0, \forall x\ne 3-m$

Hay $m^2-3m+2<0, \forall x\ne 3-m \Leftrightarrow 1<m<2$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=x+1+\frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) $y=\frac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định .

c) $y=\frac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

a) $y=x+1+\frac{m}{x-2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$y'\ge 0, \forall x\in D \Leftrightarrow 1-\frac{m}{(x-2)^2}\ge 0, \forall x\in D$

$\Leftrightarrow m\le (x-2)^2, \forall x\in D$

Xét hàm số $f(x)=(x-2)^2$ ta có:

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m \le 0$.

b) $y = \dfrac{2x^2 + 3x + m + 1}{x + 1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \dfrac{2x^2 + 4x + 2 - m}{(x+1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi: $2x^2 + 4x + 2 - m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \le 0$

c) $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x - 1}{2 - x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có $y' = \dfrac{-x^2 + 4x + 2m + 1}{(2-x)^2} = \dfrac{g(x)}{(2-x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in D$

Dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $D \Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 4x + 2m + 1 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Điều kiện: $\Delta' \le 0$ vì $a = -1 < 0 \Leftrightarrow 4 - (-1)(2m+1) \le 0 \Leftrightarrow 2m + 5 \le 0 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{5}{2}$.

DẠNG 2
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG CHO TRƯỚC

Nếu $y' = f'(x)$ là một hàm bất kỳ nào khác, mà ta cần $y' = f'(x) \geq 0$ hay $y' = f'(x) \leq 0$ trên khoảng $(a;b)$ (hoặc đoạn hoặc trên nửa đoạn hay nửa khoảng nào đó). Thì ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định của $y' = f'(x)$.

Bước 2: Độc lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g(x)$. Lưu ý khi chuyển vế thành phân thức thì phải để ý điều kiện xác định của biểu thức để khi xét dấu $g'(x)$ ta đưa vào bảng xét dấu $g'(x)$.

Bước 3: Tính $g'(x)$. Cho $g'(x) = 0$ và tìm nghiệm.

Bước 4: Lập bảng biến thiên của $g'(x)$.

Bước 5: Kết luận: **"Lớn hơn số lớn – Bé hơn số bé"**. Nghĩa là:

- Khi ta đặt $m \geq g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m \geq$ **số lớn nhất** trong bảng biến thiên
- Khi ta đặt $m \leq g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m \leq$ **số nhỏ nhất** trong bảng biến thiên

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

b) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{mx^2}{2} + x + 6$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

c) $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$

d) $y = x^3 + mx^2 + m$ nghịch biến trên $(0;2)$

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$
$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (5-m)x, \forall x \in (2;+\infty)$
$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x \in (2;+\infty)$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên $(2;+\infty)$ có $g'(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta được $m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \le 5$.

b) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{mx^2}{2} + x + 6$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = x^2 + mx + 1$.

Để hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in [1;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2 + mx + 1 \ge 0, \forall x \in [1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \ge -x - \dfrac{1}{x}, \forall x \in [1;+\infty)$

Xét hàm số $g(x) = -x - \dfrac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ có $g'(x) = -1 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1-x^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x - \dfrac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $m \ge -x - \dfrac{1}{x}, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m \ge -2$.

c) $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ khi $y' \le 0, \forall x \in (-\infty;-3)$

$\Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 4m - 9 \le 0 \quad \forall x \in (-\infty;-3) \Leftrightarrow 4m \le 3x^2 + 12x + 9, \forall x \in (-\infty;-3)$.

Đặt $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$ có $f'(x) = 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	1	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $4m \le 3x^2 + 12x + 2 \quad \forall x \in (-\infty; -3) \Leftrightarrow 4m \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$.

Vậy $m \le 0$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

d) $y = x^3 + mx^2 + m$ nghịch biến trên $(0;2)$

Hàm số $y = x^3 + mx^2 + m$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 + 2mx$

Hàm số nghịch biến trên $(0;2) \Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2mx \le 0,\ \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}x,\ \forall x \in (0;2)$

Xét hàm số $y = -\dfrac{3}{2}x$ trên khoảng $(0;2)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	0		2
y'		$-$	
y	0	↘	-3

Vậy để hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ thì $m \le -3$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = \dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

b) $y = \dfrac{x+7}{2x+m}$ nghịch biến trên $(-2; +\infty)$

c) $y = \dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

d) $y = \dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

Lời giải

a) $y = \dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

Để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ thì $y' > 0$ với $\forall x \in (1; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} 2m-4(-1)>0 \\ m-x\neq 0, x\in(1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ x\neq m, x\in(1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m\leq 1$.

b) $y=\dfrac{x+7}{2x+m}$ nghịch biến trên $(-2;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m-14<0 \\ \dfrac{-m}{2}\leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 4 \\ m<14 \end{cases} \Leftrightarrow 4\leq m<14$.

c) $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-m^2+6>0 \\ m\notin(-\infty;-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<2 \\ m\geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq m<2$.

d) $y=\dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

Điều kiện $x\neq m$

Đạo hàm: $y'=\dfrac{m^2-4}{(m-x)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y'<0 \\ m\notin(-3;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq -3 \\ m\geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq -3 \\ m\geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq m<2$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+m+6}{x+2}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

b) $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

c) $y=x+3-\dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

d) $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Lời giải

a) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+m+6}{x+2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{x^2+4x-m+4}{(x+2)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x-m+4}{(x+2)^2}\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow x^2+4x+4\ge m,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow m\le \min_{(1;+\infty)}\left(x^2+4x+4\right)$$

Xét hàm số $g(x)=x^2+4x+4, g'(x)=2x+4, g(x)=0\Leftrightarrow x=-2\notin(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
g'		$+$	
g	9	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\le 9$.

b) $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Đạo hàm: $y'=1+\dfrac{m-1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+m+3}{(x-2)^2}$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ trên $[5;+\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x)=2x-4$. Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-1$. Ta có: $f(5)=8$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Do $(x-2)^2>0$ với mọi $x\in[5;+\infty)$ nên $y'\ge 0$, $\forall x\in[5;+\infty)$ khi và chỉ khi $f(x)\ge -m$, $\forall x\in[5;+\infty)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m\le 8\Leftrightarrow m\ge -8$.

c) $y=x+3-\dfrac{m}{x-2}$

Điều kiện xác định: $x\ne 2$.

Ta có: $y'=1+\dfrac{m}{(x-2)^2}$

Hàm số y đồng biến trên $[5;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in[5;+\infty)$ $\Leftrightarrow 1+\dfrac{m}{(x-2)^2}\ge 0,\forall x\in[5;+\infty)$

$$\Leftrightarrow m\ge -(x-2)^2,\forall x\in[5;+\infty)\Leftrightarrow m\ge \max_{[5;+\infty)}\left[-(x-2)^2\right]$$ **(*)**

Đặt $g(x) = -(x-2)^2$, ta có $g'(x) = -2(x-2) < 0, \forall x \in [5;+\infty)$

x	5	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	-9	$-\infty$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow m \ge -9$.

d) $y = \dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$

Hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall \in [1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \frac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2} \le 0, \forall \in [1;+\infty).$$

$$\Leftrightarrow mx^2+4mx+14 \le 0, \forall \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \le \frac{-14}{x^2+4x} = g(x), \forall \in [1;+\infty).$$

$$\Leftrightarrow m \le \min_{x\ge 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{5}$$

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = \dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên $(-8;5)$

b) $y = \dfrac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ đồng biến trên $(1;\mathrm{e})$

c) $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

d) $y = \dfrac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

Lời giải

a) $y = \dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$

Đặt $t = -\sqrt{6-x}$ vì $x \in (-8;5) \Rightarrow t \in (-\sqrt{14};-1)$ và $t = -\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8;5)$.

Hàm số trở thành $y = \dfrac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{m\} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2-4m+3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{14};-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3>0 \\ \left[\begin{array}{l} m\le -\sqrt{14} \\ m\ge -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -\sqrt{14} \\ -1\le m<1. \\ m>3 \end{array}\right.$

b) $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$

$y=f\left(x\right)=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$

Đặt $t=\ln x$, điều kiện $t\in\left(0;1\right)$

$g\left(t\right)=\dfrac{t-4}{t-2m}$; $g'\left(t\right)=\dfrac{-2m+4}{\left(t-2m\right)^2}$

Để hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;e\right)$ thì hàm số $g\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;1\right)$ $\Leftrightarrow g'\left(t\right)>0$, $t\in\left(0;1\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2m+4}{\left(t-2m\right)^2}>0, t\in\left(0;1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+4>0 \\ 2m\notin\left(0;1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}<m<2 \\ m<0 \end{array}\right.$

c) $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Đặt $t=\tan x$, vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left(0;1\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t-2}{t-m}\,\forall t\in\left(0;1\right)$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{m\right\}$

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{2-m}{\left(t-m\right)^2}$.

Ta thấy hàm số $t\left(x\right)=\tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Nên để hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'\left(t\right)>0\,\forall t\in\left(0;1\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-m}{\left(t-m\right)^2}>0\,\forall t\in\left(0;1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m>0 \\ m\notin\left(0;1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;0\right]\cup\left[1;2\right)$

d) $y=\dfrac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

Điều kiện: $\cos x\ne m$. Ta có: $y'=\dfrac{(-m+3)}{\left(\cos x-m\right)^2}.(-\sin x)=\dfrac{(m-3)}{\left(\cos x-m\right)^2}.\sin x$

Vì $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow \sin x>0$, $\left(\cos x-m\right)^2>0$, $\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$: $\cos x\ne m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng

$$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ \cos x\neq m\ \ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ m\notin(-1;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\leq m<3 \\ m\leq -1 \end{array}\right..$$

DẠNG 3

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI x_0

BIỆN LUẬN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

I. Tìm tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$.

Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $f'(x_0, m) = 0 \Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y = f(x, m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x = x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $f'(x_0, m) = 0 \Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y = f(x, m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x = x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) < 0 \end{cases} \Rightarrow m$

Bài toán 3: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $f'(x_0,m)=0 \Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y=f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x=x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m); y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)>0 \end{cases} \Rightarrow m$

II. Biện luận số cực trị của hàm số

1. Biện luận số cực trị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d \ (a\neq 0)\ (*)$

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0 \quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta_{(1)}>0 \end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta_{(1)}\leq 0 \end{cases}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \ (a\neq 0)$$

Cách 1: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y-\dfrac{y'.y''}{18a}$.

