CHUYÊN ĐỀ MÔN TOÁN

TỔ HỢP VÀ XÁC XUẤT

2026

Bám sát đề thi minh họa và chính thức 2025

Sưu tầm các bài tập hay từ các đề thi giúp HS tư duy và tăng kỹ năng phản xạ đề.

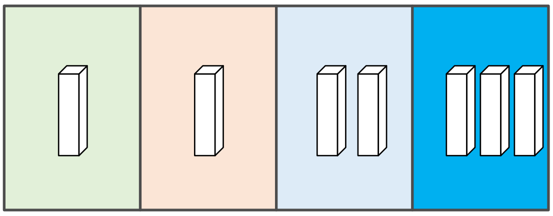
MK LÊ MINH KHA - 0399653362

Bài 1. Có bốn ngăn (trong một giá để sách) được đánh số thứ tự $1, 2, 3, 4$ và tám quyển sách khác nhau. Bạn An xếp hết tám quyển sách nói trên vào bốn ngăn đó sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách và các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn. Khi đã xếp xong tám quyển sách, hai cách xếp của bạn An được gọi là giống nhau nếu chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

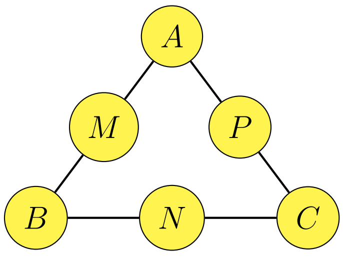
- Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp.
- Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.

Gọi T là số cách xếp đôi một khác nhau của bạn An. Giá trị của $\dfrac{T}{400}$ bằng bao nhiêu?

Bài 2. Xếp ngẫu nhiên 7 cuốn sách khác nhau, trong đó có một cuốn là sách Toán vào một giá sách có 4 ngăn. Biết rằng sau khi xếp, mỗi ngăn đều có ít nhất một cuốn sách. Gọi A là biến cố "trong 4 ngăn sách, có đúng một ngăn chứa số lượng sách nhiều hơn hẳn các ngăn còn lại" và B là biến cố "cuốn sách Toán học nằm ở ngăn có nhiều sách nhất đó". Tính $P(B|A)$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Bài 3. Bạn Nam tham gia cuộc thi giải một mật thư. Theo quy tắc của cuộc thi, người chơi cần chọn ra sáu số từ tập $S = \{41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48; 49\}$ và xếp mỗi số vào đúng một vị trí trong sáu vị trí A, B, C, M, N, P như hình bên sao cho mỗi vị trí chỉ được xếp một số.

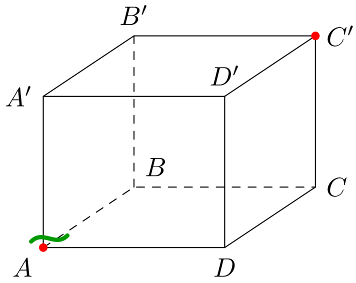


Mật thư sẽ được giải nếu các bộ ba số xuất hiện ở những bộ ba vị trí $(A, M, B); (B, N, C); (C, P, A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên sáu số trong tập S và xếp ngẫu nhiên vào các vị trí được yêu cầu. Gọi xác suất để bạn Nam giải được mật thư ở lần chọn và xếp đó là a. Giá trị của $\dfrac{4}{a}$ bằng bao nhiêu?

Bài 4. Cho tập $X = \{1; 2; 3; \ldots; 12\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn lớn chính giữa đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn. Tính giá trị của $1980P$.

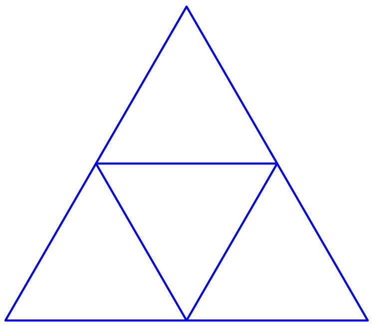
Bài 5. Có tám người ngồi quanh một bàn tròn. Mỗi người được đưa cho một đồng xu cân đối và đồng chất. Cả tám người cùng tung đồng xu của mình, ai tung được mặt ngửa thì đứng dậy, còn ai tung được mặt sấp thì vẫn ngồi yên. Biết rằng xác suất để không có hai người đứng cạnh nhau là $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a^2 + b$.

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tại đỉnh A có một con sâu, mỗi lần di chuyển, nó bò theo cạnh của hình hộp chữ nhật và đi đến đỉnh kề với đỉnh nó đang đứng. Tính xác suất sao cho sau 9 lần di chuyển, nó đứng tại đỉnh C' (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Bài 7. Trong bộ môn billiards 9 bóng (các bóng được đánh số từ 1 đến 9) có 3 quả bóng mục tiêu là 1, 4 và 8. Cơ thủ X chọn ngẫu nhiên 3 quả, sau đó cơ thủ Y chọn ngẫu nhiên 3 quả từ các quả còn lại. Biết rằng sau khi chọn, cơ thủ X đang có lợi thế hơn cơ thủ Y (tức là số bóng mục tiêu của X nhiều hơn của Y). Hãy tính xác suất để cơ thủ Y không giữ bất kỳ quả bóng mục tiêu nào (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 8. Cho hình vẽ bên gồm 4 tam giác. Người ta chọn 3 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; \ldots; 26\}$ để xếp vào 3 tam giác ở 3 góc. Sau đó, tính tổng bình phương của 3 số đó rồi ghi kết quả vào tam giác còn lại ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở tam giác giữa là một số chia hết cho 5?



Bài 9. Trong dịp tết Nam và Minh chơi trò ba cây bằng bộ bài lơ khơ gồm 36 lá (mỗi người nhận được 3 lá bài trong đó không có các quân 10, J, Q, K sau đó cộng điểm trên 3 quân bài lại người nào lớn điểm hơn sẽ thắng, trong trường hợp 2 người bằng điểm thì sẽ xét chất trên các lá bài theo thứ tự từ lớn đến bé Rô, cơ, bích, tép). Người nào thắng sẽ được 3 chiếc kẹo của người còn lại. Hiện tại trong ván bài đầu tiên Nam được 10 điểm với các quân sau 2 tép, 7 rô, Át cơ. Khi đó xác suất Minh có thể thắng trong ván bài trên, chú ý Át rô là quân bài có hiệu lực mạnh nhất bộ bài (các quân Át còn lại đều tính như là số một) có dạng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Bài 10. Cho một hình bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong một đường tròn tâm O như hình bên. Gắn ngẫu nhiên tám số tự nhiên $\{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ vào tám đỉnh của bát giác đều này (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh lấy từ tám đỉnh của bát giác đã cho. Gọi xác suất để thu được một tam giác vuông với ba số trên ba đỉnh của tam giác (theo một thứ tự nào đó) lập thành một cấp số cộng là $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*; \frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

Bài 11. Hiện nay, nước ta đang trong quá trình tinh gọn bộ máy và thực hiện nghị quyết không tổ chức công an cấp huyện. Do vậy, trong đợt điều động cán bộ công an từ huyện về công tác tại cơ sở hoặc công tác tại công an tỉnh, phòng tổ chức cán bộ nhận thấy rằng: có 60% cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa, số còn lại nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh.

- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở thì 70% có trình độ đại học và 30% có trình độ trung cấp.
- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì 80% có trình độ đại học và 20% có trình độ trung cấp.

Tuy nhiên, năng lực công tác cũng là một yếu tố quan trọng. Dựa trên hồ sơ đánh giá năng lực:

- Trong số cán bộ có nguyện vọng về cơ sở thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực "Tốt" trở lên với trình độ đại học là 60% và với trình độ trung cấp là 30%.
- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực "Tốt" trở lên với trình độ đại học là 85% và với trình độ trung cấp là 25%.

Chọn ngẫu nhiên một cán bộ công an. Tính xác suất để cán bộ này vừa có trình độ đại học, vừa được đánh giá có năng lực "Tốt" và có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 12. Hệ thống gồm các vật như sau được gọi là máng n:

- Một máng nghiêng có n lỗ dọc theo đáy. Tính từ trên cao xuống, các lỗ lần lượt có đường kính là $1, 2, 3, \ldots, n$.
- n quả bóng có đường kính là các số nguyên dương không lớn hơn n, trong đó có thể có nhiều quả bóng có cùng đường kính.

Xét máng n, thả lăn n quả bóng từ đỉnh máng xuống, lần lượt từng quả. Đối với mỗi quả bóng, khi lăn đến lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng đường kính của nó thì nó sẽ lọt vào đồng thời đóng lỗ này lại. Đối với một thứ tự các quả bóng sau khi thả lăn, nếu các quả bóng đều lọt vào lỗ thì thứ tự các quả bóng ấy được gọi là dãy đẹp. Hai dãy đẹp giống nhau khi và chỉ khi thứ tự bán kính của bóng lọt lỗ là như nhau. Có thể tạo được bao nhiêu dãy đẹp khác nhau đối với máng 5 biết rằng có đúng một quả có đường kính là 4 và một quả có đường kính là 5?

Bài 13. An và Bình rất giỏi Toán, cùng tham gia một trò chơi, đầu tiên An bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ nhất chứa sáu thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 6, tiếp theo Bình bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ hai chứa bốn thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 4. Gọi số An bốc được là a và số của Bình là b, sau đó hai người cùng tính giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^a x^b \mathrm{d}x$.
Nếu kết quả I là một số nguyên thì An thắng, ngược lại Bình thắng. Tính xác suất An thắng cuộc (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 14. Trong một trò chơi "giải mật mã tại ngày hội khoa học", ban tổ chức chuẩn bị một hộp chứa 9 tấm thẻ được ghi các số từ tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Một người chơi rút ngẫu nhiên 5 tấm thẻ khác nhau từ hộp. Sau đó các số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần thành $a < b < c < d < e$. Người chơi được coi là giải được mật mã nếu trong năm số này tồn tại bốn số liên tiếp tạo thành một cấp số cộng. Biết xác suất để người chơi giải được mật mã là A. Giá trị $\dfrac{1}{A}$ là bao nhiêu?

Bài 15. Một đa giác đều có 20 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ X một tam giác. Xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu là $\dfrac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$; $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó, giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu?

Bài 16. Có 10 chiếc ghế chia thành hai hàng ngang và thành 5 cặp đối diện nhau, mỗi chiếc ghế chỉ ngồi được một người. Có hai đội đi thi học sinh giỏi của hai trường THPT, mỗi đội gồm 10 em học sinh. Đội I có 3 em lớp 12A, 3 em lớp 12B, 4 em còn lại mỗi em một lớp C, D, E, F và đội II có 3 em lớp 12A, 2 em lớp 12B, 5 em còn lại mỗi em một lớp C, D, E, F, G. Dùng một con súc sắc cân đối đồng chất để tung lên, nếu số chấm nhỏ hơn 5 thì xếp ngẫu nhiên 10 em đội I vào 10 ghế, nếu số chấm lớn hơn 4 thì xếp 10 em đội II vào 10 ghế. Hãy tính xác suất để các em đội I được xếp ngồi vào ghế, nếu biết không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

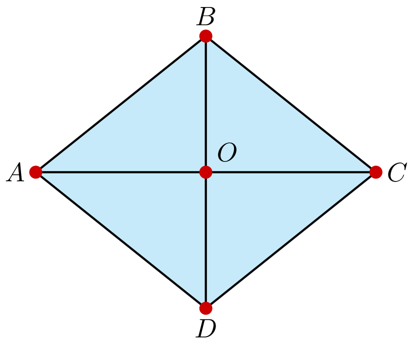
Bài 17. Đề thi Tốt nghiệp THPT môn Toán năm 2025 gồm 3 dạng thức trắc nghiệm, trong đó dạng thức I là câu hỏi trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn gồm 12 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm; dạng thức II là loại câu hỏi Đúng/Sai gồm 4 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai; nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài thi này và chắc chắn trả lời đúng 12 câu hỏi dạng thức I. Các câu còn lại của dạng thức II học sinh đó chọn ngẫu nhiên phương án trả lời cho mỗi ý. Gọi a là xác suất để học sinh đó làm được đúng 5 điểm cho cả hai dạng thức. Giá trị của $1000a$ bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Bài 18. Ở thị trấn của tôi, trời mưa một phần ba số ngày. Nếu trời mưa, sẽ có khả năng xảy ra ùn tắc giao thông với xác suất $\dfrac{1}{2}$, nếu trời không mưa, sẽ có khả năng xảy ra ùn tắc giao thông là $\dfrac{1}{4}$. Nếu trời mưa và có ùn tắc giao thông, tôi sẽ đến muộn làm việc với xác suất $\dfrac{1}{2}$. Mặt khác, xác suất đến muộn là $\dfrac{1}{8}$ nếu trời không mưa và không có ùn tắc giao thông. Trong các tình huống khác (mưa và không có ùn tắc giao thông, không mưa và có ùn tắc giao thông), xác suất đến muộn của tôi đều là 0,25. Chọn một ngày ngẫu nhiên mà tôi đi làm muộn, vậy xác suất trời mưa vào ngày hôm đó là bao nhiêu %? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Bài 19. Một nghệ nhân có 9 chiếc đèn lồng với độ dài dây treo (cm) lần lượt là $10, 20, 30, \ldots, 90$. Khung đèn là một tam giác đều ABC; gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Nghệ nhân chọn ngẫu nhiên 6 chiếc đèn và gán ngẫu nhiên vào 6 vị trí A, B, C, M, N, P (mọi cách gán là đồng khả năng). Để khung đèn đạt độ cân đối hoàn hảo, trên mỗi cạnh tam giác, chiều dài dây treo của đèn ở giữa phải bằng trung bình cộng chiều dài dây treo của hai đèn ở hai đầu mút cạnh đó. Gọi xác suất để thỏa mãn điều kiện ngay lần chọn và gán đầu tiên là P. Giá trị của $\dfrac{6}{P}$ bằng bao nhiêu?

Bài 20. Lớp mẫu giáo có 10 em bé, các bé đứng thành vòng tròn và cách đều nhau, đứng ở tâm vòng tròn là cô giáo. Mỗi bé cầm hai cờ, một xanh một đỏ trên mỗi tay. Cô giáo bảo "giơ lên cao một cờ", các bé giơ ngẫu nhiên một cờ. Gọi a là xác suất để không có 4 cờ nào cùng màu được giơ lên ở 4 vị trí mà 4 vị trí ấy là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Giá trị của $\dfrac{2200}{a}$ bằng bao nhiêu?

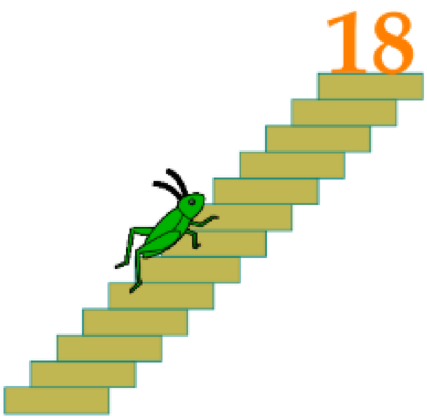
Bài 21. Một hệ thống chiếu sáng có 5 bóng đèn được đặt ở các đỉnh của một đồ thị được kết nối như hình vẽ. Các bóng đèn được nối với nhau bằng dây điện dọc theo 8 cạnh của đồ thị. Mỗi dây điện có xác suất 50% hoạt động bình thường. Để toàn bộ hệ thống sáng, tất cả các bóng đèn phải nhận được điện từ một nguồn duy nhất (tức là đồ thị các dây điện hoạt động phải liên thông giữa 5 đỉnh). Tính xác suất toàn bộ hệ thống chiếu sáng vẫn hoạt động được (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Bài 22. Trên hồ có 10 lá cây hoa súng xếp thành một hàng ngang. Trên lá ngoài cùng bên trái có một con ếch. Mỗi bước, con ếch sẽ nhảy sang lá kế bên hoặc nhảy bỏ qua lá đó để sang lá tiếp theo. Con ếch không bao giờ nhảy lùi. Hỏi con ếch có bao nhiêu cách để nhảy sang lá ngoài cùng bên phải?

Bài 23. Nhân dịp khai trương, cửa hàng có một chương trình tri ân dành cho 50 người đầu tiên đứng xếp hàng (theo thứ tự từ 1 đến 50). Chủ cửa hàng sẽ tặng cho người cuối cùng một món quà đặc biệt với thể thức cuộc chơi như sau. Chủ cửa hàng nói "Các khách hàng số lẻ sẽ bị loại". Các khách hàng còn lại sẽ sắp xếp lại (theo thứ tự từ 1 đến hết), cuộc chơi sẽ dừng khi tìm được người cuối cùng. Vậy người may mắn nhận được quà thì ban đầu họ đứng số mấy?

Bài 24. Một con châu chấu nhảy lên cầu thang có 18 bậc. Mỗi lần nhảy con châu chấu có thể nhảy 1 bậc hoặc 2 bậc. Tính xác suất để con châu chấu hoàn thành 18 bậc thang với số lần nhảy 2 bậc không bé hơn số lần nhảy 1 bậc (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

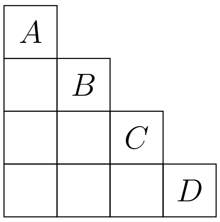


Bài 25. Có 8 bạn cùng ngồi xung quanh một cái bàn tròn, mỗi bạn cầm một đồng xu như nhau. Tất cả 8 bạn cùng tung đồng xu của mình, bạn có đồng xu ngửa thì đứng, bạn có đồng xu sấp thì ngồi. Biết xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng bằng $\frac{m}{n}$ (trong đó m, n là các số tự nhiên và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản). Tính $m + n$.

Bài 26. Công ty VinaElectro sản xuất một loại thiết bị điện tử tiêu dùng và đánh số seri cho từng sản phẩm bằng một mã 6 chữ số được tạo ngẫu nhiên từ các số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ và chữ số đầu tiên không được là 0. Trong một chương trình khuyến mãi nhân dịp ra mắt sản phẩm mới, công ty muốn tặng quà cho khách hàng nếu sản phẩm của họ mua có mã seri "đặc biệt" là mã số có tích các chữ số bằng $1\,400$. Biết xác suất để khách hàng được tặng quà (tức có mã "đặc biệt") là $\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $b - a$.

Bài 27. Một công ty tổ chức sự kiện tổng kết cuối năm. Trong buổi dự tiệc có 4320 người tham gia. Để làm tăng tính thú vị hấp dẫn của buổi tiệc, người ta đã tạo ra các lá thăm ghi các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ được lập từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$. Mỗi người tham gia dự tiệc sẽ chọn cho mình một lá thăm và tất cả các lá thăm được bốc hết. Gần cuối buổi tiệc, ban tổ chức công bố những người chọn được số thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$ sẽ được nhận phần thưởng đặc biệt từ công ty. Anh Huy là nhân viên công ty có tham gia dự tiệc và bốc thăm trúng thưởng. Hỏi anh Huy có xác suất trúng thưởng là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 28. Từ tập hợp số tự nhiên $\{1; 2; 3; \ldots; 25; 26\}$, cần chọn ra 10 số phân biệt để gán vào 10 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi T là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị $\frac{T}{4}$ bằng bao nhiêu?



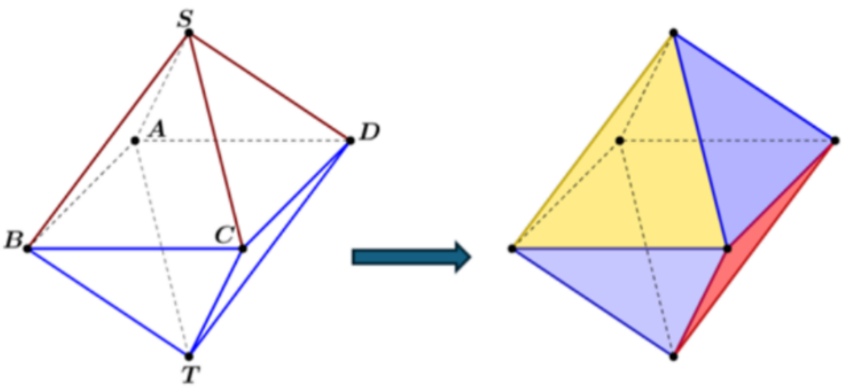
Bài 29. Một giờ hoạt động ngoài trời của lớp 1/1 trường tiểu học X, cô giáo cho 35 học sinh lớp mình nắm tay nhau xếp thành một vòng tròn để chơi trò chơi "Mèo bắt Chuột". Sau khi ổn định, cô gọi tên ngẫu nhiên 6 học sinh trong lớp ra giữa vòng (3 em làm "Mèo", 3 em làm "Chuột"). Xác suất 6 em được gọi tên không có hai em nào đứng cạnh nhau trong vòng tròn bằng a. Tính $11594a$.

Bài 30. Một đèn lồng đón năm mới được thiết kế theo hình bát diện đều (ta có thể hình dung hình bát diện đều là hai hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau $S.ABCD$ và $T.ABCD$ sử dụng chung một mặt đáy). Nghệ nhân đã thiết kế sẵn 12 tấm bìa cứng là các tam giác bằng nhau gồm 3 màu: xanh, đỏ, vàng; trên các tấm bìa cùng màu được đánh số từ 1 tới 4. Mỗi tấm bìa khi dán vào đèn lồng sẽ vừa kín một trong tám mặt bên của nó. Gọi N là số cách mà nghệ nhân có thể chọn 8 tấm bìa dán lên 8 mặt bên của đèn lồng sao cho hai tấm bìa có chung một cạnh thì khác màu, hai tấm bìa có chung đúng một đỉnh thì khác số. Giá trị $\frac{N}{8} + 16$ bằng bao nhiêu?

Bài 31. Bạn Quỳnh và bạn Hà tham gia chơi trò chơi sau:

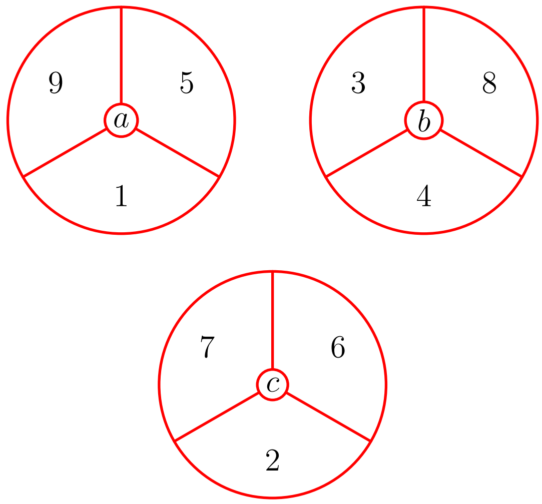
+ Quỳnh chọn trước một trong ba vòng quay được cho trong hình.

+ Sau đó, Hà chọn một trong hai vòng còn lại.



+ Cả hai quay vòng của mình. Người có số lớn hơn là người thắng.

Biết rằng mỗi vùng trên vòng quay đều có xác suất như nhau. Tính xác suất mà Quỳnh chiến thắng. *Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.*



Bài 32. Đại Học Bách Khoa Hà Nội tổ chức phỏng vấn 8 học sinh, trong đó có hai học sinh trường A, hai học sinh trường B, hai học sinh trường C và hai học sinh trường D. Để tránh tình trạng gian lận, trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội yêu cầu sắp xếp chỗ như sau:

- Xếp 8 bạn thành 2 hàng ngang, mỗi hàng bốn bạn.
- Hai bạn cùng trường không ngồi cạnh nhau và cũng không ngồi đối diện nhau.

A	B	C	D
D	C	B	A

Số cách mà Đại Học Bách Khoa Hà Nội có thể sắp xếp bằng bao nhiêu?

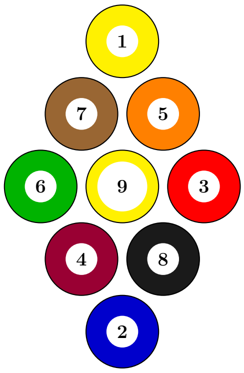
Bài 33. Vào ngày lễ tổng kết năm học 2024 – 2025, tại một trường Tiểu học nghèo ở miền núi, có 10 em học sinh hiếu học được vinh dự nhận 20 phần quà từ các anh chị cựu học sinh của trường nay đã thành đạt. Các phần quà này là đồng giá, gồm có: 9 đôi giày, 7 cái áo và 4 cái cặp; những món quà cùng loại thì giống hệt nhau. Trong số 10 em học sinh được nhận quà thì có Bình và Minh là đôi bạn rất thân thiết, tính xác suất để đôi bạn này cùng nhận các món quà như nhau.

Bài 34. Có hai chuồng thỏ. Chuồng thứ nhất có 6 con thỏ đực và 4 con thỏ cái. Chuồng thứ hai có 4 con thỏ đực và 5 con thỏ cái. Từ chuồng thứ nhất lấy ngẫu nhiên ra một con thỏ bỏ vào chuồng thứ hai. Rồi sau đó từ chuồng thứ hai lấy ngẫu nhiên ra 3 con thỏ. Biết trong 3 con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai có số thỏ đực nhiều hơn số thỏ cái. Tính xác suất con thỏ lấy ra ở chuồng thứ nhất là thỏ đực (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 35. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 36. Trong bida 9 bóng các bóng được đánh số từ 1 đến 9. Ban đầu cơ thủ X phá bóng và sau khi ổn định thì có 3 quả bóng ghi số $1, 4, 8$ đều nằm ở vị trí thuận lợi nhất để có thể đánh vào lỗ. Cơ thủ X được chọn ngẫu nhiên ba số trước, tiếp theo là đến cơ thủ Y chọn ngẫu nhiên 3 số.

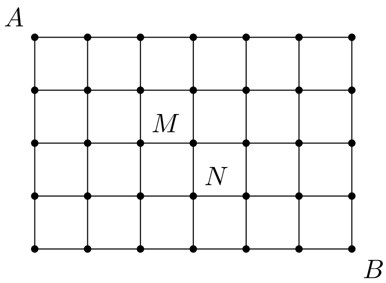
Biết rằng cơ thủ chọn được các số nào thì sẽ có nhiệm vụ đánh các bóng có ghi số đó vào lỗ để hoàn thành chiến thắng của mình. Lợi thế ban đầu sẽ nghiêng về cơ thủ có số bóng nằm trong $\{1, 4, 8\}$ nhiều hơn. Hãy tính xác suất để cơ thủ X có lợi thế hơn cơ thủ Y (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



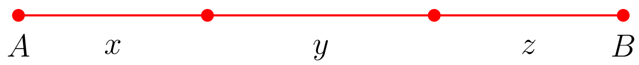
Bài 37. Trên mỗi cạnh của một hình vuông $ABCD$, lấy các điểm E, F, G, H. Sau đó ta điền trên 8 điểm nằm trên hình vuông 8 số khác nhau trong tập hợp các số tự nhiên từ một đến tám, sao cho độ dài của các cạnh bằng tổng của các số hạng nằm trên cạnh đó, nghĩa là độ dài cạnh của hình vuông bằng $A + E + B$; $B + H + C$; $D + G + C$; $A + F + D$. Số trường hợp xảy ra bằng bao nhiêu?

Bài 38. Có hai đồng xu có hình thức giống nhau, trong đó có một đồng xu cân đối đồng chất và một đồng xu không cân đối có xác suất khi tung đồng xu xuất hiện mặt ngửa là $\frac{2}{3}$. Một người lấy ngẫu nhiên một đồng xu trong hai đồng xu đã cho, tung đồng xu đó 3 lần thì đều thấy xuất hiện mặt ngửa, xác suất người đó lấy được đồng xu cân đối là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

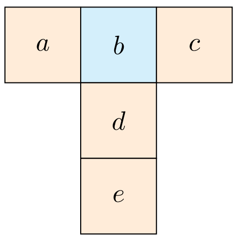
Bài 39. Trong một cuộc thi đấu Robotics, sân đấu được thiết kế dạng lưới ô vuông như hình vẽ. Các robot xuất phát từ vị trí điểm A, di chuyển ngẫu nhiên theo cạnh của các ô vuông theo hướng xuống dưới hoặc sang phải đến vị trí điểm B. Tính xác suất robot đi từ A đến B mà không đi qua cả M và N (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Bài 40. Cho một thanh sắt mỏng AB dài 21 cm. Trên AB lấy hai điểm M, N phân biệt làm mốc sao cho $AM = x$ (cm), $MN = y$ (cm), $NB = z$ (cm) đồng thời x, y, z là các số nguyên dương (tham khảo hình vẽ). Xác suất để khi gập thanh sắt tại hai điểm mốc M, N thì đầu A có thể chạm vào đầu B là $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính $a + b$.

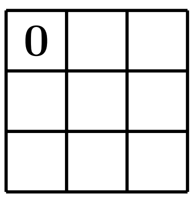


Bài 41. Cho 5 ô vuông a, b, c, d, e được bố trí như hình vẽ bên. Biết rằng có tất cả T cách chọn ra 5 số nguyên khác nhau từ tập hợp $S = \{1; 2; 3; \ldots; 15\}$ để xếp vào các ô vuông a, b, c, d, e sao cho mỗi ô vuông nhỏ chỉ xếp được đúng một số và các ô hàng ngang được sắp xếp theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần, còn các ô hàng dọc thì không được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và cũng không giảm dần. Hãy xác định giá trị của $\frac{T}{1001}$.



Bài 42. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 12 cm. Trên đoạn thẳng AB và AD lấy thêm trên mỗi đoạn 11 điểm, sao cho 11 điểm đó chia mỗi cạnh thành 12 phần có độ dài bằng nhau. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ các điểm nằm trên đoạn AB và AD (không tính điểm A). Biết xác suất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc với đường thẳng AB hoặc AD bằng a, tính $\frac{20}{a}$.

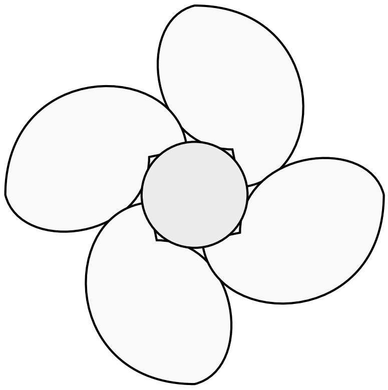
Bài 43. Điền ngẫu nhiên các số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ vào các ô của một bảng ô vuông kích thước 3×3 sao cho mỗi số được điền vào đúng một ô. Tính xác suất để số 1 được điền vào ô chính giữa, biết rằng tổng của các số hàng dưới cùng là một số lẻ và số 0 được điền vào ô góc trên cùng bên trái của bảng ô vuông. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Bài 44. Một ứng dụng học tập có 12 thử thách được đưa ra mỗi buổi học. Mỗi thử thách có 70% khả năng học sinh vượt qua được. Nếu một thử thách được hoàn thành thành công, học sinh sẽ nhận được 1 điểm. Nếu hoàn thành không thành công, điểm học sinh không thay đổi. Tuy nhiên, nếu học sinh hoàn thành liên tiếp 5 thử thách thành công sẽ nhận được 5 điểm thưởng (tức là tổng

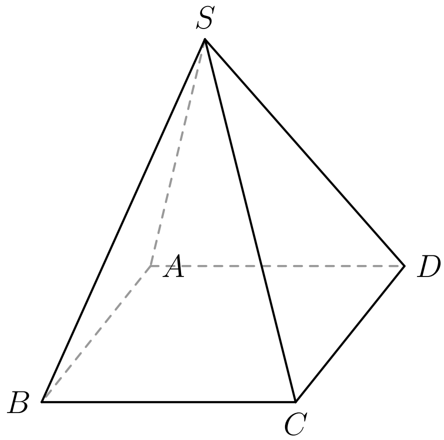
cộng 10 điểm cho 5 thử thách liên tiếp đó). Xác suất để học sinh nhận được đúng 10 điểm bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng học sinh đó làm tất cả 12 thử thách.

Bài 45. Sử dụng bốn màu xanh, đỏ, tím, vàng để tô cho phần trung tâm và 4 cánh của một chiếc quạt như hình vẽ.



Quy tắc tô màu sẽ là: phần trung tâm và phần cánh phải được tô bằng màu khác nhau (bốn cánh quạt không nhất thiết tô màu khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách tô màu? (Lưu ý: 4 cánh giống nhau do đó các cách tô màu mà khi xoay cánh quạt có thể trùng nhau thì chỉ tính là một cách).