Cách 2: Chia y cho y' ta được: $y=Q(x).y'+Ax+B$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị : $y=Ax+B$

2. Biện luận số cực trị của hàm hữu tỉ: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e} \quad (*)$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$

Ta có: $y'=\dfrac{adx^2+2acx+bc-cd}{(dx+e)^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow adx^2+2acx+bc-cd=0=g(x) \quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \\ g\left(-\dfrac{e}{d}\right) \neq 0 \end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$$

+ Giả sử (x_o, y_o) là điểm cực trị thì $y_o = \dfrac{Q'(x_o)}{P'(x_o)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y = \dfrac{Q'(x)}{P'(x)} = \dfrac{2ax+b}{d} = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$

b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-m+1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$

c) $y = -x^3 + mx^2 + (m^2-12)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

d) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$

Lời giải

a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-4)x + 3$

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$; $y'' = 2x - 2m$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right. \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-m+1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$

Có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$, $y'' = 2x - 2m$

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi

$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2=0 \\ 2-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$.

c) $y=-x^3+mx^2+\left(m^2-12\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=-3x^2+2mx+m^2-12$; $y''=-6x+2m$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ khi $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3.(-1)^2+2m.(-1)+m^2-12=0 \\ -6.(-1)+2m>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m-15=0 \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=5 \quad (TM) \\ m=-3 \ (L) \end{array}\right. \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow m=5$.

d) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$, $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=3$ suy ra $y'(3)=0 \Rightarrow m^2-6m+5=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$.

Với $m=5$ ta có $y''(3)=6-10=-4<0$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Với $m=1$ ta có $y''(3)=6-2=4>0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Vậy $m=5$ thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+3-2m}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

b) $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x=2$

Lời giải

a) $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+3-2m}{x+m}$

Điều kiện xác định $x\neq -m$.

Đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm số lần lượt là: $y'=1+\dfrac{m-3}{(x+m)^2}$, $y''=\dfrac{-2(m-3)}{(x+m)^3}$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{m-3}{(-1+m)^2}=0 \\ \dfrac{-2(m-3)}{(-1+m)^3}>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$

b) $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} \Rightarrow y''=\dfrac{2x+2m}{(x+m)^4}$

Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2+4m-3}{(2+m)^2}=0 \\ \dfrac{2m+4}{(2+m)^4}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right. \\ m<-2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=\dfrac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+\left(m^2-4m+3\right)x-1$ có hai điểm cực trị.

b) $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị.

c) $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+2024$ không có cực trị.

d) $y=\dfrac{1}{3}\left(m^2-1\right)x^3+mx^2+3x+1$ có cực đại.

Lời giải

a) $y=\dfrac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+\left(m^2-4m+3\right)x-1$ có hai điểm cực trị

Đạo hàm $y'=2x^2+2(m-1)x+m^2-4m+3$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2+2(m-1)x+m^2-4m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta'>0 \Leftrightarrow (m-1)^2-2\left(m^2-4m+3\right)>0 \Leftrightarrow -m^2+6m-5>0 \Leftrightarrow 1<m<5$.

Vậy $1<m<5$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị

Đạo hàm $y'=3x^2-6(m+1)x+3(3m+7)$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9(m+1)^2 - 9(3m+7) > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -2 \end{array}\right.$

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2024$ không có cực trị

Ta có đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc vó nghiệm kép hay

$\Delta'_{y'} \le 0 \Leftrightarrow m^2 - (m+2) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2$.

d) $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + mx^2 + 3x + 1$ có cực đại

Đạo hàm $y' = (m^2 - 1)x^2 + 2mx + 3$

Trường hợp 1: $m = 1$ ta có $y' = 2x + 3$

Xét dấu y'

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow m = 1$ loại

Trường hợp 2: $m = -1$ ta có $y' = -2x + 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

$\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn

Với $m \ne \pm 1$

Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3(m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2m^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y = \frac{x^2 + mx - 2m - 4}{x + 2}$ có hai điểm cực trị.

b) $y = \frac{-x^2 + 2(m-1)x - m - 5}{x - 1}$ có cực đại và cực tiểu.

Lời giải

a) $y = \frac{x^2 + mx - 2m - 4}{x + 2}$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+4x+4m+4}{(x+2)^2}=0$ có hai ngiệm phân biệt $\neq -2$.

$\Leftrightarrow g(x)=x^2+4x+4m+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=4-4m-4>0 \\ g(-2)=4-8+4m+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<0.$$

b) $y=\dfrac{-x^2+2(m-1)x-m-5}{x-1}$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu (2 cực trị) $\Leftrightarrow y'=\dfrac{-x^2+2x+7-m}{(x-1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x+7-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta'=1+7-m>0 \\ g(1)=-1+2+7-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<8 \\ m\neq 8 \end{cases} \Leftrightarrow m<8.$$

DẠNG 4

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC CỦA BÀI TOÁN

(liên quan hệ thức Viète)

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+3)x^2 + (12-m)x + 2025$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung.

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2+4m+3)x - 2024m + 2025$ có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung.

d) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương.

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 khi $\Delta' = (-3)^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

Theo đề bài ta có $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^2 - \frac{2}{3}m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Vậy $m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài.

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+3)x^2 + (12-m)x + 2025$

Ta có $y' = x^2 - 2(m+3)x + 12 - m$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = [-(m+3)]^2 - (12-m) > 0 \\ S = x_1 + x_2 = 2(m+3) > 0 \\ P = x_1x_2 = 12 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 7m - 3 > 0 \\ m + 3 > 0 \\ 12 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > \frac{-7+\sqrt{61}}{2} \\ m < \frac{-7-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right. \\ -3 < m < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-7+\sqrt{61}}{2} < m < 12.$$

c) $y=\frac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(m^2+4m+3)x-2024m+2025$

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=x^2-2(m+2)x+m^2+4m+3=0$.

Đồ thị hàm số có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung

$\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=(m+2)^2-(m^2+4m+3)>0\\ m^2+4m+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1>0\\ \left[\begin{array}{l}m>-1\\ m<-3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>-1\\ m<-3\end{array}\right..$$

d) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$

Ta có $y'=x^2-2mx+2m-1$. Để hàm số có hai điểm cực trị dương thì phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+2m-1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-2m+1>0\\ a.c=2m-1>0\\ -\frac{b}{a}=2m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1\\ m>\frac{1}{2}\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty).$$

Vậy $m\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=x^3+4(m-2)x^2-7x+1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-4$.

b) $y=x^3-3(m-1)x^2-3(m+1)x+3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho O,A,B thẳng hàng.

Lời giải

a) $y=x^3+4(m-2)x^2-7x+1$

Ta có: $y=x^3+4(m-2)x^2-7x+1$ (1) $\Rightarrow y'=3x^2+8(m-2)x-7$

Xét phương trình $3x^2+8(m-2)x-7=0$ (2)

Suy ra hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị x_1,x_2 với mọi m.

Ta thấy $ac=-21<0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu

Suy ra hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị x_1,x_2 với mọi m.

$\Rightarrow x_1<0;\ x_2>0 \Rightarrow |x_1|=-x_1;\ |x_2|=x_2$.

Ta có: $|x_1|-|x_2|=-4 \Leftrightarrow -x_1-x_2=-4 \Leftrightarrow -(x_1+x_2)=-4 \Leftrightarrow \frac{8(m-2)}{3}=-4 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

b) $y=x^3-3(m-1)x^2-3(m+1)x+3$

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m-1)x - 3(m+1) = 3\left[x^2 - 2(m-1)x - (m+1)\right]$.

Đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - (m+1) = 0\ (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 + m + 1 > 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 2 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Ta có $y = y'.\left[\dfrac{1}{3}x - \dfrac{m-1}{3}\right] + \left[-2m^2 + 2m - 4\right]x + 4 - m^2$.

Suy ra phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị là

$y = \left(-2m^2 + 2m - 4\right)x + 4 - m^2$.

Do O, A, B thẳng hàng nên $4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x+1}$ để diện tích ΔOAB bằng 2 với $A; B$ là hai điểm cực trị .

b) $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

c) $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x-1}$ có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

Lời giải

a) $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x+1}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2};\ \forall x \neq -1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = m+1 \\ x = -2 \Rightarrow y = m-3 \end{array}\right.$.

Do đó hai điểm cực trị là $A(0; m+1); B(-2; m-3)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x_A - x_O; y_A - y_O) = (0; m+1) \Rightarrow OA = \sqrt{(0)^2 + (m+1)^2} = |m+1| \\ \overrightarrow{OB} = (x_B - x_O; y_B - y_O) = (-2; m-3) \Rightarrow OB = \sqrt{(-2)^2 + (m-3)^2} = \sqrt{m^2 - 6m + 13} \end{cases}$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(OA.OB)^2 - \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(m+1)^2\left(m^2 - 6m + 13\right) - \left[(m-1)(m-3)\right]^2} = |m+1|$.

Mà $S_{\Delta ABC} = 2 \Leftrightarrow |m+1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

b) $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow g(x)=x^2+2x+2m-2=0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=3-2m>0 \\ g(-1)=2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}\ (1).$$

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của $g(x)=0$, đó chính là hoành độ cực trị. Khi đó, phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị là: $y=\dfrac{(x^2+2mx+2)'}{(x+1)'}=\dfrac{2x+2m}{1}=2x+2m$.

$\Rightarrow$ Hai điểm cực trị của đồ thị là: $A(x_1;2x_1+2m);B(x_2;2x_2+2m)$.

Theo định lí Viét: $x_1+x_2=-2,\ x_1x_2=-2m$.

Theo đề: $d(A,\Delta)=d(B,\Delta)\Leftrightarrow \dfrac{|x_1+y_1+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x_2+y_2+2|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow |3x_1+2m+2|=|3x_2+2m+2|$

$$\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2=(3x_2+2m+2)^2\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2-(3x_2+2m+2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[3(x_1+x_2)+4m+4\right]=0\Leftrightarrow 3(x_1+x_2)+4m+4=0,(do\ x_1\neq x_2)$$

$\Leftrightarrow 3(-2)+4m+4=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$. Kết hợp với $(1)\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

c) $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=\dfrac{mx^2-2mx-5m-1}{(x-1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=mx^2-2mx-5m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m\neq 0 \\ \Delta'=m^2+m(5m+1)>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{6} \\ m>0 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{6} \\ m>0 \end{array}\right.\quad (*)$$

Phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị: $y=\dfrac{(mx^2+3mx+2m+1)'}{(x-1)'}=2mx+3m$.

Để 2 điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành $Ox\Leftrightarrow y(x_1).y(x_2)<0$

$$\Leftrightarrow (2mx_1+3m)(2mx_2+3m)<0\Leftrightarrow 4m^2\left[x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right]<0.$$

$$\Leftrightarrow 4m(-2m-1)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{2} \\ m>0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với $(*) \Rightarrow m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+2024$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=x^2+2mx+4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'\le 0$

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 2. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10)$ để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-2025$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$ là:

A. 27. **B.** 35. **C.** 44. **D.** 54.

Lời giải

Chọn C.

$y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-2025$

Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=3x^2-6x+3(m+2)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3>0 \\ 9-9(m+2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge -1 .$$

Vậy $m\ge -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m\in[-10;10)$ nên Tổng các giá trị nguyên của tham số là 44.

Câu 3. Biết giá trị tham số $m\in\left[a;\frac{b}{c}\right]$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì hàm số $y=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P=\frac{a^2+b^2}{c}$

A. $P=\frac{9}{4}$. **B.** $P=\frac{13}{2}$. **C.** $P=4$. **D.** $P=\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

* Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) = 4m^2 - m - 5 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le \frac{5}{4}.$$

* Vậy $-1 \le m \le \frac{5}{4}$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m \in \left[a; \frac{b}{c}\right]$ nên $\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{a^2 + b^2}{c} = \frac{13}{2}$

Câu 4. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$ khi $y' \ge 0$, $\forall x \in (2; +\infty)$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \ge 0$, $\forall x \in (2; +\infty)$.

$$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}, \forall x \in (2; +\infty)$$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2; +\infty)$.

$g'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0$ với $\forall x \in (2; +\infty)$ $\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Do đó $m \le g(x), \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow m \le g(2) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{12}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 6x^2 - 6\left(2m+1\right)x + 6m\left(m+1\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right.$ (do $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+m) = 1$).

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; m\right)$ và $\left(m+1; +\infty\right)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow m+1 \le 2 \Leftrightarrow m \le 1$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m = 1$.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{-3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \left(2m+15\right)x - m + 3$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = -3x^3 + 9x - 2m - 15 \le 0\, \forall x \in \left(0;+\infty\right)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $\left(0;+\infty\right) \Leftrightarrow 3x^3 - 9x + 15 \ge -2m\ \forall x \in \left(0;+\infty\right)$.

Xét hàm số: $g(x) = 3x^3 - 9x + 15$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $g'(x) = 9x^2 - 9$

$g'\left(x\right) = 0 \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	15	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m \le 9 \Leftrightarrow m \ge -\frac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Câu 7. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \le x^2 + \frac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$.

Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 8. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx+(m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D=[2;+\infty)$ là

A. $m \le -1$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m < -1$. **D.** $-2 \le m \le 1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y=mx+(m+1)\sqrt{x-2} \Rightarrow y'=m+\frac{m+1}{2\sqrt{x-2}}$, y' xác định trên khoảng $(2;+\infty)$.

Nhận xét: khi x nhận giá trị trên $(2;+\infty)$ thì $\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ nhận mọi giá trị trên $(0;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow (m+1)t+m \le 0, \forall t \in (0;+\infty)$ (đặt $t=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$).

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \le 0 \\ m+(m+1)\cdot 0 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn B.

$y'=\frac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1 < m < 3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

Câu 10. Cho hàm số $y=\frac{mx+2m+3}{x+m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y=\dfrac{mx+2m+3}{x+m}\Rightarrow y'=\dfrac{m^2-(2m+3)}{(x+m)^2}=\dfrac{m^2-2m-3}{(x+m)^2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-3<0\\-m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<3\\m\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<3$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0,1,2\}$

Suy ra: $S=\{0,1,2\}$

Câu 11. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y=\dfrac{x-2}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\m>-1\end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)\Leftrightarrow y'=\dfrac{m^2-m-12}{(x+m)^2}<0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-12<0\\x+m\ne 0\end{cases},\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<4\\m\ne -x\end{cases},\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<4\\m\notin(-\infty;-1)\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<4$.

$\begin{cases}-1\le m<4\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m=\{-1;0;1;2;3\}$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=\dfrac{1-2\sin x}{2\sin x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$?

A. 18. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y=\dfrac{-2\sin x+1}{2\sin x+m}\Rightarrow y'=\dfrac{-2m-2}{(2\sin x+m)}.\cos x\ge 0,\forall\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\Leftrightarrow\dfrac{2m+2}{(2\sin x+m)}\ge 0,\forall\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2\ge 0\\ m\ne -2\sin x\in(-2;0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in[-1;+\infty)\\ m\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in[0;+\infty).$

Do m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)\Rightarrow m\in\{0;1;2;...;9\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-m+1}{(x-m)^2}$

Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in D\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-m+1\ge 0,\forall x\in D\Leftrightarrow\begin{cases}1\ge 0\,(hn)\\ m-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 1$

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để ứng với mỗi, hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 20. **B.** 18. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: $x\ne\dfrac{m}{3}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$

$\Leftrightarrow\dfrac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}\ge 0;\ \forall x\in(2;3)\ \Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+2mx+3\ge 0;\ \forall x\in(2;3) & (1)\\ \dfrac{m}{3}\notin(2;3) & (2)\end{cases}.$

Ta có $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{3}\ge 3\\ \dfrac{m}{3}\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 9\\ m\le 6\end{array}\right.$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2m\ge 3x-\dfrac{3}{x}=g(x),\ \forall x\in(2;3)$.

Mà $g'(x)=3+\dfrac{3}{x^2}>0,\ \forall x\in(2;3)\Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên $(2;3)$.

Do đó $2m\ge 3x-\dfrac{3}{x}=g(x),\ \forall x\in(2;3)\Leftrightarrow 2m\ge g(3)\Leftrightarrow 2m\ge 8\Leftrightarrow m\ge 4$.

Kết hợp hai điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} m\ge 9\\ 4\le m\le 6\end{array}\right.$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{4;5;6;9;10;...;20\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$

Vì $\Delta_g'=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1)=2\left(m^2-6m+1\right)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của *m* để hàm số $y=\cos 2x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. m > 4. **B.** m < 2. **C.** $m\ge 1$ **D.** $m\ge 2$.

Lời giải

Chọn D.

Phương pháp

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)\Leftrightarrow f'(x)\ge 0\ \forall\in(a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Cách giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-2\sin 2x+m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -2\sin 2x+m\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\ge 2\sin 2x\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\ge 2$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y' = 3 + m(\cos x - \sin x)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Đặt $t = \cos x - \sin x, t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$, thu được hàm $y'(t) = 3 + mt, t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Khi đó điều kiện (1) trở thành:

$$y'(t) \geq 0, \forall t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} y'\left(-\sqrt{2}\right) \geq 0 \\ y'\left(\sqrt{2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{2}m \geq 0 \\ 3 + \sqrt{2}m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Các giá trị nguyên của m nhận được là: $-2, -1, 0, 1, 2$.

Câu 19. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?

A. $m > 0$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m = 0$. **D.** $m < 0$.

Lời giải

Chọn C.

$y' = 3x^2 - 6x + m$

$y'' = 6x - 6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi: $\begin{cases} y'(2) = 3.2^2 - 6.2 + m = 0 \\ y''(2) = 6.2 - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + \left(3m^2 + 1\right)x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B.

$y' = x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + 3m^2 + 1$

$y'' = 2x + 2(m^2 - m + 2)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ khi: $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m - 3 = 0 \\ m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m - 1)x - 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m < \frac{1}{2}$.

B. Với mọi m, hàm số luôn có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m \neq \frac{1}{2}$.

D. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.

Lời giải

Chọn C.

Phương pháp trắc nghiệm

Hàm số bậc 3 có cực đại, cực tiểu thì $b^2-3ac>0 \Leftrightarrow 4m^2-(4m-1)>0$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\ne \frac{1}{2}$.

Câu 22. Với giá trị tham số $m\in(a;b)\setminus\{c\}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$) thì hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-6$ có 2 cực trị. Giá trị biểu thức $P=a+b+c$ là:

A. $P=-4$. **B.** $P=4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=-5$.

Lời giải

Chọn A.

$y'=3(m+2)x^2+6x+m$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne -2 \\ m^2+2m-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne -2 \\ -3<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-3;1)\setminus\{-2\} \Rightarrow P=a+b+c=-4$$

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m\in[-2020;2020)$ để hàm số $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$ có cực trị ?