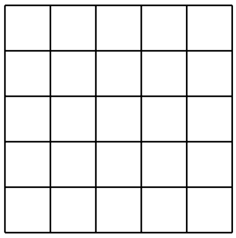
Bài 46. Một con kiến di chuyển dọc theo các cạnh của một hình chóp tứ giác. Nó bắt đầu cuộc đi dạo của mình ở đỉnh A, mỗi lần nó đi đúng một cạnh của hình chóp và nó đi tối đa 3 lần. Tại mỗi đỉnh, con kiến quyết định ngẫu nhiên đi theo một trong ba hướng (đối với đỉnh A, B, C, D) hoặc bốn hướng (đối với đỉnh S trên cùng), trong đó nó cũng được phép chọn hướng mà nó vừa đi đến. Tại đỉnh B có một con thú ăn kiến đang rình rập. Xác suất để con kiến không bị bắt bởi thú ở B là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Bài 47. Có hai hộp đựng câu hỏi thi (phiếu), mỗi phiếu ghi một câu hỏi. Hộp thứ nhất có 15 phiếu và hộp thứ hai có 9 phiếu. Biết rằng sinh viên A đi thi chỉ thuộc 10 câu ở hộp thứ nhất và 8 câu ở hộp thứ hai. Thầy giáo rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một phiếu thi, sau đó cho sinh viên A rút ngẫu nhiên ra 1 phiếu từ 2 phiếu mà thầy giáo đã rút. Gọi E_1 là biến cố sinh viên A rút ra phiếu từ hộp thứ nhất, E_2 là biến cố sinh viên A rút ra phiếu từ hộp thứ hai. Nếu sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc thì xác suất phiếu đó thuộc hộp thứ nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

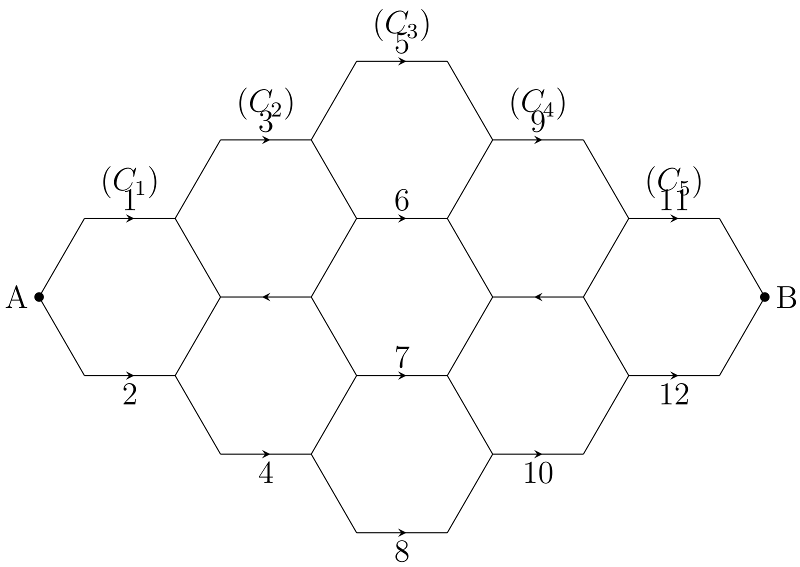
Bài 48. Có hai hộp đựng bi, các viên bi có cùng kích thước và cùng khối lượng. Hộp I đựng 9 viên bi, mỗi viên bi được đánh một số từ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Hộp II đựng 8 viên bi, mỗi viên bi được đánh một số từ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Bạn Hoa và Bình tham gia trò chơi như sau: Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên ba viên bi trong hộp I và sắp xếp các số trên viên bi theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên ba viên bi trong hộp II và sắp xếp các số trên viên bi theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Hoa sẽ là người thắng cuộc nếu số của Hoa lớn hơn số của Bình. Biết xác suất Hoa là người thắng cuộc là $\frac{a}{b}$, với $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b$.

Bài 49. Đặt ngẫu nhiên các số thuộc tập hợp $\{-2, -1, 1, 2\}$ vào 25 ô vuông của lưới 5×5 (hình vẽ dưới đây) sao cho mỗi ô vuông chỉ được đặt đúng một số.



Gọi A biến cố "Tích các số trong mỗi hàng và tích các số trong mỗi cột đều bằng -2". Biết xác suất của biến cố A bằng p, tính $64^5 \cdot p$.

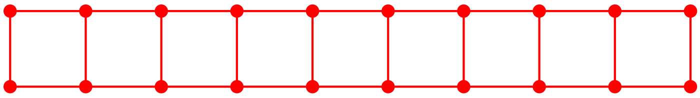
Bài 50. Một con bọ di chuyển từ điểm A đến điểm B dọc theo các đoạn thẳng trong mạng lưới lục giác như hình bên. Các đoạn thẳng có dấu mũi tên chỉ được di chuyển theo hướng của mũi tên, các đoạn thẳng không có dấu mũi tên được di chuyển theo hướng tùy ý và con bọ không bao giờ di chuyển trên cùng một đoạn thẳng quá một lần. Vậy con bọ có bao nhiêu con đường khác nhau từ A đến B?



Bài 51. Sắp xếp ngẫu nhiên 3 bạn nam A, B, C và 5 bạn nữ vào 8 cái ghế được xếp theo hàng ngang (mỗi bạn ngồi một cái ghế). Gọi xác suất để 3 bạn A, B, C ngồi theo thứ tự đó từ trái qua phải, đồng thời giữa A và B có ít nhất một bạn nữ, giữa B và C có nhiều nhất một bạn nữ là p. Giá trị của $\frac{5}{p}$ bằng bao nhiêu?

Bài 52. Một nhóm sinh viên tham gia một trò chơi như sau, mỗi đội gồm 10 người được phát cho 10 chiếc áo được đánh số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, mỗi bạn mặc 1 chiếc áo. Các đội trưởng phải sắp xếp 10 thành viên của đội mình thành 1 hàng ngang và sẽ giành chiến thắng nếu mỗi 3 bạn đứng liền kề bất kì có tổng các chữ số ghi trên các chiếc áo 3 bạn đó mặc là một số chia hết cho

3. Biết xác suất để một đội chiến thắng là a, tính $\frac{3}{a}$.



Bài 53. Hai bạn Hùng và Cường chơi trò quay bánh xe số. Bánh xe số có 20 nấc điểm là $5, 10, 15, \ldots, 100$ với các vạch chia đều nhau (giả sử rằng khả năng chuyển từ nấc điểm đã có tới các nấc điểm còn lại là như nhau). Trong mỗi lượt chơi, mỗi người được quyền chọn quay 1 hoặc 2 lần và điểm số của người chơi được tính như sau:

(1) Nếu người chơi chọn quay một lần thì điểm của người chơi là điểm quay được.

(2) Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được không lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được.

(3) Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được lớn hơn 100 thì điểm người chơi là tổng điểm quay được trừ đi 100.

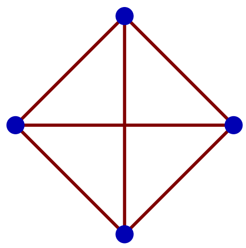
Luật chơi quy định, trong mỗi lượt chơi người nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác. Hùng chơi trước và có điểm số là 75. Tính xác suất để Cường thắng cuộc ngay ở lượt chơi này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 54. Một hộp chứa 12 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Chiến lấy ngẫu nhiên ra một viên bi từ hộp, xem màu của nó rồi bỏ ra ngoài. Đến lượt bạn Thắng lấy bi với số lượng phụ thuộc vào màu của viên bi mà bạn Chiến đã lấy. Cụ thể như sau:

- Nếu viên bi bạn Chiến lấy ra có màu xanh thì bạn Thắng sẽ lấy ngẫu nhiên ra hai viên bi từ hộp;
- Nếu viên bi bạn Chiến lấy ra có màu đỏ thì bạn Thắng sẽ lấy ngẫu nhiên ra bốn viên bi từ hộp.

Tính xác suất để bạn Chiến lấy được viên bi màu đỏ, biết rằng trong các viên bi được bạn Thắng lấy ra có ít nhất một viên bi khác màu với viên bi của bạn Chiến (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 55. Xét một đồ thị đầy đủ K_4 có 4 đỉnh, các đỉnh đó được kết nối với nhau thông qua các cạnh và 2 đường chéo (hình vẽ). Với 6 cạnh của đồ thị, tung một đồng xu cân đối ngẫu nhiên: nếu mặt ngửa xuất hiện, ta giữ nguyên cạnh đó; nếu mặt sấp xuất hiện, ta loại bỏ cạnh đó. Tính xác suất đồ thị vẫn được kết nối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Bài 56. Truecaller App là một ứng dụng được sử dụng để chặn cuộc gọi rác trong điện thoại. Tuy nhiên, vì ứng dụng không tuyệt đối hoàn hảo nên một cuộc gọi rác bị chặn với xác suất $0,8$ và một cuộc gọi đúng (không phải là cuộc gọi rác) bị chặn với xác suất $0,01$. Thống kê cho thấy tỉ lệ cuộc gọi rác là 10%. Chọn ngẫu nhiên một cuộc gọi không bị chặn. Tính xác suất để đó là cuộc gọi đúng (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 57. Có 4 ngăn sách được đánh số $1, 2, 3, 4$ và 9 quyển sách khác nhau. Bạn An xếp toàn bộ

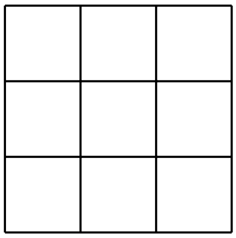
9 quyển sách vào 4 ngăn sao cho: Mỗi ngăn ít nhất có 1 quyển sách, trong đó ngăn số 1 có đúng 2 quyển sách. Trong mỗi ngăn, các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang từ trái sang phải. Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu với mỗi ngăn:

- Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp.
- Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.

Gọi T là số cách xếp đôi một khác nhau. Tính $\dfrac{T}{600}$.

Bài 58. Giải bóng đá Ngoại hạng Anh là một giải đấu lớn nhất hành tinh có 20 đội tham gia. Hiện tại Manchester United xếp vị trí thứ 5. Trong trận tới nếu gặp đội xếp trên thì Manchester United có xác suất thắng là $0,2$; xác suất thua là $0,5$. Nếu gặp đội dưới thì Manchester United có xác suất thắng là $0,5$ và xác suất thua là $0,3$. Bốc thăm ngẫu nhiên một đội đấu với Manchester United trong trận tới. Tính xác suất để Manchester United hoà trong trận tới (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài 59. Cho một bảng ô vuông 3×3 như hình vẽ bên. Điền ngẫu nhiên 9 số thuộc tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ vào 9 ô vuông trong bảng (mỗi ô vuông điền một số khác nhau). Gọi Y là biến cố "mỗi hàng, mỗi cột bất kì trong bảng đều có ít nhất một số lẻ". Biết xác suất $P(Y) = \dfrac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?



Bài 60. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất $0,55$. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó. Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn một quả tên lửa. Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là $0,8$ và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Biết máy bay bị bắn hạ trong phương án tác chiến trên. Tính xác suất máy bay bị bắn hạ ở vị trí X. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 61. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó luôn có 3 chữ số $1; 2; 3$ và chữ số 2 đứng liền giữa chữ số 1 và chữ số 3?

Bài 62. Một nghệ nhân có 9 cái lồng đèn với độ dài dây treo (cm) lần lượt là $10, 20, 30, \ldots, 90$. Khung đèn là một tam giác đều ABC; gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Nghệ nhân chọn ngẫu nhiên 6 chiếc đèn và gán ngẫu nhiên vào 6 vị trí A, B, C, M, N, P (mọi cách gắn đều đồng khả năng). Để khung đèn đạt độ cân đối hoàn hảo, trên mỗi cạnh tam giác, chiều dài dây treo của đèn ở giữa phải bằng trung bình cộng chiều dài dây treo của hai đèn ở hai đầu mút cạnh đó. Gọi xác suất để thỏa mãn điều kiện ngay lần đầu chọn và gán đầu tiên là p. Giá trị của $\dfrac{6}{p}$ bằng bao nhiêu?

Bài 63. Gọi S là tập hợp tất cả các số có 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Khi đó xác suất để số chọn được chia hết cho 5, luôn có mặt các chữ số $2, 3, 4$ và chúng đứng cạnh nhau là $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Bài 64. Dịp cuối tuần một nhóm n bạn gồm Khoa, Khôi, Thảo và $(n-3)$ bạn khác cùng nhau đến rạp chiếu phim xem bộ phim "Mưa đỏ". Khi xếp tùy ý nhóm bạn này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến n, mỗi bạn ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của Khoa, Thảo, Khôi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là $\dfrac{13}{675}$. Tìm n.

Bài 65. Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

Dãy 1	Ghế 1	Ghế 2	Ghế 3	Ghế 4
Dãy 2	Ghế 1	Ghế 2	Ghế 3	Ghế 4

Một đội chơi có 15 người gồm 7 nam và 8 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 bạn ngồi vào hai dãy ghế để tham gia trả lời câu hỏi. Hai người được gọi là ngồi đối diện nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng số ghế. Gọi T là số cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ, khi đó giá trị của $\dfrac{T}{66\,889}$ bằng bao nhiêu?

Bài 66. Mèo Táo có một cửa hàng sách và đang cần tuyển nhân viên trông coi cửa hàng. Để tuyển nhân viên, đòi hỏi có khả năng tư duy và suy luận tốt. Táo đưa ra thử thách như sau: Bộ truyện tranh thám tử Kenechi gồm 44 tập đang được sắp xếp từ 1 đến 44 trên giá (giả sử tính từ trái qua phải và tất cả cuốn truyện được sắp xếp cùng chiều). Yêu cầu hãy sắp xếp các tập truyện tranh theo chiều ngược lại từ 44 tới 1 theo quy tắc:

- Đổi chỗ sắp xếp của 2 tập liên tiếp sẽ bị tính 1 điểm,
- Đổi chỗ 2 tập truyện mà ở giữa có 3 tập khác thì không bị tính điểm.

Bạn An muốn ứng tuyển vào nhân viên cửa hàng. Hỏi điểm số của An nhỏ nhất bao nhiêu để thực hiện được thử thách trên?

Bài 67. Hai bạn An và Bình cùng chơi trò chơi đánh cờ carô trên một bảng ô vuông kích thước 3×3 (gồm 9 ô trống). Luật chơi quy định An đi trước, mỗi lượt điền một dấu "X" vào một ô trống và Bình đi sau mỗi lượt điền một dấu "O" vào một ô trống. Trò chơi kết thúc và xác định được người chiến thắng nếu người đó tạo được 3 dấu của mình nằm liên tiếp nhau trên cùng một hàng ngang, hàng dọc hoặc đường chéo. Hỏi có tất cả bao nhiêu trình tự các nước đi để ván cờ kết thúc chính xác ở nước đi thứ 5 với An là người giành chiến thắng?

O		X
	X	
X		

Bài 68. Cho một bảng ô vuông kích thước 2×7 như hình vẽ dưới đây.

Hai ô vuông gọi là kề nhau nếu có chung một cạnh. Người ta tô màu các ô vuông bởi hai màu đen và đỏ sao cho mỗi ô chỉ được tô đúng một màu. Gọi P là xác suất để có đúng 3 ô được tô màu đỏ và không có hai ô đỏ nào kề nhau. Giá trị $8192P$ bằng bao nhiêu?

Bài 69. Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số. Xác suất để chọn được số tự nhiên có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó $a_1 \le a_2 + 1 \le a_3 - 7 < a_4 \le a_5 + 2$ bằng a. Giá trị của $\dfrac{1}{a}$ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Bài 70. Cho một nhóm 15 học sinh có chiều cao khác nhau gồm 5 học sinh nữ có chiều cao tăng dần ký hiệu lần lượt là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 10 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 15 học sinh đó thành một hàng ngang sao cho nếu tính từ trái sang phải thì các học sinh nữ có chiều cao tăng dần, các học sinh nam cũng có chiều cao tăng dần; giữa học sinh G_1 và G_2 có ít nhất 2 học sinh nam, giữa học sinh G_4 và G_5 có ít nhất 1 học sinh nam và nhiều nhất 4 học sinh nam?

Bài 71. Chọn ngẫu nhiên 3 trong số 24 đỉnh của một đa giác đều 24 cạnh. Gọi P là xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông. Biết $P = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $2a + b$.

Bài 72. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + bx + 2}{x - c}$ với b, c lần lượt là số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần tung một con xúc xắc cân đối đồng chất. Biết xác suất để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$ là $\dfrac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m^2 + n^2$.

Bài 73. Cho tập hợp $X = \{2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{15}\}$. Cần chọn ra 9 số nguyên phân biệt từ tập X để gán cho 8 đỉnh và tâm O của một khối lập phương. Biết rằng, trên bất kỳ đường chéo chính $AC', BD', A'C, B'D$ đi qua tâm O, tích của hai số được gán ở hai đầu mút luôn bằng bình phương của số được gán tại tâm O. Gọi P là tổng số phương án gán số thỏa mãn. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{P}{384}$.

Bài 74. Một nghệ nhân có 9 chiếc đèn lồng với độ dài dây treo (cm) lần lượt là $10, 20, 30, \ldots, 90$. Khung đèn là một tam giác đều ABC; gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Nghệ nhân chọn ngẫu nhiên 6 chiếc đèn và gán ngẫu nhiên vào 6 vị trí A, B, C, M, N, P (mọi cách gán là đồng khả năng). Để khung đèn đạt độ cân bằng hoàn hảo, trên mỗi cạnh tam giác, chiều dài dây treo của đèn ở giữa phải bằng trung bình cộng chiều dài dây treo của hai đèn ở hai đầu mút cạnh đó. Gọi xác suất để thỏa mãn điều kiện ngay lần chọn và gán đầu tiên là p. Giá trị của $\dfrac{6}{p}$ bằng bao nhiêu?

Bài 75. Bác Nghĩa đang giúp sắp xếp 16 cuốn sách ôn thi vào một chiếc kệ có 5 ngăn phân biệt. 16 cuốn sách này thuộc 8 môn học khác nhau: **Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa, Văn, Anh**. Mỗi môn học gồm đúng hai cuốn: một cuốn sách giáo khoa và một cuốn sách bài tập. Để việc ôn tập đạt hiệu quả cao nhất theo từng khối thi, bác Nghĩa đặt ra các quy tắc khắt khe như sau:

- Do ngăn kệ nhỏ, mỗi ngăn chỉ chứa được **tối đa 5 cuốn sách** và không được để ngăn nào trống.
- Hai cuốn sách của cùng một môn học **phải luôn nằm chung một ngăn** với nhau.
- Các môn học trong cùng một tổ hợp môn thi phải nằm ở **ba ngăn liên tiếp** để thuận tiện cho việc tra cứu. Các tổ hợp bao gồm: (**Văn, Sử, Địa**); (**Toán, Lý, Hóa**); (**Toán, Hóa, Sinh**) và (**Toán, Lý, Anh**).
- Các cuốn sách trong mỗi ngăn được xếp theo hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn, thứ tự từ trái qua phải.

Tổng số cách sắp xếp 16 cuốn sách này vào 5 kệ thỏa mãn điều kiện trên là T. Tính $\dfrac{T}{864}$.

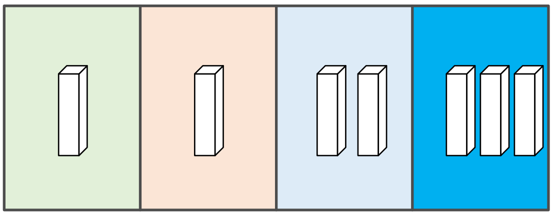
Bài 1. Có bốn ngăn (trong một giá để sách) được đánh số thứ tự $1, 2, 3, 4$ và tám quyển sách khác nhau. Bạn An xếp hết tám quyển sách nói trên vào bốn ngăn đó sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách và các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn. Khi đã xếp xong tám quyển sách, hai cách xếp của bạn An được gọi là giống nhau nếu chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

- Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp.
- Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.

Gọi T là số cách xếp đôi một khác nhau của bạn An. Giá trị của $\frac{T}{400}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Số cách xếp 8 quyển sách khác nhau thành một hàng ngang có $8!$ cách.
Khi xếp 8 quyển sách thành một hàng ngang thì có 7 vị trí ở giữa 2 quyển sách kề nhau.
Sách 1 | Sách 2 | Sách 3 | Sách 4 | Sách 5 | Sách 6 | Sách 7 | Sách 8
Khi đó ta chọn 3 trong 7 vị trí nằm giữa đó để đặt vách ngăn (3 vách ngăn chia 8 quyển thành 4 nhóm sách, mỗi nhóm có ít nhất 1 quyển, theo thứ tự đó ta để vào 4 ngăn sách) có C_7^3 cách.
Suy ra số cách xếp là $T = 8! \cdot C_7^3$.
Vậy $\frac{T}{400} = \frac{40320 \cdot 35}{400} = 3528$.

Bài 2. Xếp ngẫu nhiên 7 cuốn sách khác nhau, trong đó có một cuốn là sách Toán vào một giá sách có 4 ngăn. Biết rằng sau khi xếp, mỗi ngăn đều có ít nhất một cuốn sách. Gọi A là biến cố "trong 4 ngăn sách, có đúng một ngăn chứa số lượng sách nhiều hơn hẳn các ngăn còn lại" và B là biến cố "cuốn sách Toán học nằm ở ngăn có nhiều sách nhất đó". Tính $P(B|A)$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Gọi n_i là số sách ở ngăn thứ i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Theo giả thiết $n_i \geq 1$ và $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 7$.

Các trường hợp về số lượng sách ở các ngăn thỏa mãn biến cố A là:

- **Trường hợp 1:** Bộ số lượng sách là $\{4, 1, 1, 1\}$.

  Số cách chọn ngăn có 4 cuốn là $C_4^1 = 4$. Với mỗi cách chọn ngăn, có $\frac{7!}{4!1!1!1!} = 210$ cách xếp sách.

  Tổng số cách xếp của trường hợp này là $4 \times 210 = 840$. Số cách xếp mà sách Toán nằm ở ngăn có 4 cuốn là $4 \times \frac{4}{7} \times 210 = 480$.

- **Trường hợp 2:** Bộ số lượng sách là $\{3, 2, 1, 1\}$.

  Số cách hoán vị các ngăn là $\frac{4!}{2!} = 12$. Với mỗi cách, có $\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$ cách xếp sách.

  Tổng số cách xếp của trường hợp này là $12 \times 420 = 5040$. Số cách xếp mà sách Toán nằm ở ngăn có 3 cuốn là $12 \times \frac{3}{7} \times 420 = 2160$.

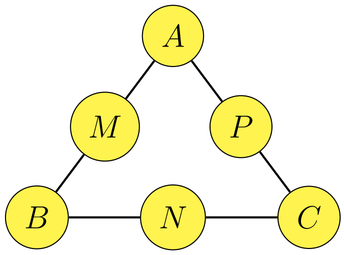
Lưu ý trường hợp $\{2,2,2,1\}$ không thỏa mãn biến cố A vì có 3 ngăn cùng chứa số lượng sách nhiều nhất là 2, nên không có ngăn nào chứa nhiều hơn hẳn các ngăn còn lại.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = 840 + 5040 = 5880$.

Số phần tử của biến cố $A \cap B$ là: $n(A \cap B) = 480 + 2160 = 2640$.

Xác suất cần tính là:
$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2640}{5880} = \frac{22}{49} \approx 0,4489...$$
Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được $P(B|A) \approx 0,45$.

Bài 3. Bạn Nam tham gia cuộc thi giải một mật thư. Theo quy tắc của cuộc thi, người chơi cần chọn ra sáu số từ tập $S = \{41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48; 49\}$ và xếp mỗi số vào đúng một vị trí trong sáu vị trí A, B, C, M, N, P như hình bên sao cho mỗi vị trí chỉ được xếp một số.



Mật thư sẽ được giải nếu các bộ ba số xuất hiện ở những bộ ba vị trí $(A, M, B); (B, N, C); (C, P, A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên sáu số trong tập S và xếp ngẫu nhiên vào các vị trí được yêu cầu. Gọi xác suất để bạn Nam giải được mật thư ở lần chọn và xếp đó là a. Giá trị của $\frac{4}{a}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = A_9^6 = 60480$.

Vì mật thư sẽ được giải nếu các bộ ba số xuất hiện ở những bộ ba vị trí $(A, M, B); (B, N, C); (C, P, A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó $\Rightarrow \begin{cases} A + B = 2M \\ B + C = 2N \\ C + A = 2P \end{cases} \Rightarrow A + B + C = M + N + P$

Ta có các trường hợp sau cho bộ $\{A, B, C\}$ và tương ứng là $\{M, N, P\}$:

$41 + 43 + 47 = 42 + 44 + 45$ $\quad$ $41 + 43 + 49 = 42 + 45 + 46$

$41 + 45 + 47 = 43 + 44 + 46$ $\quad$ $43 + 45 + 49 = 44 + 46 + 47$

$43 + 47 + 49 = 45 + 46 + 48$ $\quad$ $42 + 44 + 48 = 43 + 45 + 46$

$42 + 46 + 48 = 44 + 45 + 47$ $\quad$ $41 + 47 + 49 = 44 + 45 + 48$

Số cách xếp các bộ số A, B, C thỏa mãn ở mỗi trường hợp là $3!$ cách.

Ứng với mỗi cách xếp bộ số A, B, C có duy nhất một cách xếp bộ M, N, P.

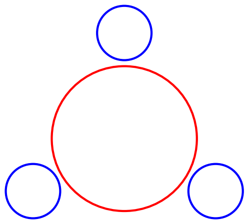
Do đó, số cách xếp các bộ $(A, M, B); (B, N, C); (C, P, A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó là $3! \cdot 8$.

Xác suất Nam giải được mật thư là: $a = \dfrac{3! \cdot 8}{A_9^6} = \dfrac{48}{60480} = \dfrac{1}{1260}$.

$$\Rightarrow \frac{4}{a} = \frac{4}{\frac{1}{1260}} = 5040.$$

Bài 4. Cho tập $X = \{1; 2; 3; \ldots; 12\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn lớn chính giữa đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn. Tính giá trị của $1980P$.

Hướng dẫn giải.



Không gian mẫu của biến cố là: $C_{12}^4 \cdot C_4^1 = 1980$

Giả sử 4 số lấy ra bao gồm a, b, c, M trong đó M là số chính giữa và a, b, c (giả sử $a < b < c$) là 3 số ở ba vòng tròn xung quanh, vì a, b, c không phân biệt thứ tự nên theo yêu cầu bài toán ta có: $\begin{cases} c + b < M < a + b + c \\ 3 < c + b < 12 \end{cases}$

Ta xét các TH có thể xảy ra của số M

TH1: $M \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ thì không tồn tại các số a, b, c thoả mãn

TH2: $M = 8$. Ta có các bộ $(a; b; c)$ thoả mãn là: $(2; 3; 4)$. **Có 1 bộ**

TH3: $M = 9$. Ta có các bộ $(a; b; c)$ thoả mãn là: $(2; 3; 5)$. **Có 1 bộ**

TH4: $M = 10$. Ta có các bộ $(a; b; c)$ thoả mãn là: $(2; 3; 6), (3; 4; 5), (2; 4; 5)$. **Có 3 bộ**

TH5: $M = 11$. Ta có các bộ $(a; b; c)$ thoả mãn là: $(2; 3; 7), (2; 4; 6), (3; 4; 5), (3; 4; 6)$. **Có 4 bộ**

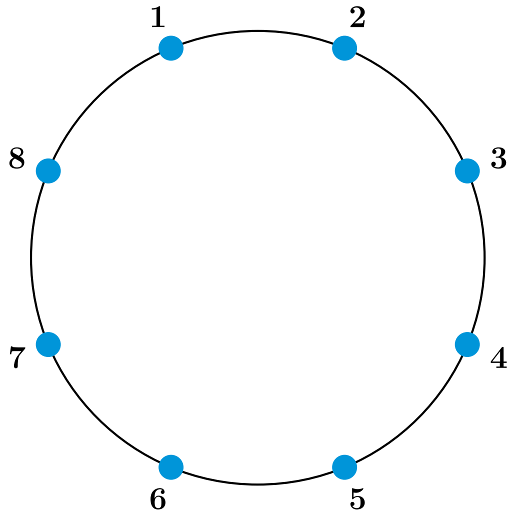
TH6: $M = 12$. Ta có các bộ $(a; b; c)$ thoả mãn là:
$(2; 3; 8), (2; 4; 7), (3; 4; 7), (3; 4; 6), (3; 5; 6), (4; 5; 6), (2; 5; 6)$. **Có 7 bộ**

Vậy xác suất của biến cố trên là: $P = \dfrac{16}{1980}$. Vậy $1980P = 16$.

Bài 5. Có tám người ngồi quanh một bàn tròn. Mỗi người được đưa cho một đồng xu cân đối và đồng chất. Cả tám người cùng tung đồng xu của mình, ai tung được mặt ngửa thì đứng dậy, còn ai tung được mặt sấp thì vẫn ngồi yên. Biết rằng xác suất để không có hai người đứng cạnh nhau là $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a^2 + b$.

Hướng dẫn giải. Vì mỗi người đều có 2 TH xảy ra là đứng hoặc ngồi nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2^8 = 256$.

Gọi A là biến cố "không có hai người đứng cạnh nhau".



Quan sát hình vẽ, ta thấy nếu có 5 người đứng thì sẽ luôn có hai người đứng cạnh nhau, do đó để không có hai người đứng cạnh nhau thì số người đứng phải nhỏ hơn hoặc bằng 4. Ta đi tìm số cách sắp xếp số người đứng này vào trong bàn 8 người sao cho không có hai người đứng cạnh nhau.

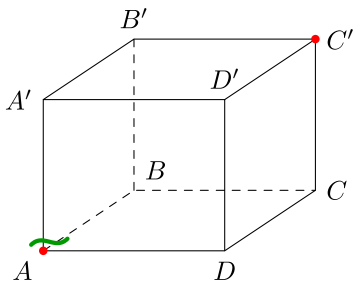
- TH1: Không có ai đứng: Có 1 cách.
- TH2: Có 1 người đứng: Có $C_8^1 = 8$ cách.
- TH3: Có 2 người đứng: Có $C_8^2 = 28$ cách chọn ra 2 người đứng trong 8 người, trong đó có 8 TH hai người đứng cạnh nhau (ở các cặp vị trí $1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1$). Suy ra số cách để 2 người đứng và không ai đứng cạnh nhau là $28 - 8 = 20$ cách.
- TH4: Có 3 người đứng: Có $C_8^3 = 56$ cách chọn ra 3 người đứng trong 8 người, trong đó: Trường hợp chỉ có 2 người đứng cạnh nhau là $8 \cdot C_4^1 = 32$ cách (vì 2 người đứng cạnh nhau thì 1 người còn lại chỉ có thể chọn 1 trong 4 chỗ để đứng (lưu ý là 3 người không đứng cạnh nhau): ví dụ khi hai người đứng cạnh nhau ở vị trí 1 và 2 thì người đứng còn lại chỉ có thể đứng ở 1 trong bốn vị trí $4, 5, 6, 7$). Trường hợp 3 người đứng cạnh nhau là 8 cách (ở các vị trí là $1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6, 5-6-7, 6-7-8, 7-8-1, 8-1-2$). Suy ra số cách để 3 người đứng và không ai đứng cạnh nhau là $56 - 32 - 8 = 16$ cách.
- TH5: Có 4 người đứng: Khi này ta chỉ có 2 cách để không có hai người đứng cạnh nhau (4 người đứng ở các vị trí $1, 3, 5, 7$ hoặc $2, 4, 6, 8$).

Suy ra tổng số cách để không có hai người đứng cạnh nhau là $n(A) = 1 + 8 + 20 + 16 + 2 = 47$.

Suy ra xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{47}{256} = \dfrac{a}{b}$.

Vậy $a^2 + b = 47^2 + 256 = 2465$.

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tại đỉnh A có một con sâu, mỗi lần di chuyển, nó bò theo cạnh của hình hộp chữ nhật và đi đến đỉnh kề với đỉnh nó đang đứng. Tính xác suất sao cho sau 9 lần di chuyển, nó đứng tại đỉnh C' (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Mỗi lần sâu di chuyển từ một đỉnh, nó có 3 lựa chọn để đi đến 3 đỉnh kề bên.

Do đó, số phần tử của không gian mẫu là

$$n(\Omega) = 3^9 = 19\,683.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử tọa độ đỉnh $A(0;0;0)$ và $C'(1;1;1)$.

Mỗi lần sâu di chuyển tương ứng với việc cộng thêm 1 đơn vị vào 1 trong 3 vị trí hoành độ, tung độ hoặc cao độ (theo mô-đun 2).

Để sau 9 lần di chuyển sâu đứng tại vị trí $(1;1;1)$, thì mỗi thành phần tọa độ phải được thay đổi một số lẻ lần.

Gọi x, y, z lần lượt là số lần di chuyển theo chiều hoành độ, tung độ và cao độ. Ta có:

$$x + y + z = 9, \text{ với } x, y, z \in \{1;3;5;7;9\}.$$

Các bộ số (x, y, z) thỏa mãn điều kiện trên là:

- Bộ $(3;3;3)$: Có $\mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_3^3 = 1680$ trường hợp.
- Bộ hoán vị của $(1;3;5)$: Có $3! \cdot \mathrm{C}_9^5 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{C}_1^1 = 6 \cdot 504 = 3024$ trường hợp.
- Bộ hoán vị của $(7;1;1)$: Có $\dfrac{3!}{2!} \cdot \mathrm{C}_9^7 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_1^1 = 3 \cdot 72 = 216$ trường hợp.

Do đó số trường hợp thuận lợi cho biến cố A: "sâu ở C' sau 9 bước di chuyển" là

$$n(A) = 1680 + 3024 + 216 = 4920.$$

Xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{4920}{19\,683} \approx 0,25.$$

Bài 7. Trong bộ môn billiards 9 bóng (các bóng được đánh số từ 1 đến 9) có 3 quả bóng mục tiêu là 1, 4 và 8. Cơ thủ X chọn ngẫu nhiên 3 quả, sau đó cơ thủ Y chọn ngẫu nhiên 3 quả từ các quả còn lại. Biết rằng sau khi chọn, cơ thủ X đang có lợi thế hơn cơ thủ Y (tức là số bóng mục tiêu của X nhiều hơn của Y). Hãy tính xác suất để cơ thủ Y không giữ bất kỳ quả bóng mục tiêu nào (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Tập hợp các quả bóng là $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Nhóm bóng mục tiêu $T = \{1, 4, 8\}$ (3 quả), nhóm bóng thường N gồm 6 quả còn lại.