A. 2038. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B.

* $y'=3mx^2+6mx-(m-1)$

+ Khi $m=0 \Rightarrow y'=1>0 \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến $\Rightarrow m=0$ không thỏa

+ Khi $m\ne 0 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3mx^2+6mx-(m-1)=0 \quad (1)$

$$\Delta'=9m^2+3m(m-1)=12m^2-3m$$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 12m^2-3m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\frac{1}{4} \end{array}\right.$

Suy ra có 2020 bao nhiêu giá trị nguyên âm

Câu 24. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\frac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow a^2-3b>0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x)=f'(x).\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}a\right)+\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}\right)x+c-\frac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}\right)x+c-\frac{1}{9}ab\ (d)$.

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c-\frac{1}{9}ab=0 \Leftrightarrow ab=9c$.

Khi đó $P=abc+ab+c \Leftrightarrow P=9c^2+10c \Leftrightarrow P=\left(3c+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}$.

Suy ra $\min P=-\frac{25}{9}$.

Câu 25. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

B. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$.

C. $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\backslash\{0\}$.

D. $m=2$.

Lời giải

Chọn B.

Phương pháp tự luận

$y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn: $x_1+2x_2=1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ (m-1)^2-3m(m-2)>0 \\ x_1x_2=\frac{3(m-2)}{m} \\ x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m} \\ x_1+2x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1=\frac{3m-4}{m} \\ x_2=\frac{2-m}{m} \\ x_1x_2=\frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1=\frac{3m-4}{m} \\ x_2=\frac{2-m}{m} \\ \left(\frac{3m-4}{m}\right)\left(\frac{2-m}{m}\right)=\frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Phương pháp trắc nghiệm

+ Chọn $m=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x^3-3x+\frac{1}{6}$

$\Rightarrow y'=x^2-3x$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$ suy ra hàm số có hai cực trị

Và không thoả $x_1+2x_2=1$. Loại **A, C**

+ Chọn $m=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2-4x$

$\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{2}x-4$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2+\frac{2}{2}x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$ suy ra hàm số có hai cực trị

Và có thoả $x_1+2x_2=1$. Loại **D**

Vậy đáp B

+ Cách làm này là loại đáp án sai chứ không phải chọn đáp án đúng nhé các em !!!

+ Chọn giá trị m cho khéo để loại trừ đáp án càng nhiều càng tốt.

Câu 26. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để : $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$

A. $m=\pm\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải

Chọn B.

Phương pháp tự luận

$y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$

Hàm số luôn luôn có cực trị với moi m

Theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=m^2-1 \end{cases}$

$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7 \Leftrightarrow (2m)^2-3\left(m^2-1\right)=7 \Leftrightarrow$ m= ±2

Cách 2 :

y'=0 $\Leftrightarrow x^2-2mx+\left(m^2-1\right)$=0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$

$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7 \Leftrightarrow (m+1)^2+(m-1)^2-(m-1)(m+1)=7$

$\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$.

A. $m<2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $0<m<2$.

Lời giải

Chọn D.

$y'=mx^2+4x+m$

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_{y'}>0\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-m^2>0\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$

Câu 28. Với các giá trị thực của tham số $m\in\left(\frac{a}{b};+\infty\right)\backslash\{c\}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x+2$ có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2}$

A. $P=-\frac{1}{2}$ **B.** $P=\frac{3}{5}$ **C.** $P=\frac{3}{2}$. **D.** $P=\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
* Ta có: $y'=x^2-2mx+(2m-1)$, $y'=0\Leftrightarrow g(x)=x^2-2mx+(2m-1)=0$ (1).
* Để đồ thị hàm số có hai cực trị dương $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\neq 0\\ \Delta'=m^2-2m+1>0\\ S=-\frac{b}{a}=2m>0\\ P=\frac{c}{a}=2m-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2>0\\ m>0\\ m>\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1\\ m>\frac{1}{2}\end{cases}.$$

* Vậy $\begin{cases}m\neq 1\\ m>\frac{1}{2}\end{cases}$ là những giá trị cần tìm thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow P=\frac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2}=\frac{3}{2}$

Câu 29. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ (với $a\in\mathbb{Z}$) thì đồ thị hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này cách đều trục tung Oy. Biết t thoả mãn phương trình sau: $4t^2+3at+a^2+3a-9=0$. Tính giá trị của t.

A. $t=3$ **B.** $t=\pm\dfrac{3}{2}$ **C.** $t=\dfrac{3}{2}$. **D.** $t=\pm 3$

Lời giải

Chọn B.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=6x^2+2mx-12=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1\neq x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=6\neq 0 \\ \Delta'=m^2+72>0 \end{cases} \Rightarrow \forall m\in\mathbb{R} \text{ hàm số luôn có 2 cực trị.}$$

* Hai điểm cực trị cách đều trục tung $\Leftrightarrow |x_1|=|x_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2\ \left(do\ x_1\neq x_2\right) \\ x_1=-x_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2=0 \Leftrightarrow \frac{-2m}{6}=0 \Leftrightarrow \boxed{m=0}.$$

$$\Rightarrow 4t^2-9=0 \Leftrightarrow t=\pm\frac{3}{2}$$

Câu 30. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y=-4x\ (d)$.

A. $m\in\{1\}$. **B.** $m\in\{0;1\}$. **C.** $m\in\left\{0;\dfrac{1}{2};1\right\}$. **D.** $m\in\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn A.

$y'=6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)$

Hàm số có 2 cực trị $m\neq\dfrac{1}{3}$

Bấm máy tính:

$$2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x-\left(6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{m-1}{6}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$1997001000-8994001i=\left(2.10^9-3.10^6+10^3\right)-\left(9.10^6-6.10^3+1\right)i=$$

$$=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m$$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m\ (\Delta)$

$$\Delta\equiv d \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(9m^2-6m+1\right)=-4 \\ 2m^3-3m^2+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 - (m+1)x + 1$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) $y' = 3mx^2 + 2mx - (m+1)$

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \ge 0$.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\frac{3}{4} < m < 0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Hàm số là hàm đa thức nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) Ta có $y' = 3mx^2 + 2mx - (m+1)$

c) $y' = 3mx^2 + 2mx - (m+1)$

Với $m = 0$ thì $y' = -1 < 0$ (không thoả mãn)

Với $m \ne 0$ thì yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m^2 + 3m \le 0 \end{cases}$ (không tồn tại)

d) $y' = 3mx^2 + 2mx - (m+1)$

Với $m = 0$ thì $y' = -1 < 0$ (thoả mãn)

Với $m \ne 0$ thì yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4m^2 + 3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le m < 0$

Suy ra $-\frac{3}{4} \le m \le 0$

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -m$ và $x = -m - 2$

c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ khi và chỉ khi $m \ge 0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Hàm số là hàm đa thức nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Ta có $y' = x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m$. Do $\Delta' = b'^2 - ac = (m+1)^2 - (m^2 + 2m) = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -m$ và $x_2 = -m-2$.

c) Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-m-2$		$-m$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(-m-2)$	↘	$y(-m)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-m-2$		$-m$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(-m-2)$	↘	$y(-m)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m-2 \le -1 \\ -m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Câu 33. Cho hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$, với m là tham số

a) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $-2 < m < 2$

b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m = 2$

c) Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $m \le -2$ hoặc $m \ge 2$

d) Hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD} < x_{CT}$ và chỉ khi $0 < m < 2$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có $y' = mx^2 + 4x + m$. Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phâ b biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ 4 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ -2 < m < 2 \end{cases} (1)$$

b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi hàm số này suy biến về hàm bậc hai nghĩa là $\dfrac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

c) Với $m=0$ thì hàm số trở thành $y=2x^2+1$. Hàm số này có một điểm cực tiểu. Điều này không thoả mãn yêu cầu bài toán

Với $m\neq 0$. Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4-m^2\leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq -2 \\ m\geq 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

d) Dựa vào đạng dồ thị hàm số bậc ba, hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD}<x_{CT}$ khi $m>2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị m cần tìm là $0<m<2$.

Câu 34. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ khi $m=1$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 2.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=m-1 \\ x_2=m+1 \end{array}\right.$

Do $x_1\neq x_2$ với mọi m nên hàm số luôn có hai điểm cực trị.

c) Dễ thấy $x=m+1$ là điểm cực tiểu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ khi $m=2$

d) Với mọi m, toạ độ hai điểm cực trị là $A(m+1;-3m-2)$ và $B(m-1;-3m+2)$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $AB=\sqrt{\left(x_N-x_M\right)^2+\left(y_N-y_M\right)^2}=2\sqrt{5}$

Câu 35. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ (m là tham số).

a) $y'=x^2-2mx+m+1$.

b) Với $m=-1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Với $m=-1$ thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

d) Có 4 số nguyên của tham số m thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

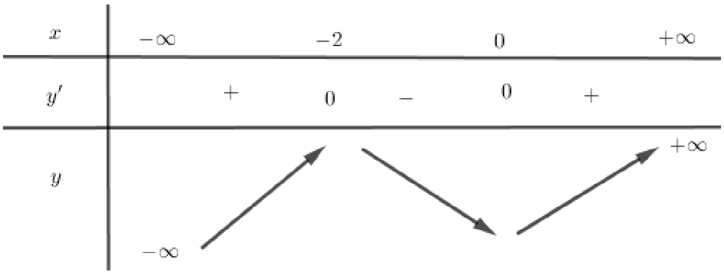
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

b) c) Với $m = -1$, ta có $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$.

$$y' = x^2 + 2x\,;\, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận:

Với $m = -1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là $(0;-1)$ và một điểm cực đại là $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

d) $y' = x^2 - 2mx + m + 1$

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$x^2 - 2mx + m + 1 \ge 0 \;\; \forall \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - m - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le m \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0,1\}$

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ (m là tham số).

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Khi $m = 1$ thì $f(2025) < f(2024)$

c) Khi $m < -3$ hoặc $m > 3$ thì hàm số có 2 điểm cực trị

d) Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \le 5$. Biết $S = (a;b]$. Khi đó $2b - a = \sqrt{61} - 1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$

Khi $m = 1$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ suy ra $f(2024) > f(2023)$

c) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$ (*)

d)Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2, theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

Ta lại có $|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 \leq 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ (**)

Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \leq \dfrac{\sqrt{61}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3$.

Câu 37. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ (m là tham số).

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) $y' = 6x^2 + (m-1)x + 6m(1-2m)$

c) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -m$ và $x = 1 - 2m$

d) Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho song song đường thẳng $y = -4x$, khi đó tổng tất cả các giá trị thực của tham số m bằng $-\dfrac{1}{3}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$,

c) $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 1 - 2m \end{array}\right.$.

d) $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 1 - 2m \end{array}\right.$

Để hàm số có hai cực trị thì $m \neq 1 - 2m \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(m;-7m^3+3m^2\right)$, $B\left(1-2m;20m^3-24m^2+9m-1\right)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}=\left(1-3m;(3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left((3m-1)^2;1\right)$.

Do đó $AB:(3m-1)^2x+y-2m^3+3m^2-m=0 \Leftrightarrow y=-(3m-1)^2x+2m^3-3m^2+m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y=-4x$ thì:

$$\begin{cases}-(3m-1)^2=-4\\2m^3-3m^2+m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\\ \begin{cases}m\neq 0\\m\neq\dfrac{1}{2}\\m\neq 1\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}.$$

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$, với m là tham số.

a) $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}$

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\geq 5$.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\leq 5$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi $m\in(5;8]$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Điều kiện $x+m\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -m$. Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

b) Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m-5>0 \Leftrightarrow m>5$.

c) Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m-5<0 \Leftrightarrow m<5$.

d) Hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{m-5}{(x+m)^2} > 0 \\ -m \notin (-\infty; -8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ -m \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m \leq 8$$

Câu 39. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$, với m là tham số

a) $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2}{(x-m)^2}$

b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = 2$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y = 2x + 2m$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Hàm số xác định khi $x - m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$ nên tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2}{(x-m)^2}$.

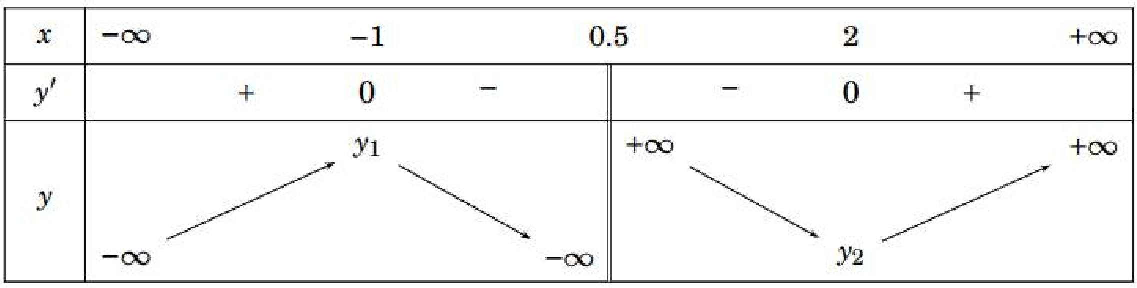
b) Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác m hay $g(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2$ có hai ngiệm phân biệt khác m.

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + m + 2 > 0 \\ m^2 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$$

Vì m nguyên nên $m = \{0;1\}$ nên có hai giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

c) Hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ thì $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$

Thử lại với $m = \dfrac{1}{2}$ thì $y' = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - \dfrac{1}{2}}$ và có bảng biến thiên như sau:



Vậy với $m = \dfrac{1}{2}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

d) Cho hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Nếu hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có dạng $y=\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$.

Áp dụng vào bài toán ta được $y=\dfrac{\left(x^2-2mx+m+2\right)^2}{(x-m)^2}=2x-2m$

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$, với $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và m là tham số

a) Nếu đặt $t=\cot x$ thì hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ với $t\in(0;1)$.

b) Nếu đặt $t=\cot x$ thì tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

c) Nếu đặt $t=\cot x$ thì $f'(t)=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$

d) Có 2026 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Lời giải

a) Đặt $t=\cot x$. Ta có $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1)$, $t=\cot x$ là hàm nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó, $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ với $t\in(0;1)$.

b) Tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

c) $f'(t)=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$.

d) hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$ đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi hàm số $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ đồng biến trên $(0;1)$ hay $f'(t)\ge 0,\forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-2mt+1\ge 0,\forall t\in(0;1)\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{t^2+1}{2t},\forall t\in(0;1)\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\quad(*).$$

Xét hàm số $y = g(t) = \dfrac{t^2+1}{2t}$ trên khoảng $(0;1)$.

Khi đó $g'(t) = \dfrac{t^2-1}{2t^2} < 0, \forall t \in (0;1)$ nên hàm số $y = g(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \le g(1) \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên và thuộc đoạn $[-2024;2024]$ nên có 2026 giá trị của m thoả mãn.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 41. Cho hàm số sau $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 5

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-x^2-2mx+2m-3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}<0 \\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\ \ (hn)\\ m^2+2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m\le 1$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-3;-2;-1;0;1\}$

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2024;2025)$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2026

Ta có $y'=3x^2-6x+2-m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2-6x+2-m\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$$
$$\Leftrightarrow m\le 3x^2-6x+2,\forall x\in(2;+\infty).$$

Xét hàm số $f(x)=3x^2-6x+2,\forall x\in(2;+\infty)$.

$f'(x)=6x-6$;

$f'(x)=0\Rightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		0		$+$	
$f(x)$			2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $m\le 2$.

Mà $m\in\mathbb{Z};m\in(-2024;2025)\Rightarrow m=\{-2023;-2022;...;0;1;2\}$.

Suy ra có 2026 giá trị nguyên của tham số m

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $y' = -3x^2 - 6x + 4m - 9 \le 0 \quad \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m \le 3x^2 + 12x + 9 \quad \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m \le \min\limits_{(-\infty;-1]} f(x)$

$f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Ta có $f'(x) = 6x + 12$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x) = -3 \Rightarrow 4m \le -3 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{4}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10) \Rightarrow m = \{-9;-8;...;-2;-1\}$.

Suy ra có 9 giá trị nguyên của tham số m

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để $y = \dfrac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \dfrac{m-1}{(x+1)^2}$

Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \ne -1 \Leftrightarrow m < 1$

Mà $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10) \Rightarrow m = \{-9;-8;...;-1;0\}$.

Suy ra có 10 giá trị nguyên của tham số m

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 0

* Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;1)$.

* Ta có: $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}, \forall x\neq -m$.

* Để hàm đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'<0, \forall x\in(-\infty;1) \\ -m\notin(-\infty;1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ -m\notin(-\infty;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ -m\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<-1.$$

* Vậy thỏa yêu cầu bài toán thì: $-2<m<-1$.

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=\varnothing$.

Câu 46. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+18}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2;5)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-m}{2}\right\}$.

Ta có $y=\dfrac{mx+18}{2x+m} \Rightarrow y'=\dfrac{m^2-36}{(2x+m)^2}$.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-36<0 \\ \dfrac{-m}{2}\notin(-2;5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}\geq 5 \\ -\dfrac{m}{2}\leq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq -10 \\ m\geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 4\leq m<6.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m là $m=\{4;5\}$.

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\text{x}+9}{4\text{x}+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{m}{4}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\frac{m^2-36}{(4x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;4)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-36<0 \\ -\frac{m}{4}\notin(0;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<6$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m là $\{0;1;2;3;4;5\}$.

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\frac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;\ 7)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 9

Điều kiện: $3x+2m-1\ne 0 \Leftrightarrow x\ne \frac{-2m+1}{3}$

Đạo hàm $y'=\frac{(m+1)(2m-1)-54}{(3x+2m-1)^2}=\frac{2m^2+m-55}{(3x+2m-1)^2}$

Hàm số $y=\frac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;\ 7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2+m-55<0 \\ \frac{-2m+1}{3}\notin(3;7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11}{2}<m<5 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{-2m+1}{3}\le 3 \\ \frac{-2m+1}{3}\ge 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11}{2}<m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge -4 \\ m\le -10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -4\le m<5$$

Mà $m\in(-10;10)$, m nguyên nên $m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49. Số các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y=\frac{-mx-2025}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 86

Điều kiện xác định: $x\ne -m$.

Ta có: $y=\frac{-mx-2025}{x+m}\Rightarrow y'=\frac{-m^2+2025}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ khi và chỉ khi $y'=\dfrac{-m^2+2025}{(x+m)^2}>0,\forall x\in(-2;2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+2025>0\\ \left[\begin{array}{l}-m\le -2\\ -m\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-45;45)\\ m\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-45;-2]\cup[2;45)$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-45;-2]\cup[2;45)$ suy ra $m=\{-44;-43;...;-2;2;3;...;44\}$

Vậy có tất cả 86 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 14

Đặt $t=\sqrt{6-x}\Rightarrow f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}\Rightarrow f'(x)=f'(t).t'(x)$.

Với $x\in(-8;5)$, ta có $t'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{6-x}}<0,\ \forall x\in(-8;5)$ và $x\in(-8;5)\Rightarrow t\in(1;\sqrt{14})$.

Từ đó ta suy ra hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8;5)$ khi hàm số $f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;\sqrt{14})$.

$f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;\sqrt{14})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m^2+4m-3<0\\ -m\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}-m^2+4m-3<0\\ -m\ge\sqrt{14}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\in[-1;1)\cup(3;+\infty)\\ m\le-\sqrt{14}\end{array}\right.$

Do $m\in(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-1;0;4;5;6;7;8;9\}$.

Như vậy có 14 số m nguyên trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 11

Đặt $t=\sqrt{1-x}$ với $x\in(-3;0)\Rightarrow t\in(1;2)$.