Gọi X_t và Y_t lần lượt là số bóng mục tiêu cơ thủ X và cơ thủ Y nhận được.

Xác suất được tính trên không gian mẫu là các trường hợp X chọn 3 quả và Y chọn 3 quả từ 6 quả còn lại: $n(\Omega) = C_9^3 \cdot C_6^3 = 1680$.

Biến cố điều kiện A: "Cơ thủ X có lợi thế hơn cơ thủ Y" $(X_t > Y_t)$. Các trường hợp thỏa mãn:

- $X_t = 1, Y_t = 0$: $C_3^1 C_6^2 \cdot C_2^0 C_4^3 = 45 \cdot 4 = 180$ cách.

- $X_t = 2, Y_t = 0$: $C_3^2 C_6^1 \cdot C_1^0 C_5^3 = 18 \cdot 10 = 180$ cách.
- $X_t = 2, Y_t = 1$: $C_3^2 C_6^1 \cdot C_1^1 C_5^2 = 18 \cdot 10 = 180$ cách.
- $X_t = 3, Y_t = 0$: $C_3^3 C_6^0 \cdot C_0^0 C_6^3 = 1 \cdot 20 = 20$ cách.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = 180 + 180 + 180 + 20 = 560$.

Biến cố B: "Cơ thủ Y không giữ quả bóng mục tiêu nào" ($Y_t = 0$).

Các kết quả thuận lợi cho cả A và B ($X_t > Y_t$ và $Y_t = 0$) là:

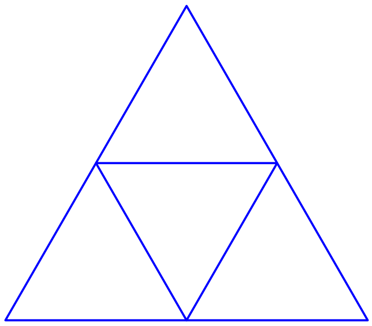
$$n(A \cap B) = 180(X_t = 1, Y_t = 0) + 180(X_t = 2, Y_t = 0) + 20(X_t = 3, Y_t = 0) = 380.$$

Xác suất cần tìm là:

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{380}{560} = \frac{19}{28} \approx 0,67857...$$

Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được kết quả: $0,68$.

Bài 8. Cho hình vẽ bên gồm 4 tam giác. Người ta chọn 3 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; \ldots; 26\}$ để xếp vào 3 tam giác ở 3 góc. Sau đó, tính tổng bình phương của 3 số đó rồi ghi kết quả vào tam giác còn lại ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở tam giác giữa là một số chia hết cho 5?



Hướng dẫn giải. Xét số dư của n^2 khi chia cho 5 với $n \in S$:

- Nếu $n \equiv 0 \pmod 5$ thì $n^2 \equiv 0 \pmod 5$.

  Trong tập S, có 5 số là $\{5, 10, 15, 20, 25\}$. Gọi tập này là A, khi đó $|A| = 5$.
- Nếu $n \equiv 1$ hoặc $n \equiv 4 \pmod 5$ thì $n^2 \equiv 1 \pmod 5$.

  Các số chia 5 dư 1 là $\{1, 6, 11, 16, 21, 26\}$ (6 số).

  Các số chia 5 dư 4 là $\{4, 9, 14, 19, 24\}$ (5 số). Vậy có $6 + 5 = 11$ số. Gọi tập này là B, khi đó $|B| = 11$.
- Nếu $n \equiv 2$ hoặc $n \equiv 3 \pmod 5$ thì $n^2 \equiv 4 \pmod 5$.

  Các số chia 5 dư 2 là $\{2, 7, 12, 17, 22\}$ (5 số). Các số chia 5 dư 3 là $\{3, 8, 13, 18, 23\}$ (5 số). Vậy có $5 + 5 = 10$ số. Gọi tập này là C, khi đó $|C| = 10$.

Gọi 3 số được chọn và xếp vào 3 góc là a, b, c. Số ghi ở tam giác giữa là $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Để $T \,\vdots\, 5$, tức là $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod 5$, ta có các trường hợp sau về số dư của (a^2, b^2, c^2) khi chia cho 5 (lấy từ tập $\{0, 1, 4\}$):

- **Trường hợp 1:** Cả 3 số a, b, c đều có bình phương chia hết cho 5.

  Tức là $a, b, c \in A$. Vì 3 số phân biệt và có thứ tự (xếp vào 3 góc khác nhau), số cách chọn và xếp là: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (cách).

- **Trường hợp 2:** Trong 3 số, có một số bình phương dư 0, một số bình phương dư 1 và một số bình phương dư 4.

  Tức là một số thuộc A, một số thuộc B và một số thuộc C. Số cách chọn 3 số từ 3 tập này là: $5 \cdot 11 \cdot 10 = 550$ (cách).

  Với mỗi bộ 3 số chọn được, có $3! = 6$ cách xếp chúng vào 3 góc.

  Số cách xếp trong trường hợp này là: $550 \cdot 6 = 3300$ (cách).

Vậy tổng số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $60 + 3300 = 3360$ (cách).

Bài 9. Trong dịp tết Nam và Minh chơi trò ba cây bằng bộ bài lơ khơ gồm 36 lá (mỗi người nhận được 3 lá bài trong đó không có các quân 10, J, Q, K sau đó cộng điểm trên 3 quân bài lại người nào lớn điểm hơn sẽ thắng, trong trường hợp 2 người bằng điểm thì sẽ xét chất trên các lá bài theo thứ tự từ lớn đến bé Rô, cơ, bích, tép). Người nào thắng sẽ được 3 chiếc kẹo của người còn lại. Hiện tại trong ván bài đầu tiên Nam được 10 điểm với các quân sau 2 tép, 7 rô, Át cơ. Khi đó xác suất Minh có thể thắng trong ván bài trên, chú ý Át rô là quân bài có hiệu lực mạnh nhất bộ bài (các quân Át còn lại đều tính như là số một) có dạng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Hướng dẫn giải. Do có 36 lá bài, Nam cầm 3 lá vì vậy còn 33 lá bài. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{33}^3 = 5456$.

Để thắng được Nam, Minh cần phải đạt 10 điểm và trong đó có một quân bài chất rô lớn hơn 7. Do Át rô mạnh nhất nên ta xét thành 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Minh có Át rô. Như vậy để thắng được Nam, Minh cần sở hữu 2 lá bài còn lại sao cho tổng điểm là 10 (tổng 3 lá chia 10 dư 0).

$A = \{$2 bích hoặc 2 cơ hoặc 2 rô và 7 bích hoặc 7 cơ hoặc 7 tép$\} \Rightarrow n_{A1} = 3 \cdot 3 = 9$.

Trường hợp 2. Minh không có Át rô. Như vậy Minh bắt buộc phải có 8 rô hoặc 9 rô trong 3 lá bài của mình để thắng chất 7 rô của Nam.

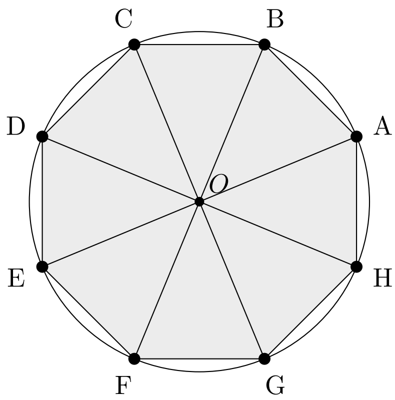
Trường hợp 2.1: Minh có 8 rô. Như vậy để thắng được Nam, Minh cần sở hữu 2 lá bài còn lại sao cho tổng điểm đạt 10. $A = \{$8 bích hoặc 8 cơ hoặc 8 tép và 4 bích hoặc 4 cơ hoặc 4 tép hoặc 4 rô$\} \Rightarrow n_{A2} = 3 \cdot 4 = 12$.

Trường hợp 2.2: Minh có 9 rô. Như vậy để thắng được Nam, Minh cần sở hữu 2 lá bài còn lại sao cho tổng điểm đạt 10. $A = \{$9 bích hoặc 9 cơ hoặc 9 tép và 2 bích hoặc 2 cơ hoặc 2 rô$\} \Rightarrow n_{A3} = 3 \cdot 3 = 9$.

Tổng số kết quả thuận lợi cho biến cố Minh thắng là: $n(A) = 9 + 12 + 9 = 30$. Xác suất để Minh thắng Nam là: $P_A = \frac{30}{5456} = \frac{15}{2728}$. Suy ra $a = 15, b = 2728$. Vậy $a + b = 15 + 2728 = 2743$.

Bài 10. Cho một hình bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong một đường tròn tâm O như hình bên. Gắn ngẫu nhiên tám số tự nhiên $\{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ vào tám đỉnh của bát giác đều này (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh lấy từ tám đỉnh của bát giác đã cho. Gọi xác suất để thu được một tam giác vuông với ba số trên ba đỉnh của tam giác (theo một thứ tự nào đó) lập thành một cấp số cộng là $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*; \frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

✍ *Hướng dẫn giải.*



- Tổng số tam giác có thể chọn từ 8 đỉnh của bát giác đều là $C_8^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$.

- Để tam giác tạo thành là tam giác vuông, một cạnh của nó phải là đường kính của đường tròn.

- Số đường kính đi qua các đỉnh của bát giác là 4 (AE, BF, CG, DH).

- Với mỗi đường kính, ta có thể chọn thêm 1 đỉnh từ 6 đỉnh còn lại để tạo thành một tam giác vuông.

- Do đó, số tam giác vuông có thể tạo thành là: $4 \times 6 = 24$.

- Xác suất để chọn được một tam giác vuông là $P_1 = \dfrac{24}{56} = \dfrac{3}{7}$.

- Xét tập hợp các số $S = \{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$. Cần chọn ra 3 số từ S để tạo thành cấp số cộng. Số cách chọn ra 3 số bất kỳ từ S là $C_8^3 = 56$.

- Các bộ 3 số tạo thành cấp số cộng (với $a < b < c$ và $2b = a + c$):

◇ Công sai $d = 1$: $\{9, 10, 11\}, \{10, 11, 12\}, \{11, 12, 13\}, \{12, 13, 14\}, \{13, 14, 15\}, \{14, 15, 16\}$ (6 bộ)

◇ Công sai $d = 2$: $\{9, 11, 13\}, \{10, 12, 14\}, \{11, 13, 15\}, \{12, 14, 16\}$ (4 bộ)

◇ Công sai $d = 3$: $\{9, 12, 15\}, \{10, 13, 16\}$ (2 bộ)

Tổng cộng có $6 + 4 + 2 = 12$ bộ 3 số lập thành cấp số cộng.

- Vì việc gán số vào các đỉnh là ngẫu nhiên, xác suất để 3 số tại 3 đỉnh của tam giác đã chọn tạo thành cấp số cộng là $P_2 = \dfrac{12}{56} = \dfrac{3}{14}$.

- Xác suất cần tìm là tích của hai xác suất:

$$P = P_1 \cdot P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{14} = \frac{9}{98}.$$

- Ta có $m = 9, n = 98$ (phân số đã tối giản vì ƯCLN$(9, 98) = 1$).

- Vậy $m + n = 9 + 98 = 107$.

Bài 11. Hiện nay, nước ta đang trong quá trình tinh gọn bộ máy và thực hiện nghị quyết không tổ chức công an cấp huyện. Do vậy, trong đợt điều động cán bộ công an từ huyện về công tác tại cơ sở hoặc công tác tại công an tỉnh, phòng tổ chức cán bộ nhận thấy rằng: có 60% cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa, số còn lại nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh.

- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở thì 70% có trình độ đại học và 30% có trình độ trung cấp.
- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì 80% có trình độ đại học và 20% có trình độ trung cấp.

Tuy nhiên, năng lực công tác cũng là một yếu tố quan trọng. Dựa trên hồ sơ đánh giá năng lực:

- Trong số cán bộ có nguyện vọng về cơ sở thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực "Tốt" trở lên với trình độ đại học là 60% và với trình độ trung cấp là 30%.
- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực "Tốt" trở lên với trình độ đại học là 85% và với trình độ trung cấp là 25%.

Chọn ngẫu nhiên một cán bộ công an. Tính xác suất để cán bộ này vừa có trình độ đại học, vừa được đánh giá có năng lực "Tốt" và có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Gọi các biến cố liên quan đến cán bộ được chọn như sau:

- A: "Cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở".
- B: "Cán bộ có trình độ đại học".
- C: "Cán bộ được đánh giá có năng lực Tốt trở lên".

Yêu cầu của bài toán là tính xác suất để cả ba biến cố này đồng thời xảy ra, tức là tính $P(A \cap B \cap C)$. Dựa vào dữ liệu bài toán, ta có các xác suất sau:

- Xác suất cán bộ có nguyện vọng về cơ sở: $P(A) = 60\% = 0,6$.
- Xác suất cán bộ có trình độ đại học trong nhóm nguyện vọng về cơ sở: $P(B|A) = 70\% = 0,7$.
- Xác suất cán bộ có năng lực Tốt trong nhóm nguyện vọng về cơ sở và có trình độ đại học: $P(C|A \cap B) = 60\% = 0,6$.

Áp dụng công thức nhân xác suất mở rộng:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Thay số vào ta được:

$$P(A \cap B \cap C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,252.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo yêu cầu của đề bài:

$$P(A \cap B \cap C) \approx 0,25.$$

Vậy xác suất cần tìm là $0,25$.

Bài 12. Hệ thống gồm các vật như sau được gọi là máng n:

- Một máng nghiêng có n lỗ dọc theo đáy. Tính từ trên cao xuống, các lỗ lần lượt có đường kính là $1, 2, 3, \ldots, n$.
- n quả bóng có đường kính là các số nguyên dương không lớn hơn n, trong đó có thể có nhiều quả bóng có cùng đường kính.

Xét máng n, thả lăn n quả bóng từ đỉnh máng xuống, lần lượt từng quả. Đối với mỗi quả bóng, khi lăn đến lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng đường kính của nó thì nó sẽ lọt vào đồng thời đóng lỗ này lại. Đối với một thứ tự các quả bóng sau khi thả lăn, nếu các quả bóng đều lọt vào lỗ thì thứ tự các quả bóng ấy được gọi là dãy đẹp. Hai dãy đẹp giống nhau khi và chỉ khi thứ tự bán kính của bóng lọt lỗ là như nhau. Có thể tạo được bao nhiêu dãy đẹp khác nhau đối với máng 5 biết rằng có đúng một quả có đường kính là 4 và một quả có đường kính là 5?

Hướng dẫn giải. Để n quả bóng đều lọt được vào các lỗ (tạo thành dãy đẹp), đa tập hợp các đường kính của các quả bóng $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ phải thỏa mãn điều kiện: Với mọi số nguyên k từ 1 đến 5, số lượng các quả bóng có đường kính lớn hơn hoặc bằng k không được vượt quá số lượng các lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng k.

Số lượng lỗ có đường kính $\geq k$ trong máng 5 là $5 - k + 1 = 6 - k$.

Gọi n_i là số quả bóng có đường kính bằng i và c_k là số quả bóng có đường kính $\geq k$. Ta có điều kiện:

$$c_k = \sum_{i=k}^{5} n_i \leq 6 - k.$$

Theo giả thiết, có đúng một quả đường kính 4 và một quả đường kính 5 nên $n_4 = 1, n_5 = 1$. Khi đó:

- $k = 5 : c_5 = n_5 = 1 \leq 1$ (thỏa mãn).
- $k = 4 : c_4 = n_4 + n_5 = 2 \leq 2$ (thỏa mãn).
- $k = 3 : c_3 = n_3 + 2 \leq 3 \Rightarrow n_3 \leq 1$.
- $k = 2 : c_2 = n_2 + n_3 + 2 \leq 4 \Rightarrow n_2 + n_3 \leq 2$.
- $k = 1 : c_1 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 5 \leq 5$ (luôn đúng).

Vì tổng số bóng là 5 nên $n_1 + n_2 + n_3 = 3$. Các bộ (n_1, n_2, n_3) thỏa mãn là:

1. Nếu $n_3 = 1$: Ta có $n_2 + 1 \leq 2 \Rightarrow n_2 \in \{0, 1\}$.
   - $n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = 1$: Tập bóng $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $5! = 120$.
   - $n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = 2$: Tập bóng $\{1, 1, 3, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $\dfrac{5!}{2!} = 60$.
2. Nếu $n_3 = 0$: Ta có $n_2 \leq 2 \Rightarrow n_2 \in \{0, 1, 2\}$.
   - $n_2 = 2 \Rightarrow n_1 = 1$: Tập bóng $\{1, 2, 2, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $\dfrac{5!}{2!} = 60$.
   - $n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = 2$: Tập bóng $\{1, 1, 2, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $\dfrac{5!}{2!} = 60$.
   - $n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = 3$: Tập bóng $\{1, 1, 1, 4, 5\}$. Số dãy đẹp là $\dfrac{5!}{3!} = 20$.

Tổng số dãy đẹp khác nhau có thể tạo được là:

$$120 + 60 + 60 + 60 + 20 = 320 \text{ (dãy)}.$$

Bài 13. An và Bình rất giỏi Toán, cùng tham gia một trò chơi, đầu tiên An bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ nhất chứa sáu thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 6, tiếp theo Bình bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ hai chứa bốn thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 4. Gọi số An bốc được là a và số của Bình là b, sau đó hai người cùng tính giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^a x^b \mathrm{d}x$. Nếu kết quả I là một số nguyên thì An thắng, ngược lại Bình thắng. Tính xác suất An thắng cuộc (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Gọi a là số trên thẻ An bốc được, ta có $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Gọi b là số trên thẻ Bình bốc được, ta có $b \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Mỗi cặp số (a, b) tương ứng với một kết quả bốc thẻ. Số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Giá trị của tích phân được tính như sau:

$$I = \int\limits_0^a x^b \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{b+1}}{b+1}\right]_0^a = \frac{a^{b+1}}{b+1}.$$

An thắng cuộc khi và chỉ khi I là một số nguyên, tức là $a^{b+1} \vdots (b+1)$. Ta xét các trường hợp dựa trên giá trị của b:

- **Trường hợp 1:** $b = 1 \Rightarrow b + 1 = 2$. $I = \dfrac{a^2}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^2 \vdots 2 \Leftrightarrow a$ là số chẵn $\Rightarrow a \in \{2; 4; 6\}$. Có 3 kết quả.
- **Trường hợp 2:** $b = 2 \Rightarrow b + 1 = 3$. $I = \dfrac{a^3}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^3 \vdots 3 \Leftrightarrow a$ chia hết cho $3 \Rightarrow a \in \{3; 6\}$. Có 2 kết quả.
- **Trường hợp 3:** $b = 3 \Rightarrow b + 1 = 4$. $I = \dfrac{a^4}{4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^4 \vdots 4$. Nếu a lẻ thì a^4 lẻ, không chia hết cho 4.

  Nếu a chẵn thì $a = 2k \Rightarrow a^4 = 16k^4 \vdots 4$. Vậy $a \in \{2; 4; 6\}$. Có 3 kết quả.
- **Trường hợp 4:** $b = 4 \Rightarrow b + 1 = 5$. $I = \dfrac{a^5}{5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^5 \vdots 5 \Leftrightarrow a$ chia hết cho $5 \Rightarrow a = 5$. Có 1 kết quả.

Tổng số các kết quả thuận lợi cho biến cố A "An thắng cuộc" là:

$$n(A) = 3 + 2 + 3 + 1 = 9.$$

Xác suất để An thắng cuộc là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{24} = 0,375.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm (chữ số thập phân thứ hai), ta được:

$$P(A) \approx 0,38.$$

Bài 14. Trong một trò chơi “giải mật mã tại ngày hội khoa học”, ban tổ chức chuẩn bị một hộp chứa 9 tấm thẻ được ghi các số từ tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Một người chơi rút ngẫu nhiên 5 tấm thẻ khác nhau từ hộp. Sau đó các số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần thành

$a < b < c < d < e$. Người chơi được coi là giải được mật mã nếu trong năm số này tồn tại bốn số liên tiếp tạo thành một cấp số cộng. Biết xác suất để người chơi giải được mật mã là A. Giá trị $\dfrac{1}{A}$ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_9^5 = 126$.

Cấp số cộng là khoảng cách giữa các số luôn bằng nhau, giả sử khoảng cách đó là r.

Nếu $r = 1 \rightarrow$ Có 6 bộ: $(1; 2; 3; 4); (2; 3; 4; 5); \ldots; (6; 7; 8; 9)$.

Nếu $r = 2 \rightarrow$ Có 3 bộ: $(1; 3; 5; 7); (2; 4; 6; 8); (3; 5; 7; 9)$.

Nếu $r > 2 \rightarrow$ Không có bộ nào.

Có tất cả 9 bộ, mỗi bộ chọn thêm 1 số từ 5 số còn lại để được bộ 5 số thoả yêu cầu bài toán, nghĩa là có $9 \cdot 5 = 45$ (bộ).

Tuy nhiên có 5 bộ trùng nhau:

- $(1; 2; 3; 4)$ thêm số 5 và $(2; 3; 4; 5)$ thêm số 1.
- $(2; 3; 4; 5)$ thêm số 6 và $(3; 4; 5; 6)$ thêm số 2.
- $(3; 4; 5; 6)$ thêm số 7 và $(4; 5; 6; 7)$ thêm số 3.
- $(4; 5; 6; 7)$ thêm số 8 và $(5; 6; 7; 8)$ thêm số 4.
- $(5; 6; 7; 8)$ thêm số 9 và $(6; 7; 8; 9)$ thêm số 5.

Nên có $45 - 5 = 40$ (bộ).

Xác suất là $A = \dfrac{40}{126} = \dfrac{20}{63} \Rightarrow \dfrac{1}{A} = \dfrac{63}{20} = 3,15$.

Bài 15. Một đa giác đều có 20 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ X một tam giác. Xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu là $\dfrac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$; $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó, giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Số phần tử của tập hợp X (tổng số tam giác có thể tạo thành từ 20 đỉnh) là:

$$n(X) = C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140.$$

Không gian mẫu có $n(\Omega) = 1140$ phần tử.

Theo đề bài, các cạnh đa giác màu xanh và các đường chéo màu đỏ. Một tam giác có ba cạnh cùng màu khi xảy ra các trường hợp:

- Trường hợp 1: Tam giác có 3 cạnh màu xanh. Đây là tam giác có 3 cạnh đều là cạnh của đa giác. Điều này chỉ xảy ra khi đa giác là tam giác ($n = 3$). Với đa giác có 20 đỉnh, số tam giác loại này là 0.
- Trường hợp 2: Tam giác có 3 cạnh màu đỏ. Đây là tam giác có cả 3 cạnh đều là đường chéo của đa giác, tức là tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác. Số tam giác không có cạnh nào chung với đa giác n đỉnh được tính bởi công thức:

$$N = C_n^3 - n - n(n-4)$$

  Với $n = 20$, ta có:

  - Số tam giác có đúng 2 cạnh là cạnh đa giác: 20 tam giác.

☆ Số tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh đa giác: $20 \times (20 - 4) = 320$ tam giác.

Số tam giác có 3 cạnh màu đỏ là: $1140 - 20 - 320 = 800$.

Vậy số tam giác có ba cạnh cùng màu là $n(A) = 0 + 800 = 800$.

Xác suất cần tìm là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{800}{1140} = \frac{40}{57}.$$

Theo bài ra $P(A) = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản, suy ra $a = 40, b = 57$. Giá trị của $a + b = 40 + 57 = 97$.

Bài 16. Có 10 chiếc ghế chia thành hai hàng ngang và thành 5 cặp đối diện nhau, mỗi chiếc ghế chỉ ngồi được một người. Có hai đội đi thi học sinh giỏi của hai trường THPT, mỗi đội gồm 10 em học sinh. Đội I có 3 em lớp 12A, 3 em lớp 12B, 4 em còn lại mỗi em một lớp C, D, E, F và đội II có 3 em lớp 12A, 2 em lớp 12B, 5 em còn lại mỗi em một lớp C, D, E, F, G. Dùng một con súc sắc cân đối đồng chất để tung lên, nếu số chấm nhỏ hơn 5 thì xếp ngẫu nhiên 10 em đội I vào 10 ghế, nếu số chấm lớn hơn 4 thì xếp 10 em đội II vào 10 ghế. Hãy tính xác suất để các em đội I được xếp ngồi vào ghế, nếu biết không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải. Gọi T_1 là biến cố "Đội I được chọn", T_2 là biến cố "Đội II được chọn".

Từ quy tắc tung súc sắc, ta có xác suất chọn mỗi đội là: $P(T_1) = P(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. $P(T_2) = P(\{5, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Gọi C là biến cố "Không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau". Tổng số cách xếp 10 học sinh của một đội vào 10 ghế là 10!.

Tính $P(C|T_1)$ (Đội I gồm 3A, 3B, 1C, 1D, 1E, 1F):

Trong đội I, chỉ có lớp A và lớp B có nhiều hơn 1 học sinh, nên chỉ có thể xảy ra các cặp đối diện cùng lớp là (A,A) hoặc (B,B). Do mỗi lớp chỉ có 3 em nên tối đa chỉ có 1 cặp cùng lớp ngồi đối diện nhau cho mỗi loại.

- Xác suất có ít nhất một cặp (A,A) đối diện:

$$P(A\text{-}A) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot 2! \cdot 8!}{10!} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \frac{1}{3}.$$

- Xác suất có ít nhất một cặp (B,B) đối diện:

$$P(B\text{-}B) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot 2! \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{3}.$$

- Xác suất có cả cặp (A,A) và (B,B) đối diện:

$$P(A\text{-}A \cap B\text{-}B) = \frac{P_5^2 \cdot (C_3^2 \cdot 2!) \cdot (C_3^2 \cdot 2!) \cdot 6!}{10!} = \frac{20 \cdot 6 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{7}.$$

Suy ra $P(C|T_1) = 1 - [P(A\text{-}A) + P(B\text{-}B) - P(A\text{-}A \cap B\text{-}B)] = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{10}{21}$.

Tính $P(C|T_2)$ (Đội II gồm 3A, 2B, 1C, 1D, 1E, 1F, 1G):

Tương tự, các cặp đối diện cùng lớp có thể là (A,A) hoặc (B,B).

- Xác suất có cặp (A,A) đối diện:

$P(A\text{-}A) = \dfrac{1}{3}$ (tương tự đội I).

- Xác suất có cặp (B,B) đối diện:

$P(B\text{-}B) = \dfrac{C_5^1 \cdot C_2^2 \cdot 2! \cdot 8!}{10!} = \dfrac{5 \cdot 1 \cdot 2}{90} = \dfrac{1}{9}$.

- Xác suất có cả cặp (A,A) và (B,B) đối diện:

$P(A\text{-}A \cap B\text{-}B) = \dfrac{P_5^2 \cdot (C_3^2 \cdot 2!) \cdot (C_2^2 \cdot 2!) \cdot 6!}{10!} = \dfrac{20 \cdot 6 \cdot 2}{5040} = \dfrac{1}{21}$.

Suy ra $P(C|T_2) = 1 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{21}\right) = 1 - \dfrac{21+7-3}{63} = \dfrac{38}{63}$.

Áp dụng công thức Bayes:

$$P(T_1|C) = \frac{P(T_1) \cdot P(C|T_1)}{P(T_1) \cdot P(C|T_1) + P(T_2) \cdot P(C|T_2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{21}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{21} + \frac{1}{3} \cdot \frac{38}{63}} = \frac{\frac{20}{63}}{\frac{20}{63} + \frac{38}{189}} = \frac{60}{60+38} = \frac{30}{49}.$$ $P(T_1|C) \approx 0,6122...$

Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được kết quả là $0,61$.

Bài 17. Đề thi Tốt nghiệp THPT môn Toán năm 2025 gồm 3 dạng thức trắc nghiệm, trong đó dạng thức I là câu hỏi trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn gồm 12 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm; dạng thức II là loại câu hỏi Đúng/Sai gồm 4 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 ý hỏi, mỗi ý học sinh chỉ cần trả lời đúng hoặc chỉ trả lời sai; nếu 1 ý trả lời đúng đáp án thì được 0,1 điểm, đúng 2 ý được 0,25 điểm, đúng 3 ý được 0,5 điểm và đúng cả 4 ý được 1 điểm. Giả sử một thí sinh làm bài thi này và chắc chắn trả lời đúng 12 câu hỏi dạng thức I. Các câu còn lại của dạng thức II học sinh đó chọn ngẫu nhiên phương án trả lời cho mỗi ý. Gọi a là xác suất để học sinh đó làm được đúng 5 điểm cho cả hai dạng thức. Giá trị của $1000a$ bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải. Số điểm học sinh đạt được ở dạng thức I là: $12 \times 0,25 = 3,0$ điểm.

Để đạt được đúng 5 điểm cho cả bài thi, số điểm học sinh cần đạt thêm ở dạng thức II là: $5,0 - 3,0 = 2,0$ điểm.

Xét một câu hỏi trong dạng thức II gồm 4 ý, mỗi ý có 2 lựa chọn (Đúng/Sai). Vì chọn ngẫu nhiên nên xác suất chọn đúng mỗi ý là $p = 0,5$.

Gọi X là số ý trả lời đúng trong một câu hỏi. Xác suất để có k ý đúng là: $P(X = k) = C_4^k \cdot (0,5)^4 = \dfrac{C_4^k}{16}$. Bảng phân bố điểm cho một câu hỏi:

- $P(0 \text{ điểm}) = P(X = 0) = \dfrac{1}{16}$.
- $P(0,1 \text{ điểm}) = P(X = 1) = \dfrac{4}{16}$.
- $P(0,25 \text{ điểm}) = P(X = 2) = \dfrac{6}{16}$.
- $P(0,5 \text{ điểm}) = P(X = 3) = \dfrac{4}{16}$.
- $P(1,0 \text{ điểm}) = P(X = 4) = \dfrac{1}{16}$.

Gọi s_1, s_2, s_3, s_4 là điểm của 4 câu hỏi dạng thức II. Ta cần $\sum_{i=1}^{4} s_i = 2,0$.

Các tổ hợp điểm thỏa mãn (không xét đến các bộ có điểm $0,1$ vì không thể tổng bằng $2,0$ với 4 câu):

1) Bộ $\{1;1;0;0\}$: Có $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ hoán vị. Xác suất: $P_1 = 6 \cdot \left(\dfrac{1}{16}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{16}\right)^2 = \dfrac{6}{65536}$.

2) Bộ $\{1;0,5;0,5;0\}$: Có $\dfrac{4!}{2!} = 12$ hoán vị. Xác suất: $P_2 = 12 \cdot \dfrac{1}{16} \cdot \left(\dfrac{4}{16}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{192}{65536}$.

3) Bộ $\{1;0,5;0,25;0,25\}$: Có $\dfrac{4!}{2!} = 12$ hoán vị. Xác suất: $P_3 = 12 \cdot \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{4}{16} \cdot \left(\dfrac{6}{16}\right)^2 = \dfrac{1728}{65536}$.

4) Bộ $\{0,5;0,5;0,5;0,5\}$: Có 1 hoán vị. Xác suất: $P_4 = 1 \cdot \left(\dfrac{4}{16}\right)^4 = \dfrac{256}{65536}$.

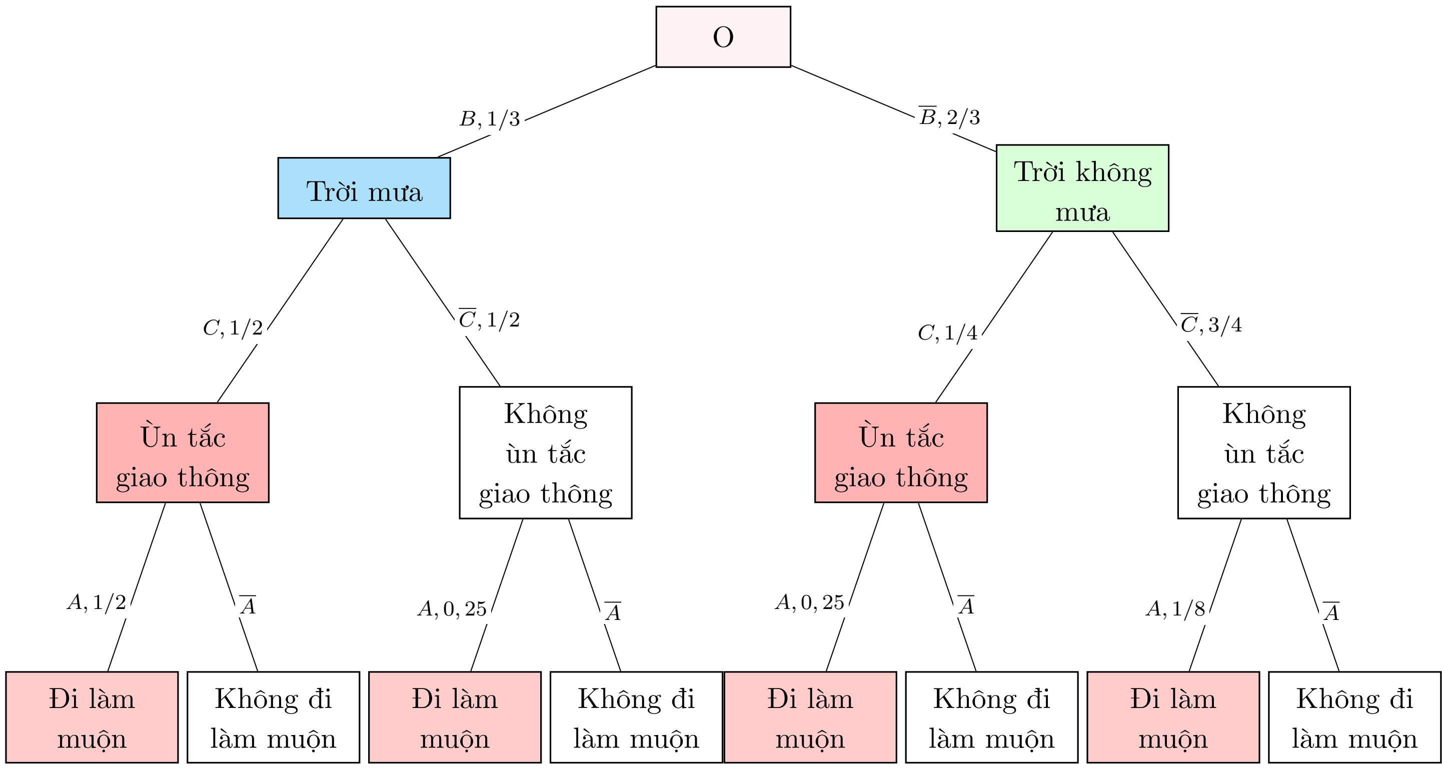
Tổng xác suất $a = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \dfrac{6 + 192 + 1728 + 256}{65536} = \dfrac{2182}{65536}$.