Hàm số đã cho trở thành $f(t)=\dfrac{t+1}{t+m}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{m-1}{(t+m)^2}$.

Ta có $t'=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}<0,\ \forall x\in(-3;0)$ nên $t=\sqrt{1-x}$ nghịch biến trên $(-3;0)$.

Yêu cầu của bài toán tương đương với tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên

$(1;2)\Leftrightarrow f'(t)<0,\ \forall t\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\t+m\neq 0\end{cases},\ \forall t\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\-m\neq t\end{cases},\ \forall t\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\-m\notin(1;2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\\left[\begin{array}{l}-m\geq 2\\-m\leq 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq m<1\\m\leq -2\end{array}\right.$.

Vì $m\in\mathbb{Z},m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...;0\}$.

Như vậy có 11 giá trị m cần tìm

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 20

Tập xác định: $D=R\backslash\{1\}$.

$y'=\dfrac{2x^2-4x+3-m}{(x-1)^2}=\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Ta có: $f(x)\geq 0\Leftrightarrow m\leq 2x^2-4x+3$.

Đặt $g(x)=2x^2-4x+3\ \Rightarrow g'(x)=4x-4$

Hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$ đồng biến trên $(-\infty;-1)\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow m\leq\min\limits_{(-\infty;-1]}g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x),\ \forall x\in(-\infty;-1]$ ta suy ra $m\leq 9$.

Vì $m\in\mathbb{Z},m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...;8;9\}$.

Như vậy có 20 giá trị m cần tìm

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 12

Tập xác định: $D=R\backslash\{1\}$.

$y'=\dfrac{2x^2-4x+3-m}{(x-1)^2}=\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$

Ta có: $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow m\le 2x^2-4x+3$. Đặt $g(x)=2x^2-4x+3 \quad \Rightarrow g'(x)=4x-4$

Hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$ đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[1;2]} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x),\ \forall x\in(-\infty;-1]$ ta suy ra $m\le 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...;0;1\}$.

Như vậy có 12 giá trị m cần tìm

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1+m}{5x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2010

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{5}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{5x^2+2mx-3m+1}{(5x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{5x^2+2mx-3m+1}{(5x+m)^2}\le 0\forall x\in(-3;1)\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+2mx-3m+1\le 0\forall x\in(-3;1)\\ -\dfrac{m}{5}\notin(-3;1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9m+46\le 0\\ -m+6\le 0\\ \left[\begin{array}{l}m\le -5\\ m\ge 15\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\dfrac{46}{9}\\ m\ge 6\\ \left[\begin{array}{l}m\le -5\\ m\ge 15\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 15$$

Do nguyên dương không lớn hơn 2024 nên $15\le m\le 2024$.

Vậy có tất cả 2010 giá trị.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+2x-1-5m}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2019

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$ và có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+3m+1}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$

$\Leftrightarrow y'=\dfrac{2x^2-4mx+3m+1}{(x-m)^2}\le 0\forall x\in(1;5)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-4mx+3m+1\le 0\forall x\in(1;5)\\ m\notin(1;5)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-m+3\le 0\\ -17m+51\le 0\\ \left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 3\\ m\ge 3\\ \left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 5$

Do nguyên dương bé hơn 2024 nên $5\le m\le 2023$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị.

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-2-m}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}y'\le 0,\forall x\in(1;3)\\ y'\ge 0,\forall x\in(4;6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-2-m\le 0,\forall x\in(1;3)\\ x^2-2x-2-m\ge 0,\forall x\in(4;6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge x^2-2x-2,\forall x\in(1;3)\\ m\le x^2-2x-2,\forall x\in(4;6)\end{cases}$

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-2,\ g'(x)=2x-2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		3		4		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0				$+$				
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\nearrow$	6	$\nearrow$	18	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*)\Leftrightarrow 3\le m\le 6$

Vì m là số nguyên nên chọn $m\in\{3;4;5;6\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{m\sin x+4}{\sin x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Đk: $\sin x \neq -m$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}$

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x>0, 0<\sin x<1$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x)<0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}<0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \left[\begin{array}{l} -m\le 0 \\ -m\ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<m\le -1 \\ 0\le m<2\end{array}\right..$$

Mà m nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025;2025]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2026

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\{m\}$.

Đặt $t=\sin x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$. Ta có hàm số $t=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

$$\Leftrightarrow f'(t)>0,\ \forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \frac{-2m+1}{(t-m)^2}>0,\ \forall t\in(0;1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1>0 \\ m\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m\le 0.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-2025;2025]$ nên $m\in\{-2025;-2024;...;-1;0\}$.

Như vậy có 2026 giá trị m cần tìm

Câu 59. Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + 3x - 2$ không có cực trị.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 7

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

* Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 2(m-1)x + 3 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 4$.

Suy ra tổng các giá trị nguyên là 7.

Câu 60. Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3x^2 - (m+1)x + 3m^2 - m + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-100;100]$ để hàm số có cực đại, cực tiểu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 200

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu (2 cực trị) $\Leftrightarrow y' = 3(m-1)x^2 - 6x - (m+1) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \ne 0 \\ \Delta' = 9 + 3(m-1)(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ \Delta' = m^2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ne 1.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-100;100]$ nên $m \in \{-100;-99;...;100\} \setminus \{1\}$

Như vậy có 200 giá trị m cần tìm

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 19

$y' = 4mx^3 - 2(m+1)x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x(2mx^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 = m+1 \end{array} \right.$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m(m+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array} \right.$

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-10;10]$ nên $m \in \{-10;-9;...;10\} \setminus \{-1;0\}$

Như vậy có 19 giá trị m cần tìm

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số: $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$ có 2 cực trị?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 10

Hàm số đã cho xác định trên: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-m=0=g(x)$

$\Delta=-1+m$

để hàm số có 2 cực trị thì: $\begin{cases} g(-1)\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2-m\neq 0 \\ -1+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ m<1 \end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...;0\}\setminus\{-1\}$

Như vậy có 10 giá trị m cần tìm

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số đã cho cũng đi qua điểm $A(1;-1)$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -4

Hàm số đã cho xác định trên: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-m=0=g(x)$

$\Delta=-1+m$

để hàm số có 2 cực trị thì: $\begin{cases} g(-1)\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2-m\neq 0 \\ -1+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ m<1 \end{cases}$

Ta có: $y=\dfrac{\left[x^2+(m+1)x+2m+1\right]'}{(x+1)'}=2x+m+1$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y=-2x+m+1$ với $\begin{cases} m\neq -1 \\ m<1 \end{cases}$

điểm $A(-1;-1)$ thuộc phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị nên :

$-1=-2.1+m+1 \Rightarrow m=-4$ (thỏa)

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-5;10)$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx}{1-x}$ có 2 điểm cực trị?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 11

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x+m}{(1-x)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x+m=0 \quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=-x^2+2x+m=0 \quad (co\ nghiêm) \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta_g'=1+m>0 \Leftrightarrow m>-1 \end{cases} \\ 1+m\neq 0 \end{cases}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in(-5;10)$ nên $m\in\{-1;0;...;9\}$

Như vậy có 11 giá trị m cần tìm

Câu 65. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-5;10)$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow g(x)=x^2+2x+2m-2=0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=3-2m>0 \\ g(-1)=2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in(-5;10)$ nên $m\in\{-4;-3;...;1\}$

Như vậy có 6 giá trị m cần tìm

Câu 66. Biết đồ thị của hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c \quad (a,b,c\in\mathbb{R})$ có một điểm cực trị là $A(-1;29)$ và đi qua điểm $B(2;2)$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 12

Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c\left(a,b,c \in \mathbb{R}\right)$ có một điểm cực trị là $A\left(-1;29\right)$ và đi qua điểm $B\left(2;2\right)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} y\left(-1\right) = 29 \\ y'\left(-1\right) = 0 \\ y\left(2\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-1\right)^3 + a.\left(-1\right)^2 + b.\left(-1\right) + c = 29 \\ 3.\left(-1\right)^2 + 2a.\left(-1\right) + b = 0 \\ 2^3 + a.2^2 + b.2 + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = 24 \end{cases}$.

Khi đó $a + b + c = -3 - 9 + 24 = 12$.

Câu 67. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$ có điểm cực tiểu là $I\left(1;3\right)$. Tính $m + n$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n \Rightarrow y' = 3x^2 - 4mx + m^2 \Rightarrow y'' = 6x - 4m$

Do $I\left(1;3\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$

$$\Rightarrow \begin{cases} I\left(1;3\right) \in y \\ y'\left(1\right) = 0 \\ y''\left(1\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 + n = 3 \\ m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 + n = 3 \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right. \\ m < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy $m + n = 4$.

Câu 68. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -9

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-m\right\}$

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{\left(x + m\right)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -m \\ x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -m \\ \left[\begin{array}{l} x = -m + 1 \\ x = -m - 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m + 1 \\ x = -m - 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-m-1$		$-m$		$-m+1$		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-m-1$.

Vậy $y(-m-1)=7 \Leftrightarrow -m-2=7 \Leftrightarrow m=-9$.

Câu 69. Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b\in\mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 8

Ta có: $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2+12m^2-4>0 \Leftrightarrow |m|>\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Khi đó, ta có $x_1+x_2=m, x_1x_2=1-3m^2$.

$$x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Rightarrow 1-3m^2+2m=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\ (l) \\ m=\frac{2}{3}\ (t/m) \end{array}\right. \Rightarrow a+2b=8.$$

Câu 70. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2;4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $y'=3x^2+6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2m \end{array}\right.$.

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow -2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó $A\left(0;4m^2-2\right), B\left(-2m;4m^3+4m^2-2\right) \Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-0}{-2m-0}=\frac{y-\left(4m^2-2\right)}{4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$.

$d\left(C,AB\right)=\dfrac{\left|4m^2+4-4m^2+2\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{4m^4+1}}$.