Giá trị của $1000a = 1000 \cdot \dfrac{2182}{65536} \approx 33,2946$.

Làm tròn đến hàng phần mười, ta được kết quả là $33,3$.

Bài 18. Ở thị trấn của tôi, trời mưa một phần ba số ngày. Nếu trời mưa, sẽ có khả năng xảy ra ùn tắc giao thông với xác suất $\dfrac{1}{2}$, nếu trời không mưa, sẽ có khả năng xảy ra ùn tắc giao thông là $\dfrac{1}{4}$. Nếu trời mưa và có ùn tắc giao thông, tôi sẽ đến muộn làm việc với xác suất $\dfrac{1}{2}$. Mặt khác, xác suất đến muộn là $\dfrac{1}{8}$ nếu trời không mưa và không có ùn tắc giao thông. Trong các tình huống khác (mưa và không có ùn tắc giao thông, không mưa và có ùn tắc giao thông), xác suất đến muộn của tôi đều là 0,25. Chọn một ngày ngẫu nhiên mà tôi đi làm muộn, vậy xác suất trời mưa vào ngày hôm đó là bao nhiêu %? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Hướng dẫn giải.



Theo công thức xác suất có điều kiện, ta có

$P(\text{trời mưa}|\text{đi làm muộn}) = P(\text{trời mưa và đi làm muộn})/P(\text{đi làm muộn})$

+) $P(\text{trời mưa và đi làm muộn}) = P(OBCA) + P(OB\overline{C}A) + P(O\overline{B}CA) + P(O\overline{BC}A) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 0,25 = \dfrac{1}{8}$.

+) $P(\text{đi làm muộn}) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 0,25 + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 0,25 + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{11}{48}$.

Suy ra $P(\text{trời mưa}|\text{đi làm muộn}) = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{11}{48}} = \dfrac{6}{11} \approx 54,5\%$.

Bài 19. Một nghệ nhân có 9 chiếc đèn lồng với độ dài dây treo (cm) lần lượt là $10, 20, 30, \ldots, 90$. Khung đèn là một tam giác đều ABC; gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Nghệ nhân chọn ngẫu nhiên 6 chiếc đèn và gán ngẫu nhiên vào 6 vị trí A, B, C, M, N, P (mọi cách gán là đồng khả năng). Để khung đèn đạt độ cân đối hoàn hảo, trên mỗi cạnh tam giác, chiều dài dây treo của đèn ở giữa phải bằng trung bình cộng chiều dài dây treo của hai đèn ở hai đầu mút cạnh đó. Gọi xác suất để thỏa mãn điều kiện ngay lần chọn và gán đầu tiên là P. Giá trị của $\dfrac{6}{P}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Gọi chiều dài dây treo của các đèn tại các vị trí A, B, C, M, N, P lần lượt là $x_A, x_B, x_C, x_M, x_N, x_P$.

Các giá trị này được chọn từ tập $S = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$.

Để đơn giản, ta chia các giá trị cho 10, xét tập $S' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Điều kiện bài toán tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ x_P = \dfrac{x_C + x_A}{2} \end{cases}$$

Để x_M, x_N, x_P là các số nguyên thì tổng của hai đỉnh bất kỳ phải là số chẵn, tức là x_A, x_B, x_C phải có cùng tính chẵn lẻ.

Đồng thời, 6 giá trị $\{x_A, x_B, x_C, x_M, x_N, x_P\}$ phải đôi một phân biệt.

Nếu x_A, x_B, x_C phân biệt và cùng tính chẵn lẻ, thì x_M, x_N, x_P chắc chắn là các số nguyên phân biệt.

Tuy nhiên, cần điều kiện để các trung điểm không trùng với các đỉnh. Ví dụ: $x_M = x_C \Leftrightarrow \dfrac{x_A + x_B}{2} = x_C \Leftrightarrow x_A + x_B = 2x_C$.

Điều này nghĩa là $\{x_A, x_B, x_C\}$ không được lập thành một cấp số cộng.

- *Trường hợp 1: x_A, x_B, x_C cùng lẻ.* Chọn 3 số từ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Số cách chọn 3 số bất kỳ là $C_5^3 = 10$. Các bộ 3 số lập thành cấp số cộng là: $\{1, 3, 5\}, \{3, 5, 7\}, \{5, 7, 9\}, \{1, 5, 9\}$ (có 4 bộ). Số bộ thỏa mãn là $10 - 4 = 6$ bộ. Mỗi bộ có $3! = 6$ cách xếp vào A, B, C. $\Rightarrow$ Có $6 \times 6 = 36$ cách.
- *Trường hợp 2: x_A, x_B, x_C cùng chẵn.* Chọn 3 số từ $\{2, 4, 6, 8\}$. Số cách chọn 3 số bất kỳ là

$C_4^3 = 4$. Các bộ 3 số lập thành cấp số cộng là: $\{2, 4, 6\}, \{4, 6, 8\}$ (có 2 bộ). Số bộ thỏa mãn là $4 - 2 = 2$ bộ. Mỗi bộ có $3! = 6$ cách xếp vào A, B, C. $\Rightarrow$ Có $2 \times 6 = 12$ cách.

Tổng số cách gán thuận lợi là $n(A) = 36 + 12 = 48$.

$n(\Omega)$.

Chọn 6 chiếc đèn từ 9 chiếc và xếp vào 6 vị trí có thứ tự:

$$n(\Omega) = A_9^6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480.$$

$$P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{60480} = \frac{1}{1260} \Rightarrow \frac{6}{P} = 6 \cdot 1260 = 7560.$$

Bài 20. Lớp mẫu giáo có 10 em bé, các bé đứng thành vòng tròn và cách đều nhau, đứng ở tâm vòng tròn là cô giáo. Mỗi bé cầm hai cờ, một xanh một đỏ trên mỗi tay. Cô giáo bảo "giơ lên cao một cờ", các bé giơ ngẫu nhiên một cờ. Gọi a là xác suất để không có 4 cờ nào cùng màu được giơ lên ở 4 vị trí mà 4 vị trí ấy là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Giá trị của $\frac{2200}{a}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Mỗi bé có 2 cách chọn cờ để giơ (xanh hoặc đỏ), do đó với 10 bé, số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = 2^{10} = 1024.$$

Một tập hợp gồm 4 đỉnh của đa giác đều 10 cạnh tạo thành một hình chữ nhật khi và chỉ khi 4 đỉnh đó là đầu mút của 2 đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác.

Đa giác đều 10 cạnh có $10 : 2 = 5$ đường kính. Gọi các đường kính này là d_1, d_2, d_3, d_4, d_5.

Mỗi đường kính có 2 đầu mút, tại mỗi đầu mút có 1 lá cờ được giơ lên. Với mỗi đường kính d_i, có 4 trạng thái màu cờ tại hai đầu mút: (Xanh, Xanh), (Đỏ, Đỏ), (Xanh, Đỏ), (Đỏ, Xanh). Một hình chữ nhật (tạo bởi 2 đường kính d_i và d_j) có 4 cờ cùng màu nếu:

- Cả d_i và d_j đều có trạng thái cờ là (Xanh, Xanh).
- Hoặc cả d_i và d_j đều có trạng thái cờ là (Đỏ, Đỏ).

Để không có hình chữ nhật nào có 4 cờ cùng màu, ta cần thỏa mãn điều kiện:

- Trong 5 đường kính, có tối đa 1 đường kính mà cả hai đầu mút cùng giơ cờ Xanh.
- Trong 5 đường kính, có tối đa 1 đường kính mà cả hai đầu mút cùng giơ cờ Đỏ.

Gọi x là số đường kính có trạng thái (Xanh, Xanh), y là số đường kính có trạng thái (Đỏ, Đỏ), và z là số đường kính có cờ khác màu ở hai đầu mút (có 2 khả năng là (Xanh, Đỏ) hoặc (Đỏ, Xanh)). Ta có $x + y + z = 5$ với $x, y \in \{0, 1\}$. Các trường hợp thuận lợi:

- Trường hợp 1: $x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 5$. Số cách là $C_5^0 \cdot C_5^0 \cdot 2^5 = 32$.
- Trường hợp 2: $x = 1, y = 0 \Rightarrow z = 4$. Số cách là $C_5^1 \cdot C_4^0 \cdot 2^4 = 5 \cdot 16 = 80$.
- Trường hợp 3: $x = 0, y = 1 \Rightarrow z = 4$. Số cách là $C_5^0 \cdot C_5^1 \cdot 2^4 = 5 \cdot 16 = 80$.
- Trường hợp 4: $x = 1, y = 1 \Rightarrow z = 3$. Số cách là $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot 2^3 = 5 \cdot 4 \cdot 8 = 160$.

Tổng số cách thuận lợi là: $n(A) = 32 + 80 + 80 + 160 = 352$.

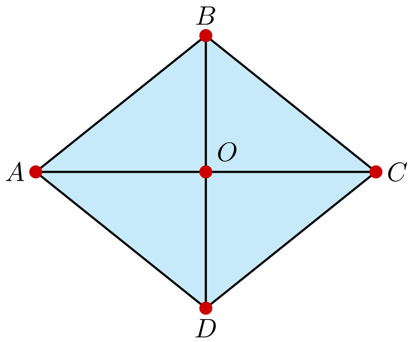
Xác suất $a = \frac{352}{1024} = \frac{11}{32}$.

Giá trị của biểu thức $\dfrac{2200}{a}$ là:

$$\frac{2200}{a} = 2200 \cdot \frac{32}{11} = 200 \cdot 32 = 6400.$$

Vậy kết quả là 6400.

Bài 21. Một hệ thống chiếu sáng có 5 bóng đèn được đặt ở các đỉnh của một đồ thị được kết nối như hình vẽ. Các bóng đèn được nối với nhau bằng dây điện dọc theo 8 cạnh của đồ thị. Mỗi dây điện có xác suất 50% hoạt động bình thường. Để toàn bộ hệ thống sáng, tất cả các bóng đèn phải nhận được điện từ một nguồn duy nhất (tức là đồ thị các dây điện hoạt động phải liên thông giữa 5 đỉnh). Tính xác suất toàn bộ hệ thống chiếu sáng vẫn hoạt động được (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Mỗi dây điện có khả năng bật hoặc tắt như nhau nên tổng số cấu hình có thể xảy ra của 8 dây điện là:

$$n(\Omega) = 2^8 = 256.$$

Để hệ thống chiếu sáng hoạt động, đồ thị tạo bởi các dây điện đang hoạt động phải là một đồ thị liên thông gồm 5 đỉnh $\{A, B, C, D, O\}$. Ta xét các trường hợp dựa trên số dây điện nối từ O đến 4 đỉnh còn lại đang hoạt động:

- Trường hợp 1: O nối với cả 4 đỉnh A, B, C, D. Số cách chọn 4 cạnh từ O là $C_4^4 = 1$. Khi đó, 5 đỉnh đã liên thông bất kể trạng thái của 4 cạnh bao ngoài.

  Số đồ thị liên thông là: $1 \cdot (C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4) = 1 \cdot 2^4 = 16$.

- Trường hợp 2: O nối với đúng 3 trong 4 đỉnh A, B, C, D. Chọn 3 trong 4 đỉnh nối với O có $C_4^3 = 4$ cách.

  Giả sử O nối với A, B, C. Để đỉnh D liên thông vào cụm này, ít nhất một trong hai cạnh DA hoặc DC phải hoạt động.

  Số đồ thị liên thông là: $4 \cdot (C_4^1 - 2 + C_4^2 - 1 + C_4^3 + C_4^4) = 48$.

- Trường hợp 3: O nối với đúng 2 trong 4 đỉnh A, B, C, D.

  ☆ Có 4 cách chọn 2 cạnh từ O sao cho chúng vuông góc với nhau (ví dụ OA, OB). Số đồ thị liên thông tương ứng là: $4 \cdot (C_4^2 - 3 + C_4^3 + C_4^4) = 32$.

  ☆ Có 2 cách chọn 2 cạnh từ O nằm trên cùng một đường thẳng (ví dụ OA, OC). Số đồ thị liên thông tương ứng là: $2 \cdot (C_4^2 - 2 + C_4^3 + C_4^4) = 18$.

  $\Rightarrow$ Số đồ thị liên thông trong trường hợp này là $32 + 18 = 50$.

- Trường hợp 4: O nối với đúng 1 trong 4 đỉnh A, B, C, D. Có $C_4^1 = 4$ cách chọn 1 đỉnh nối với O. Khi đó, để 5 đỉnh liên thông, các cạnh bao ngoài phải đảm bảo kết nối các đỉnh còn lại với đỉnh đã nối với O. Số đồ thị liên thông là: $4 \cdot (C_4^3 + C_4^4) = 4 \cdot 5 = 20$.

Tổng số trường hợp thuận lợi là: $n(A) = 16 + 48 + 50 + 20 = 134$.

Xác suất cần tìm là:

$$P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{134}{256} \approx 0,5234.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, ta được $0,52$.

Bài 22. Trên hồ có 10 lá cây hoa súng xếp thành một hàng ngang. Trên lá ngoài cùng bên trái có một con ếch. Mỗi bước, con ếch sẽ nhảy sang lá kế bên hoặc nhảy bỏ qua lá đó để sang lá tiếp theo. Con ếch không bao giờ nhảy lùi. Hỏi con ếch có bao nhiêu cách để nhảy sang lá ngoài cùng bên phải?

Hướng dẫn giải. Để nhảy từ lá ngoài cùng bên trái (lá thứ 1) đến lá ngoài cùng bên phải (lá thứ 10), con ếch cần thực hiện các bước nhảy có tổng độ dài là 9 khoảng cách giữa các lá. Theo đề bài, con ếch có hai kiểu nhảy: nhảy 1 bước (sang lá kế bên) hoặc nhảy 2 bước (bỏ qua 1 lá để sang lá tiếp theo).

Gọi số lần nhảy 1 bước và 2 bước của con ếch lần lượt là a, b với $a, b \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b \leq 9$. Với mỗi cặp (a, b), số cách di chuyển của con ếch là số hoán vị lặp của a bước nhảy loại 1 và b bước nhảy loại 2, được tính bằng công thức C_{a+b}^a (cách).

Theo giả thiết ta có phương trình: $a + 2b = 9$. Vì $2b$ là số chẵn và 9 là số lẻ nên a phải là số lẻ. Suy ra $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Với $a = 1 \Rightarrow b = 4$: Số cách di chuyển của con ếch là $C_{1+4}^1 = C_5^1 = 5$ (cách).
- Với $a = 3 \Rightarrow b = 3$: Số cách di chuyển của con ếch là $C_{3+3}^3 = C_6^3 = 20$ (cách).
- Với $a = 5 \Rightarrow b = 2$: Số cách di chuyển của con ếch là $C_{5+2}^5 = C_7^5 = 21$ (cách).
- Với $a = 7 \Rightarrow b = 1$: Số cách di chuyển của con ếch là $C_{7+1}^7 = C_8^7 = 8$ (cách).
- Với $a = 9 \Rightarrow b = 0$: Số cách di chuyển của con ếch là $C_{9+0}^9 = C_9^9 = 1$ (cách).

Tổng số cách di chuyển của con ếch là: $5 + 20 + 21 + 8 + 1 = 55$ cách.

Bài 23. Nhân dịp khai trương, cửa hàng có một chương trình tri ân dành cho 50 người đầu tiên đứng xếp hàng (theo thứ tự từ 1 đến 50). Chủ cửa hàng sẽ tặng cho người cuối cùng một món quà đặc biệt với thể thức cuộc chơi như sau. Chủ cửa hàng nói "Các khách hàng số lẻ sẽ bị loại". Các khách hàng còn lại sẽ sắp xếp lại (theo thứ tự từ 1 đến hết), cuộc chơi sẽ dừng khi tìm được người cuối cùng. Vậy người may mắn nhận được quà thì ban đầu họ đứng số mấy?

Hướng dẫn giải. Ta có thể giải bài toán bằng cách liệt kê quá trình loại bỏ qua các vòng như sau:

- **Vòng 1:** Ban đầu có 50 người. Loại các khách hàng đứng ở vị trí số lẻ $\{1, 3, 5, \ldots, 49\}$. Còn lại 25 người ở các vị trí ban đầu là $\{2, 4, 6, \ldots, 50\}$. Những vị trí này đều chia hết cho 2^1.
- **Vòng 2:** Đánh số lại 25 người từ 1 đến 25. Tiếp tục loại các số lẻ mới $(1, 3, \ldots, 25)$, giữ lại các số chẵn $\{2, 4, 6, \ldots, 24\}$. Các vị trí ban đầu tương ứng là $\{4, 8, 12, \ldots, 48\}$. Những vị trí này đều chia hết cho 2^2.
- **Vòng 3:** Đánh số lại 12 người còn lại. Loại các số lẻ, giữ lại các số chẵn $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Các vị trí ban đầu tương ứng là $\{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$. Những vị trí này đều chia hết cho 2^3.

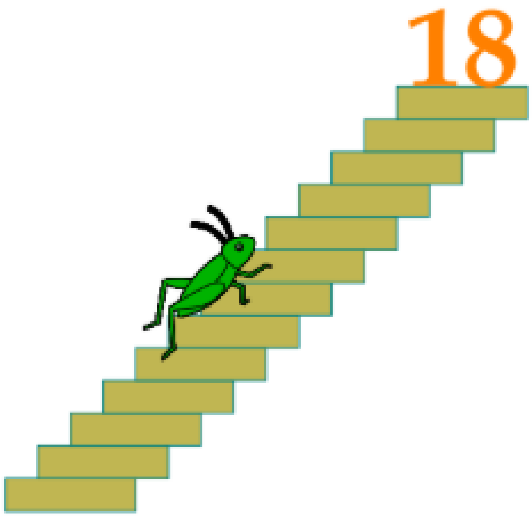
- ◇ **Vòng 4:** Đánh số lại 6 người. Giữ lại các số chẵn $\{2,4,6\}$. Các vị trí ban đầu tương ứng là $\{16,32,48\}$. Những vị trí này đều chia hết cho 2^4.
- ◇ **Vòng 5:** Đánh số lại 3 người còn lại là số 1 (vị trí 16), số 2 (vị trí 32) và số 3 (vị trí 48). Theo quy tắc, loại số lẻ 1 và 3, chỉ còn lại người ở vị trí số 2. Vị trí ban đầu của người này là 32.

Nhận xét: Với quy tắc loại bỏ người ở vị trí lẻ và đánh số lại, người cuối cùng còn lại sẽ đứng ở vị trí 2^n sao cho 2^n là lũy thừa của 2 lớn nhất mà không vượt quá tổng số người ban đầu.

Ta có $2^5 = 32 < 50 < 2^6 = 64$.

Vậy người may mắn nhận được quà ban đầu đứng ở vị trí số 32.

Bài 24. Một con châu chấu nhảy lên cầu thang có 18 bậc. Mỗi lần nhảy con châu chấu có thể nhảy 1 bậc hoặc 2 bậc. Tính xác suất để con châu chấu hoàn thành 18 bậc thang với số lần nhảy 2 bậc không bé hơn số lần nhảy 1 bậc (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Gọi x là số bước nhảy 1 bậc, y là số bước nhảy 2 bậc; suy ra $\begin{cases} x+2y=18 \\ x,y\in\mathbb{N}. \end{cases}$

Các cặp $(x;y)$ thỏa mãn là $(18;0),(16;1),(14;2),(12;3),(10;4),(8;5),(6;6),(4;7),(2;8),(0;9)$. Nếu $(x;y)\in\{(18;0),(0;9)\}$ thì con châu chấu có 2 cách đi.

Nếu $(x;y)=(16;1)$ thì số cách đi của châu chấu là C_{17}^1.

Tương tự như vậy các trường hợp còn lại sẽ có số cách là

$$C_{16}^2+C_{15}^3+C_{14}^4+C_{13}^5+C_{12}^6+C_{11}^7+C_{10}^8=4162 \text{ (cách)}.$$

Vậy tổng số cách nhảy của châu chấu để hoàn thành 18 bậc cầu thang là

$$2+C_{17}^1+4162=4181 \text{ (cách)}.$$

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=4181$.

Số lần nhảy 2 bậc không bé hơn số lần nhảy 1 bậc nên $(x;y)\in\{(6;6),(4;7),(2;8),(0;9)\}$.

Gọi A là biến cố thỏa đề bài thì $n(A)=C_{12}^6+C_{11}^7+C_{10}^8+C_9^9=1300$.

Do vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1300}{4181}=\dfrac{65}{209}\approx 0,31$.

Bài 25. Có 8 bạn cùng ngồi xung quanh một cái bàn tròn, mỗi bạn cầm một đồng xu như nhau. Tất cả 8 bạn cùng tung đồng xu của mình, bạn có đồng xu ngửa thì đứng, bạn có đồng xu sấp thì ngồi. Biết xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng bằng $\frac{m}{n}$ (trong đó m, n là các số tự nhiên và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản). Tính $m+n$.

Hướng dẫn giải. Gọi A là biến cố "không có hai người liền kề cùng đứng".

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2^8 = 256$.

Nếu có nhiều hơn 4 đồng xu ngửa thì biến cố A không xảy ra. Ta xét các trường hợp sau

- **Trường hợp 1:** Có nhiều nhất 1 đồng xu ngửa; số kết quả là $1+8=9$.
- **Trường hợp 2:** Có 2 đồng xu ngửa; số kết quả là $C_8^2 - 8 = 20$. (Loại trừ 8 khả năng 2 đồng xu ngửa đó kề nhau).
- **Trường hợp 3:** Có 3 đồng xu ngửa trong 8 đồng xu; các khả năng để loại trừ là:
  Cả 3 đồng xu ngửa kề nhau: có 8 kết quả.
  Có 2 đồng xu ngửa kề nhau trong 3 đồng xu ngửa: có $8 \cdot 4 = 32$ kết quả.
  Suy ra, số kết quả của trường hợp này là $C_8^3 - 8 - 32 = 16$.
- **Trường hợp 4:** Có 4 đồng xu ngửa; có 2 kết quả như thế.
  (Kết quả của trường hợp này là S-N-S-N-S-N-S-N và N-S-N-S-N-S-N-S; với kí hiệu N là người nhận được đồng xu mặt ngửa và S là người nhận mặt sấp tương ứng vị trí).

Số kết quả thuận lợi là $n(A) = 9 + 20 + 16 + 2 = 47$.

Xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{47}{256} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow m+n = 303$.

Bài 26. Công ty VinaElectro sản xuất một loại thiết bị điện tử tiêu dùng và đánh số seri cho từng sản phẩm bằng một mã 6 chữ số được tạo ngẫu nhiên từ các số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ và chữ số đầu tiên không được là 0. Trong một chương trình khuyến mãi nhân dịp ra mắt sản phẩm mới, công ty muốn tặng quà cho khách hàng nếu sản phẩm của họ mua có mã seri "đặc biệt" là mã số có tích các chữ số bằng $1\,400$. Biết xác suất để khách hàng được tặng quà (tức có mã "đặc biệt") là $\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $b-a$.

Hướng dẫn giải. S ố phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 9 \cdot 10^5 = 900\,000$.

Gọi A là biến cố: "Khách hàng được tặng quà".

Vì mã seri "đặc biệt" là mã số có tích các chữ số bằng $1\,400$, mà dãy số có 6 chữ số nên ta chỉ có 3 cách phân tích như sau:

$$1\,400 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^3 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1.$$

Do đó, số phần tử của biến cố A chính là tổng số hoán vị của 3 bộ $\{7; 5; 5; 2; 2; 2\}$, $\{7; 5; 5; 4; 2; 1\}$, $\{7; 5; 5; 8; 1; 1\}$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là

$$n(A) = \frac{6!}{2! \cdot 3!} + \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 600.$$

Xác suất khách hàng được tặng quà là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{600}{900\,000} = \dfrac{1}{1\,500}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1\,500 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1\,499.$$

Bài 27. Một công ty tổ chức sự kiện tổng kết cuối năm. Trong buổi dự tiệc có 4320 người tham gia. Để làm tăng tính thú vị hấp dẫn của buổi tiệc, người ta đã tạo ra các lá thăm ghi các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ được lập từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$. Mỗi người tham gia dự tiệc sẽ chọn cho mình một lá thăm và tất cả các lá thăm được bốc hết. Gần cuối buổi tiệc, ban tổ chức công bố những người chọn được số thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$ sẽ được nhận phần thưởng đặc biệt từ công ty. Anh Huy là nhân viên công ty có tham gia dự tiệc và bốc thăm trúng thưởng. Hỏi anh Huy có xác suất trúng thưởng là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. S ố các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau lập từ tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4320$ số. Vì số lá thăm bằng số người dự tiệc nên mỗi người bốc được duy nhất một số.

Gọi A là biến cố anh Huy trúng thưởng, tức là số trên lá thăm thỏa mãn $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = k$.

Tổng các chữ số được chọn là $S = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) = 3k$. Suy ra S chia hết cho 3.

Tổng tất cả các chữ số trong tập X là $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Gọi d là chữ số trong X không được chọn, ta có $S = 21 - d \Rightarrow d$ phải chia hết cho 3. Vậy $d \in \{0, 3, 6\}$.

- **Trường hợp 1:** $d = 0$. Bộ chữ số dùng là $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tổng $S = 21 \Rightarrow k = 7$. Các cặp có tổng bằng 7 là: $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$.

  Số cách sắp xếp là $3! \cdot 2^3 = 48$ cách.

- **Trường hợp 2:** $d = 3$. Bộ chữ số dùng là $\{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$. Tổng $S = 18 \Rightarrow k = 6$. Các cặp có tổng bằng 6 là: $\{0, 6\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}$.

  Tổng số hoán vị là $3! \cdot 2^3 = 48$. Số hoán vị có $a_1 = 0$ (khi đó $a_2 = 6$) là $1 \cdot 1 \cdot 2! \cdot 2^2 = 8$.

  Số cách thỏa mãn là $48 - 8 = 40$ cách.

- **Trường hợp 3:** $d = 6$. Bộ chữ số dùng là $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Tổng $S = 15 \Rightarrow k = 5$.

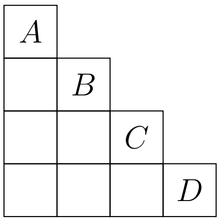
  Các cặp có tổng bằng 5 là: $\{0, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}$.

  Tương tự trường hợp 2, số cách thỏa mãn là $48 - 8 = 40$ cách.

Tổng số kết quả thuận lợi là $n(A) = 48 + 40 + 40 = 128$.

Xác suất trúng thưởng của anh Huy là $P(A) = \dfrac{128}{4320} \approx 0,0296 \approx 0,03$.

Bài 28. Từ tập hợp số tự nhiên $\{1; 2; 3; \ldots; 25; 26\}$, cần chọn ra 10 số phân biệt để gán vào 10 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi T là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị $\frac{T}{4}$ bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. G iả sử 10 số được chọn từ tập nguồn và sắp xếp theo thứ tự tăng dần là $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 < n_7 < n_8 < n_9 < n_{10}$.

- Theo quy tắc "mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới", các số trong mỗi hàng phải là các nhóm số liên tiếp từ dãy đã sắp xếp. Hàng 1 có 1 ô, hàng 2 có 2 ô, hàng 3 có 3 ô và hàng 4 có 4 ô.
- Hàng 1 chứa số $\{n_1\}$. Suy ra $A = n_1$.
- Hàng 2 chứa các số $\{n_2, n_3\}$. Vì "bên trái nhỏ hơn bên phải", ô bên trái là n_2 và ô bên phải là $B = n_3$.
- Hàng 3 chứa các số $\{n_4, n_5, n_6\}$. Ô bên phải nhất là $C = n_6$.
- Hàng 4 chứa các số $\{n_7, n_8, n_9, n_{10}\}$. Ô bên phải nhất là $D = n_{10}$.

Như vậy, ta có $A = n_1, B = n_3, C = n_6, D = n_{10}$ lập thành cấp số cộng tăng dần với công sai d.

- $A = a$.
- $B = a + d = n_3$. Vì $n_1 < n_2 < n_3$, giữa A và B có 1 số (n_2). Để chọn được n_2, ta cần $n_3 - n_1 > 1 \Rightarrow d \geq 2$. Có $d - 1$ cách chọn n_2.
- $C = a + 2d = n_6$. Giữa B và C có 2 số (n_4, n_5). Để chọn được 2 số này, ta cần $n_6 - n_3 > 2 \Rightarrow d \geq 3$. Có C_{d-1}^2 cách chọn bộ (n_4, n_5).
- $D = a + 3d = n_{10}$. Giữa C và D có 3 số (n_7, n_8, n_9). Ta cần $n_{10} - n_6 > 3 \Rightarrow d \geq 4$. Có C_{d-1}^3 cách chọn bộ (n_7, n_8, n_9).

Điều kiện tồn tại các số là $d \geq 4$ và $a + 3d \leq 26$. Ta xét các trường hợp của d:

- Với $d = 4$: $a + 12 \leq 26 \Rightarrow a \in \{1, 2, \ldots, 14\}$ (14 giá trị). Số cách chọn là $14 \cdot (4-1) \cdot C_3^2 \cdot C_3^3 = 14 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 126$.
- Với $d = 5$: $a + 15 \leq 26 \Rightarrow a \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ (11 giá trị). Số cách chọn là $11 \cdot (5-1) \cdot C_4^2 \cdot C_4^3 = 11 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 = 1056$.
- Với $d = 6$: $a + 18 \leq 26 \Rightarrow a \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ (8 giá trị). Số cách chọn là $8 \cdot (6-1) \cdot C_5^2 \cdot C_5^3 = 8 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 = 4000$.
- Với $d = 7$: $a + 21 \leq 26 \Rightarrow a \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ (5 giá trị). Số cách chọn là $5 \cdot (7-1) \cdot C_6^2 \cdot C_6^3 = 5 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 = 9000$.
- Với $d = 8$: $a + 24 \leq 26 \Rightarrow a \in \{1, 2\}$ (2 giá trị). Số cách chọn là $2 \cdot (8-1) \cdot C_7^2 \cdot C_7^3 = 2 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 = 10290$.

Tổng số cách chọn là $T = 126 + 1056 + 4000 + 9000 + 10290 = 24472$.

Vậy giá trị $\dfrac{T}{4} = \dfrac{24472}{4} = 6118$.

Bài 29. Một giờ hoạt động ngoài trời của lớp 1/1 trường tiểu học X, cô giáo cho 35 học sinh lớp mình nắm tay nhau xếp thành một vòng tròn để chơi trò chơi “Mèo bắt Chuột”. Sau khi ổn định, cô gọi tên ngẫu nhiên 6 học sinh trong lớp ra giữa vòng (3 em làm "Mèo", 3 em làm "Chuột"). Xác suất 6 em được gọi tên không có hai em nào đứng cạnh nhau trong vòng tròn bằng a. Tính $11594a$.

Hướng dẫn giải. Số cách chọn ngẫu nhiên 6 học sinh từ 35 học sinh là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^{6} = 1\,623\,160$.

Gọi A: "6 học sinh được chọn không có hai em nào đứng cạnh nhau trong vòng tròn".

Giả sử xếp 35 học sinh thành một hàng ngang, chọn ra 6 em sao cho không có hai em nào đứng cạnh nhau, còn lại 29 em sẽ tạo ra 30 khoảng trống.

Số cách xếp 6 em vào 30 khoảng trống là $\mathrm{C}_{30}^{6} = 593\,775$.

Khi xếp thành vòng tròn thì 2 em đầu hàng và em cuối hàng sẽ xếp cạnh nhau, do đó ta loại trừ trường hợp này.

Khi đó, ta cố định 2 em ở đầu và cuối, chọn 4 em còn lại xếp vào 28 khoảng trống ở giữa, số cách chọn là $\mathrm{C}_{28}^{4} = 20\,475$.

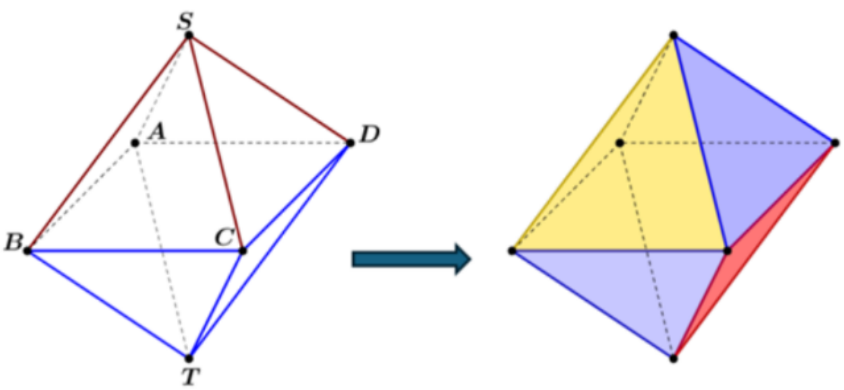
Vậy số phần tử thuận lợi cho biến cố A: $n(A) = 593\,775 - 20\,475 = 573\,300$.

Xác suất cần tìm là:

$$a = \mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{573\,300}{1\,623\,160} = \frac{4\,095}{11\,594}.$$

Vậy $11594a = 11594 \cdot \dfrac{4\,095}{11\,594} = 4\,095$.

Bài 30. Một đèn lồng đón năm mới được thiết kế theo hình bát diện đều (ta có thể hình dung hình bát diện đều là hai hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau $S.ABCD$ và $T.ABCD$ sử dụng chung một mặt đáy). Nghệ nhân đã thiết kế sẵn 12 tấm bìa cứng là các tam giác bằng nhau gồm 3 màu: xanh, đỏ, vàng; trên các tấm bìa cùng màu được đánh số từ 1 tới 4. Mỗi tấm bìa khi dán vào đèn lồng sẽ vừa kín một trong tám mặt bên của nó. Gọi N là số cách mà nghệ nhân có thể chọn 8 tấm bìa dán lên 8 mặt bên của đèn lồng sao cho hai tấm bìa có chung một cạnh thì khác màu, hai tấm bìa có chung đúng một đỉnh thì khác số. Giá trị $\frac{N}{8} + 16$ bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. C hia 8 mặt bên của hình bát diện đều làm 2 nhóm:

- Nhóm $U: (SAB), (SCD), (TAD), (TBC)$
- Nhóm $V: (SBC), (SAD), (TCD), (TAB)$

Nhận xét:

1. Hai mặt bất kì trong mỗi nhóm đều có đúng 1 đỉnh chung. (1)

2. Một mặt bất kì của nhóm U đều kề với đúng 3 mặt của nhóm V và ngược lại. (2)
3. Mỗi mặt của nhóm U đều có duy nhất một mặt của nhóm V không chung đỉnh và chung cạnh với nó và ngược lại. Ví dụ như cặp (SAB) và (TCD) (ta gọi đây là mặt mặt *đối nhau*).

+) Đếm cách gắn số cho 8 mặt:

Vì (1) nên mỗi nhóm phải có đầy đủ các số lấy từ 1 đến 4.

Do đó, số cách đánh số cho nhóm U và nhóm V là: $T_1 = 4! \cdot 4! = 576$ (cách).

+) Đếm cách tô màu cho 8 mặt:

(Vì hai nhóm U và V có đặc điểm hoàn toàn tương tự nhau nên không mất tính tổng quát, dưới đây ta chọn nhóm U để tô màu trước, rồi suy ra cách tô màu của nhóm V)

Tiếp theo chúng ta sẽ xét các trường hợp về màu trong nhóm A:

TH1: Nhóm U có 4 mặt cùng màu.

Chọn 1 màu cho 4 mặt ở nhóm có: 3 cách chọn.

Vì (2) nên mỗi mặt ở nhóm V có 2 cách chọn màu (2 màu còn lại), mà nhóm V có 4 mặt phẳng, nên sẽ có 2^4 (cách).

Vậy TH1 có: $3 \cdot 2^4 = 48$ (cách).

TH2: Các mặt trong nhóm U sử dụng đúng 2 màu. Ta có các TH nhỏ hơn:

+) TH2.1: Có 3 mặt cùng màu và 1 mặt khác màu với 3 mặt kia

Giả sử các mặt của U là Đ-X-X-X, khi đó 3 mặt còn lại trong V (không là mặt đối của với mặt Đ của H) đều kề với mặt màu Đỏ của U nên 3 mặt này không thể tô màu Đỏ và cũng không được tô màu Xanh (vì chúng sẽ kề với mặt X của U), vậy 3 mặt này sẽ cùng tô màu vàng. Chỉ có một mặt của V (là mặt đối với mặt Đỏ của U) là được phép tô màu Đỏ hoặc Vàng, nhưng nó cũng không được tô màu Vàng vì như vậy sẽ trùng với TH1.

Vậy ở TH2.1, mỗi cách tô màu cho nhóm U thì có duy nhất 1 cách tô màu cho nhóm V. Tóm lại TH2.1 có: $C_3^2 \cdot 2! \cdot C_4^3 = 24$ (cách).

(Giải thích: Chọn 2 màu cho nhóm U có C_3^2 cách; hoán đổi màu có $2!$ cách; chọn 3 trong 4 mặt của nhóm U để tô giống màu có C_4^3 cách)

+) TH2.2: Có 2 mặt cùng màu và 2 mặt còn lại cũng cùng màu (khác với màu của hai mặt trước)

Giả sử các mặt của U là Đ-Đ-X-X, khi đó mỗi mặt của V đều kề với hai mặt màu Đỏ và Xanh của U, nên mỗi mặt của V chỉ có thể tô màu vàng.

Tóm lại TH2.2 có: $C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot 1 \cdot 2! = 36$ (cách).

(Giải thích: Chọn 2 màu cho nhóm U có C_3^2 cách; chọn 2 mặt trong 4 mặt của nhóm U để tô màu giống nhau; hai mặt còn lại của U chỉ có 1 cách tô màu; có $2!$ cách hoán đổi thứ tự tô màu nói trên)

+) TH3: Các mặt của U sử dụng đủ 3 màu.

Ta thấy TH3 không thể xảy ra. Vì nếu giả sử các mặt của U là Đ-Đ-X-V. Khi đó ta gọi mặt v_1 (trong V) là mặt đối với mặt đang tô màu Đỏ của nhóm U. Khi đó mặt v_1 cũng đang kề với 3 mặt có đủ 3 màu của nhóm U, nên không còn cách nào để tô màu cho mặt v_1.

Vậy từ 3 trường hợp trên, số cách tô màu cho 8 mặt là: $T_2 = 48 + 24 + 36 = 108$ (cách).

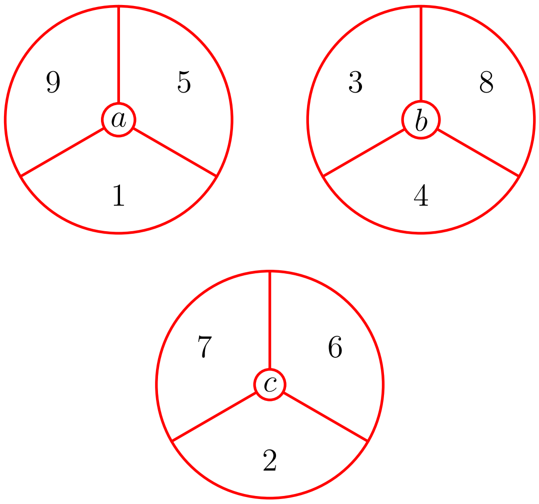
Vậy số cách mà nghệ nhân có thể thực hiện là: $N = T_1 \cdot T_2 = 576 \cdot 108 = 62208$ (cách).

Suy ra: $\frac{N}{8} + 2026 = 9792$.

Bài 31. Bạn Quỳnh và bạn Hà tham gia chơi trò chơi sau:

+ Quỳnh chọn trước một trong ba vòng quay được cho trong hình.
+ Sau đó, Hà chọn một trong hai vòng còn lại.
+ Cả hai quay vòng của mình. Người có số lớn hơn là người thắng.

Biết rằng mỗi vùng trên vòng quay đều có xác suất như nhau. Tính xác suất mà Quỳnh chiến thắng. *Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.*



Hướng dẫn giải.

Quỳnh chọn trước có 3 cách

Hà chọn sau có 2 cách

Quỳnh và Hà quay có $3 \cdot 3 = 9$ cách

$\Rightarrow n(\Omega) = 3 \cdot 2 \cdot 9 = 54$

Quỳnh quay được:

- Số 9: Hà có 6 cách thua.
- Số 5: Hà có 3 cách thua.
- Số 3: Hà có 2 cách thua.
- Số 4: Hà có 2 cách thua.
- Số 8: Hà có 5 cách thua.
- Số 7: Hà có 4 cách thua.
- Số 6: Hà có 4 cách thua.
- Số 2: Hà có 1 cách thua.

$\Rightarrow$ Có 27 cách để Hà chiến thắng

Xác suất cần tìm là $\dfrac{27}{54} = 0,5$.

Bài 32. Đại Học Bách Khoa Hà Nội tổ chức phỏng vấn 8 học sinh, trong đó có hai học sinh trường A, hai học sinh trường B, hai học sinh trường C và hai học sinh trường D. Để tránh tình trạng gian lận, trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội yêu cầu sắp xếp chỗ như sau:

- Xếp 8 bạn thành 2 hàng ngang, mỗi hàng bốn bạn.
- Hai bạn cùng trường không ngồi cạnh nhau và cũng không ngồi đối diện nhau.

A	B	C	D
D	C	B	A

Số cách mà Đại Học Bách Khoa Hà Nội có thể sắp xếp bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Hoán vị lệch: Cho một tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Một hoán vị σ của S, kí hiệu D_n, là một hoán vị lệch nếu với mọi phần tử i trong S, ta có: $\sigma(i) \neq i$ (tức là, phần tử ở vị trí thứ i không phải là phần tử i ban đầu). Khi đó ta có:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

Với $n = 4$, ta có số hoán vị lệch là $D_4 = 4! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 9$.

Bài toán được chia thành 3 trường hợp chính dựa trên sự phân bố các trường ở mỗi hàng:

TH1: Mỗi hàng có 4 học sinh từ 4 trường khác nhau

- Xếp 4 bạn từ 4 trường khác nhau vào hàng 1: có $4! = 24$ cách.
- Xếp 4 bạn còn lại vào hàng 2 sao cho không có bạn nào ngồi đối diện bạn cùng trường: Đây là bài toán hoán vị lệch của hàng 1, có $D_4 = 9$ cách.
- Hoán vị 2 học sinh trong cùng một trường: Mỗi trường có 2! cách, tổng cộng có $(2!)^4 = 16$ cách.
- $\Rightarrow$ Có $24 \cdot 9 \cdot 16 = 3456$ cách.

TH2: Mỗi hàng có 2 cặp học sinh cùng trường

- Chọn 2 trường trong 4 trường để xếp vào hàng 1: có $C_4^2 = 6$ cách. Hai trường còn lại sẽ ở hàng 2.
- Sắp xếp vị trí cho các cặp ở hàng 1 sao cho không ngồi cạnh nhau: giả sử là trường A và B, các mẫu có thể là ABAB, ABBA, BAAB, BABA $\Rightarrow$ 4 cách.
- Với mỗi cách xếp hàng 1, có duy nhất 1 cách xếp hàng 2 để không có cặp nào đối diện nhau.
- Hoán vị từng đôi học sinh cùng trường: $(2!)^4 = 16$ cách.
- $\Rightarrow$ Có $6 \cdot 4 \cdot 16 = 384$ cách.

TH3: Mỗi hàng chỉ có 1 cặp học sinh cùng trường

- Chọn 1 cặp học sinh đưa vào hàng 1, 1 cặp khác đưa vào hàng 2: có $4 \cdot 3 = 12$ cách chọn trường cho cặp.

◇ Hoán vị từng đôi học sinh cùng trường: $(2!)^4 = 16$ cách.

◇ Xét các tiểu trường hợp về vị trí (giả sử hàng 1 có cặp AA, hàng 2 có cặp DD):

TH3.1: 2 cặp AD đối nhau kiểu so le

A	B	D	C
D	C	A	B

+ Có 3 cách xếp cặp AD đối nhau so le. Mỗi cách có 2 cách xếp 2 bạn trường B và C. $\Rightarrow 3 \cdot 2 = 6$ cách.

TH3.2: 1 AD đối nhau, 1 AD không đối nhau

A		A	
D			D

+ Có 4 cách xếp vị trí như hình. Mỗi cách có 2 cách xếp B, C. $\Rightarrow 4 \cdot 2 = 8$ cách.

TH3.3: Không có cặp AD đối diện nhau

A		A	
	D		D

+ Có 4 cách xếp vị trí như hình. Mỗi cách có 2 cách xếp B, C. $\Rightarrow 4 \cdot 2 = 8$ cách.

Vậy tổng số cách là: $3456 + 384 + 12 \cdot 16 \cdot (6 + 8 + 8) = 8064$.

Bài 33. Vào ngày lễ tổng kết năm học 2024 – 2025, tại một trường Tiểu học nghèo ở miền núi, có 10 em học sinh hiếu học được vinh dự nhận 20 phần quà từ các anh chị cựu học sinh của trường nay đã thành đạt. Các phần quà này là đồng giá, gồm có: 9 đôi giày, 7 cái áo và 4 cái cặp; những món quà cùng loại thì giống hệt nhau. Trong số 10 em học sinh được nhận quà thì có Bình và Minh là đôi bạn rất thân thiết, tính xác suất để đôi bạn này cùng nhận các món quà như nhau.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số cặp quà (giày, áo); gọi y là số cặp quà (giày, cặp); gọi z là số cặp quà (áo, cặp).

Ta có $\begin{cases} x + y = 9 \\ x + z = 7 \\ y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \\ z = 1. \end{cases}$

Số cách tặng quà cho 10 học sinh, mỗi người hai phần khác nhau là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^6 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{C}_1^1 = 840$.

(Tức là chọn 6 học sinh trong 10 học sinh để trao (giày, áo); chọn 3 trong 4 học sinh tiếp theo để trao (giày, cặp); 1 học sinh cuối cùng buộc phải nhận món quà còn lại).

Có hai trường hợp để trao quà cho 10 học sinh mà Bình và Minh được nhận quà như nhau:

◇ *Trường hợp 1:* Bình và Minh nhận quà (giày, áo).

Số cách trao quà là $1 \cdot 1 \cdot \mathrm{C}_8^4 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{C}_1^1 = 280$ (cách).

(Tức là có 1 cách để Bình và Minh nhận quà; chọn 4 học sinh trong 8 học sinh tiếp theo nhận (giày, áo) $\rightarrow \mathrm{C}_8^4$ (cách); chọn 3 học sinh trong 4 học sinh còn lại nhận (giày, cặp) $\rightarrow \mathrm{C}_4^3$ (cách)).

◇ *Trường hợp 2:* Bình và Minh nhận quà (giày, cặp).

Số cách trao quà là $1 \cdot 1 \cdot \mathrm{C}_8^6 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_1^1 = 56$ (cách).

(Tức là có 1 cách để Bình và Minh nhận quà; chọn 6 học sinh trong 8 học sinh tiếp theo nhận (giày, áo) $\rightarrow \mathrm{C}_8^6$ (cách); chọn 1 học sinh trong 2 học sinh còn lại nhận (giày, cặp) $\rightarrow \mathrm{C}_2^1$ (cách)).

Số cách trao quà mà Bình và Minh được nhận quà như nhau là $n(A) = 280 + 56 = 336$.

Vậy xác suất cần tính là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{336}{\mathrm{C}_{10}^6 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{C}_1^1} = \dfrac{336}{840} = 0,4.$

Bài 34. Có hai chuồng thỏ. Chuồng thứ nhất có 6 con thỏ đực và 4 con thỏ cái. Chuồng thứ hai có 4 con thỏ đực và 5 con thỏ cái. Từ chuồng thứ nhất lấy ngẫu nhiên ra một con thỏ bỏ vào chuồng thứ hai. Rồi sau đó từ chuồng thứ hai lấy ngẫu nhiên ra 3 con thỏ. Biết trong 3 con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai có số thỏ đực nhiều hơn số thỏ cái. Tính xác suất con thỏ lấy ra ở chuồng thứ nhất là thỏ đực (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.

Gọi A là biến cố: "Con thỏ lấy ra ở chuồng thứ nhất là thỏ đực"

Gọi B là biến cố: "Trong 3 con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai có số thỏ đực nhiều hơn số thỏ cái"

Xác suất để con thỏ lấy ra ở chuồng thứ nhất là thỏ đực là: $P(A) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

Xác suất để con thỏ lấy ra ở chuồng thứ nhất là thỏ cái là: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$.

◇ Nếu con thỏ lấy ra ở chuồng thứ nhất là thỏ đực thì chuồng thứ hai lúc đó có 5 con thỏ đực và 5 con thỏ cái.

Để ba con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai có số thỏ đực nhiều hơn số thỏ cái ta có hai trường hợp:

☆ TH1: Ba con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai có 2 con thỏ đực và 1 con thỏ cái có $C_5^2 \cdot C_5^1$ (cách).

☆ TH2: Cả ba con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai đều là thỏ đực, có C_5^3 (cách).

Khi đó, $P(B|A) = \dfrac{C_5^2 \cdot C_5^1 + C_5^3}{C_{10}^3} = \dfrac{50 + 10}{120} = \dfrac{1}{2}$.

◇ Nếu con thỏ lấy ra ở chuồng thứ nhất là thỏ cái thì chuồng thứ hai lúc đó có 4 con thỏ đực và 6 con thỏ cái.

Để ba con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai có số thỏ đực nhiều hơn số thỏ cái ta có hai trường hợp:

☆ TH1: Ba con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai có 2 con thỏ đực và 1 con thỏ cái có $C_4^2 \cdot C_6^1$ (cách).

☆ TH2: Cả ba con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai đều là thỏ đực, có C_4^3 (cách).

Khi đó, $P(B|\overline{A}) = \dfrac{C_4^2 \cdot C_6^1 + C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{36+4}{120} = \dfrac{1}{3}$.

Theo công thức Bayes, ta có xác suất con thỏ lấy ra ở chuồng thứ nhất là thỏ đực biết trong 3 con thỏ lấy ra ở chuồng thứ hai có số thỏ đực nhiều hơn số thỏ cái là:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{9}{13} \approx 0,69.$$

Bài 35. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau và các chữ số thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S, xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải. Số phần tử của tập S là $\mathrm{A}_7^4 = 840$ số.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{840}^1 = 840$ số.

Gọi biến cố A: "không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn".

Trường hợp 1. Số đó chỉ không có chữ số chẵn nào.

Trường hợp này có $4! = 24$ số.

Trường hợp 2. Số đó chỉ có 1 chữ số chẵn.

Trường hợp này có $3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 4! = 288$ số.

Trường hợp 3. Số đó chứa đúng 2 số chẵn.

Trường hợp này có 3 cách sắp xếp: (chẵn, lẻ, chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn, lẻ, chẵn) và (chẵn, lẻ, lẻ, chẵn).

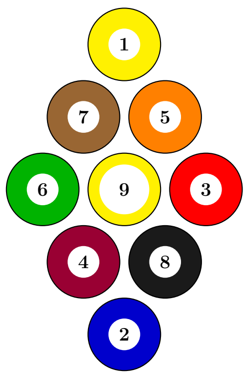
Với mỗi cách sắp xếp thì có $\mathrm{A}_3^2 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 72$ số.

Do đó $n(A) = 24 + 288 + 3 \cdot 72 = 528$ số.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{528}{840} = \dfrac{22}{35} \approx 0,63$.

Bài 36. Trong bida 9 bóng các bóng được đánh số từ 1 đến 9. Ban đầu cơ thủ X phá bóng và sau khi ổn định thì có 3 quả bóng ghi số $1, 4, 8$ đều nằm ở vị trí thuận lợi nhất để có thể đánh vào lỗ. Cơ thủ X được chọn ngẫu nhiên ba số trước, tiếp theo là đến cơ thủ Y chọn ngẫu nhiên 3 số.

Biết rằng cơ thủ chọn được các số nào thì sẽ có nhiệm vụ đánh các bóng có ghi số đó vào lỗ để hoàn thành chiến thắng của mình. Lợi thế ban đầu sẽ nghiêng về cơ thủ có số bóng nằm trong $\{1, 4, 8\}$ nhiều hơn. Hãy tính xác suất để cơ thủ X có lợi thế hơn cơ thủ Y (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hướng dẫn giải.

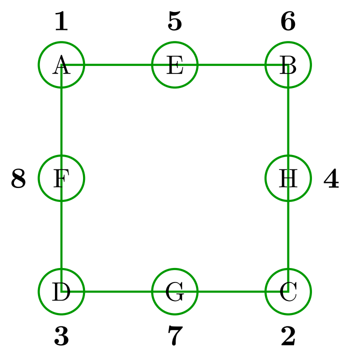
- Dễ thấy được: $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^3\mathrm{C}_6^3$.
- Để X có lợi thế hơn Y thì X được chia số còn nằm ở vị trí thuận lợi nhiều hơn Y.
- *Trường hợp 1:* X có ba con gần vị trí thuận lợi, Y không có con nào ở vị trí thuận lợi. Trường hợp này có: $\mathrm{C}_3^3 \cdot \mathrm{C}_6^3$.
- *Trường hợp 2:* X có hai con gần vị trí thuận lợi, Y có 1 con ở vị trí thuận lợi hoặc không có con nào ở vị trí thuận lợi. Trường hợp này có: $(\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_6^1) \cdot (\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_5^3)$.
- *Trường hợp 3:* X có một con gần vị trí thuận lợi, Y không có con nào ở vị trí thuận lợi. Trường hợp này có: $(\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_6^2) \cdot (\mathrm{C}_4^3)$.
- Suy ra: $n(A) = \mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_6^3 + (\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_6^1) \cdot (\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_5^3) + (\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_6^2) \cdot (\mathrm{C}_4^3)$.
- Suy ra xác suất cần tìm là:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_6^3 + (\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_6^1) \cdot (\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_5^3) + (\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_6^2) \cdot (\mathrm{C}_4^3)}{\mathrm{C}_9^3\mathrm{C}_6^3} = \frac{1}{3} = 0,33333... \approx 0,33.$$

Bài 37. Trên mỗi cạnh của một hình vuông $ABCD$, lấy các điểm E, F, G, H. Sau đó ta điền trên 8 điểm nằm trên hình vuông 8 số khác nhau trong tập hợp các số tự nhiên từ một đến tám, sao cho độ dài của các cạnh bằng tổng của các số hạng nằm trên cạnh đó, nghĩa là độ dài cạnh của hình vuông bằng $A + E + B$; $B + H + C$; $D + G + C$; $A + F + D$. Số trường hợp xảy ra bằng bao nhiêu?

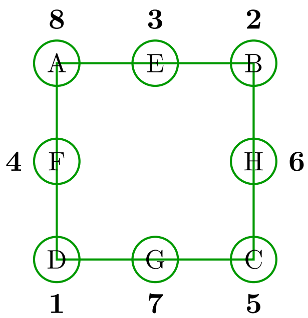
Hướng dẫn giải. Đặt $A + E + B = S$. Theo tính chất đối xứng và tổng các số từ 1 đến 8 là 36, ta có phương trình: $A + B + C + D = 4S - 36$. Vì $10 \leq A + B + C + D \leq 26$, ta tìm được các trường hợp $S \in \{12, 13, 14, 15\}$.

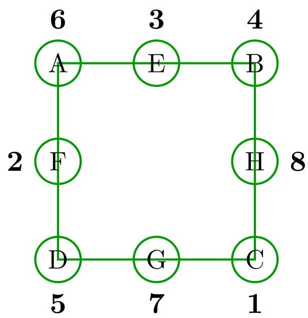
TH1: $A + B + C + D = 12 \Rightarrow S = 12$



$\Rightarrow$ Có $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cách điền.

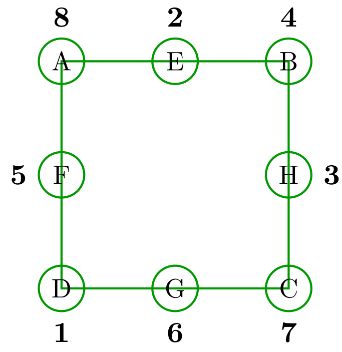
TH2: $A + B + C + D = 16 \Rightarrow S = 13$





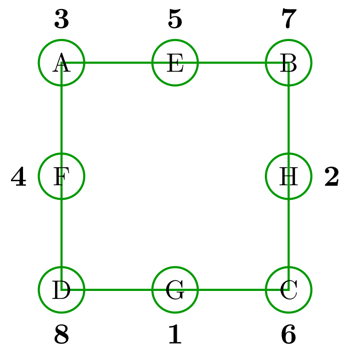
$\Rightarrow$ Mỗi tiểu trường hợp có 8 cách, tổng là 16 cách.

TH3: $A + B + C + D = 20 \Rightarrow S = 14$



$\Rightarrow$ Có 8 cách điền.

TH4: $A + B + C + D = 24 \Rightarrow S = 15$



$\Rightarrow$ Có 8 cách điền.

Vậy có tất cả $8 \cdot 5 = 40$ trường hợp.

Bài 38. Có hai đồng xu có hình thức giống nhau, trong đó có một đồng xu cân đối đồng chất và một đồng xu không cân đối có xác suất khi tung đồng xu xuất hiện mặt ngửa là $\frac{2}{3}$. Một người lấy ngẫu nhiên một đồng xu trong hai đồng xu đã cho, tung đồng xu đó 3 lần thì đều thấy xuất hiện mặt ngửa, xác suất người đó lấy được đồng xu cân đối là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Hướng dẫn giải. Gọi H_1 là biến cố người đó lấy được đồng xu cân đối $\Rightarrow P(H_1) = \dfrac{1}{2}$.

Gọi H_2 là biến cố người đó lấy được đồng xu không cân đối $\Rightarrow P(H_2) = \dfrac{1}{2}$.

Gọi A là biến cố "tung đồng xu 3 lần đều xuất hiện mặt ngửa".

- Xác suất 3 lần ngửa nếu là đồng xu cân đối: $P(A|H_1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.
- Xác suất 3 lần ngửa nếu là đồng xu không cân đối: $P(A|H_2) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$.

Xác suất để cả 3 lần tung đều xuất hiện mặt ngửa là (theo công thức xác suất đầy đủ):

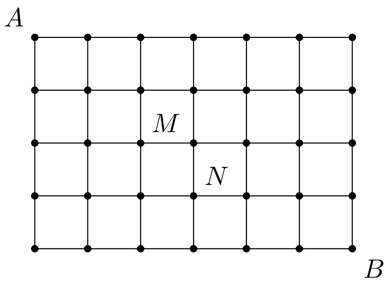
$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27} = \frac{1}{16} + \frac{4}{27} = \frac{91}{432}.$$

Xác suất để người đó lấy được đồng xu cân đối khi biết cả 3 lần đều ngửa là (theo công thức Bayes):

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{91}{432}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{432}{91} = \frac{27}{91} \approx 0,2967.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười, ta được xác suất xấp xỉ bằng $0,3$.

Bài 39. Trong một cuộc thi đấu Robotics, sân đấu được thiết kế dạng lưới ô vuông như hình vẽ. Các robot xuất phát từ vị trí điểm A, di chuyển ngẫu nhiên theo cạnh của các ô vuông theo hướng xuống dưới hoặc sang phải đến vị trí điểm B. Tính xác suất robot đi từ A đến B mà không đi qua cả M và N (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải.

Để đi từ A đến B, robot cần thực hiện tổng cộng 10 bước di chuyển, trong đó có 4 bước đi xuống ($\downarrow$) và 6 bước sang phải ($\rightarrow$).

$$\Rightarrow |\Omega| = \mathrm{C}_{10}^4 = 210 \text{ (cách chọn 4 bước xuống trong tổng số 10 bước).}$$

Gọi X là biến cố robot đi qua điểm M.

Gọi Y là biến cố robot đi qua điểm N.

$\Rightarrow X \cap Y$ là biến cố robot đi qua cả hai điểm M và N.

Ta tính số cách đi trong các trường hợp:

- Đi từ $A \to M \to B$: $n(X) = \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_6^2 = 6 \cdot 15 = 90$.
- Đi từ $A \to N \to B$: $n(Y) = \mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 20 \cdot 4 = 80$.
- Đi từ $A \to M \to N \to B$: $n(X \cap Y) = \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$.

Gọi T là biến cố robot đi qua ít nhất một trong hai điểm M hoặc N ($T = X \cup Y$).

Số phần tử của biến cố T là:

$$n(T) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) = 90 + 80 - 48 = 122.$$

Xác suất robot đi qua M hoặc N là:

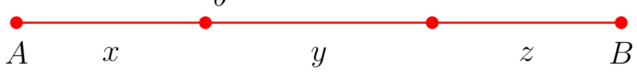
$$P(T) = \frac{n(T)}{|\Omega|} = \frac{122}{210} = \frac{61}{105}.$$

Biến cố robot không đi qua cả M và N là biến cố đối của T, ký hiệu là $\overline{T}$.

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{61}{105} = \frac{44}{105} \approx 0,42.$$

Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ bằng $0,42$.

Bài 40. Cho một thanh sắt mỏng AB dài 21 cm. Trên AB lấy hai điểm M, N phân biệt làm mốc sao cho $AM = x$ (cm), $MN = y$ (cm), $NB = z$ (cm) đồng thời x, y, z là các số nguyên dương (tham khảo hình vẽ). Xác suất để khi gập thanh sắt tại hai điểm mốc M, N thì đầu A có thể chạm vào đầu B là $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính $a + b$.

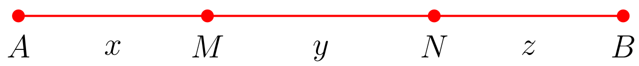


Hướng dẫn giải.

Không gian mẫu của bài toán là $n(\Omega) = C_{20}^2$ (lấy ngẫu nhiên 2 trong 20 điểm nguyên trên thanh sắt để đặt mốc M, N).

Giả sử gập thanh sắt tại hai điểm mốc M, N thì đầu A có thể chạm vào đầu B.

Khi đó thanh sắt được chia làm 3 đoạn như hình vẽ:

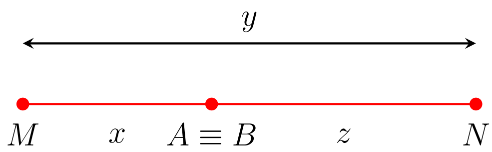


Với $\begin{cases} x, y, z \in \mathbb{N}^* \\ x + y + z = 21 \end{cases}$.

Gọi H là biến cố "Khi gập thanh sắt tại hai điểm M, N thì đầu A có thể chạm đầu B".

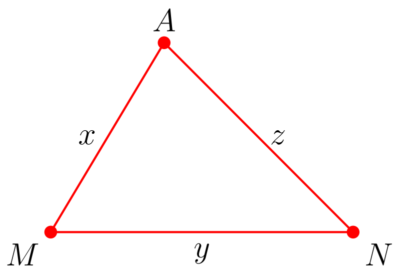
Khi đó, có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Điểm $\begin{cases} A \equiv B \\ A \in MN, B \in MN \end{cases}$



Khi đó $\begin{cases} x + z = y \\ x + y + z = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ 2y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ y = \dfrac{21}{2} = 10,5 \notin \mathbb{N}^* (L) \end{cases}$.

TH2: $A \equiv B$ và AMN tạo thành hình tam giác. Minh họa như hình vẽ:



Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $\begin{cases} x + y > z \\ x + z > y \\ y + z > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z > z + z \\ x + z + y > y + y \\ y + z + x > x + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 > 2z \\ 21 > 2y \\ 21 > 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} z < 10,5 \\ y < 10,5 \\ x < 10,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z < 11 \\ y < 11 \\ x < 11 \end{cases}$.

Khi đó $n(H)$ là tập hợp các bộ ba (x, y, z) thỏa mãn các điều kiện $\begin{cases} x + y + z = 21 \\ x, y, z \in (0; 11) \\ x, y, z \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = 11 - x \\ b = 11 - y \\ c = 11 - z \end{cases} \Rightarrow a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

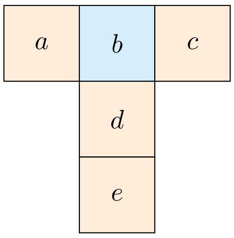
Cộng vế với vế của hệ phương trình trên, ta được $a+b+c=33-(x+y+z)=33-21=12$.

Khi đó mỗi bộ số (a,b,c) thỏa mãn $\begin{cases} a,b,c\in\mathbb{N}^* \\ a+b+c=12 \end{cases}$ tương ứng với một bộ số (x,y,z) thỏa mãn yêu cầu bài toán. Áp dụng bài toán chia kẹo Euler, ta có $n(H)=C_{11}^2$.

Suy ra xác suất xảy ra biến cố H là $P(H)=\dfrac{C_{11}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{55}{190}=\dfrac{11}{38}$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=38 \end{cases} \Rightarrow a+b=49.$

Bài 41. Cho 5 ô vuông a,b,c,d,e được bố trí như hình vẽ bên. Biết rằng có tất cả T cách chọn ra 5 số nguyên khác nhau từ tập hợp $S=\{1;2;3;\ldots;15\}$ để xếp vào các ô vuông a,b,c,d,e sao cho mỗi ô vuông nhỏ chỉ xếp được đúng một số và các ô hàng ngang được sắp xếp theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần, còn các ô hàng dọc thì không được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và cũng không giảm dần. Hãy xác định giá trị của $\dfrac{T}{1001}$.