Diện tích tam giác ABC là

$$S=\frac{1}{2}.AB.d\left(C,AB\right)=6\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2\left|m\right|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{6}{\sqrt{4m^4+1}}=6\Leftrightarrow\left|m\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right..$$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là 2.

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\left(m^2+5m\right)x^3+6mx^2+6x-6$ có cực trị tại $x=1$.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3\left(m^2+5m\right)x^2+12mx+6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ nên

$y'(1)=0$

$\Leftrightarrow -3m^2-3m+6=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$

+ Với $m=-2 \Rightarrow y=6x^3-12x^2+6x-6$

$y'=18x^2-24x+6$

$y'=0 \Leftrightarrow 18x^2-24x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=1$ là giá trị cực tiểu nên $m=-2$ thoả

+ Với $m=1 \Rightarrow y=-6x^3+6x^2+6x-6$

$y'=-18x^2+12x+6$

$y'=0 \Leftrightarrow -18x^2+12x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=1$ là giá trị cực đại nên $m=1$ thoả

Vậy $m=-2$ và $m=1$ là giá trị cần tìm

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} \Rightarrow y''=\dfrac{2x+2m}{(x+m)^4}$

Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ khi và chỉ khi:

$y'(2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2+4m-3}{(2+m)^2}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m-3=0 \\ m\neq -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$

+ Với $m=-3 \Rightarrow y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=2$ là giá trị cực tiểu nên $m=-3$ thoả

+ Với $m=1 \Rightarrow y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=2$ không phải là giá trị cực tiểu nên $m=1$ không thoả

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x-(2m-5)}{(x-1)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x-(2m-5)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x-(2m-5)=0 \quad (co\ nghiêm) \\ \qquad g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta'=-2m+6>0 \end{cases} \\ -2m+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<3.$

Vậy $m<3$ là giá trị cần tìm

Câu 74. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$y'=\dfrac{x^2-2x+m^2-3m+3}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow g(x)=x^2-2x+m^2-3m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=-m^2+3m-2>0 \\ g(1)=m^2-3m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<2$

Vậy $1<m<2$ là giá trị cần tìm

Câu 75. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ có cực đại và cực tiểu.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-1}{(x-m)^2},\forall x\neq m$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow y'=x^2-2mx+m^2-1=0$.

$\Delta'_{y'}=m^2-\left(m^2-1\right)=1>0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\forall m\in\mathbb{R}$ thì $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt: $x_1=m-1$ và $x_2=m+1$.

Câu 76. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-2}{mx-1}$ có cực trị.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{m}\right\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{mx^2-2x+m}{(mx-1)^2},\ \forall x\neq\dfrac{1}{m}$.

Để hàm số có cực trị thì phương trình $y'=0$ có nghiệm $x\neq\dfrac{1}{m}$.

$$\Leftrightarrow\frac{mx^2-2x+m}{(mx-1)^2}=0 \text{ có nghiệm } x\neq\frac{1}{m}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)=mx^2-2x+m=0\ \left(co\ nghiêm\right)\\ g\left(\dfrac{1}{m}\right)\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}a=m\neq 0\\ \Delta'=1-m^2\geq 0\end{cases}\\ m-\dfrac{1}{m}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ -1\leq m\leq 1\\ m\neq\pm 1\end{cases}\Rightarrow -1<m<1.$$

Câu 77. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}(3-m)x^3-(m+3)x^2+(m+2)x-2024$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Để hàm số (1) luôn tăng trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=(3-m)x^2-2(m+3)x+(m+2)\geq 0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

* Trường hợp 1: $3-m=0\Leftrightarrow m=3\Rightarrow y'=-12x+5\Rightarrow m=3$ không thỏa

* Trường hợp 2: $3-m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 3$

Để hàm số (1) luôn tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - m > 0 \\ \Delta' = (m+3)^2 - (3-m)(m+2) = 2m^2 + 5m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ -\dfrac{3}{2} \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leq m \leq -1.$$

Vậy $-\dfrac{3}{2} \leq m \leq -1$ là giá trị cần tìm

Câu 78. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có.

$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$. $ycbt \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Ta có.

$g'(x) = 6x - 6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	2		$+\infty$
$g'(x)$		0		$+$	
$g(x)$			4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $m \leq 4$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 79. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{m^2 - 3m - 4}{(x-m)^2}$.

Hàm số $f(x) = \dfrac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ m \notin (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 2$$

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 80. Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{(m+1)m-(2m+2)}{(x+m)^2}=\dfrac{m^2-m-2}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m\notin(-1;+\infty)\\ m^2-m-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m\le -1\\ \left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>2$.

Câu 81. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\dfrac{\cos x+1}{10\cos x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x\,(0<t<1)\Rightarrow y=\dfrac{t+1}{10t+m}\Rightarrow y'=\dfrac{m-10}{(10t+m)^2}.t'$

Hàm số $y=\dfrac{\cos x+1}{10\cos x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y'=\dfrac{m-10}{(10t+m)^2}.t'>0,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Vì trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm số $t=\cos x$ nghịch biến nên $t'<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Từ đó suy ra: $\begin{cases}m-10<0\\ -\dfrac{m}{10}\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<10\\ \left[\begin{array}{l}m\le -10\\ m\ge 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -10\\ 0\le m<10\end{array}\right.$.

Theo đề bài m nguyên dương nên $m\in\{1,2,...,9\}$.

Câu 82. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$. Tính số phần tử của tập S.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{1-x}$, $x\in(-15;-3)\Rightarrow t\in(2;4)$ và $y_t=\dfrac{2t-14}{m-t}$.

Ta có $y'_x=y'_t.t'_x=\dfrac{2m-14}{(m-t)^2}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$

$\Leftrightarrow\ y'_x=\dfrac{2m-14}{(m-t)^2}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)>0,\quad\forall x\in(-15;-3),\ \forall t\in(2;4)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2m-14}{(m-t)^2} < 0,\ \forall t \in (2;4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-14<0 \\ m-t \neq 0 \end{cases},\ \forall t \in (2;4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ m \notin (2;4) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 \le m < 7 \\ m \le 2 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4 \le m < 7 \\ m \le 2 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow m = \{1;2;4;5;6\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 83. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \ge 0, \forall x > 1$ và $m \le 1$ (1)

Vì $\Delta_g' = 2(m+1)^2 \ge 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \le x_2 \le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1) = 2(m^2-6m+1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} = m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 3-2\sqrt{2} \approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall \in [1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2} \le 0, \forall \in [1;+\infty) \Leftrightarrow mx^2+4mx+14 \le 0, \forall \in [1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{-14}{x^2+4x} = g(x), \forall \in [1;+\infty) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{x\ge 1} g(x) = g(1) = -\dfrac{14}{5}$.

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = \dfrac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{m}{5}\right\}$ và có đạo hàm $y' = \dfrac{5x^2-2mx+5}{(5x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ thì $y' \le 0, \forall x \in (1;4)$.

tức là $\begin{cases} 5x^2-2mx+5 \le 0, \forall x \in (1;4) \\ x \ne \dfrac{m}{5}, \forall x \in (1;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{5x^2+5}{2x}, \forall x \in (1;4) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{5} \le 1 \\ \dfrac{m}{5} \ge 4 \end{array}\right. \end{cases}$ $\left(Do\ 2x > 0, \forall x \in (1;4)\right)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{5x^2+5}{2x}, \forall x \in [1;4]$ và có đạo hàm $g'(x) = \dfrac{5x^2-5}{2x^2} > 0, \forall x \in [1;4]$.

Hàm số đồng biến trên $(1;4)$ suy ra $\max\limits_{x\in[1;4]} g(x) = g(4) = \dfrac{85}{8}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} m \ge \dfrac{5x^2+5}{2x}, \forall x \in (1;4) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{5} \le 1 \\ \dfrac{m}{5} \ge 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{85}{8} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 5 \\ m \ge 20 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 20$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-2;25]$ nên $m \in \{20;21;22;23;24;25\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 86. Cho hàm số $y = x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu .

Lời giải

$y' = 3x^2-12x+3(m+2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow y' = x^2-4x+(m+2) = 0$

Hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Chia y cho y' ta được : $y = \dfrac{1}{3}y'(x-2)+(m-2)(2x+1)$

Điểm cực trị tương ứng : $A\left(x_1;(m-2)(2x_1+1)\right)$ và $B\left(x_2;(m-2)(2x_2+1)\right)$

Có : $y_1.y_2 = (m-2)^2\left(4x_1x_2 + 2(x_1+x_2)+1\right)$

Với : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m+2 \end{cases}$ nên : $y_1.y_2 = (m-2)^2(4m+17)$

Hai cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện, ta được : $-\dfrac{17}{4} < m < 2$.

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B và hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\dfrac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $(m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ (*). Khi đó hai điểm cực trị là $A(2;9m), B(2m;-4m^3+12m^2-3m+4)$.

ΔABC nhận O làm trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+2m-1=0 \\ -4m^3+12m^2+6m+4-\dfrac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ (thoả (*).

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2+7m-1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

$\Leftrightarrow y' = g(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2+7m-1) = 0$ (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa $\left[\begin{array}{l} x_1 < 1 < x_2 \quad (2) \\ x_1 < x_2 \le 1 \quad (3) \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \Leftrightarrow a.g(\alpha) = -3.g'(1) < 0 \\ (3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3.g'(1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m^2+m-4) < 0 \\ \begin{cases} 9(m+1)^2 - 3(3m^2+7m-1) > 0 \\ 3(3m^2+m-4) \ge 0 \\ m+1 < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases} -3m+12>0 \\ \left(3m^2+m-4\right) \geq 0 \\ m<0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases} m<4 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -\dfrac{4}{3} \\ m \geq 1 \end{array}\right. \\ m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ m \leq -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m<1$$

Vậy $m<1$ là giá trị cần tìm

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

Lời giải

$y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)$

Lấy y chia y’ ta được phương trình qua 2 điểm cực trị là: $y=2m^2x-2m^2-2$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;2m^2x_1-2m^2-2\right)$; $B\left(x_2;2m^2x_2-2m^2-2\right)$

ΔOAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+\left(2m^2x_1-2m^2-2\right)\left(2m^2x_2-2m^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4m^2\left(m^2+1\right)\left(x_1+x_2\right)+4\left(m^2+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(1+4m^4\right)+4\left(m^2+1\right)\left(1+m^2-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(4m^4+4m^2+5\right)=0 \Leftrightarrow m=\pm 1.$

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

Lời giải

Chọn A.