Hướng dẫn giải. Số cách chọn ra một tập hợp gồm 5 số khác nhau từ tập S là $\mathrm{C}_{15}^5=3003$.

Giả sử 5 số chọn được là $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$.

Để dãy hàng ngang (a,b,c) tăng dần hoặc giảm dần thì b phải là giá trị trung gian giữa a và c (tức là $a<b<c$ hoặc $c<b<a$).

Xét vị trí của số b trong bộ 5 số đã chọn:

- Nếu b có hạng 1 ($b=x_1$) hoặc hạng 5 ($b=x_5$): Không thể chọn a,c để (a,b,c) đơn điệu.
- Nếu b có hạng 2 ($b=x_2$): - Có 1 số nhỏ hơn b (x_1) và 3 số lớn hơn b (x_3,x_4,x_5). Số cách chọn cặp $\{a,c\}$ là $1\cdot 3=3$. Mỗi cặp có 2 cách xếp hàng ngang.

  - Sau khi chọn $\{a,c\}$, còn lại 2 số đều lớn hơn b để xếp vào $\{d,e\}$. Trong $2!=2$ cách xếp cột dọc (b,d,e), có 1 cách tăng dần ($b<$ nhỏ $<$ lớn) nên còn $2-1=1$ cách thỏa mãn không đơn điệu.

  - Số cách: $3\cdot 2\cdot 1=6$ cách.
- Nếu b có hạng 3 ($b=x_3$): - Có 2 số nhỏ hơn b và 2 số lớn hơn b. Số cách chọn cặp $\{a,c\}$ là $2\cdot 2=4$. Mỗi cặp có 2 cách xếp hàng ngang.

  - Còn lại 1 số nhỏ hơn b và 1 số lớn hơn b cho $\{d,e\}$. Cả 2 cách xếp cột dọc (b,d,e) đều không đơn điệu (vì b nằm giữa hai giá trị kia).

  - Số cách: $4\cdot 2\cdot 2=16$ cách.
- Nếu b có hạng 4 ($b=x_4$): - Tương tự trường hợp $b=x_2$ (tính đối xứng), có $3\cdot 1=3$ cách chọn cặp $\{a,c\}$, mỗi cặp 2 cách xếp.

  - Còn lại 2 số nhỏ hơn b cho $\{d,e\}$, có 1 cách xếp cột thỏa mãn.

- Số cách: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ cách.

Tổng cộng với mỗi bộ 5 số chọn được, có $6 + 16 + 6 = 28$ cách xếp thỏa mãn.

Vậy tổng số cách là $T = 3003 \cdot 28 = 84084$.

Giá trị cần tìm: $\dfrac{T}{1001} = \dfrac{84084}{1001} = 84$.

Bài 42. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 12 cm. Trên đoạn thẳng AB và AD lấy thêm trên mỗi đoạn 11 điểm, sao cho 11 điểm đó chia mỗi cạnh thành 12 phần có độ dài bằng nhau. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ các điểm nằm trên đoạn AB và AD (không tính điểm A). Biết xác suất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc với đường thẳng AB hoặc AD bằng a, tính $\dfrac{20}{a}$.

Hướng dẫn giải.

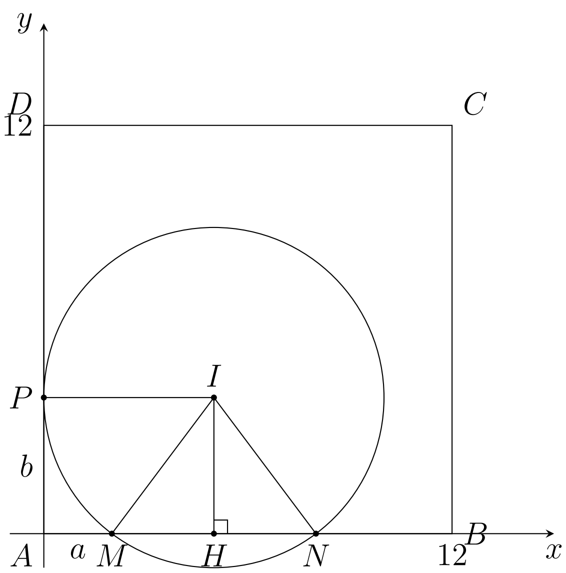
Khi trên đoạn thẳng AB và AD lấy thêm trên mỗi đoạn 11 điểm thì trên AB có 12 điểm (không tính điểm A) và trên AD có 12 điểm (không tính điểm A).

Suy ra trên hai đoạn AB và AD có tất cả 24 điểm (không tính điểm A).

Khi đó số cách chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ các điểm trên đoạn AB và AD (không tính điểm **(A)**) là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{24}^{3}$.

Gọi E là biến cố "3 điểm được chọn tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc với đường thẳng AB hoặc AD".

Gọi P là "Điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác (tạo thành khi lấy 3 điểm) và tiếp xúc với Ox hoặc Oy".



TH1: Đường tròn ngoại tiếp tam giác tâm I tiếp xúc với Oy tại P, cắt trục Ox tại hai điểm M và N.

Khi đó $P(0; b)$, $M(a; 0)$, $N(c; 0)$, $(1 \leq a, b, c \leq 12)$.

Gọi H là trung điểm của $MN \Rightarrow H\left(\dfrac{a+c}{2}; 0\right)$.

Suy ra tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN là $I\left(\dfrac{a+c}{2}; b\right)$.

Ta có $IM^2 = IP^2 \Rightarrow \left(a - \dfrac{a+c}{2}\right)^2 + (-b)^2 = \left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2a-a-c}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2$ $\Leftrightarrow \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 + b^2 = \dfrac{a^2}{4} + 2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{c}{2} + \dfrac{c^2}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{c}{2}\right)^2 + b^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{ac}{2} - \dfrac{c^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{4} - 2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{c}{2} +$ $\dfrac{c^2}{4} + b^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{ac}{2} - \dfrac{c^2}{4} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{ac}{2} + b^2 - \dfrac{ac}{2} = 0 \Leftrightarrow b^2 - ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = ac.$

Từ đó ta tìm được các cặp $(a; c)$ thỏa mãn là $(1; 4), (1; 9), (2; 8), (3; 12), (4; 9)$.

Mỗi cặp $(a; c)$ thỏa mãn tương ứng với một giá trị b nên có tất cả 5 bộ ba $(a; b; c)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: Đường tròn ngoại tiếp tam giác tiếp xúc tâm I với Ox tại P, cắt trục Oy tại hai điểm M và N.

Thực hiện tương tự TH1, ta cũng tìm được 5 bộ ba $(a; b; c)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra số TH có lợi cho biến cố E là $n(P) = 5 + 5 = 10$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{\mathrm{C}_{24}^3} = \dfrac{10}{2024} = \dfrac{5}{1012} = a.$

Suy ra $\dfrac{20}{a} = \dfrac{20}{\dfrac{5}{1012}} = 4048.$

Bài 43. Điền ngẫu nhiên các số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ vào các ô của một bảng ô vuông kích thước 3×3 sao cho mỗi số được điền vào đúng một ô. Tính xác suất để số 1 được điền vào ô chính giữa, biết rằng tổng của các số hàng dưới cùng là một số lẻ và số 0 được điền vào ô góc trên cùng bên trái của bảng ô vuông. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

0		

Hướng dẫn giải. Gọi $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ là tập các số cần điền. Trong đó có 4 số lẻ là $\{1, 3, 5, 7\}$ và 5 số chẵn là $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Vì số 0 đã được điền vào ô góc trên cùng bên trái, nên còn 8 ô trống để điền 8 số còn lại là $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (gồm 4 số lẻ và 4 số chẵn).

Gọi Ω là tập hợp các cách điền thỏa mãn điều kiện tổng hàng dưới cùng là số lẻ.

- Để tổng 3 số hàng dưới cùng là số lẻ, hàng đó phải chứa 1 số lẻ và 2 số chẵn hoặc chứa 3 số lẻ.
- Số cách chọn và sắp xếp các số vào hàng dưới cùng là: $C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot 3! + C_4^3 \cdot 3! = 144 + 24 = 168$ cách.
- Với mỗi cách chọn hàng dưới, có $5!$ cách điền vào 5 ô còn lại.
- Suy ra $n(\Omega) = 168 \cdot 5! = 20160$.

Gọi A là biến cố "Số 1 được điền vào ô chính giữa". Khi đó còn lại 7 số $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (gồm 3 số lẻ và 4 số chẵn) để điền vào 7 ô trống.

- Để tổng hàng dưới cùng lẻ, hàng này chọn 1 lẻ từ 3 số và 2 chẵn từ 4 số, hoặc chọn cả 3 lẻ từ 3 số.

- Số cách chọn và sắp xếp hàng dưới là: $C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot 3! + C_3^3 \cdot 3! = 108 + 6 = 114$ cách.
- Với mỗi cách, có $4!$ cách điền vào 4 ô còn lại.
- Suy ra $n(A) = 114 \cdot 4! = 2736$.

Xác suất cần tính là:

$$P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2736}{20160} = \frac{19}{140} \approx 0,1357...$$

Làm tròn đến hàng phần trăm (chữ số thập phân thứ hai), ta được kết quả là $0,14$.

Bài 44. Một ứng dụng học tập có 12 thử thách được đưa ra mỗi buổi học. Mỗi thử thách có 70% khả năng học sinh vượt qua được. Nếu một thử thách được hoàn thành thành công, học sinh sẽ nhận được 1 điểm. Nếu hoàn thành không thành công, điểm học sinh không thay đổi. Tuy nhiên, nếu học sinh hoàn thành liên tiếp 5 thử thách thành công sẽ nhận được 5 điểm thưởng (tức là tổng cộng 10 điểm cho 5 thử thách liên tiếp đó). Xác suất để học sinh nhận được đúng 10 điểm bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng học sinh đó làm tất cả 12 thử thách.

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số lần vượt qua thử thách, số lần hoàn thành liên tiếp 5 thử thách.

Theo đề bài ta có: $x + 5y = 10$.

TH1: $x = 5, y = 1$ (có đúng 5 lần vượt qua thử thách và chúng là 5 lần liên tiếp). Có $12 - 5 + 1 = 8$ dãy 5 lần vượt qua thử thách. Xác suất của trường hợp A là $8 \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^7$.

TH2: $x = 10, y = 0$ (có đúng 10 lần vượt qua thử thách và không có 5 lần nào vượt qua thử thách liên tiếp). Khi có 10 thành công thì có 2 thất bại. Để không có 5 lần liên tiếp vượt qua thử thách, các chuỗi thắng phải có độ dài ≤ 4.

Có 2 thất bại nên để tách thành 3 chuỗi thắng ta cần đúng hai thất bại làm ngăn cách (2 lần thất bại không xuất hiện ở đầu chuỗi hay cuối chuỗi).

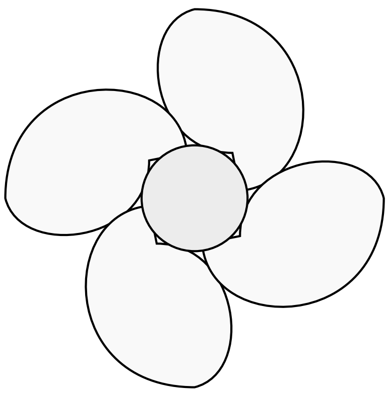
Các phân chia khả dĩ là $(4, 4, 2)$ và $(4, 3, 3)$.

Số hoán vị của $(4, 4, 2)$ và $(4, 3, 3)$ đều là $3 \Rightarrow$ Tổng 6 dãy.

Xác suất của trường hợp B là $6 \cdot 0{,}7^{10} \cdot 0{,}3^2$.

Xác suất cần tìm là: $8 \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^7 + 6 \cdot 0{,}7^{10} \cdot 0{,}3^2 \approx 1{,}55\%$.

Bài 45. Sử dụng bốn màu xanh, đỏ, tím, vàng để tô cho phần trung tâm và 4 cánh của một chiếc quạt như hình vẽ.



Quy tắc tô màu sẽ là: phần trung tâm và phần cánh phải được tô bằng màu khác nhau (bốn cánh quạt không nhất thiết tô màu khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách tô màu? (Lưu ý: 4 cánh giống nhau do đó các cách tô màu mà khi xoay cánh quạt có thể trùng nhau thì chỉ tính là một cách).

Hướng dẫn giải. Giả sử 4 màu dùng để tô quạt là a, b, c, d.

TH1: Sử dụng 2 trong 4 màu để tô

Số cách chọn 2 trong 4 màu để tô là C_4^2.

Số cách tô màu trung tâm là $\mathrm{C}_2^1 = 2$ cách.

Số cách tô màu các cánh quạt là 1 cách (tô cả bốn cánh với 1 màu còn lại).

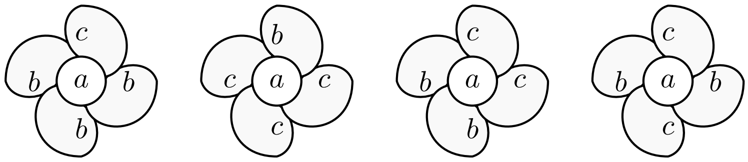
Suy ra số cách tô TH1 là $\mathrm{C}_4^2 \cdot 2 = 12$ cách.

TH2: Sử dụng 3 trong 4 màu để tô

Số cách chọn 3 trong 4 màu để tô là C_4^3 cách.

Số cách tô màu trung tâm là $\mathrm{C}_3^1 = 3$ cách.

Khi đó, ta có 2 màu còn lại để tô 4 cánh. Có 4 cách sắp xếp không trùng nhau qua phép quay:



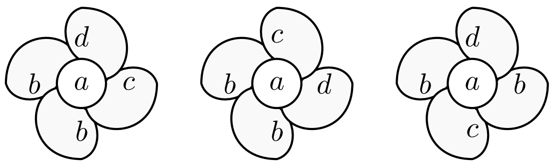
Suy ra số cách tô màu ở TH2 là $\mathrm{C}_4^3 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ cách.

TH3: Sử dụng cả 4 màu để tô

Số cách chọn 4 trong 4 màu để tô là 1 cách.

Số cách tô màu trung tâm là $\mathrm{C}_4^1 = 4$ cách.

Giả sử màu a ở trung tâm, còn b, c, d tô cho 4 cánh (một màu lặp lại 2 lần). Nếu chọn b lặp lại 2 lần, ta có 3 cách sắp xếp:

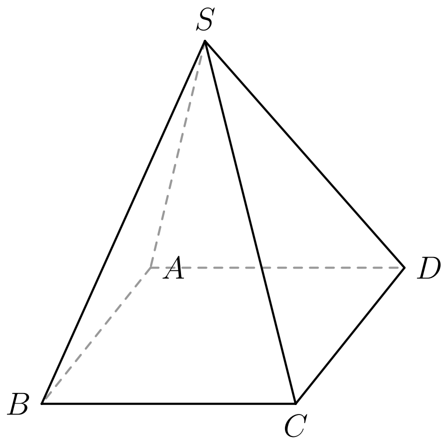


Vì có 3 màu (b, c, d) có thể đóng vai trò màu lặp lại, nên số cách tô cánh là $3 \times 3 = 9$ cách.

Suy ra số cách tô ở TH3 là $4 \times 9 = 36$ cách.

Vậy tổng số cách là $12 + 48 + 36 = 96$ cách.

Bài 46. Một con kiến di chuyển dọc theo các cạnh của một hình chóp tứ giác. Nó bắt đầu cuộc đi dạo của mình ở đỉnh A, mỗi lần nó đi đúng một cạnh của hình chóp và nó đi tối đa 3 lần. Tại mỗi đỉnh, con kiến quyết định ngẫu nhiên đi theo một trong ba hướng (đối với đỉnh A, B, C, D) hoặc bốn hướng (đối với đỉnh S trên cùng), trong đó nó cũng được phép chọn hướng mà nó vừa đi đến. Tại đỉnh B có một con thú ăn kiến đang rình rập. Xác suất để con kiến không bị bắt bởi thú ở B là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hướng dẫn giải.

Gọi A là biến cố "Con kiến không bị bắt".

Suy ra $\bar{A}$ là biến cố "Con kiến bị bắt".

Khi đó yêu cầu bài toán: Tính $P(A)$ và $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

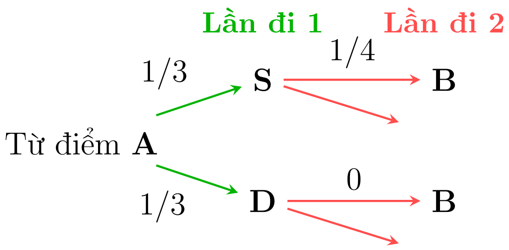
Vì con kiến đi tối đa 3 lần nên con kiến có thể bị bắt sau lần đi $1, 2$ hoặc 3. Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Con kiến bị bắt sau lần di chuyển 1

Xác suất con kiến bị bắt sau lần di chuyển 1 là $P(A_1) = \dfrac{1}{3}$.

TH2: Con kiến bị bắt sau lần di chuyển 2

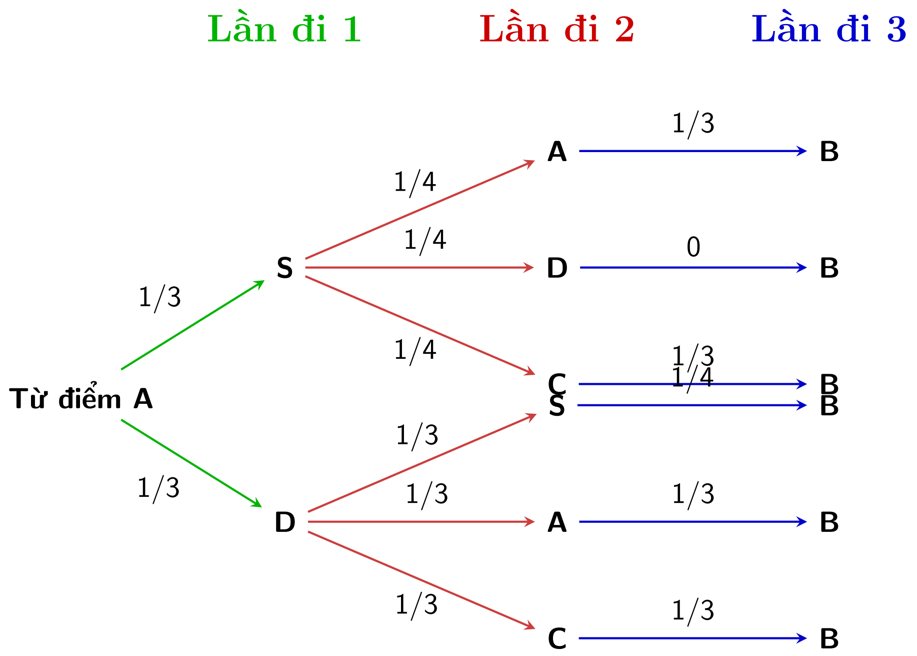
Ta có sơ đồ cây:



Suy ra xác suất con kiến bị bắt sau lần di chuyển 2 là $P(A_2) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$.

TH3: Con kiến bị bắt sau lần di chuyển 3

Ta có sơ đồ cây:



Suy ra xác suất con kiến bị bắt sau lần di chuyển 3 là

$$P(A_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{17}{108}.$$

Kết hợp 3 TH trên, ta có $P(\bar{A}) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{17}{108} = \dfrac{31}{54}$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{31}{54} = \dfrac{23}{54} \approx 42{,}6\%$.

Bài 47. Có hai hộp đựng câu hỏi thi (phiếu), mỗi phiếu ghi một câu hỏi. Hộp thứ nhất có 15 phiếu và hộp thứ hai có 9 phiếu. Biết rằng sinh viên A đi thi chỉ thuộc 10 câu ở hộp thứ nhất và 8 câu ở hộp thứ hai. Thầy giáo rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một phiếu thi, sau đó cho sinh viên A rút ngẫu nhiên ra 1 phiếu từ 2 phiếu mà thầy giáo đã rút. Gọi E_1 là biến cố sinh viên A rút ra phiếu từ hộp thứ nhất, E_2 là biến cố sinh viên A rút ra phiếu từ hộp thứ hai. Nếu sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc thì xác suất phiếu đó thuộc hộp thứ nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải. Gọi H là biến cố: "Sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc".

Theo đề bài, sinh viên A rút ngẫu nhiên 1 phiếu từ 2 phiếu mà thầy giáo đã rút nên:

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Xác suất để sinh viên A thuộc phiếu rút ra từ hộp thứ nhất là:

$$P(H|E_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Xác suất để sinh viên A thuộc phiếu rút ra từ hộp thứ hai là:

$$P(H|E_2) = \frac{8}{9}.$$

Xác suất để sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc (xác suất toàn phần) là:

$$P(H) = P(E_1)\cdot P(H|E_1) + P(E_2)\cdot P(H|E_2) = 0,5\cdot\frac{2}{3} + 0,5\cdot\frac{8}{9} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}.$$

Nếu sinh viên A rút được phiếu đã học thuộc, xác suất phiếu đó thuộc hộp thứ nhất (công thức Bayes) là:

$$P(E_1|H) = \frac{P(E_1)\cdot P(H|E_1)}{P(H)} = \frac{0,5\cdot\dfrac{2}{3}}{\dfrac{7}{9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{7} = \frac{3}{7} \approx 0,42857...$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, ta được: $0,43$.

Bài 48. Có hai hộp đựng bi, các viên bi có cùng kích thước và cùng khối lượng. Hộp I đựng 9 viên bi, mỗi viên bi được đánh một số từ $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Hộp II đựng 8 viên bi, mỗi viên bi được đánh một số từ $1,2,3,4,5,6,7,8$. Bạn Hoa và Bình tham gia trò chơi như sau: Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên ba viên bi trong hộp I và sắp xếp các số trên viên bi theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên ba viên bi trong hộp II và sắp xếp các số trên viên bi theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Hoa sẽ là người thắng cuộc nếu số của Hoa lớn hơn số của Bình. Biết xác suất Hoa là người thắng cuộc là $\frac{a}{b}$, với $a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b$.

Hướng dẫn giải. Xét hai trường hợp xảy ra đối với số bi mà Hoa chọn được:

Trường hợp 1: Hoa chọn được viên bi số 9.

- Khi Hoa chọn được viên bi số 9, số của Hoa chắc chắn có chữ số hàng trăm hoặc hàng chục lớn nhất là 9. Trong khi đó, số của Bình tối đa chỉ có các chữ số từ 1 đến 8. Do đó, số của Hoa chắc chắn lớn hơn số của Bình.
- Xác suất Hoa chọn được viên bi số 9 trong 3 viên lấy từ hộp I (9 viên) là:

$$P_1 = \frac{\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_9^3} = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}.$$

Trường hợp 2: Hoa không chọn được viên bi số 9.

- Xác suất để Hoa không chọn được số 9 là: $P_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
- Lúc này, cả Hoa và Bình đều chọn 3 chữ số từ tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
- Số cách chọn 3 chữ số của mỗi bạn là $\mathrm{C}_8^3 = 56$. Tổng số cách chọn của cả hai là $56\cdot 56$.
- Số cách để hai bạn chọn bộ số giống hệt nhau là 56 cách. Xác suất để hai bạn chọn trùng nhau là: $P_{\text{bằng}} = \frac{56}{56\cdot 56} = \frac{1}{56}$.
- Do vai trò của Hoa và Bình là như nhau khi cùng chọn trong tập 8 số, nên xác suất Hoa chọn số lớn hơn bằng xác suất Bình chọn số lớn hơn:

$$P_{\text{Hoa thắng } | \text{ TH2}} = \frac{1 - P_{\text{bằng}}}{2} = \frac{1-\frac{1}{56}}{2} = \frac{55}{112}.$$

- Xác suất thắng trong trường hợp này là: $\frac{2}{3}\cdot\frac{55}{112} = \frac{55}{168}$.

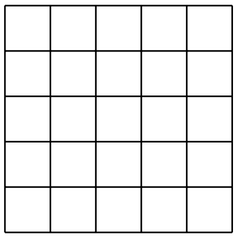
Xác suất để Hoa thắng cuộc là:

$$P = P_1 + (\text{Xác suất TH2}) = \frac{1}{3} + \frac{55}{168} = \frac{56+55}{168} = \frac{111}{168} = \frac{37}{56}.$$

Theo đề bài, $P = \frac{a}{b} = \frac{37}{56}$, suy ra $a = 37$ và $b = 56$.

Vậy giá trị của $T = a + 2b = 37 + 2\cdot 56 = 149$.

Bài 49. Đặt ngẫu nhiên các số thuộc tập hợp $\{-2,-1,1,2\}$ vào 25 ô vuông của lưới 5×5 (hình vẽ dưới đây) sao cho mỗi ô vuông chỉ được đặt đúng một số.



Gọi A biến cố "Tích các số trong mỗi hàng và tích các số trong mỗi cột đều bằng -2". Biết xác suất của biến cố A bằng p, tính $64^5 \cdot p$.

Hướng dẫn giải.

Số cách điền các số vào bảng là 4^{25}.

Mỗi phần tử trong bảng thuộc tập $\{-2, -1, 1, 2\}$, do đó có giá trị tuyệt đối thuộc $\{1, 2\}$.

Tích các số trong một hàng bằng -2, suy ra tích các giá trị tuyệt đối của các số trong hàng đó bằng 2.

Với 5 số đều thuộc $\{1, 2\}$ và tích bằng 2, cách duy nhất là: trong mỗi hàng có đúng một số có giá trị tuyệt đối bằng 2 và bốn số còn lại có giá trị tuyệt đối bằng 1.

Tương tự, mỗi cột cũng phải có đúng một số có giá trị tuyệt đối bằng 2.

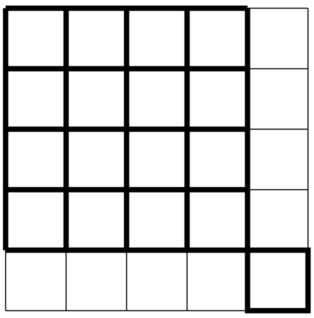
Vậy việc đặt các số 2 (về mặt giá trị tuyệt đối) chính là việc đặt 5 số 2 vào bảng 5×5 sao cho mỗi hàng và mỗi cột đều chứa đúng một số 2.

Số cách làm việc này chính là số hoán vị của 5 phần tử: $5! = 120$.

Sau khi đã cố định vị trí các số 2 (các ô còn lại đều có giá trị tuyệt đối bằng 1), ta chỉ cần gán dấu $s_{ij} = \pm 1$ cho từng ô sao cho:

- Tích các dấu trong mỗi hàng bằng -1 (tức số lượng dấu $-$ trong mỗi hàng là lẻ).
- Tích dấu trong mỗi cột bằng -1 (tương tự).

Ta chia bảng thành 4 phần, gồm:



- Bảng 4×4 ở góc trên, bên trái.
- Hình chữ nhật 1×4 ở góc bên trái, dưới cùng.
- Hình chữ nhật 4×1 ở góc trên, ngoài cùng, bên phải.
- Hình chữ nhật 1×1 ở góc dưới cùng, bên phải.

Khi đó:

- Mỗi ô vuông trong hình chữ nhật 4×4 có 2 cách chọn dấu, suy ra có 2^{16} cách chọn dấu cho bảng hình vuông 4×4.

◇ Ứng với mỗi cách chọn dấu đó thì các hình chữ nhật 1×4 và 4×1 có duy nhất một cách chọn dấu.

◇ Ô vuông 1×1 còn lại có duy nhất một cách chọn dấu.

Do đó số cách gán dấu thỏa mãn là $2^{16} = 65536$.

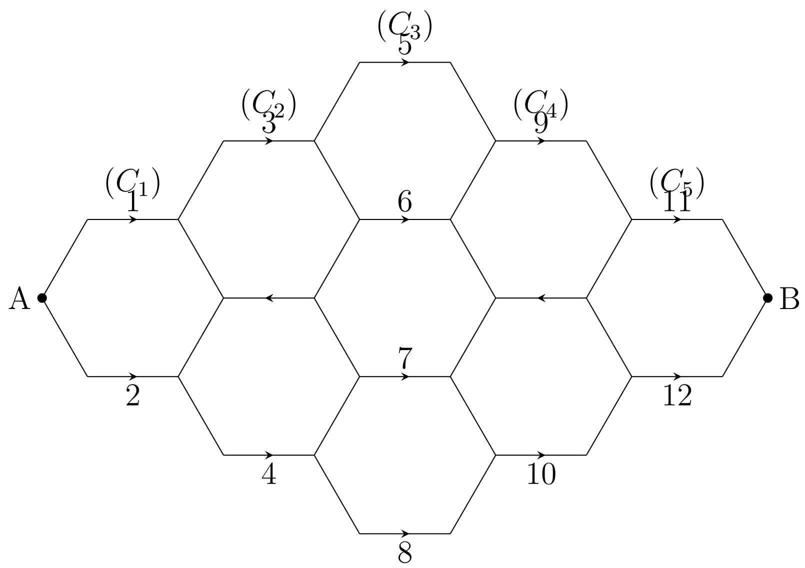
Vị trí các số 2 và việc gán dấu là độc lập với nhau, nên:

$$n(A) = 5! \cdot 2^{(5-1)^2} = 120 \cdot 2^{16} = 15 \cdot 2^3 \cdot 2^{16} = 15 \cdot 2^{19}$$

Xác suất của biến cố A là $p = \dfrac{15 \cdot 2^{19}}{4^{25}} = \dfrac{15 \cdot 2^{19}}{2^{50}} = \dfrac{15}{2^{31}}$.

Suy ra $64^5 \cdot p = (2^6)^5 \cdot \dfrac{15}{2^{31}} = \dfrac{2^{30} \cdot 15}{2^{31}} = \dfrac{15}{2} = 7,5$.

Bài 50. Một con bọ di chuyển từ điểm A đến điểm B dọc theo các đoạn thẳng trong mạng lưới lục giác như hình bên. Các đoạn thẳng có dấu mũi tên chỉ được di chuyển theo hướng của mũi tên, các đoạn thẳng không có dấu mũi tên được di chuyển theo hướng tùy ý và con bọ không bao giờ di chuyển trên cùng một đoạn thẳng quá một lần. Vậy con bọ có bao nhiêu con đường khác nhau từ A đến B?



Hướng dẫn giải. Để tính số con đường từ A đến B, ta chia mạng lưới lục giác thành các giai đoạn dựa trên các vạch chia $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$.

◇ *Giai đoạn 1 (Từ A đến vạch C_2):* Phần này gồm 2 hình lục giác đầu tiên. Số cách di chuyển từ điểm A đến các đoạn thẳng ở vạch C_2 (đoạn 3 và 4) là 5 cách. (Các cách này bao gồm việc tận dụng các cạnh thẳng đứng để chuyển làn giữa các hình lục giác).

◇ *Giai đoạn 2 (Từ vạch C_2 đến vạch C_4):* Đây là khu vực trung tâm với các đoạn thẳng 5, 6, 7, 8. Đặc biệt, đoạn số 6 có mũi tên ngược hướng. Dựa trên các hướng di chuyển cho phép và quy tắc không đi qua một đoạn thẳng quá một lần, số cách để vượt qua khối trung tâm này là 4 cách.

◇ *Giai đoạn 3 (Từ vạch C_4 đến điểm B):* Phần này gồm 2 hình lục giác cuối cùng, có cấu trúc đối xứng với giai đoạn 1. Do đó, số cách di chuyển từ vạch C_4 đến điểm B cũng là 5 cách.

Theo quy tắc nhân, tổng số con đường khác nhau từ A đến B là:

$$N = 5 \times 4 \times 5 = 100 \text{ (cách)}.$$

Vậy con bọ có 100 con đường khác nhau.

Bài 51. Sắp xếp ngẫu nhiên 3 bạn nam A, B, C và 5 bạn nữ vào 8 cái ghế được xếp theo hàng ngang (mỗi bạn ngồi một cái ghế). Gọi xác suất để 3 bạn A, B, C ngồi theo thứ tự đó từ trái qua phải, đồng thời giữa A và B có ít nhất một bạn nữ, giữa B và C có nhiều nhất một bạn nữ là p. Giá trị của $\frac{5}{p}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 8! = 40320$.

Trường hợp 1: Giữa B, C không có bạn nữ nào.

Ta gọi $x_1; x_2; x_3$ lần lượt là số bạn nữ xếp như sau

$$x_1 A x_2 B C x_3$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Leftrightarrow x_1' + x_2 + x_3' = 7$ với $x_1' \geq 1, x_2 \geq 1, x_3' \geq 1$; do vậy sẽ có $\mathrm{C}_6^2 \cdot 5!$ cách.

Trường hợp 2: Giữa B, C có 1 bạn nữ.

Ta gọi $x_1; x_2; x_3; x_4$ lần lượt là số bạn nữ xếp như sau

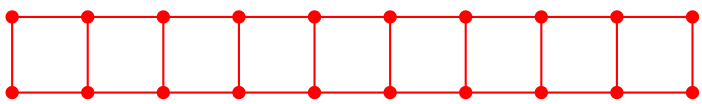
$$x_1 A x_2 B x_3 C x_4$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 = 1, x_4 \geq 0,\ x_1 + x_2 + 1 + x_4 = 5 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 4 \Leftrightarrow x_1' + x_2 + x_4' = 6$ với $x_1' \geq 1, x_2 \geq 1, x_4' \geq 1$; do vậy sẽ có $\mathrm{C}_5^2 \cdot 5!$ cách.

Vậy có $\mathrm{C}_6^2 \cdot 5! + \mathrm{C}_5^2 \cdot 5! = 3000$ cách.

Vậy xác suất là $p = \dfrac{3000}{8!}$. Do vậy $\frac{5}{p} = \dfrac{336}{5} = 67,2$.

Bài 52. Một nhóm sinh viên tham gia một trò chơi như sau, mỗi đội gồm 10 người được phát cho 10 chiếc áo được đánh số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, mỗi bạn mặc 1 chiếc áo. Các đội trưởng phải sắp xếp 10 thành viên của đội mình thành 1 hàng ngang và sẽ giành chiến thắng nếu mỗi 3 bạn đứng liền kề bất kì có tổng các chữ số ghi trên các chiếc áo 3 bạn đó mặc là một số chia hết cho 3. Biết xác suất để một đội chiến thắng là a, tính $\dfrac{3}{a}$.



Hướng dẫn giải.

Không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$ (số cách xếp 10 người thành 1 hàng).

Gọi P là biến cố "Mỗi 3 bạn đứng liền kề bất kì có tổng các chữ số ghi trên các chiếc áo 3 bạn đó mặc là một số chia hết cho 3".

Từ bộ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ta chia thành các nhóm:

- $D_1 = \{0; 3; 6; 9\}$ - các số chia hết cho 3;
- $D_2 = \{1; 4; 7\}$ - các số chia 3 dư 1;
- $D_3 = \{2; 5; 8\}$ - các số chia 3 dư 2.

Nhận xét: Để một bộ 3 số chia hết cho 3 thì 3 số đó phải thuộc D_1 hoặc 3 số đó thuộc D_2 hoặc 3 số đó thuộc D_3 hoặc trong 3 số đó có 1 số thuộc D_1, 1 số thuộc D_2 và 1 số thuộc D_3.

Xét trường hợp 3 số cùng một nhóm xếp kề nhau: Ví dụ 258147 thì tổng của 3 số kề nhau $5, 8, 1$ lại không chia hết cho 3. Do đó loại trường hợp này.

Vậy trong mỗi bộ 3 số xếp cạnh nhau phải luôn có 1 số thuộc D_1, 1 số thuộc D_2 và 1 số thuộc D_3.

Ta có 2 trường hợp thỏa mãn sau: $D_1D_2D_3D_1D_2D_3D_1D_2D_3D_1$ hoặc $D_1D_3D_2D_1D_3D_2D_1D_3D_2D_1$.

Số cách xếp trong mỗi trường hợp trên (tức ta sắp xếp các số trong cùng 1 bộ) là $4! \cdot 3! \cdot 3!$.

Vậy số cách xếp thỏa mãn là $n(P) = 2 \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3!$.

Vậy xác suất để một đội chiến thắng là $a = \dfrac{n(P)}{n(\Omega)} = \dfrac{2 \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3!}{10!} = \dfrac{1}{2100}$.

Suy ra $\dfrac{3}{a} = \dfrac{3}{\frac{1}{2100}} = 6300$.

Bài 53. Hai bạn Hùng và Cường chơi trò quay bánh xe số. Bánh xe số có 20 nấc điểm là $5, 10, 15, \ldots, 100$ với các vạch chia đều nhau (giả sử rằng khả năng chuyển từ nấc điểm đã có tới các nấc điểm còn lại là như nhau). Trong mỗi lượt chơi, mỗi người được quyền chọn quay 1 hoặc 2 lần và điểm số của người chơi được tính như sau:

(1) Nếu người chơi chọn quay một lần thì điểm của người chơi là điểm quay được.

(2) Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được không lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được.

(3) Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được lớn hơn 100 thì điểm người chơi là tổng điểm quay được trừ đi 100.

Luật chơi quy định, trong mỗi lượt chơi người nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác. Hùng chơi trước và có điểm số là 75. Tính xác suất để Cường thắng cuộc ngay ở lượt chơi này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Tập hợp các nấc điểm trên bánh xe là $S = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$. Có tất cả 20 nấc điểm, xác suất quay vào mỗi nấc là $p = \frac{1}{20} = 0,05$.

Hùng đã có 75 điểm. Để thắng cuộc ngay ở lượt này, Cường cần có điểm số $C \in \{80, 85, 90, 95, 100\}$.

Cường sẽ thực hiện lượt quay thứ nhất, gọi kết quả là X_1.

- *Trường hợp 1:* Nếu $X_1 \in \{80, 85, 90, 95, 100\}$.

  Lúc này Cường đã thắng Hùng. Cường sẽ chọn dừng lại (quay 1 lần).

  Số kết quả thuận lợi là 5. Xác suất của trường hợp này là:

$$P_1 = \frac{5}{20} = 0,25.$$

- *Trường hợp 2:* Nếu $X_1 \in \{5, 10, 15, \ldots, 75\}$.

  Lúc này điểm của Cường đang thấp hơn hoặc bằng Hùng.

  Để thắng, Cường bắt buộc phải chọn quay lần thứ 2.

  Gọi kết quả lần quay này là X_2.

  Điểm số cuối cùng của Cường là C. Theo quy tắc:

  - Nếu $X_1 + X_2 \leq 100$ thì $C = X_1 + X_2$.

  - Nếu $X_1 + X_2 > 100$ thì $C = X_1 + X_2 - 100$.

Với mỗi giá trị X_1 cố định, ta tìm số giá trị $X_2 \in S$ để $C \in \{80, 85, 90, 95, 100\}$. Vì $X_1 \leq 75$ và $X_2 \leq 100$ nên tổng $X_1 + X_2 \leq 175$.

+ Nếu $X_1 + X_2 \leq 100$: Để thắng thì $X_1 + X_2 \in \{80, 85, 90, 95, 100\}$. Có 5 giá trị của X_2 thỏa mãn (ví dụ nếu $X_1 = 50$ thì $X_2 \in \{30, 35, 40, 45, 50\}$).

+ Nếu $100 < X_1 + X_2 \leq 175$: Điểm số là $C = X_1 + X_2 - 100$. Tuy nhiên, vì $X_1 + X_2 \leq 175$ nên $C \leq 75$. Trong trường hợp này Cường không thể thắng.

Như vậy, với mỗi $X_1 \in \{5, 10, \ldots, 75\}$, Cường luôn có đúng 5 giá trị X_2 để thắng cuộc.

Xác suất thắng trong trường hợp này là:

$$P_2 = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{20} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 0,1875.$$

Xác suất để Cường thắng cuộc là:

$$P = P_1 + P_2 = 0,25 + 0,1875 = 0,4375.$$

Làm tròn đến hàng phần trăm (chữ số thập phân thứ hai), ta được: $P \approx 0,44$.

Bài 54. Một hộp chứa 12 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Chiến lấy ngẫu nhiên ra một viên bi từ hộp, xem màu của nó rồi bỏ ra ngoài. Đến lượt bạn Thắng lấy bi với số lượng phụ thuộc vào màu của viên bi mà bạn Chiến đã lấy. Cụ thể như sau:

- Nếu viên bi bạn Chiến lấy ra có màu xanh thì bạn Thắng sẽ lấy ngẫu nhiên ra hai viên bi từ hộp;
- Nếu viên bi bạn Chiến lấy ra có màu đỏ thì bạn Thắng sẽ lấy ngẫu nhiên ra bốn viên bi từ hộp.

Tính xác suất để bạn Chiến lấy được viên bi màu đỏ, biết rằng trong các viên bi được bạn Thắng lấy ra có ít nhất một viên bi khác màu với viên bi của bạn Chiến (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Tổng số bi ban đầu là 12 xanh $+ 6$ đỏ $= 18$ (viên bi).

Gọi A là biến cố "bạn Chiến lấy được viên bi màu đỏ". Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "bạn Chiến lấy được viên bi màu xanh".

Gọi B là biến cố "bạn Thắng lấy ra có ít nhất một viên bi khác màu với viên bi của bạn Chiến".

Ta cần tính $P(A|B)$.

Ta có $P(A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$;

$P(\overline{A}) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

- Nếu viên bi bạn Chiến lấy ra có màu đỏ thì hộp còn lại 17 viên (gồm 12 xanh, 5 đỏ) và khi đó Thắng sẽ lấy 4 viên bi.

  Biến cố đối $\overline{B}|A$ là "Thắng lấy cả 4 viên cùng màu với viên của Chiến (cùng đỏ)".

  Ta có $P(\overline{B}|A) = \frac{C_5^4}{C_{17}^4} = \frac{1}{476}$.

  Suy ra $P(B|A) = 1 - \frac{1}{476} = \frac{475}{476}$.

- Nếu viên bi bạn Chiến lấy ra có màu xanh thì hộp còn lại 17 viên (gồm 11 xanh, 6 đỏ) và khi đó Thắng sẽ lấy 2 viên bi.

  Biến cố đối $\overline{B}|\overline{A}$ là "Thắng lấy cả 2 viên cùng màu với viên của Chiến (cùng xanh)".

Ta có $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{C_{11}^2}{C_{17}^2} = \frac{55}{136}$.

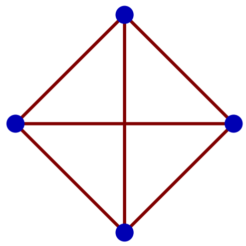
Suy ra $P(B|\overline{A}) = 1 - \frac{55}{136} = \frac{81}{136}$.

Áp dụng công thức Bayes, ta được:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{475}{476}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{475}{476} + \frac{2}{3} \cdot \frac{81}{136}} = \frac{475}{1042} \approx 0,46.$$

Vậy xác suất để bạn Chiến lấy được viên bi màu đỏ, biết rằng trong các viên bi được bạn Thắng lấy ra có ít nhất một viên bi khác màu với viên bi của bạn Chiến là $0,46$.

Bài 55. Xét một đồ thị đầy đủ K_4 có 4 đỉnh, các đỉnh đó được kết nối với nhau thông qua các cạnh và 2 đường chéo (hình vẽ). Với 6 cạnh của đồ thị, tung một đồng xu cân đối ngẫu nhiên: nếu mặt ngửa xuất hiện, ta giữ nguyên cạnh đó; nếu mặt sấp xuất hiện, ta loại bỏ cạnh đó. Tính xác suất đồ thị vẫn được kết nối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Số cạnh của đồ thị đầy đủ K_4 là $C_4^2 = 6$.

Mỗi cạnh có 2 khả năng (giữ hoặc bỏ), do đó tổng số kết quả có thể xảy ra (không gian mẫu) là: $n(\Omega) = 2^6 = 64$.

Gọi A là biến cố: "Đồ thị sau khi loại bỏ một số cạnh vẫn được kết nối".

Một đồ thị có 4 đỉnh kết nối khi và chỉ khi nó chứa ít nhất một cây khung. Một cây khung của đồ thị 4 đỉnh luôn có đúng 3 cạnh.

Ta đếm số cách chọn các cạnh để đồ thị vẫn kết nối theo số lượng cạnh còn lại:

- *Trường hợp còn 6 cạnh:* Có $C_6^6 = 1$ cách (đồ thị đầy đủ K_4 luôn kết nối).
- *Trường hợp còn 5 cạnh:* Có $C_6^5 = 6$ cách (bỏ đi 1 cạnh bất kỳ, đồ thị vẫn kết nối).
- *Trường hợp còn 4 cạnh:* Có $C_6^4 = 15$ cách. Với 4 cạnh trên 4 đỉnh, đồ thị chỉ bị ngắt kết nối nếu có 1 đỉnh cô lập. Tuy nhiên, nếu 1 đỉnh cô lập thì 3 đỉnh còn lại chỉ có tối đa $C_3^2 = 3$ cạnh, mâu thuẫn với việc có 4 cạnh.

  Vậy tất cả 15 cách đều cho đồ thị kết nối.
- *Trường hợp còn 3 cạnh:* Số đồ thị kết nối chính là số cây khung của K_4.

  Theo công thức Cayley, số cây khung của đồ thị đầy đủ n đỉnh là n^{n-2}. Với $n = 4$, số cây khung là $4^{4-2} = 16$.
- *Trường hợp còn ít hơn 3 cạnh:* Đồ thị không thể kết nối vì cần tối thiểu $n - 1 = 3$ cạnh.

Tổng số cách để đồ thị vẫn kết nối là: $n(A) = 1 + 6 + 15 + 16 = 38$.

Xác suất để đồ thị vẫn được kết nối là: $p = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{38}{64} = 0,59375$.

Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được kết quả: $p \approx 0,59$.

Bài 56. Truecaller App là một ứng dụng được sử dụng để chặn cuộc gọi rác trong điện thoại. Tuy nhiên, vì ứng dụng không tuyệt đối hoàn hảo nên một cuộc gọi rác bị chặn với xác suất $0,8$ và một cuộc gọi đúng (không phải là cuộc gọi rác) bị chặn với xác suất $0,01$. Thống kê cho thấy tỉ lệ cuộc gọi rác là 10%. Chọn ngẫu nhiên một cuộc gọi không bị chặn. Tính xác suất để đó là cuộc gọi đúng (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Gọi A là biến cố: "cuộc gọi được chọn là cuộc gọi rác".

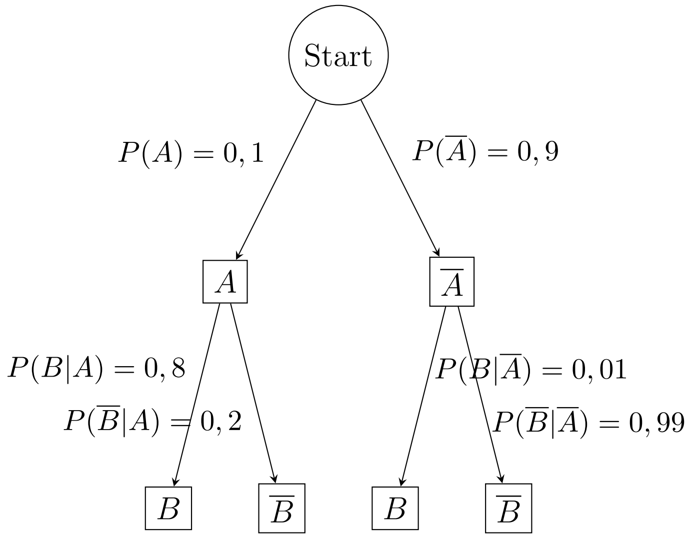
Gọi B là biến cố: "cuộc gọi được chọn bị chặn".

Suy ra $\overline{B}$ là biến cố: "cuộc gọi được chọn không bị chặn".

Theo đề bài ta có:

- Tỉ lệ cuộc gọi rác là 10% nên $P(A) = 0,1$. Suy ra $P(\overline{A}) = 0,9$.
- Cuộc gọi rác bị chặn xác suất $0,8$ nên $P(B|A) = 0,8$. Suy ra $P(\overline{B}|A) = 0,2$.
- Cuộc gọi đúng bị chặn xác suất $0,01$ nên $P(B|\overline{A}) = 0,01$. Suy ra $P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,99$.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Ta có $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0,8 \cdot 0,1 + 0,01 \cdot 0,9 = 0,089$.

Theo công thức Bayes, xác suất để cuộc gọi không bị chặn là cuộc gọi đúng là:

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}|\overline{A}) + P(A) \cdot P(\overline{B}|A)} = \frac{0,9 \cdot 0,99}{0,9 \cdot 0,99 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{891}{911} \approx 0,98.$$

Vậy xác suất để đó là cuộc gọi đúng là $0,98$.

Bài 57. Có 4 ngăn sách được đánh số $1, 2, 3, 4$ và 9 quyển sách khác nhau. Bạn An xếp toàn bộ 9 quyển sách vào 4 ngăn sao cho: Mỗi ngăn ít nhất có 1 quyển sách, trong đó ngăn số 1 có đúng 2 quyển sách. Trong mỗi ngăn, các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang từ trái sang phải. Hai cách xếp được coi là giống nhau nếu với mỗi ngăn:

- Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp.
- Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.

Gọi T là số cách xếp đôi một khác nhau. Tính $\dfrac{T}{600}$.

Hướng dẫn giải. Việc xếp 9 quyển sách khác nhau vào 4 ngăn thỏa mãn các điều kiện bài toán có thể thực hiện qua các bước sau:

Bước 1: Chọn 2 quyển sách trong số 9 quyển và xếp vào ngăn số 1.

- Số cách chọn 2 quyển sách từ 9 quyển là C_9^2 cách.
- Vì các quyển sách trong ngăn được xếp thứ tự từ trái sang phải, nên số cách xếp 2 quyển đã chọn vào ngăn 1 là 2! cách.
- Vậy có $C_9^2 \cdot 2! = A_9^2 = 72$ cách xếp cho ngăn số 1.

Bước 2: Xếp 7 quyển sách còn lại vào 3 ngăn còn lại (ngăn $2, 3, 4$) sao cho mỗi ngăn có ít nhất 1 quyển.

- Đầu tiên, ta xếp 7 quyển sách còn lại thành một hàng ngang. Có $7! = 5040$ cách.
- Để chia 7 quyển sách đang xếp hàng này vào 3 ngăn sao cho mỗi ngăn có ít nhất 1 quyển, ta sử dụng phương pháp "vách ngăn". Giữa 7 quyển sách có 6 khoảng trống, ta cần đặt 2 vách ngăn vào 2 trong số 6 khoảng trống đó để chia thành 3 phần (tương ứng cho 3 ngăn).
- Số cách chọn vị trí đặt vách ngăn là $C_6^2 = 15$ cách.

Tổng số cách xếp T là:

$$T = (A_9^2) \cdot (7! \cdot C_6^2) = 72 \cdot 5040 \cdot 15 = 5.443.200.$$

$\dfrac{T}{600} = \dfrac{5.443.200}{600} = 9072.$

Bài 58. Giải bóng đá Ngoại hạng Anh là một giải đấu lớn nhất hành tinh có 20 đội tham gia. Hiện tại Manchester United xếp vị trí thứ 5. Trong trận tới nếu gặp đội xếp trên thì Manchester United có xác suất thắng là $0,2$; xác suất thua là $0,5$. Nếu gặp đội dưới thì Manchester United có xác suất thắng là $0,5$ và xác suất thua là $0,3$. Bốc thăm ngẫu nhiên một đội đấu với Manchester United trong trận tới. Tính xác suất để Manchester United hoà trong trận tới (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải. Vì Manchester United xếp thứ 5 trong 20 đội nên có 4 đội xếp trên và 15 đội xếp dưới.

Xác suất gặp đội xếp trên là $\frac{4}{19}$ và xác suất để gặp đội xếp dưới là $\frac{15}{19}$.

Khi gặp đội xếp trên thì xác suất thắng là $0,2$ và xác suất thua là $0,5$.

Như vậy xác suất hòa đội xếp trên là $1 - 0,2 - 0,5 = 0,3$.

Khi gặp đội xếp dưới thì xác suất thắng là $0,5$ và xác suất thua là $0,3$.

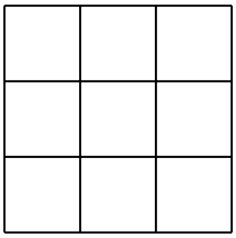
Như vậy xác suất hòa đội xếp dưới là $1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$.

Vậy xác suất để Manchester United hoà trong trận tới là:

$$P = \frac{4}{19} \cdot 0,3 + \frac{15}{19} \cdot 0,2 \approx 0,22.$$

Bài 59. Cho một bảng ô vuông 3×3 như hình vẽ bên. Điền ngẫu nhiên 9 số thuộc tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ vào 9 ô vuông trong bảng (mỗi ô vuông điền một số khác nhau). Gọi Y là biến cố "mỗi hàng, mỗi cột bất kì trong bảng đều có ít nhất một số lẻ". Biết xác suất

$P(Y) = \dfrac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = A_{10}^9 = 10! = 3.628.800$.

Tập hợp X có 5 số chẵn là $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ và 5 số lẻ là $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Xét biến cố đối $\bar{Y}$: "Có ít nhất một hàng hoặc một cột không có số lẻ nào (tức là hàng hoặc cột đó toàn số chẵn)".

Gọi R_i là biến cố hàng i toàn số chẵn, C_j là biến cố cột j toàn số chẵn ($i, j \in \{1, 2, 3\}$). Vì mỗi hàng (hoặc cột) có 3 ô và chỉ có tổng cộng 5 số chẵn nên không thể có đồng thời hai hàng hoặc hai cột toàn số chẵn.

Do đó, $n(R_i \cap R_k) = 0$ và $n(C_j \cap C_l) = 0$ với $i \neq k, j \neq l$.

Theo công thức bao hàm - loại trừ: $n(\bar{Y}) = \sum_{i=1}^{3} n(R_i) + \sum_{j=1}^{3} n(C_j) - \sum_{i,j} n(R_i \cap C_j)$.

- Tính $n(R_1)$: Số cách chọn 3 số chẵn và sắp xếp vào hàng 1 là A_5^3 cách. Số cách điền 6 số còn lại vào 6 ô trống (từ 7 số còn lại trong tập X) là A_7^6 cách. Vậy $n(R_1) = A_5^3 \cdot A_7^6 = 60 \cdot 5040 = 302.400$. Tổng cộng cho 3 hàng và 3 cột là $6 \cdot 302.400 = 1.814.400$.
- Tính $n(R_i \cap C_j)$: Để hàng i và cột j đều toàn số chẵn thì các ô tại giao điểm và các ô còn lại trên hàng i, cột j phải được điền bởi số chẵn. Tổng số ô này là $3 + 3 - 1 = 5$ ô. Vì có đúng 5 số chẵn nên có $5!$ cách xếp các số chẵn này vào các vị trí đó. Còn lại $9 - 5 = 4$ ô trống được điền từ $10 - 5 = 5$ số lẻ còn lại, có A_5^4 cách.

  Vậy $n(R_i \cap C_j) = 5! \cdot A_5^4 = 120 \cdot 120 = 14.400$.

  Có $3 \times 3 = 9$ cặp (i, j) như vậy. Tổng cộng $\sum n(R_i \cap C_j) = 9 \cdot 14.400 = 129.600$.

Suy ra $n(\bar{Y}) = 1.814.400 - 129.600 = 1.684.800$. Xác suất của biến cố đối là $P(\bar{Y}) = \dfrac{1.684.800}{3.628.800} = \dfrac{13}{28}$. Xác suất biến cố Y là $P(Y) = 1 - P(\bar{Y}) = 1 - \dfrac{13}{28} = \dfrac{15}{28}$.

Vì $\dfrac{15}{28}$ là phân số tối giản nên $a = 15$ và $b = 28$.

Khi đó $a + b = 15 + 28 = 43$.

Bài 60. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất $0,55$. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó. Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn một quả tên lửa. Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là $0,8$ và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Biết máy bay bị bắn hạ trong phương án tác chiến trên. Tính xác suất máy bay bị bắn hạ ở vị trí X. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Gọi A là biến cố "Máy bay xuất hiện tại vị trí X".

$\overline{A}$ là biến cố "Máy bay xuất hiện tại vị trí Y".

B là biến cố "Máy bay bị bắn hạ".

$\overline{B}$ là biến cố "Máy bay không bị bắn hạ".

Tính $P(A|B)$.

Từ giả thiết, ta có $P(A) = 0,55 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,45$.

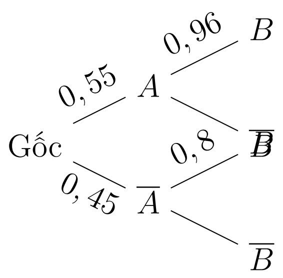
- Xác suất máy bay bị bắn hạ tại vị trí Y là $P(B|\overline{A}) = 0,8$.
- Xác suất máy bay không bị bắn hạ tại vị trí X là $P(\overline{B}|A)$.

  Vì máy bay bị bắn hạ nếu bị trúng ít nhất 1 quả tên lửa do đó máy bay không bị bắn hạ khi và chỉ khi cả 2 quả tên lửa đều không bắn trúng (và xác suất không bắn trúng là $1 - 0,8 = 0,2$).

  Nên $P(\overline{B}|A) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$.

Suy ra xác suất máy bay bị bắn hạ tại vị trí X là $P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A) = 0,96$.

Từ đó, ta có sơ đồ cây sau:



Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) = 0,55 \cdot 0,96 + 0,45 \cdot 0,8 = 0,888.$$

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,55 \cdot 0,96}{0,888} \approx 0,59.$$

Vậy xác suất cần tìm là $0,59$.

Bài 61. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó luôn có 3 chữ số $1; 2; 3$ và chữ số 2 đứng liền giữa chữ số 1 và chữ số 3?

Hướng dẫn giải. Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$.

Bộ ba số $(1, 2, 3)$ có chữ số 2 đứng giữa 1 và 3 nên có 2 cách sắp xếp là $(1, 2, 3)$ hoặc $(3, 2, 1)$. Coi bộ ba này là một phần tử X.

Số cách chọn vị trí cho X trong số có 7 chữ số là 5 cách.

Số cách chọn và sắp xếp 4 chữ số còn lại từ tập hợp $\{0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ là A_7^4.

Theo quy tắc nhân, số các số được tạo thành (kể cả số 0 đứng đầu) là $5 \cdot 2 \cdot \mathrm{A}_7^4$. Xét trường hợp số 0 đứng đầu $(a_1 = 0)$:

- Số 0 đứng đầu nên vị trí của X chỉ còn 4 cách chọn.
- Số cách chọn và sắp xếp 3 chữ số còn lại từ tập hợp $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ là A_6^3.

Số trường hợp 0 đứng đầu là $4 \cdot 2 \cdot \mathrm{A}_6^3$.

Vậy số các số tự nhiên thoả mãn bài toán là:

$$5 \cdot 2 \cdot \mathrm{A}_7^4 - 4 \cdot 2 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 7440.$$

Bài 62. Một nghệ nhân có 9 cái lồng đèn với độ dài dây treo (cm) lần lượt là $10, 20, 30, \ldots, 90$. Khung đèn là một tam giác đều ABC; gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Nghệ nhân chọn ngẫu nhiên 6 chiếc đèn và gán ngẫu nhiên vào 6 vị trí A, B, C, M, N, P (mọi cách gắn đều đồng khả năng). Để khung đèn đạt độ cân đối hoàn hảo, trên mỗi cạnh tam giác, chiều dài dây treo của đèn ở giữa phải bằng trung bình cộng chiều dài dây treo của hai đèn ở hai đầu mút cạnh đó. Gọi xác suất để thỏa mãn điều kiện ngay lần đầu chọn và gán đầu tiên là p. Giá trị của $\dfrac{6}{p}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Gọi $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ là tập hợp các độ dài dây treo của lồng đèn (đã chia cho 10 để đơn giản hóa việc tính toán).

Số cách chọn 6 chiếc lồng đèn từ 9 chiếc và sắp xếp chúng vào 6 vị trí phân biệt A, B, C, M, N, P là:

$$n(\Omega) = A_9^6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480 \text{ cách.}$$

Điều kiện để khung đèn cân đối hoàn hảo là:

$$M = \frac{A+B}{2}, \quad N = \frac{B+C}{2}, \quad P = \frac{C+A}{2}$$

trong đó $\{A, B, C, M, N, P\} \subset S$ và các giá trị này đôi một khác nhau.

Từ các hệ thức trên, ta suy ra $A+B, B+C, C+A$ đều là các số chẵn, dẫn đến A, B, C phải có cùng tính chẵn lẻ.

- **Trường hợp 1:** A, B, C là các số lẻ chọn từ tập $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Số tập con gồm 3 số lẻ là $C_5^3 = 10$ tập.

  Để 6 giá trị $\{A, B, C, M, N, P\}$ đôi một khác nhau, bộ 3 số $\{A, B, C\}$ không được tạo thành một cấp số cộng (vì nếu A, B, C là cấp số cộng thì trung bình cộng của hai số sẽ bằng số còn lại, dẫn đến trùng lặp đèn).

  Các bộ 3 số lẻ tạo thành cấp số cộng là: $\{1, 3, 5\}, \{3, 5, 7\}, \{5, 7, 9\}, \{1, 5, 9\}$ (có 4 bộ).

  Vậy số cách chọn tập $\{A, B, C\}$ lẻ thỏa mãn là $10 - 4 = 6$ tập.

- **Trường hợp 2:** A, B, C là các số chẵn chọn từ tập $\{2, 4, 6, 8\}$.

  Số tập con gồm 3 số chẵn là $C_4^3 = 4$ tập. Các bộ 3 số chẵn tạo thành cấp số cộng là: $\{2, 4, 6\}, \{4, 6, 8\}$ (có 2 bộ).

  Vậy số cách chọn tập $\{A, B, C\}$ chẵn thỏa mãn là $4 - 2 = 2$ tập.

Tổng cộng có $6 + 2 = 8$ bộ số $\{A, B, C\}$ thỏa mãn. Với mỗi bộ số, có $3! = 6$ cách sắp xếp chúng vào các đỉnh A, B, C.

Khi vị trí của A, B, C đã cố định, vị trí của M, N, P hoàn toàn được xác định theo điều kiện bài toán. Số kết quả thuận lợi là:

$$n(A) = 8 \cdot 6 = 48 \text{ cách.}$$

Xác suất của biến cố là:

$$p = \frac{48}{60480} = \frac{1}{1260}.$$

Giá trị của biểu thức $\frac{6}{p}$ là:

$$\frac{6}{p} = 6 \cdot 1260 = 7560.$$

Bài 63. Gọi S là tập hợp tất cả các số có 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Khi đó xác suất để số chọn được chia hết cho 5, luôn có mặt các chữ số $2, 3, 4$ và chúng đứng cạnh nhau là $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Hướng dẫn giải. Ta có $|S| = 7 \cdot A_7^4 = 5880$ nên số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 5880$.

- Ta đếm số các số chia hết cho 5, luôn có mặt các chữ số $2, 3, 4$ và chúng đứng cạnh nhau.
  - Xếp các chữ số $2, 3, 4$ thành một nhóm, coi là một chữ số, có $3! = 6$ cách.
  - Ta cần tính số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau từ các chữ số $\{0, 1, (234), 5, 6, 7\}$ sao cho số đó chia hết cho 5, và luôn có mặt nhóm (234).
    - Vì số đó chia hết cho 5 nên chữ số hàng đơn vị bằng 0 hoặc 5, có 2 cách chọn.
    - Chọn vị trí cho nhóm (234), có 2 cách chọn.
    - Viết chữ số còn lại, có 4 cách chọn.
  - Suy ra số các số là $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ số.
  - Trong các số trên, có một số không thỏa mãn là $0(234)5$. Do đó số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau từ các chữ số $0, 1, (234), 5, 6, 7$ thỏa mãn yêu cầu là $16 - 1 = 15$.
- Số các số có 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $6 \cdot 15 = 90$ số.

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{90}{5880} = \frac{3}{196}$.

Suy ra $a = 3, b = 196$. Vậy $a + b = 3 + 196 = 199$.

Bài 64. Dịp cuối tuần một nhóm n bạn gồm Khoa, Khôi, Thảo và $(n - 3)$ bạn khác cùng nhau đến rạp chiếu phim xem bộ phim "Mưa đỏ". Khi xếp tùy ý nhóm bạn này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến n, mỗi bạn ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của Khoa, Thảo, Khôi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là $\frac{13}{675}$. Tìm n.

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y, z lần lượt là số ghế của Khoa, Thảo và Khôi ($x, y, z \in \{1, 2, \ldots, n\}$ và đôi một khác nhau).

Để số ghế của Khoa, Thảo, Khôi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì ta có điều kiện: $x + z = 2y$. Điều này có nghĩa là x và z phải có cùng tính chẵn hoặc cùng tính lẻ.

Khi đã chọn được cặp (x, z) thỏa mãn điều kiện này và $x \neq z$ thì giá trị $y = \frac{x + z}{2}$ là duy nhất và luôn nằm giữa x, z nên chắc chắn $y \in \{1, 2, \ldots, n\}$ và x, y, z đôi một khác nhau.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = n!$. Gọi A là biến cố cần tính xác suất. Số kết quả thuận lợi của biến cố A là:

$$n(A) = (\text{số bộ } (x, y, z) \text{ thỏa mãn}) \times (n - 3)!$$

Ta xét hai trường hợp của n:

◇ *Trường hợp 1: $n = 2k$ (n chẵn).* Trong tập các số từ 1 đến n có k số chẵn và k số lẻ.

- Số cách chọn cặp (x, z) cùng chẵn là $A_k^2 = k(k-1)$.
- Số cách chọn cặp (x, z) cùng lẻ là $A_k^2 = k(k-1)$.

Tổng số bộ (x, y, z) là $2k(k-1) = 2 \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n(n-2)}{2}$.

Xác suất là: $P(A) = \dfrac{\frac{n(n-2)}{2} \cdot (n-3)!}{n!} = \dfrac{n(n-2)}{2n(n-1)(n-2)} = \dfrac{1}{2(n-1)}$.

Theo giả thiết: $\dfrac{1}{2(n-1)} = \dfrac{13}{675} \Rightarrow 26n - 26 = 675 \Rightarrow 26n = 701$ (loại vì n không nguyên).

◇ *Trường hợp 2: $n = 2k + 1$ (n lẻ).* Trong tập các số từ 1 đến n có k số chẵn và $k + 1$ số lẻ.

- Số cách chọn cặp (x, z) cùng chẵn là $A_k^2 = k(k-1)$.
- Số cách chọn cặp (x, z) cùng lẻ là $A_{k+1}^2 = (k+1)k$.