Ta có **:** $y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)=-3\left(x^2-2x-m^2+1\right)$.

$g\left(x\right)=x^2-2x-m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta'=m^2$. Do đó: y có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g\left(x\right)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta'>0 \Leftrightarrow$ $m \neq 0$ (1)

Khi đó y' có các nghiệm là: $1\pm m$ $\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(1-m;-2-2m^3\right)$ $\Rightarrow$ $OA^2=\left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2$.

$\overrightarrow{OB}\left(1+m;-2+2m^3\right)$ $\Rightarrow$ $OB^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi :

$OA=OB$

$\Leftrightarrow$ $OA^2=OB^2$

$\Leftrightarrow$ $\left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$

$\Leftrightarrow$ $-4m+16m^3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 91. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$.

Lời giải

$y'=3x^2-6mx$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m\neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;4m^3); B(2m;0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m;2m^3)$.

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ là AB vuông góc với đường thẳng $(d): y=x$ và

$$I\in(d) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A, B và thoả mãn $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ) .

Lời giải

Ta có: $y'=m(3x^2-6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3m - 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -m - 3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0;3m-3);B(2;-m-3)$.

Ta có : $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20 \Leftrightarrow 11m^2 + 6m - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 93. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $\Delta : x + my + 3 = 0$ tạo với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ (C) một góc α, biết $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Đường thẳng đi qua ĐCĐ, ĐCT là $\Delta_1 : 2x + y = 0$ có VTPT $\vec{n}_1(2;1)$

Đường thẳng đã cho $\Delta : x + my + 3 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2(1;m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\Delta, \Delta_1) = \left|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right| = \dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{4}{5}$

$\Leftrightarrow 25(m^2 + 4m + 4) = 5.16.(m^2 + 1) \Leftrightarrow 11m^2 - 20m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{2}{11} \end{array}\right.$

Câu 94. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa đọ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Ta có : $y' = 6x^2 - 18x + 12$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y(1) = 5 + m \\ x = 2 \Rightarrow y(2) = 4 + m \end{array}\right.$

$A(1;5+m)$ và $B(2;4+m)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\overrightarrow{OA} = (1;5+m)$, $\overrightarrow{OB} = (2;4+m)$, $\overrightarrow{AB} = (1;-1)$

OAB là 1 tam giác $\Leftrightarrow -4 - m \neq 2 \Leftrightarrow m \neq -6$

Chu vi của ΔOAB là: $2p = \sqrt{1 + (m+5)^2} + \sqrt{4 + (m+4)^2} + \sqrt{2}$

Sử dụng tính chất $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ với $\vec{u} = (1;-5-m)$ và $\vec{v} = (2;4+m)$

Từ đó ta có : $\sqrt{1 + (m+5)^2} + \sqrt{4 + (m+4)^2} + \sqrt{2} \geq \sqrt{3^2 + (-1)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{10} + \sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{-5-m}{4+m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{14}{3}$.

Vậy chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)$ khi $m=-\dfrac{14}{3}$.

Câu 95. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx}{1-x}$. Tìm m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x+m}{(1-x)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x+m=0\ \ (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=-x^2+2x+m=0\ \ (co\ nghiêm) \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta'_g=1+m>0 \end{cases} \\ 1+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m>-1}\ \ (2)$

Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1, x_2, nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viet: $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2;\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-m\ \ (3)$

Giả sử $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có:

$y_1=\dfrac{2x_1+m}{-1}=-2x_1-m;\ y_2=-2x_2-m$ (thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

[thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị: $y=\dfrac{(x^2+mx)'}{(1-x)'}=\dfrac{2x+m}{-1}=-2x-m$]

Theo đề bài, ta có: $MN=10\Leftrightarrow MN^2=100\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=100\ \ (4)$

Thay (3) vào (4), ta được: $(x_2-x_1)^2+4(x_2-x_1)^2=100\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2=20$

$\Leftrightarrow (x_2+x_1)^2-4x_1x_2=20\Leftrightarrow 4+4m=20\Rightarrow m=4$

So lại với $(2)\Rightarrow m=4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 96. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$. Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị, tìm tham số m để diện tích ΔOAB bằng 2.

Lời giải

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

* Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2};\ \forall x\neq -1$. Cho $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=m+1 \\ x=-2\Rightarrow y=m-3 \end{array}\right.$.

Do đó hai điểm cực trị là $A(0;m+1);B(-2;m-3)$.

* Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{OA}=\left(x_A-x_O;y_A-y_O\right)=\left(0;m+1\right)\Rightarrow OA=\sqrt{\left(0\right)^2+\left(m+1\right)^2}=\left|m+1\right| \\ \overrightarrow{OB}=\left(x_B-x_O;y_B-y_O\right)=\left(-2;m-3\right)\Rightarrow OB=\sqrt{\left(-2\right)^2+\left(m-3\right)^2}=\sqrt{m^2-6m+13} \end{cases}$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(OA.OB\right)^2-\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(m+1\right)^2\left(m^2-6m+13\right)-\left[\left(m-1\right)\left(m-3\right)\right]^2}=\left|m+1\right|$.

* Mà $S_{\Delta ABC}=2\Leftrightarrow\left|m+1\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Câu 97. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2mx+2}{x+1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ bằng nhau.

Lời giải

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

* Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\frac{x^2+2x+2m-2}{\left(x+1\right)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$\Leftrightarrow g\left(x\right)=x^2+2x+2m-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=3-2m>0 \\ g\left(-1\right)=2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$ (1)

* Gọi x_1,x_2 là nghiệm của $g\left(x\right)=0$, đó chính là hoành độ cực trị. Khi đó, phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị là: $y=\frac{\left(x^2+2mx+2\right)'}{\left(x+1\right)'}=\frac{2x+2m}{1}=2x+2m$.

$\Rightarrow$ Hai điểm cực trị của đồ thị là: $A\left(x_1;2x_1+2m\right);B\left(x_2;2x_2+2m\right)$.

* Theo định lí Viét: $x_1+x_2=-2,\ x_1x_2=-2m$.

* Theo đề: $d\left(A,\Delta\right)=d\left(B,\Delta\right)\Leftrightarrow\frac{\left|x_1+y_1+2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|x_2+y_2+2\right|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left|3x_1+2m+2\right|=\left|3x_2+2m+2\right|$

$\Leftrightarrow\left(3x_1+2m+2\right)^2=\left(3x_2+2m+2\right)^2\Leftrightarrow\left(3x_1+2m+2\right)^2-\left(3x_2+2m+2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)\left[3\left(x_1+x_2\right)+4m+4\right]=0\Leftrightarrow 3\left(x_1+x_2\right)+4m+4=0,\left(do\ x_1\neq x_2\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(-2\right)+4m+4=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $(1)\Rightarrow m=\frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 98. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

Lời giải

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=\dfrac{mx^2-2mx-5m-1}{(x-1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=mx^2-2mx-5m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m\neq 0 \\ \Delta'=m^2+m(5m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{6} \\ m>0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{6} \\ m>0 \end{array}\right. \quad (*)$$

* Phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị: $y=\dfrac{(mx^2+3mx+2m+1)'}{(x-1)'}=2mx+3m$.

* Để 2 điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow y(x_1).y(x_2)<0$

$\Leftrightarrow (2mx_1+3m)(2mx_2+3m)<0 \Leftrightarrow 4m^2\left[x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right]<0$.

$$\Leftrightarrow 4m(-2m-1)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{2} \\ m>0 \end{array}\right.$$

* Kết hợp với $(*) \Rightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 99. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta: y=2x$.

Lời giải

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x-(2m-5)}{(x-1)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x-(2m-5)=0 \ (1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x-(2m-5)=0 \quad (co\ nghiem) \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta'=-2m+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<3 \ (2) \\ -2m+6\neq 0 \end{cases}.$$

* Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1,x_2, nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

* Theo định lý Viet: $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2;\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m-5 \quad (3)$

* Giả sử $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có: $y_1=-2x_1+2m;\ y_2=-2x_2+2m$.

(thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

* Để hai điểm cực trị $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta: y=2x$ thì:

$(2x_1 - y_1)(2x_2 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (4x_1 - 2m)(4x_2 - 2m) < 0 \Leftrightarrow 16x_1x_2 - 8m(x_1 + x_2) + 4m^2 < 0 \ (4)$.

* Thay (3) vào (4), ta được: $16(2m-5) - 8m.2 + 4m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 20 < 0$

$\Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$

* So với (2), ta được: $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 100. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 = 0 \ (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1; x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ g(1) = m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2 \ (2).$$

* Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số thì $x_1; x_2$ là nghiệm của $g(x) = 0$.

* Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_2 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{array}\right.$.

* Ta có: $y_1.y_2 = \left(1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)\left(1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)$.

$= (1-m)^2 - 4(-m^2 + 3m - 2) = 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \dfrac{7}{5}\right)^2 - \dfrac{4}{5} \geq -\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow (y_1.y_2)_{\min} = -\dfrac{4}{5} \ khi \ m = \dfrac{7}{5}$

* So lại với điều kiện $(2) \Rightarrow m = \dfrac{7}{5}$ là giá trị cần tìm.