Tổng số bộ (x, y, z) là $k(k-1) + k(k+1) = 2k^2 = 2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{2}$.

Xác suất là: $P(A) = \dfrac{\frac{(n-1)^2}{2} \cdot (n-3)!}{n!} = \dfrac{(n-1)^2}{2n(n-1)(n-2)} = \dfrac{n-1}{2n(n-2)}$.

Theo giả thiết: $\dfrac{n-1}{2n(n-2)} = \dfrac{13}{675} \Leftrightarrow 675(n-1) = 26n(n-2) \Leftrightarrow 26n^2 - 727n + 675 = 0$.

Giải phương trình bậc hai trên ta được $n = 27$ (thỏa mãn) hoặc $n = \dfrac{25}{26}$ (loại).

Vậy $n = 27$.

Bài 65. Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

Dãy 1	Ghế 1	Ghế 2	Ghế 3	Ghế 4
Dãy 2	Ghế 1	Ghế 2	Ghế 3	Ghế 4

Một đội chơi có 15 người gồm 7 nam và 8 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 bạn ngồi vào hai dãy ghế để tham gia trả lời câu hỏi. Hai người được gọi là ngồi đối diện nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng số ghế. Gọi T là số cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ, khi đó giá trị của $\dfrac{T}{66\,889}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Vì mỗi bạn nam ngồi đối diện một bạn nữ nên có 4 bạn nam và 4 bạn nữ được chọn ngồi vào hai dãy ghế.

◇ Chọn 1 bạn nam thứ nhất xếp vào chỗ bất kì trong 8 chỗ có $7 \cdot 8 = 56$ cách.

◇ Chọn 1 bạn nam thứ hai xếp vào chỗ bất kì trong 7 chỗ còn lại và không đối diện với bạn nam thứ nhất có $6 \cdot 6 = 36$ cách.

◇ Chọn 1 bạn nam thứ ba xếp vào chỗ bất kì trong 6 chỗ còn lại và không đối diện với bạn nam thứ nhất, thứ hai có $5 \cdot 4 = 20$ cách.

◇ Chọn 1 bạn nam thứ tư xếp vào chỗ bất kì trong 5 chỗ còn lại và không đối diện với bạn nam thứ nhất, thứ hai, thứ ba có $4 \cdot 2 = 8$ cách.

◇ Chọn 4 bạn nữ và xếp vào 4 ghế còn lại có A_8^4 cách.

Vậy có $T = 56 \cdot 36 \cdot 20 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^4 = 541\,900\,800$ cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ.

Khi đó giá trị của $\dfrac{T}{66\,889} = \dfrac{541\,900\,800}{66\,889} = 8100$.

Bài 66. Mèo Táo có một cửa hàng sách và đang cần tuyển nhân viên trông coi cửa hàng. Để tuyển nhân viên, đòi hỏi có khả năng tư duy và suy luận tốt. Táo đưa ra thử thách như sau: Bộ truyện tranh thám tử Kenechi gồm 44 tập đang được sắp xếp từ 1 đến 44 trên giá (giả sử tính từ trái qua phải và tất cả cuốn truyện được sắp xếp cùng chiều). Yêu cầu hãy sắp xếp các tập truyện tranh theo chiều ngược lại từ 44 tới 1 theo quy tắc:

- Đổi chỗ sắp xếp của 2 tập liên tiếp sẽ bị tính 1 điểm,
- Đổi chỗ 2 tập truyện mà ở giữa có 3 tập khác thì không bị tính điểm.

Bạn An muốn ứng tuyển vào nhân viên cửa hàng. Hỏi điểm số của An nhỏ nhất bao nhiêu để thực hiện được thử thách trên?

Hướng dẫn giải.

Gọi vị trí của các tập truyện trên giá sách là $1, 2, 3, \ldots, 44$.

Theo quy tắc thứ hai, việc đổi chỗ hai tập truyện ở vị trí i và j là miễn phí (0 điểm) nếu chúng cách nhau đúng 3 tập truyện ở giữa, tức là $|i - j| = 4$. Điều này cho phép ta sắp xếp lại các tập truyện ở các vị trí có cùng số dư khi chia cho 4 một cách tùy ý mà không tốn điểm.

Ta chia 44 vị trí thành 4 nhóm dựa trên số dư khi chia cho 4:

- Nhóm L_1: gồm các vị trí $\{1, 5, 9, \ldots, 41\}$ (có 11 vị trí).
- Nhóm L_2: gồm các vị trí $\{2, 6, 10, \ldots, 42\}$ (có 11 vị trí).
- Nhóm L_3: gồm các vị trí $\{3, 7, 11, \ldots, 43\}$ (có 11 vị trí).
- Nhóm L_0: gồm các vị trí $\{4, 8, 12, \ldots, 44\}$ (có 11 vị trí).

Ban đầu, tập truyện thứ x nằm ở vị trí x. Trạng thái cuối cùng yêu cầu tập truyện thứ x phải nằm ở vị trí $45 - x$. Xét sự thay đổi nhóm của các tập truyện:

- Tập $x \equiv 1 \pmod 4$ (ban đầu thuộc L_1): Vị trí mới là $45 - x \equiv 45 - 1 = 44 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow$ cần chuyển sang nhóm L_0.
- Tập $x \equiv 0 \pmod 4$ (ban đầu thuộc L_0): Vị trí mới là $45 - x \equiv 45 - 0 = 45 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$ cần chuyển sang nhóm L_1.
- Tập $x \equiv 2 \pmod 4$ (ban đầu thuộc L_2): Vị trí mới là $45 - x \equiv 45 - 2 = 43 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow$ cần chuyển sang nhóm L_3.
- Tập $x \equiv 3 \pmod 4$ (ban đầu thuộc L_3): Vị trí mới là $45 - x \equiv 45 - 3 = 42 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow$ cần chuyển sang nhóm L_2.

Như vậy, bài toán trở thành hoán đổi toàn bộ 11 phần tử của nhóm L_1 với nhóm L_0, và hoán đổi toàn bộ 11 phần tử của nhóm L_2 với nhóm L_3.

Mỗi phép đổi chỗ hai tập ở vị trí kề nhau (tốn 1 điểm) cho phép hoán đổi một phần tử giữa hai nhóm có chỉ số kề nhau (ví dụ từ L_1 sang L_2, hoặc L_0 sang L_1).

- Để hoán đổi một cặp phần tử giữa L_1 và L_0, ta tốn ít nhất 1 điểm bằng cách đổi chỗ trực tiếp tại các cặp vị trí kề nhau có số dư 1 và 0 (như cặp $(4, 5), (8, 9), \ldots$). Với 11 cặp, ta tốn ít nhất 11 điểm.

- Tương tự, để hoán đổi một cặp phần tử giữa L_2 và L_3, ta tốn ít nhất 1 điểm bằng cách đổi chỗ tại các cặp vị trí có số dư 2 và 3 (như cặp $(2,3),(6,7),\ldots$). Với 11 cặp, ta tốn thêm ít nhất 11 điểm.

Vậy tổng số điểm nhỏ nhất để thực hiện thử thách là $11+11=22$ điểm.

Bài 67. Hai bạn An và Bình cùng chơi trò chơi đánh cờ carô trên một bảng ô vuông kích thước 3×3 (gồm 9 ô trống). Luật chơi quy định An đi trước, mỗi lượt điền một dấu "X" vào một ô trống và Bình đi sau mỗi lượt điền một dấu "O" vào một ô trống. Trò chơi kết thúc và xác định được người chiến thắng nếu người đó tạo được 3 dấu của mình nằm liên tiếp nhau trên cùng một hàng ngang, hàng dọc hoặc đường chéo. Hỏi có tất cả bao nhiêu trình tự các nước đi để ván cờ kết thúc chính xác ở nước đi thứ 5 với An là người giành chiến thắng?

O		X
	X	
X		

Hướng dẫn giải.

Theo đề bài, ván cờ kết thúc ở nước đi thứ 5, nghĩa là An thực hiện 3 nước đi (nước thứ $1,3,5$) và Bình thực hiện 2 nước đi (nước thứ $2,4$). Để An thắng ở nước thứ 5, 3 dấu "X" của An phải tạo thành một hàng ngang, hàng dọc hoặc đường chéo.

- *Bước 1: Chọn bộ 3 ô để An thắng.* Trong bảng 3×3, có tất cả 8 đường thẳng tạo bởi 3 ô liên tiếp (gồm 3 hàng ngang, 3 hàng dọc và 2 đường chéo).

  Vậy có 8 cách chọn tập hợp 3 ô để An đặt dấu "X".

- *Bước 2: Sắp xếp thứ tự các nước đi của An.* Vì ván cờ kết thúc *chính xác* ở nước đi thứ 5, nên dấu "X" tạo thành hàng thẳng phải được hoàn tất ở nước thứ 5. Tuy nhiên, với chỉ 3 quân "X", An không thể thắng ở nước thứ 1 hay nước thứ 3. Do đó, cả 3 nước đi của An (vị trí $1,3,5$) có thể hoán vị tùy ý trong 3 ô đã chọn.

  Số cách xếp thứ tự 3 nước đi của An là: $3!=6$ cách.

- *Bước 3: Chọn và sắp xếp thứ tự các nước đi của Bình.* Sau khi An đã lấy 3 ô, còn lại $9-3=6$ ô trống. Bình chọn 2 ô trong 6 ô này để đặt dấu "O" vào nước thứ 2 và thứ 4.

  Số trình tự nước đi của Bình là: $A_6^2=6\times 5=30$ cách.

Tổng số trình tự các nước đi thỏa mãn là:

$$N=8\times 6\times 30=1440 \text{ trình tự.}$$

Bài 68. Cho một bảng ô vuông kích thước 2×7 như hình vẽ dưới đây.

Hai ô vuông gọi là kề nhau nếu có chung một cạnh. Người ta tô màu các ô vuông bởi hai màu đen và đỏ sao cho mỗi ô chỉ được tô đúng một màu. Gọi P là xác suất để có đúng 3 ô được tô màu đỏ và không có hai ô đỏ nào kề nhau. Giá trị $8192P$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Bảng ô vuông 2×7 có tất cả 14 ô vuông. Mỗi ô có 2 cách tô màu (đen hoặc đỏ), nên tổng số cách tô màu bảng là $n(\Omega) = 2^{14} = 16384$.

Gọi A là biến cố: "Có đúng 3 ô màu đỏ và không có hai ô đỏ nào kề nhau".

Số cách chọn 3 ô bất kỳ từ 14 ô là $C_{14}^3 = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364$.

Ta đếm số cách chọn 3 ô mà trong đó có ít nhất 2 ô kề nhau (biến cố đối trong không gian các cách chọn 3 ô).

Số cặp ô kề nhau (các cạnh trong đồ thị lưới 2×7) là:

- Số cặp kề nhau theo hàng ngang: $2 \times (7-1) = 12$.
- Số cặp kề nhau theo hàng dọc: $1 \times 7 = 7$.

Tổng cộng có $12 + 7 = 19$ cặp ô kề nhau.

Một bộ 3 ô $\{u, v, w\}$ gọi là "xấu" nếu nó chứa ít nhất một cặp ô kề nhau.

- Số bộ 3 ô chứa đúng 2 cặp kề nhau (tạo thành một đường đi độ dài 2 trong đồ thị):

  Mỗi ô vuông trong bảng có số ô kề với nó (bậc) như sau:

  + có 4 ô ở góc có bậc 2.

  + có 10 ô còn lại ở biên có bậc 3.

  Số bộ 3 ô có đúng 2 cạnh kề nhau là $\sum \binom{\text{bậc}}{2} = 4 \times \binom{2}{2} + 10 \times \binom{3}{2} = 4 \times 1 + 10 \times 3 = 34$.
- Tổng số lượt đếm các bộ 3 ô có ít nhất một cặp kề nhau dựa trên 19 cặp cạnh là $19 \times (14-2) = 228$.

  Trong tổng này, các bộ có đúng 2 cặp kề nhau đã được đếm 2 lần.

  Vì lưới ô vuông không có chu trình độ dài 3 (không có 3 ô nào đôi một kề nhau), nên một bộ 3 ô chỉ có thể có tối đa 2 cặp kề nhau.

  Vậy số bộ 3 ô có ít nhất một cặp kề nhau thực tế là $228 - 34 = 194$.

Số cách chọn 3 ô đỏ mà không có hai ô nào kề nhau là: $n(A) = 364 - 194 = 170$.

Xác suất của biến cố A là $P = \dfrac{170}{2^{14}}$. Giá trị cần tính là:

$8192P = 8192 \cdot \dfrac{170}{16384} = \dfrac{170}{2} = 85$.

Bài 69. Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số. Xác suất để chọn được số tự nhiên có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó $a_1 \leq a_2 + 1 \leq a_3 - 7 < a_4 \leq a_5 + 2$ bằng a. Giá trị của $\dfrac{1}{a}$ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $n(\Omega) = 9 \cdot 10^4 = 90000$.

Xét các chữ số $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ với $a_1 \neq 0$ ($a_1 \in \{1, \ldots, 9\}$).

Điều kiện bài toán: $1 \leq a_1 \leq a_2 + 1 \leq a_3 - 7 < a_4 \leq a_5 + 2$.

Từ $a_2 + 1 \leq a_3 - 7$, vì $a_2 \geq 0 \Rightarrow a_2 + 1 \geq 1$ nên $a_3 - 7 \geq 1 \Rightarrow a_3 \geq 8$.

Mặt khác $a_3 \leq 9$, nên a_3 chỉ có thể nhận giá trị 8 hoặc 9.

◇ **Trường hợp 1:** $a_3 = 8$. Khi đó chuỗi bất đẳng thức trở thành: $1 \leq a_1 \leq a_2 + 1 \leq 1$ và $1 < a_4 \leq a_5 + 2$.

- Với $1 \leq a_1 \leq a_2 + 1 \leq 1$: Suy ra $a_2 = 0$ và $a_1 = 1$ (có 1 cách chọn bộ (a_1, a_2)).

- Với $1 < a_4 \leq a_5 + 2$: Vì a_4 là chữ số nên $a_4 \in \{2, 3, \ldots, 9\}$.

+ Nếu $a_4 = 2 \Rightarrow a_5 + 2 \geq 2 \Rightarrow a_5 \geq 0 \Rightarrow a_5 \in \{0, \ldots, 9\}$ (10 cách).

+ Nếu $a_4 = 3 \Rightarrow a_5 \geq 1 \Rightarrow a_5 \in \{1, \ldots, 9\}$ (9 cách).

+ ...

+ Nếu $a_4 = 9 \Rightarrow a_5 \geq 7 \Rightarrow a_5 \in \{7, 8, 9\}$ (3 cách).

Số cách chọn cặp (a_4, a_5) là $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 52$.

Vậy trường hợp này có $1 \times 52 = 52$ số.

◇ **Trường hợp 2:** $a_3 = 9$.

Khi đó chuỗi bất đẳng thức trở thành: $1 \leq a_1 \leq a_2 + 1 \leq 2$ và $2 < a_4 \leq a_5 + 2$.

- Với $1 \leq a_1 \leq a_2 + 1 \leq 2$:

+ Nếu $a_2 + 1 = 1 \Rightarrow a_2 = 0, a_1 = 1$ (1 cách).

+ Nếu $a_2 + 1 = 2 \Rightarrow a_2 = 1, a_1 \in \{1, 2\}$ (2 cách).

Tổng cộng có $1 + 2 = 3$ cách chọn bộ (a_1, a_2).

- Với $2 < a_4 \leq a_5 + 2$: Vì a_4 là chữ số nên $a_4 \in \{3, 4, \ldots, 9\}$.

+ Nếu $a_4 = 3 \Rightarrow a_5 \geq 1 \Rightarrow a_5 \in \{1, \ldots, 9\}$ (9 cách).

+ ...

+ Nếu $a_4 = 9 \Rightarrow a_5 \geq 7 \Rightarrow a_5 \in \{7, 8, 9\}$ (3 cách).

Số cách chọn cặp (a_4, a_5) là $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 42$.

Vậy trường hợp này có $3 \times 42 = 126$ số.

Tổng số các số thỏa mãn là $n(A) = 52 + 126 = 178$.

Xác suất $a = \dfrac{178}{90000} = \dfrac{89}{45000}$.

Giá trị $\dfrac{1}{a} = \dfrac{45000}{89} \approx 505,618$.

Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được 506.

Bài 70. Cho một nhóm 15 học sinh có chiều cao khác nhau gồm 5 học sinh nữ có chiều cao tăng dần ký hiệu lần lượt là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 10 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 15 học sinh đó thành một hàng ngang sao cho nếu tính từ trái sang phải thì các học sinh nữ có chiều cao tăng dần, các học sinh nam cũng có chiều cao tăng dần; giữa học sinh G_1 và G_2 có ít nhất 2 học sinh nam, giữa học sinh G_4 và G_5 có ít nhất 1 học sinh nam và nhiều nhất 4 học sinh nam?

Hướng dẫn giải. Vì thứ tự của các học sinh nữ và các học sinh nam đều được cố định sẵn theo chiều cao tăng dần từ trái qua phải, nên một cách xếp hàng được xác định hoàn toàn bởi số lượng học sinh nam nằm ở các khoảng trống do các học sinh nữ tạo ra.

Gọi $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ lần lượt là số học sinh nam ở các vị trí: trước G_1, giữa G_1 và G_2, giữa G_2 và G_3, giữa G_3 và G_4, giữa G_4 và G_5, và sau G_5.

Theo giả thiết, ta có các điều kiện sau:

- $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$, với $x_i \in \mathbb{N}$.
- $x_1 \geq 2$.
- $1 \leq x_4 \leq 4$.

Đặt $y_1 = x_1 - 2$ $(y_1 \geq 0)$ và $y_4 = x_4 - 1$ $(0 \leq y_4 \leq 3)$. Khi đó phương trình trở thành:

$$x_0 + (y_1 + 2) + x_2 + x_3 + (y_4 + 1) + x_5 = 10 \Leftrightarrow x_0 + y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 7$$

Bài toán quy về tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên với điều kiện $y_4 \leq 3$.

- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình khi chưa xét điều kiện $y_4 \leq 3$ là số cách chia 7 vật giống nhau vào 6 ngăn phân biệt:

$$C_{7+6-1}^{6-1} = C_{12}^{5} = 792 \text{ nghiệm.}$$

- Số nghiệm vi phạm điều kiện $y_4 \leq 3$, tức là $y_4 \geq 4$.

  Đặt $z_4 = y_4 - 4 \geq 0$, phương trình trở thành:

$$x_0 + y_1 + x_2 + x_3 + (z_4 + 4) + x_5 = 7 \Leftrightarrow x_0 + y_1 + x_2 + x_3 + z_4 + x_5 = 3$$

  Số nghiệm vi phạm là: $C_{3+6-1}^{6-1} = C_8^5 = 56$ nghiệm.

Vậy tổng số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $792 - 56 = 736$ cách.

Bài 71. Chọn ngẫu nhiên 3 trong số 24 đỉnh của một đa giác đều 24 cạnh. Gọi P là xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông. Biết $P = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $2a + b$.

Hướng dẫn giải.

Số phần tử không gian mẫu là $C_{24}^3 = 2024$ (cách chọn).

Gọi A là biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân".

Ứng với mỗi đỉnh của đa giác, có 11 cách chọn 2 đỉnh còn lại để tạo ra một tam giác cân. Đa giác đã cho có 24 đỉnh nên có $11.24 = 264$ tam giác cân theo cách đếm này. Trong đó có tất cả 8 tam giác đều và chúng bị đếm 3 lần.

Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $11.24 - 8.2 = 248$ (kết quả).

Gọi B là biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác vuông".

Số đường chéo qua tâm của đa giác đều là: 12 đường chéo.

Với mỗi đường chéo, ta chọn 1 đỉnh trong 22 đỉnh còn lại để tạo thành một tam giác vuông.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là: $12.22 = 264$ (kết quả).

Ứng với mỗi đường chéo, có 2 cách chọn đỉnh sao cho 3 đỉnh tạo thành tam giác vuông cân.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố AB là: $12.2 = 24$ (kết quả).

Vậy xác suất của biến cố "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông" là:

$$P(A \cup B) = \frac{248 + 264 - 24}{2024} = \frac{61}{253} \Rightarrow 2a + b = 2.61 + 253 = 375.$$

Bài 72. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + bx + 2}{x - c}$ với b, c lần lượt là số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần tung một con xúc xắc cân đối đồng chất. Biết xác suất để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$ là $\dfrac{m}{n}$ $(m,n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính m^2+n^2.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $n(\Omega)=36$

$f'(x)=\dfrac{x^2-2cx-bc-2}{(x-c)^2}$. Do $(x-c)^2>0,\forall x\neq c$ nên để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(2;4)$ thì $x^2-2cx-bc-2\leq 0,\forall x\in(2;4)\Leftrightarrow x^2-2cx-2\leq bc,\forall x\in(2;4)$

Đặt $g(x)=x^2-2cx-2, x\in(2;4)$ (dễ thấy bài toán không thỏa mãn với $c=3$ và phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(2;4)$).

Ta có: $g(2)=2-4c$; $g(4)=14-8c$

Trường hợp 1: $2-4c<14-8c\Leftrightarrow c<3\Leftrightarrow c\in\{1;2\}$

Khi đó: Yêu cầu bài toán trở thành $14-8c\leq bc\Leftrightarrow b+8\geq\dfrac{14}{c}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\Rightarrow b=6\\ c=2\Rightarrow b\in\{1;2;3;4;5;6\}\end{array}\right.$

Trường hợp này có 7 kết quả thỏa mãn.

Trường hợp 2: $2-4c>14-8c\Leftrightarrow c>3\Leftrightarrow c\in\{4;5;6\}$

Khi đó: Yêu cầu bài toán trở thành $2-4c\leq bc\Leftrightarrow b+4\geq\dfrac{2}{c}$. Khi đó $\left[\begin{array}{l}c=4\Rightarrow b\in\{1;2;3;4;5;6\}\\ c=5\Rightarrow b\in\{1;2;3;4;5;6\}\\ c=6\Rightarrow b\in\{1;2;3;4;5;6\}\end{array}\right.$

Trường hợp này có 18 kết quả thỏa mãn.

Vậy xác suất thỏa mãn bài toán là $P=\dfrac{25}{36}$.

Suy ra $m^2+n^2=1921$.

Bài 73. Cho tập hợp $X=\{2^1,2^2,2^3,\ldots,2^{15}\}$. Cần chọn ra 9 số nguyên phân biệt từ tập X để gán cho 8 đỉnh và tâm O của một khối lập phương. Biết rằng, trên bất kỳ đường chéo chính $AC', BD', A'C, B'D$ đi qua tâm O, tích của hai số được gán ở hai đầu mút luôn bằng bình phương của số được gán tại tâm O. Gọi P là tổng số phương án gán số thỏa mãn. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{P}{384}$.

Hướng dẫn giải. Giả sử số được gán tại tâm O là 2^{k_O} và các cặp số gán tại các đầu mút của 4 đường chéo chính lần lượt là $(2^{a_i},2^{b_i})$ với $i=1,2,3,4$.

Theo giả thiết, ta có: $2^{a_i}\cdot 2^{b_i}=(2^{k_O})^2\Leftrightarrow a_i+b_i=2k_O$ với $a_i,b_i,k_O\in\{1,2,\ldots,15\}$ và đôi một phân biệt.

Như vậy, k_O phải là trung điểm của mỗi cặp số (a_i,b_i).

Số các cặp số (a,b) phân biệt trích từ tập $E=\{1,2,\ldots,15\}\setminus\{k_O\}$ sao cho $a+b=2k_O$ là $m=\min(k_O-1,15-k_O)$. Để chọn được 4 cặp số, ta cần $m\geq 4$.

Các trường hợp có thể xảy ra cho k_O:

- Nếu $k_O\in\{5,11\}$, ta có $m=4$. Số cách chọn 4 cặp là $2\times C_4^4=2$.
- Nếu $k_O\in\{6,10\}$, ta có $m=5$. Số cách chọn 4 cặp là $2\times C_5^4=10$.
- Nếu $k_O\in\{7,9\}$, ta có $m=6$. Số cách chọn 4 cặp là $2\times C_6^4=30$.

◇ Nếu $k_O = 8$, ta có $m = 7$. Số cách chọn 4 cặp là $1 \times C_7^4 = 35$.

Tổng số bộ 9 số thỏa mãn điều kiện đề bài là: $2 + 10 + 30 + 35 = 77$ bộ số.

Với mỗi bộ 9 số đã chọn, số phương án gán vào các vị trí trên khối lập phương là:

◇ Gán số cho tâm O: có 1 cách.

◇ Xếp 4 cặp số vào 4 đường chéo chính: có $4! = 24$ cách.

◇ Đổi chỗ các số trong mỗi cặp tại 2 đầu mút đường chéo: có $2^4 = 16$ cách.

Suy ra số phương án gán cho mỗi bộ số là $1 \times 24 \times 16 = 384$.

Vậy tổng số phương án gán thỏa mãn là $P = 77 \times 384$.

Do đó, giá trị biểu thức cần tìm là $\dfrac{P}{384} = 77$.

Bài 74. Một nghệ nhân có 9 chiếc đèn lồng với độ dài dây treo (cm) lần lượt là $10, 20, 30, \ldots, 90$. Khung đèn là một tam giác đều ABC; gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Nghệ nhân chọn ngẫu nhiên 6 chiếc đèn và gán ngẫu nhiên vào 6 vị trí A, B, C, M, N, P (mọi cách gán là đồng khả năng). Để khung đèn đạt độ cân bằng hoàn hảo, trên mỗi cạnh tam giác, chiều dài dây treo của đèn ở giữa phải bằng trung bình cộng chiều dài dây treo của hai đèn ở hai đầu mút cạnh đó. Gọi xác suất để thỏa mãn điều kiện ngay lần chọn và gán đầu tiên là p. Giá trị của $\dfrac{6}{p}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Tập hợp độ dài dây treo là $S = \{1; 2; 3; \ldots; 9\}$ (đơn vị: chục cm).

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = A_9^6 = 60480$.

Để chiều dài dây treo của đèn ở giữa bằng trung bình cộng chiều dài dây treo của hai đèn ở hai đầu mút cạnh đó thì chiều dài dây treo đèn ở các đỉnh A, B, C phải cùng tính chẵn lẻ (để chiều dài dây treo tại các vị trí M, N, P là một số nguyên thuộc tập S).

Cụ thể: $M = \dfrac{A+B}{2}, N = \dfrac{B+C}{2}, P = \dfrac{C+A}{2}$.

Từ đó suy ra A, B, C, M, N, P phải đôi một phân biệt.

Hơn nữa, chiều dài các dây treo tại các vị trí A, B, C phải không tạo thành cấp số cộng (vì nếu $A + C = 2B$ thì dẫn đến $P = B$, không thỏa mãn tính phân biệt).

◇ **TH1:** A, B, C **cùng chẵn**, tức thuộc tập hợp $\{2; 4; 6; 8\}$.

Bỏ các bộ A, B, C lập thành cấp số cộng, ta có 2 bộ A, B, C thỏa mãn là $\{2; 4; 8\}, \{2; 6; 8\}$.

Với mỗi bộ, có $3!$ cách sắp xếp vào các đỉnh A, B, C.

Khi đó trường hợp này có $2 \cdot 3!$ cách sắp xếp.

◇ **TH2:** A, B, C **cùng lẻ**, tức là thuộc tập hợp $\{1; 3; 5; 7; 9\}$.

Bỏ các bộ A, B, C lập thành cấp số cộng, ta có 6 bộ A, B, C thỏa mãn là

$\{1; 3; 7\}, \{1; 3; 9\}, \{1; 5; 7\}, \{1; 7; 9\}, \{3; 5; 9\}, \{3; 7; 9\}$.

Với mỗi bộ, có $3!$ cách sắp xếp vào các đỉnh A, B, C.

Khi đó trường hợp này có $6 \cdot 3!$ cách sắp xếp.

Do đó $p = \dfrac{2 \cdot 3! + 6 \cdot 3!}{60480} = \dfrac{48}{60480} = \dfrac{1}{1260}$.

Vậy $\dfrac{6}{p} = \dfrac{6}{\dfrac{1}{1260}} = 7560$.

Bài 75. Bác Nghĩa đang giúp sắp xếp 16 cuốn sách ôn thi vào một chiếc kệ có 5 ngăn phân biệt. 16 cuốn sách này thuộc 8 môn học khác nhau: **Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa, Văn, Anh**. Mỗi môn học gồm đúng hai cuốn: một cuốn sách giáo khoa và một cuốn sách bài tập. Để việc ôn tập đạt hiệu quả cao nhất theo từng khối thi, bác Nghĩa đặt ra các quy tắc khắt khe như sau:

- Do ngăn kệ nhỏ, mỗi ngăn chỉ chứa được **tối đa 5 cuốn sách** và không được để ngăn nào trống.
- Hai cuốn sách của cùng một môn học **phải luôn nằm chung một ngăn** với nhau.
- Các môn học trong cùng một tổ hợp môn thi phải nằm ở **ba ngăn liên tiếp** để thuận tiện cho việc tra cứu. Các tổ hợp bao gồm: (**Văn, Sử, Địa**); (**Toán, Lý, Hóa**); (**Toán, Hóa, Sinh**) và (**Toán, Lý, Anh**).
- Các cuốn sách trong mỗi ngăn được xếp theo hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn, thứ tự từ trái qua phải.

Tổng số cách sắp xếp 16 cuốn sách này vào 5 kệ thỏa mãn điều kiện trên là T. Tính $\dfrac{T}{864}$.

Hướng dẫn giải. Để xếp 16 cuốn sách vào 5 ngăn sao cho không có ngăn nào được để trống và các sách cùng môn sẽ được xếp chung ngăn thì sẽ xếp được 3 ngăn chứa 4 cuốn (2 môn) và 2 ngăn chứa 2 cuốn (1 môn).

Số cách hoán vị sách trong các ngăn này (các sách cùng môn ở chung ngăn nhưng không nhất thiết phải ở cạnh nhau) là: $(4!)^3 \times (2!)^2$.

Theo đề yêu cầu, ta đánh giá được như sau:

- Ta thấy Toán tham gia vào 3 tổ hợp liên tiếp nên cố định Toán ở ngăn 3 để thỏa tính liền kề của ba tổ hợp môn.
- Nhóm xã hội (Văn, Sử, Địa) phải nằm ở ba ngăn liên tiếp nên hoán vị nội bộ của 3 môn này là: $3!$.

Xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** Các môn tự nhiên xếp đều trên 5 ngăn (mỗi ngăn một môn tự nhiên). Khi đó có hai khả năng xảy ra là:
  - Sinh – Hóa – Toán – Lý – Anh
  - Anh – Lý – Toán – Hóa – Sinh

  Lúc này mỗi ngăn chỉ chứa 2 cuốn của tự nhiên nên có thể đặt thêm ba môn Xã hội vào bất kỳ 3 ngăn liên tiếp trong 5 ngăn đó là (1,2,3); (2,3,4) và (3,4,5). Vậy trường hợp này có: $2 \times 3 \times 3! = 36$ (cách).
- **Trường hợp 2:** Có 2 môn tự nhiên nằm ở ngăn 2. Khi đó có 4 khả năng xảy ra là:
  - Anh (ngăn 1) – Lý, Sinh (ngăn 2) – Toán (ngăn 3) – Hóa (ngăn 4)
  - Hóa (ngăn 1) – Lý, Sinh (ngăn 2) – Toán (ngăn 3) – Anh (ngăn 4)
  - Sinh (ngăn 1) – Hóa, Anh (ngăn 2) – Toán (ngăn 3) – Lý (ngăn 4)

- ✮ Lý (ngăn 1) – Hóa, Anh (ngăn 2) – Toán (ngăn 3) – Sinh (ngăn 4)

  Khi đó tổ hợp Xã hội chỉ được xếp vào 3 ngăn liên tiếp là (3,4,5) để đảm bảo ngăn 5 không trống. Vậy trường hợp này có: $4 \times 1 \times 3! = 24$ (cách).

- **Trường hợp 3:** Có một cặp tự nhiên nằm ở ngăn 4. Trường hợp này là cách làm đối xứng của trường hợp 2 nên có 24 (cách).
- **Trường hợp 4:** Có hai cặp môn tự nhiên cùng nằm ở ngăn 1 và ngăn 2. Khi đó có 2 khả năng xảy ra là:
  - ✮ Lý, Sinh (ngăn 1) – Hóa, Anh (ngăn 2) – Toán (ngăn 3)
  - ✮ Hóa, Anh (ngăn 1) – Lý, Sinh (ngăn 2) – Toán (ngăn 3)

  Khi đó tổ hợp Xã hội chỉ được xếp vào 3 ngăn liên tiếp là (3,4,5). Vậy trường hợp này có: $2 \times 1 \times 3! = 12$ (cách).
- **Trường hợp 5:** Có hai cặp môn tự nhiên cùng nằm ở ngăn 4 và ngăn 5. Đây là cách làm đối xứng với trường hợp 4 nên có 12 (cách).

Suy ra tổng số cách xếp sách ở các trường hợp là: $36 + 24 + 24 + 12 + 12 = 108$ (cách).

Vậy để xếp 16 cuốn sách theo yêu cầu sẽ có:

$$T = (4!)^3 \times (2!)^2 \times 108 = 5\,971\,968 \text{ (cách)}.$$

Khi đó: $\dfrac{T}{864} = 6912$.